УДК 519.53+517.987

БЕСКОНЕЧНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ МЕР С БАЗИСНЫМ СВОЙСТВОМ

В.А. Романов

Доведено, що якщо міра в повному сепарабельному метризовному топологічному векторному просторі має властивість базисності, то існує розкладання цієї міри нанескінченне число взаємно сингулярних компонент, які теж мають властивість базисності.

It is proved that if a measure in a complete separable metrizable topological vector space has the basic property then for this measure there exists a distribution on infinite number mutually singular components that also have the basic property.

1. Введение. Известно [1], что в задачах для обобщенных функций в топологических векторных пространствах бывает весьма полезным переход от рассмотрения функций множества к изучению функций точки. Поскольку осуществить такой переход позволяет наличие мер со свойством базисности [2], то представляет интерес исследование мер, имеющих указанное свойство. Под базисным разложением базисной меры понимаем ее разложение в сумму конечного или счетного числа взаимно сингулярных мер, также имеющих свойство базисности. Простейшими примерами мер с базисным свойством служат невырожденные гауссовские меры в гильбертовом пространстве. В работах [3], [4] было установлено, что каждые две такие меры всегда либо эквивалентны, либо взаимно сингулярны, а потому во втором из этих случаев суммы указанных мер представляют собой базисные разложения. В работе [5] было доказано, что можно получить базисное разложение, имея вначале только одну невырожденную гауссовскую меру (или, в более общей ситуации, меру-произведение со свойством базисности). В связи с этим представляет интерес вопрос об аналогичной разложимости произвольных мер с базисным свойством (не обязательно совпадающими с мерами-произведениями).

2. Постановка задачи. Пусть X - полное сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство. Под *мерами* в пространстве X понимаем вполне конечные счетно-аддитивные функции множества, определенные на сигма-алгебре борелевских подмножеств и принимающие неотрицательные значения.

Определение 1. Меру М в пространстве Х называем *базисной* или, по-другому, *имеющей свойство базисности*, если для каждого банахова пространства У и каждой векторной меры Ф конечной полной вариации, определенной на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства Х и принимающей значения в пространстве У, векторную меру Ф можно задать как предел некоторой слабо сходящейся последовательности векторных мер, имеющих М своим базисом, то есть представимых как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру М.

Определение 2. Меру с базисным свойством называем *базисно разложимой (бесконечно базисно разложимой),* если ее можно представить в виде суммы двух (соответственно, счетного числа) взаимно сингулярных мер, имеющих базисное свойство.

Замечание 1. В работе [2] было доказано, что для базисности меры необходимо и достаточно, чтобы ни на одном непустом открытом множестве она не принимала нулевого значения.

Цель статьи состоит в доказательстве бесконечной базисной разложимости произвольной базисной меры в пространстве Х.

3. Результаты работы.

Лемма 1. *Пусть М - безатомическая мера, определенная на некоторой сигма-алгебре подмножеств некоторого множества, $(B_к)$ - последовательность множеств положительной меры. Тогда существует такая последовательность попарно непересекающихся множеств $E_к$ положительной меры, что для каждого натурального к множество $E_к$ включается в $B_к$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что последовательность значений меры М на множествах $B_к$ монотонно (в широком смысле) убывает. Обозначим упомянутые значения через $c_к$. Поскольку мера безатомическая, то в каждом $B_к$ можно выделить такое подмножество $A_к$, мера которого равна $c_к/3^к$. Зададим теперь множество $E_к$ как разность между $A_к$ и объединением всех последующих множеств $A_{к+р}$.

Тогда множество $E_к$ не пересекается с $A_{к+p}$, а тем более с $E_{к+p}$. Следовательно, все множества $E_к$ попарно не пересекаются между собой. Ясно также, что значение меры M на множестве $E_к$ не меньше разности между числом $c_к/3^к$ и суммой ряда $\sum_{p=1}^{\infty} c_{к+p}/3^{к+p}$. Поскольку $c_{к+p}$ не превосходит $c_к$, то отсюда следует положительность чисел $M(E_к)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть M - безатомическая мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств сепарабельного метрического пространства A и принимающая положительные значения на всех непустых открытых множествах. Тогда в пространстве A можно выделить два таких дизъюнктных борелевских подмножества A_1 и A_2, что на их пересечениях с каждым непустым открытым множеством мера тоже принимает неотрицательные значения.*

Доказательство. Поскольку метрическое пространство A сепарабельно, то в в нем существует счетная база, состоящая из некоторых открытых шаров $B_к$. Множества этой базы имеют положительную меру, а потому к ним можно применить лемму 1. Пусть $E_к$ - соответствующие дизъюнктные подмножества этих шаров, также имеющие положительную меру. Поскольку мера M безатомическая, то каждое из $E_к$ можно разбить на две дизъюнктные части $T_к$ и $H_к$, мера каждой их которых положительна. Зададим теперь A_1 как объединение всех $T_к$ и A_2 как объединение всех $H_к$. Поскольку произвольное непустое открытое множество включает в себя некоторый элемент базы, то его пересечение с каждым из A_1 и A_2 имеет положительную меру. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть X - полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек, M - мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающая положительные значения на всех непустых открытых множествах. Тогда в X можно выделить два таких дизъюнктных борелевских подмножества X_1 и X_2, что на* *их пересечениях с каждым непустым открытым множеством мера тоже принимает положительные значения.*

Доказательство. Разложим меру M в сумму взаимно сингулярных диффузной меры C (принимающей нулевое значение на всех конечных и счетных множествах) и дискретной меры D, сосредоточенной на некотором не более чем счетном множестве E. Поскольку каждая мера в полном сепарабельном пространстве является радоновской, то из диффузности меры C следует ее безатомичность.

Пусть E* – множество предельных точек множества E, на котором сосредоточена дискретная мера D, G - дополнение E* до всего X. Так как E* замкнуто, то G открыто.

Если Ф – непустое открытое подмножество множества G, то оно содержит некоторую точку x, которая не может быть предельной для E, а потому найдется такая входящая в Ф проколотая открытая окрестность B точки x, в которой нет ни одной точки из E. Но тогда D(B)=0. Поскольку пространство X не имеет изолированных точек, то множество B непусто, а потому значение меры M на этом открытом множестве больше нуля. Поскольку же M=C+D, то и значение меры C на B положительно. Но тогда значение C на множестве Ф тем более положительно. Поскольку множество E не более чем счётно, то значение диффузной меры C на разности множеств Ф и E по-прежнему больше нуля.

Зададим теперь подпространство A как разность множеств G и E. Из вышесказанного следует, что на всех непустых открытых подмножествах подпространства A диффузная мера C принимает положительные значения. Так как мера C безатомична на всем X, то она безатомична и на A. Поэтому к мере C и подпространству A можно применить лемму 2. Следовательно, в A можно выделить два таких дизъюнктных борелевских подмножества A_1 и A_2, что на их пересечениях с каждым непустым открытым подмножеством множества G мера C принимает положительные значения.

Поскольку пространство X сепарабельно, то оно имеет счетную базу, а потому к нему можно применить лемму 3 работы [5]. Следовательно, множество E можно разбить на два таких дизъюнктных множества E_1 и E_2, для каждого из которых множество его предельных точек совпадает с множеством предельных точек для всего E.

Зададим теперь множество X_1 как объединение множеств A_1 и E_1, а X_2 – как объединение A_2 и E_2.

Пусть теперь Φ – непустое открытое множество в пространстве X. Если оно включено в G, то на его пересечениях с A_1 и A_2 диффузная мера C принимает положительные значения. Но тогда на его пересечениях с X_1 и X_2 мера M (равная $C+D$) тем более принимает положительные значения.

Если же Φ не включено в G, то в Φ существует точка из E^*, то есть являющаяся предельной точкой множества E, а потому и предельной точкой каждого из E_1 и E_2. Но тогда на пересечениях множества Φ с E_1 и E_2 дискретная часть D меры M принимает положительные значения. Но тогда на пересечениях с X_1 и X_2 вся мера M (равная $D+C$) тем более принимает положительные значения. Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Условие леммы 3 об отсутствии изолированных точек пространства X существенно. Действительно, если X имеет изолированную точку x, то соответствующее одноточечное множество Φ открыто, а потому из положительности значений M на пересечениях Φ с множествами X_1 и X_2 следует, что точка x принадлежит каждому из X_1 и X_2, что для дизъюнктных множеств невозможно.

Лемма 4. *Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек, M – мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающая положительные значения на всех непустых открытых множествах. Тогда для любого натурального $k \geq 2$ существует разложение M на k взаимно сингулярных компонент, принимающих положительные значения на непустых открытых множествах, а также существует разложение M на счетное семейство* *компонент с положительными значениями на непустых открытых множествах.*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 – дизъюнктные множества, фигурирующие в лемме 3. Присоединив дополнение их объединения к одному из них (например, к X_1), можно без ограничения общности считать, что всё пространство X разбивается на указанные множества X_1 и X_2. Тогда в качестве компонент M_1 и M_2 разложения меры M можно взять произведения индикаторов множеств X_1 и X_2 на M. Таким образом, при к=2 утверждение леммы справедливо.

Для остальных натуральных к доказательство легко проводится методом математической индукции. Заключительное утверждение леммы вытекает из того факта, что при каждом разложении M на к взаимно сингулярных компонент с положительными значениями на непустых открытых множествах последнюю из этих компонент можно разложить ещё на две такие компоненты, а затем можно продолжить этот процесс до бесконечности.

Теорема 1. *Пусть M – неотрицательная мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств полного сепарабельного метризуемого топологического векторного пространства X и имеющая свойство базисности. Тогда для каждого натурального к меру M можно разложить в сумму к взаимно сингулярных мер, каждая из которых имеет свойство базисности, а также меру M можно разложить в сумму счётного семейства взаимно сингулярных мер с указанным свойством.*

Доказательство. Согласно теореме 1 работы [2], в полном сепарабельном метризуемом топологическом векторном пространстве X неотрицательная мера имеет свойство базисности тогда и только тогда, когда она принимает положительные значения на всех непустых открытых множествах. Поскольку же в указанном пространстве не существует изолированных точек, то для завершения доказательства остаётся применить лемму 4.

Замечание 3. В классе всех полных сепарабельных метризуемых топологических пространств (для которых топология – не обязательно векторная), утверждение теоремы 1 не выполняется. Действительно, если пространство состоит из счетного числа точек и наделено дискретной метрикой, то вероятностная мера с положительными значениями на всех точках имеет свойство базисности, но не допускает разложения на взаимно сингулярные базисные компоненты, так как значения таких компонент на каждом одноточечном множестве должны оставаться положительными, что несовместимо со взаимной сингулярностью.

ССЫЛКИ

[1] Фомин С.В. (1968). Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье. *Успехи математических наук.* 23, № 2, 215-216.

[2] Романов В.А. (2007). Слабые базисы векторных мер. *Украинский математический журнал.* 59, № 10, 1436-1440.

[3] Feldman J. (1958). Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. *Pacific Journal of Mathematics.* 8, № 4, 699-708.

[4] Гаек Я. (1958). Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса. *Чехословацкий математический журнал.* 8, 610-618.

[5] Романов В.А. (2013). Меры-произведения со свойством базисности. *Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки.* 72, 41-52.