УДК 512.552.1

ПРО БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ

Ю. В. Яременко

Розглянуто властивості бірядних кілець.

There we describe the property of biserial rings.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Елемент $e^2=e\in A$ називається *ідемпотентом* кільця A. Два ідемпотенти e і f називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Кільце A називається *локальним*, якщо в нього всього один максимальний правий ідеал.

Ідемпотент $e\in A$ називається *локальним ідемпотентом*, якщо кільце eAe локальне.

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. Тоді $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=$ $=\sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через a_{ij}. Будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [1,с.31].

Твердження 1. *Якщо* $1=e_1+\ldots+e_n$ *- розклад одиниці кільця A , то* $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ *– розклад кільця A в пряму суму правих (лівих) ідеалів* e_iA (Ae_i).

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів є лінійно впорядкованою.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем*.

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно є напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Модуль M називається *нетеровим,* якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Модуль M називається *артиновим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить мінімальний елемент.

Кільце A називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Радикалом Джекобсона R кільця A називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Кільце A називається *напівдосконалим,* якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [2].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 1. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли* $1 \in A$ *розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Теорема 2. [3]. *Будь-яке напівдосконале кільце A однозначно розкладається в скінченний прямий добуток нерозкладних кілець, тобто якщо* $A = B_1 \times \cdots \times B_s = C_1 \times \cdots \times C_t$ *два таких розклада, то* $s = t$ *і існує підстановка* σ *чисел* $\{1, \ldots, s\}$ *така, що* $B_i = C_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Модуль M називається *бірядним*, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + K_2 = M$, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ – нуль, або простий модуль [4].

Напівдосконале кільце A називається *бірядним кільцем*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірядний [4].

Лема 1. *Фактормодуль головного бірядного модуля – бірядний.*

Д о в е д е н н я: Ясно, що фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивний. Нехай M головний бірядний модуль, K_1 *і* K_2 ланцюгові модулі, сума яких є найбільший власний підмодуль в M (M містить найбільший підмодуль). Якщо M-довільний підмодуль модуля M, який не співпадає з K_1+K_2

(в противному випадку доведення тривіальне), то в силу дистрибутивності модуля M, $N = N \cap (K_1 + K_2) = N \cap K_1 + N \cap K_2$, а з цього слідує, що $(K_1 + K_2)/N \cong K_1/K_1 \cap N \oplus K_2/K_2 \cap N$, де доданки в прямій сумі - ланцюгові модулі. Лема доведена.

З цієї леми випливає наступна теорема:

Теорема 3. *Факторкільце бірядного справа (зліва) кільця А бірядне справа (зліва). Отже, факторкільце бірядного кільця бірядне.*

Теорема 4. [4]. *Напівдосконале кільце А бірядне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли радикал будь-якого головного правого (лівого) А-модуля є сума двох ланцюгових підмодулів K_1 та K_2 таких, що $K_1 \cap K_2$ або нульовий, або простий модуль і з того, що X_a і $У_a$ довільні циклічні підмодулі в K_1 і K_2 відповідно, які не співпадають з $K_1 \cap K_2$ слідує $Xa/Xr \cong Ya/Yr (Ax/Rx \cong Ay/Ry)$.*

Теорема 5. *Нехай е – довільний ідемпотент бірядного кільця А. Тоді еАе являється бірядним кільцем.*

Доведення. Розглянемо головний правий A–модуль $P = fA$. Ясно, що будь-який головний eAe–модуль має вигляд: $Pe = fAe$, де $e = f + f^{/}$ (f – локальний ідемпотент кільця A). Так як $Rad\ eAe = eRe$ [5, с. 24], а $eRe = fRe \oplus f^{/}Re$, $eAe =$ $= fAe \oplus f^{/}Ae$, то $Rad\ eAe = Rad\ fAe \oplus Rad\ f^{/}Ae$ [6, с.213]. Отже, $Rad\ fAe = fRe$. Покажемо, що fAe є бірядним eAe–модулем. Перевіримо, що fAe – дистрибутивний модуль. Так як $(M + N)e = Me + Ne$ і $(M \cap N)e = Me \cap Ne$, то для будь-яких підмодулів M, N і L дистрибутивного модуля P маємо: $(Me+Ne \cap Le=$ $=[(M + N)e] \cap Le = [(M + N) \cap L]e = (M \cap L + N \cap L)e = (M \cap L)e + (N \cap L)e =$ $= Me \cap Le + Ne \cap Le$. Очевидно, що fRe найбільший підмодуль в fAe, тому досить перевірити, що fRe представляється у вигляді суми двох ланцюгових підмодулів, перетин яких нуль або простий модуль.

Оскільки у нас $PR = K_1 + K_2$, причому $K_1 \cap K_2$– нульовий, або простий модуль в P, то $fRe = K_1e + K_2e$, де K_1e і K_2e ланцюгові модулі над кільцем eAe, тому, що ланцюговими є модулі K_1 і K_2 [7]. Якщо $K_1 \cap K_2 = 0$, то $K_1e \cap K_2e = 0$. Якщо ж $K_1 \cap K_2 = u$ – простий A–модуль, то $K_1e \cap K_2e = ue$. Ясно, що якщо ue

нульовий, або простий *eAe*–модуль, то все доведено. Припустимо, що це не так, тобто існує нетривіальний *eAe*–модуль *ve*, такий, що $ve \subset ue$. Але тоді $(ve, v(1-e))$ – ненульовий підмодуль в *u*, що суперечить його простоті. Отже, оскільки K_1e і K_2e – ланцюгові модулі, *ue* буде найменшим ненульовим підмодулем в *fRe*.

Мінором n-го порядку кільця *A* називається кільце ендоморфізмів *B* скінченно–породженого проективного *A*–модуля, який розкладається в пряму суму *n*–нерозкладних модулів [8].

Із теореми 5 маємо:

Твердження 2. *Кожний мінор бірядного кільця є бірядним кільцем.*

Теорема 6.[4]. *Локальне бірядне кільце є ланцюговим.*

Напівдосконале кільце *A* з радикалом Джекобсона *R* називається *зведеним,* якщо *A/R* є прямим добутком тіл.

За теоремою Моріти [9] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця *A* в пряму суму головних *A*-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце *A* розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проективних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$.

Модуль *P* називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля *M* на модуль *N* $(\varphi : M \to N)$ і для будь-якого гомоморфізму $\psi : P \to N$ існує гомоморфізм $h: P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$.

Підмодуль *N* модуля *M* називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля *X* модуля *M*.

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля *M*, якщо існує епіморфізм $\varphi: P \to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ - косуттєвий підмодуль в *P*.

Нехай *A* – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона *R*. $P_1,\dots,P_S$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні *A*-модулі. Позначимо $P(P_iR)$ – проективне накриття модуля P_iR. Тоді

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}} \quad (i,j = 1, \ldots, s).$$

Поставимо у відповідність модулям $P_1,\ldots,P_s$ точки $1,\ldots,s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерова справа напівдосконалого кільця A [10].

Наступні теореми характеризують сагайдаки нетерових бірядних кілець.

Теорема 7 [5,c.50]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця A:

(а) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(б) A/R^2 *нерозкладне в прямий добуток кілець;*

(в) сагайдак кільця A зв'язний.

Теорема 8 [11]. *Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді із кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок, в кожну точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому із однієї точки в другу (можливо й співпадаючу з першою) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, який задовольняє ці умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого являється цей граф.*

Лема 2 [11]. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Ідеал P кільця A називається *первинним*, якщо він власний і для будь-яких двох ідеалів I_1 і I_2 із включення $I_1 I_2 \subset P$ випливає, що або $I_1 \subset P$, або $I_2 \subset P$.

Кільце A називається *первинним*, якщо нульовий ідеал являється первинним (це рівносильно тому, що добуток будь-яких двох ненульових ідеалів ненульовий).

Цоколь – сума всіх мінімальних підмодулів модуля, тобто простих модулів.

Теорема 9. *Нетерове бірядне нерозкладне кільце з нульовим цоколем є первинним напівланцюговим кільцем.*

Д о в е д е н н я. Ясно, що кільце A з радикалом Джекобсона R можна вважати зведеним. Покажемо, що якщо кільце A має нульовий цоколь, то для довільного ідемпотента $e\in A$ цоколь кільця eAe нульовий. Будемо доводити це індукцією по числу попарно неізоморфних головних A – модулів.

Нехай $A=P_1\oplus\ldots\oplus P_s$ – розклад кільця A в пряму суму головних A – модулів, $1=e_1+\ldots+e_s$ – відповідний розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $e=e_1+\ldots+e_{s-1}$, $f=e_s$, $eAe=A_1$, $fAf=A_2$, $eAf=Y$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_i, $(i=1,2)$. Так як кільце A зведене, то за твердженням 10.1 [5]

$$R=\begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$$

Припустимо, що цоколь кільця eAe відмінний від нуля. Нехай U – простий A_1 – модуль, що лежить в eAe. Покладемо $\bar{U}=(U,UX)$. Ясно, що $\bar{U}$ - ненульовий циклічний A – модуль. Покажемо, що $\bar{U}R^2=0$. Дійсно, $\bar{U}R=(0,UX)$, а $\bar{U}R^2=(0,UXR_2)$. За теоремою 2 [11] $e_iXe_sR_2= e_iRe_iXe_s$, $(i=1,\ldots,s-1)$. Тому $XR_2\subset R_1X$ і $UXR_2\subset UR_1X=0$, так як R_1 – радикал кільця A_1, а U – простий A_1 – модуль. Значить, цоколь кільця eAe дорівнює нулю і за припущенням індукції для довільного ідемпотента g, що розкладається в суму $t\leq s-1$ локальних попарно ортогональних ідемпотентів, цоколь кільця gAg дорівнює нулю. Аналогічно твердження доводиться для лівих цоколів.

Покажемо тепер, що кільце A напівланцюгове. Нехай $P=e_tA$ – головний модуль, і із точки сагайдака, що відповідає модулю P, виходять дві стрілки в точки i та j ($i\neq j$ за теоремою 8). Тоді $P(PR)=P_i\oplus P_j$ і $PR=K_1+K_2$, де K_1 і K_2 – ланцюгові модулі, причому $P(K_1)=P_i$, $P(K_2)=P_j$. За лемою 2 [11] $K_1e_i\neq 0$ і $K_2e_j\neq 0$. За теоремою 2 [11] усі $A_{pq}=e_pAe_q$ відмінні від нуля $(p,q=1,\ldots,s)$, так як у противному випадку кільце $\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{pmatrix}$ має ненульовий цоколь.

Розглянемо $K_1e_iA=(K_1e_iA_{i1},\ldots, K_1e_iA_{ii},\ldots, K_1e_iA_{is})$. Припустимо, що $K_1A_{im}=0$. Тоді кільце $\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{im} \\ A_{mi} & A_{mm} \end{pmatrix}$ має ненульовий цоколь.

Тому $K_1A_{ip}\neq 0$ і також $K_2A_{jp}\neq 0$ при $p=1,\ldots,s$. Тоді $K_1A_{ip}\cap K_2A_{jp}=0$ при усіх p. Знову в кільці A є ненульовий цоколь. Тому із кожної точки сагайдака виходить не більше однієї стрілки і за лемою 2 кільце A напівланцюгове справа. Аналогічно доводиться, що воно напівланцюгове зліва. За теоремою 2.11 [12] кільце A, що задовольняє умові теореми, є первинним напівланцюговим кільцем. Теорема доведена.

Цікавою є теорема, яка встановлює зв'язок між бірядними і напівланцюговими нетеровими кільцями:

Теорема 10 [13]. *Якщо A – нетерове бірядне кільце, у якого n попарно неізоморфних головних модулів, то в A існує такий ідеал I, що факторкільце A/I напівланцюгове, і степінь нільпотентності ідеала I не перевищує $n+1$.*

Напівдосконале кільце A називається кільцем *дистрибутивного модульного типу*, якщо довільний правий скінченно зображуваний A-модуль напівдистрибутивний, тобто пряма сума дистрибутивних модулів.

В роботах [11, 14-16] описані мінори 2-го, 3-го та 4-го порядку нетерових бірядних кілець, а в [17] - мінори 3-го порядку кілець дистрибутивного модульного типу. Ці результати використані при доведенні теореми:

Теорема 11 [18]. *Нетерове напівдосконале дистрибутивного модульного типу кільце – бірядне.*

ПОСИЛАННЯ

[1] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. (1980). *Конечномерные алгебры.* – К.: Вища школа.

[2] Bass H. (1960). Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 95, 466-488.

[3] Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. (1993). Полусовершенные кольца и их колчаны. *Сб. «Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры».* – К.: Ин-т математики, 438-456.

[4] Кириченко В.В., Костюкевич П.П. (1986). Бирядные кольца. *Укр. мат. журнал.* 38, № 6, 718-723.

[5] Кириченко В.В. (1981). Кольца и модули. – К: Из-во Киев. ун-та

[6] Каш Ф. (1981). Модули и кольца. – М.: Мир.

[7] Дрозд Ю.А. (1975). Об обобщенно однорядных кольцах. *Мат. заметки,* 18, №5, 705-710.

[8] Drozd Yu. A. (1971). Minors and reduction theorems. *Coll Math. Soc. J. Bolyai*. 6, 173-176.
[9] Morita K. (1958). Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*. 6, 83-142.
[10] Кириченко В.В. (1976). Обобщенно однорядные кольца. *Мат. сб.* 99, № 4, 559-581.
[11] Кириченко В.В., Яременко Ю.В. (1988). Нетеровы бирядные кольца. *Укр. мат. журнал.* 40, №4, 435-440.
[12] Кириченко В.В. (1975). Обобщенно однорядные кольца. *Препр. АН Украины (75.1).* – К.: Ин-т математики.
[13] Яременко Ю.В. (1989). Про нетерові бірядні кільця. *Вісник Київського університету. Математика і механіка.* 31, 133-138.
[14] Яременко Ю.В. (2002). Мінори нетерових бірядних кілець. *Наукові записки КДПУ. Фізико-математичні науки*. 43, 83-90.
[15] Яременко Ю.В. (2001). Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком. *Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки*. 1, 67-74.
[16] Яременко Ю.В., Демченко Ю.М. (2004). Нетерові бірядні кільця з сильнозв'язним сагайдаком. *Наукові записки КДПУ. Математичні науки*. 57, 100-108.
[17] Яременко Ю.В. (1998). Мінори нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу. *Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки.* 2, 159-168.
[18] Yaremenko Yu.V. (1997). Noetherian semiperfekt rings of distributive module type. *Mathematychni Studii.* 8, № 1, 3-10.