УДК 519.1751

МНОЖИНИ $R_{4,\theta}$ ГАМІЛЬТОНОВО РОЗКЛАДНИХ ГРАФІВ

К. М. Шевченко

Гамільтоново розкладні графи [1] є разом з тим і ейлеровими [2, т. 7.1(3)]. В [3] доведено існування нескінченних множин $R_{2k,\theta}$ [4], які складаються з гамільтоново розкладних графів. У кожній такій множині будь-який граф не найменшого порядку $v+1$ є графом $\theta(H,F)$ [3], де H – деякий граф порядку v з тієї ж множини $R_{2k,\theta}$. В [3] для $k=2$ описано побудову нескінченної послідовності (H_i), яка є множиною $R_{4,\theta}$, і в якій є лише по одному графу кожного порядку $v \geq 5$. Описане також правило побудови ізоморфізму графа G довільного порядку на граф з (H_i) або доведення, що G не ізоморфний графу з (H_i).

Цікавим є питання, чи кожен гамільтоново розкладний граф входить в деяку нетривіальну (що містить графи різних порядків) множину $R_{2k,\theta}$, і якими графами множини $R_{2k,\theta}$ породжуються.

Нижче розглядаються 2*k*-регулярні графи лише для $k=2$.

Щоб побудувати граф $\theta(H,F)$, у графі H порядку v виконується підрозбиття кожного ребра з деякої паросполуки F розміру 2 однією вершиною; потім дві нові вершини топологічно склеюються, утворивши вершину a_{v+1} графа $H' = \theta(H,F)$.

Щоб отримати з графа H' знову граф H, досить розклеїти вершину a_{v+1} на дві вершини степеня 2 і замінити ребром кожен ланцюг довжини 2 з вершиною степеня 2 посередині. Якщо невідомий гамільтонів розклад графа H', то утворений таким чином граф H визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. Але якщо задано гамільтонів розклад графа H', то вершині a_{v+1} інцидентні по два ребра з кожної компоненти розкладу. Розклеївши a_{v+1} на дві вершини, кожна з яких інцидентна двом ребрам з однієї й тієї ж компоненти розкладу, і замінивши ці два ребра одним ребром з компоненти з тим же номером, отримаємо єдиний граф H і його гамільтонів розклад.

Описане вище перетворення графа H' в H можна здійснити й так: видалити з H' зірку з центром a_{v+1}, а потім приєднати до графа $H' \setminus (a_{v+1})a_1a_2a_3a_4$ [1] відповідну паросполуку F розміру 2. Якщо задано гамільтонів розклад графа H', то в графі $H' \setminus (a_{v+1})a_1a_2a_3a_4$ є лише дві вершини, кожна з яких інцидентна одному ребру з першої компоненти розкладу графа H' (їх з'єднаємо ребром (якщо вони несуміжні), яке вважаємо ребром з першої компоненти) і дві вершини, кожна з яких інцидентна одному ребру з другої компоненти розкладу графа H' (їх з'єднаємо ребром (якщо вони несуміжні), яке вважаємо ребром з другої компоненти). Отриманий таким чином гамільтоново розкладений граф H однозначно визначається графом H', його гамільтоновим розкладом і вершиною a_{v+1}. Введемо позначення $H = \theta^{-1}(H', a_{v+1})$.

Розглянемо гамільтоново розкладений граф H порядку $v > 7$. Видалити з H зірку $(a_v)a_1a_2a_3a_4$ завжди можливо, якою б не була будова графа H і нумерація його вершин. Але приєднати паросполуку вказаним вище чином до графа $H \setminus (a_v)a_1a_2a_3a_4$ не завжди можливо.

Позначимо через G_v підграф, породжений оточенням [5] вершини a_v графа H. G_v – граф порядку 4. Існує 11 неізоморфних графів порядку 4.

Для скорочення записів будемо завжди вважати, що H – регулярний граф степеня 4, «розклад» означає «гамільтонів розклад графа», C і C' – «компоненти цього розкладу» або просто «компоненти». В доведеннях не розглядаються випадки, коли C і C' міняються місцями, бо доведення в цих випадках аналогічні попереднім. Крім того, без пояснень пропускаються випадки, очевидно неможливі з таких основних причин: якщо в графі H є ребро (a_i, a_j), то в C або в C' є цикл C_t, $3 \le t < v$, або деяка вершина інцидентна трьом ребрам з C або з C', що неможливо. Для особливих випадків є пояснення. Також очевидно, що доведення не залежать від нумерації вершин, тому позначаємо через $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ оточення вершини a_v, вважаємо, що $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $a_6 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, бо на малюнках вже зображено всі ребра графа G_v оточення вершини a_v.

Кожен випадок визначається графом $G = G_v \cup (a_v) a_1 a_2 a_3 a_4$. В ньому вершина a_v має степінь 4, G_v – один з графів порядку 4. В більшості з цих 11 випадків літерами а), б),... позначено варіанти розкладу.

В доведеннях лем 2, 3 доводиться існування такої вершини a графа H, що існує граф $\theta^{-1}(H, a)$. В лемі 2 $a_v = a$. В доведенні леми 3, якщо $a_v \neq a$, то або поблизу вершини a_v знаходиться вершина $a_i = a$ або знайдеться така вершина a_j, граф оточення якої розглянуто в іншому випадку.

Лема 1. *Граф G_v не ізоморфний ні K_4 ні K_4^-.*

Д о в е д е н н я. 1. Якщо припустити, що $G_v \cong K_4$, то $H \cong K_5$, бо кожен гамільтоново розкладний граф зв'язний. Але за умовою $v > 7$.

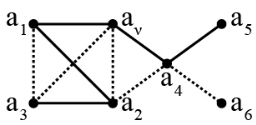
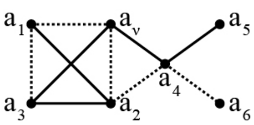
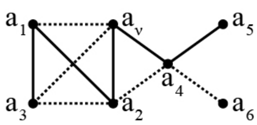
2. Припустимо, що $G_v \cong K_4^-$. Тоді $G = G_v \cup (a_v) a_1 a_2 a_3 a_4 \cong K_5^-$. G має 3 вершини степеня 4 і дві вершини a_i, a_j степеня 3. Нехай $(a_i, a_{i'})$, $(a_j, a_{j'})$ – ребра графа H, які не належать до його підграфа G. Граф $H \setminus \{(a_i, a_{i'}), (a_j, a_{j'})\}$ незв'язний. Одна його компонента G має 5 вершин, а всього в графі H $v > 7$ вершин. Але тоді граф H не може бути гамільтоново розкладним. Справді, якщо з гамільтоново розкладеного графа видалити 2 ребра, які належать до однієї компоненти його розкладу, то, оскільки друга компонента містить усі вершини графа, утворений граф H не може бути незв'язним; якщо ж видалені ребра належать до різних компонент, то після їх видалення з кожної компоненти залишається ланцюг, який містить усі вершини графа. Утворений граф і в цьому випадку не може бути незв'язним.

Лема 2. *Якщо* $G_v \cong \overline{K}_4$, то існує гамільтоново розкладений граф $\theta^{-1}(H, a_v)$.

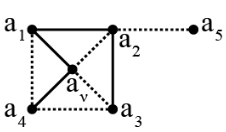
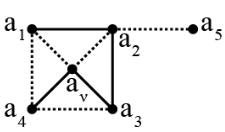
Д о в е д е н н я. $H\setminus(a_v)a_1a_2a_3a_4$ має 4 вершини степеня 3. Вони складають оточення вершини a_v в H. Серед них є 2 вершини, кожна з яких інцидентна одному ребру з *C*. З'єднаємо їх ребром (це завжди можливо, бо G_v – порожній граф), яке разом з рештою ребер з *C*, які є в $H\setminus(a_v)a_1a_2a_3a_4$, складе першу компоненту розкладу графа $\theta^{-1}(H,a_v)$. Аналогічно, з'єднаємо вершини степеня 3 щойно утвореного графа ребром, яке з рештою ребер з C' утворить другу компоненту розкладу графа $\theta^{-1}(H,a_v)$. Таким чином побудовано граф $\theta^{-1}(H,a_v)$ і його гамільтонів розклад.

Лема 3. *Якщо в графі H є хоча б одна вершина a_i така, що граф G_i її оточення не ізоморфний графу $K_3\cup K_1$, то в H знайдеться і така вершина a, що існує гамільтоново розкладений граф $\theta^{-1}(H,a)$.*

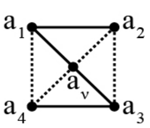
Д о в е д е н н я. Позначимо через a_v будь-яку вершину графа H, для якої $G_v \ncong K_3\cup K_1$.

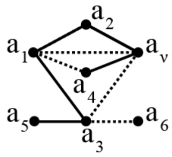
1. $G_v\cong\overline{P}_3$. а)  б)  в) 

Різні варіанти розкладу зображено на малюнках, а доведення в усіх випадках однакові. $a\notin\{a_v,a_1,a_2,a_3\}$. Нехай $(a_4,a_5)\in C$, $(a_4,a_6)\in C'$. В H немає ребер (a_v,a_5), (a_2,a_6). Тому $a_4=a$.

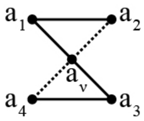
2. $G_v\cong C_4$. а)  б) 

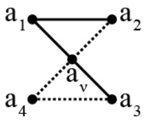
У випадках а), б) доведення однакові. $a\notin\{a_v,a_1,a_3\}$. Нехай $(a_2,a_5)\in C'$. В H немає ні ребра (a_v,a_5) ні ребра (a_1,a_3). Тому $a_2=a$.

в)  Якщо $P_3=[a_1a_va_3]\in C$, $P_3'=[a_2a_va_4]\in C'$ (або навпаки), то $a_v=a$. Інші випадки неможливі.

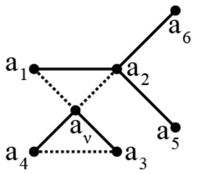
3. $G_v \cong Z_3$. 

$a \notin \{a_v, a_1, a_2\}$. Нехай $(a_3, a_5) \in C$, $(a_3, a_6) \in C'$. В H немає ні ребра (a_1, a_5) ні ребра (a_v, a_6). Тому $a_3 = a$.

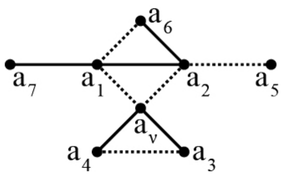
4. $G_v \cong \overline{C}_4$. а) 

б) 

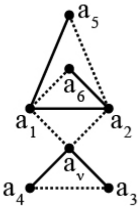
$a_v = a$.

в) 

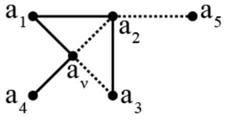
$a_v \neq a$. Нехай $(a_2, a_5) \in C'$, $(a_2, a_6) \in C$. В H немає ребра (a_v, a_5). Якщо в H немає і ребра (a_1, a_6), то $a_2 = a$.

г) 

$(a_1, a_6) \in C'$. Тоді $a \notin \{a_v, a_2\}$. Нехай $(a_1, a_7) \in C$. $a_7 \neq a_6$, бо $(a_1, a_6) \in C'$, $(a_1, a_7) \in C$. Якщо $a_7 \neq a_5$, то, оскільки в H немає ні ребра (a_v, a_6) ні ребра (a_2, a_7), то $a_1 = a$.

д) 

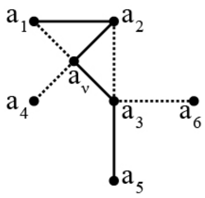
Нехай виконуються умови г), але $a_7 = a_5$. $a \notin \{a_v, a_1, a_2\}$. Граф G_1 оточення вершини a_1 ізоморфний графу Z_3, бо a_5 і a_6 несуміжні. Цей випадок розглянуто в 3.

5. $G_v \cong P_3 + K_1$. а) 

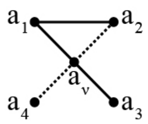
$a_v \neq a$. Нехай $(a_2, a_5) \in C'$. В H немає ні ребра (a_v, a_5) ні ребра (a_1, a_3). Тому $a_2 = a$.

б)

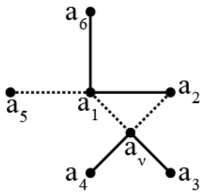
$a_v = a$.

в) 

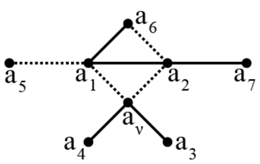
$a \notin \{a_v, a_2\}$. Нехай $(a_3, a_5) \in C$, $(a_3, a_6) \in C'$. В H немає ні ребра (a_v, a_5) ні ребра (a_2, a_6). Тому $a_3 = a$.

6. $G_v \cong K_2 + K_1 + K_1$. а) 

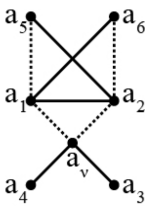
$a_v = a$.

б) 

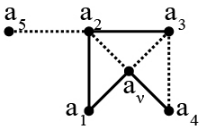
$a_v \neq a$. Нехай $(a_1, a_5) \in C'$, $(a_1, a_6) \in C$. В H немає ребра (a_v, a_5). Якщо в H немає і ребра (a_2, a_6), то $a_1 = a$.

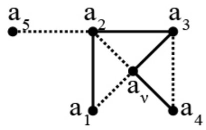
в) 

Нехай виконуються умови б), але $(a_2, a_6) \in C'$. Тоді $a \notin \{a_v, a_1\}$. Нехай $(a_2, a_7) \in C$, $a_7 \neq a_5$. В H немає ні ребра (a_v, a_6) ні ребра (a_1, a_7). Тому $a_2 = a$.

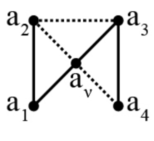
г) 

Нехай виконуються умови в), але $a_7 = a_5$.В H немає ребра (a_5, a_6). Тому граф G_1 оточення вершини a_1 ізоморфний Z_3 (випадок 3).

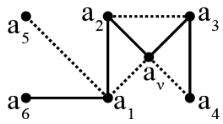
7. $G_v \cong P_4$. а) 

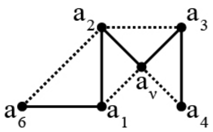
б) 

В а), б) доведення однакові. $a \notin \{a_v, a_3\}$. Нехай $(a_2, a_5) \in C'$. В H немає ні ребра (a_v, a_5) ні ребра (a_1, a_3).Тому $a_2 = a$.

в) 

$a_v = a$.

г)  $a \notin \{a_v, a_2, a_3\}$. Нехай $(a_1, a_5) \in C'$, $(a_1, a_6) \in C$. В H немає ребра (a_v, a_5). Якщо в H немає і ребра (a_2, a_6), то $a_1 = a$.

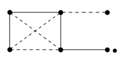
д)  Нехай в H є ребро $(a_2, a_6) \in C'$. Тоді $a \notin \{a_v, a_1, a_2, a_3\}$. Перевірка, чи не буде $a_4 = a$, аналогічна г), де йшлося про a_1. Якщо і для всіх наступних вершин: a_6 і т.д., буде випадок д), то граф H має підграф:

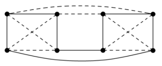
 Оскільки H є графом скінченного порядку, а також регулярним степеня 4, то вершини a_i, a_j мають бути суміжними (як і a_k, a_t а також a_k, a_j). Але ребро (a_i, a_j) не може належати ні до C ні до C', бо в обох випадках в C або в C' є елементарний цикл, довжина якого менша v, чого не може бути в гамільтоново розкладеному графі. Отже, якщо H існує, то на деякому кроці буде випадок г).

Лема 4. *Якщо для кожної вершини графа H підграф, породжений її оточенням, ізоморфний графу* $K_3 + K_1$, *то в H немає вершини a, для якої існував би граф* $\theta^{-1}(H, a)$.

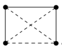
Д о в е д е н н я. Справді, до графа $K_3 + K_1$ не можна приєднати ніякої паросполуки розміру 2, щоб отримати звичайний граф порядку 4.

Лема 5. *Існують графи, для яких виконуються умови леми* 4.

Наприклад, умови леми 4 виконуються для кожної замкнутої мережки [6] порядку $4t$, $t = 2, 3, \ldots, m, \ldots$ з періодом .

 – найменша з таких мережок $(t = 2)$.

Назвемо *основним* будь-який гамільтоново розкладний граф, для кожної вершини якого підграф, породжений її оточенням, ізоморфний графу $K_3 + K_1$, а також графи K_5, T_6, $\overline{C}_7$.

Якщо в будь-якому розкладеному на гамільтонові цикли C і C' графі H порядку t замінити кожну вершину на розкладений на два гамільтонові ланцюги граф K_4: ; кожен кінець a ребра з цикла C графа H склеїти з кінцем відповідного гамільтонового ланцюга графа K_4, яким замінено вершину a; кінець a другого ребра з C – з другим кінцем того ж ланцюга; те саме зробити і для C', то отримаємо основний гамільтоново розкладений граф порядку $4t$. (Не має значення, до якого з двох кінців гамільтонового ланцюга графа K_4 приклеїти кінець a ребра графа H, бо перестановка кінців гамільтонового ланцюга графа K_4 є автоморфізмом графа K_4).

Теорема 1. *Довільний гамільтоново розкладний* 4*-регулярний граф належить до деякої множини* $R_{4,\theta}$*, в якій графом найменшого порядку є деякий основний гамільтоново розкладний граф.*

Теорема 2. *Довільний гамільтонів розклад графа з будь-якої множини* $R_{4,\theta}$ *є продовженням* [3] *деякого гамільтонового розкладу основного гамільтоново розкладного графа з цієї ж множини.*

Доведення теорем 1, 2 складається з доведень лем 1–4.

ПОСИЛАННЯ

[1] Донец Г. А., Петренюк А. Я. Экстремальные покрытия графов. Кіровоград, *«Комбінаторні конфігурації»,* 2009.

[2] Харари Ф. *Теория графов.* М., «Мир», 1973.

[3] Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 11-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 15-16 квітня 2011 р., м. Кіровоград, ст. 194-198.

[4] Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 6-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 13-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 13-14 квітня 2012 р., м. Кіровоград.

[5] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов.* М., «Наука», 1990.

[6] Приходькін М. О., Петренюк А. Я. Про чарівну силу графів-мережок, *Матеріали 3-го та 4-го Міжвузівських науково-практичних семінарів «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»,* 19-20 квітня, 18-19 жовтня 2007 р., м. Кіровоград, ст. 71-72.