

УДК 519.21

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НОСІЇВ РОЗПОДІЛІВ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

О.П. Макарчук

Обраховано розмірність Хаусдорфа-Безиковича носія функції розподілу I-роду однієї випадкової величини з незалежними п'ятірковими цифрами.

Been calculated Hausdorff-Besicovitch dimension carrier distribution function of I-sort of a random variable with independent p'yatirkovymy numbers..

Означення 1. Спектром $S_{F_\xi} = S_\xi$ функції розподілу F випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту F_ξ , тобто

$$S_{F_\xi} = \{x : F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0 - \forall \varepsilon > 0\}.$$

Означення 2. Точковим спектром розподілу випадкової величини з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина D_ξ його атомів, тобто сукупність всіх точок, в яких $F_\xi(x)$ стрибки.

Означення 3. Носієм розподілу випадкової величини ξ з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина

$$N_\xi = N_{F_\xi} = \left\{ x : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} > 0 \right\}.$$

Очевидно, що носій $N_\xi = \{x : F'_\xi \neq 0\}$ є множиною точок "суттєвого росту" функції розподілу $F_\xi(x)$ і $D_\xi \subseteq N_\xi \subseteq S_\xi$. Якщо функція розподілу $F_\xi(x)$ неперервна і міра Лебега носія N_ξ рівна нулю, то розподіл є сингулярним; якщо тільки міра Лебега N_ξ відмінна від нуля, то $F_\xi(x)$ містить абсолютно неперервну компоненту. Носіями сингулярних розподілів випадкових величин є множини з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0 < 1$, причому їх H_1 -міра Хаусдорфа рівна нулю, а розподіли з абсолютно неперервною компонентою мають носії додатної міри Лебега (отже, $\alpha_0(N_\xi) = 1$), тому близькість сингулярного розподілу до розподілу, що містить абсолютно неперервну компоненту, можна оцінювати по близькості розмірності Хаусдорфа-Безиковича носія розподілу до одиниці. Рівність розмірності одиниці не свідчить про те, що розподіл не є сингулярним. Останнє має місце лише тоді, коли H_1 -міра Хаусдорфа носія додатна.

Означення 4. Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, визначене рівністю

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E , де H_α -міра Хаусдорфа.

Побудуємо приклад сингулярного розподілу з аномальним спектром та носієм.

Теорема 1. Нехай випадкова величина $\xi = \frac{\xi_1}{5} + \frac{\xi_2}{5^2} + \dots + \frac{\xi_n}{5^n} + \dots$, де ξ_n – незалежні випадкові величини, які мають розподіл:

ξ_n :

| | |
|---------------|---------------|
| 0 | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Виконуються рівності $\lambda(S_\xi) = 0, \alpha_0(N_\xi) = \log_5 2$?

Доведення.

За теоремою Джессена-Вінгнера ξ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або сингулярний.

Покажемо, що спектр є множиною чисел вигляду

$$A = \left\{ \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \dots + \frac{a_k}{5^k} + \dots \mid a_n \in \{0; 2\}, \forall n \in N \right\}$$

Нехай $x = \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_k}{5^k} + \dots, b_n \in \{0; 2\}, \forall n \in N$ і $\varepsilon > 0$, зрозуміло що для

$$\text{деякого } j \in N : l = \left[\frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_j}{5^j}; \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_j}{5^j} + \frac{2}{5^{j+1}} + \frac{2}{5^{j+2}} + \dots \right] \subset [x - \varepsilon; x + \varepsilon],$$

бо $l \rightarrow \{x\} (j \rightarrow \infty)$, тому

$$\begin{aligned} F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) &\geq P\left\{ \xi \in \left[\frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_j}{5^j}; \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_j}{5^j} + \frac{2}{5^{j+1}} + \frac{2}{5^{j+2}} + \dots \right] \right\} = \\ &= \prod_{k=1}^j \frac{1}{2} \prod_{k=j+1}^{\infty} P\{\xi_k \in \{0; 2\}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^j > 0 \Rightarrow x \in S_\xi \end{aligned}$$

Нехай $x = \frac{b_1}{5} + \frac{b_2}{5^2} + \dots + \frac{b_k}{5^k} + \dots \notin A, b_n \in \{0; 2\}, \forall n \in \{1, \dots, k-1\}, b_k \notin \{0, 2\}$

Тоді при $\varepsilon = \frac{1}{5^{k+2}} : F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) \geq P\{\xi \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon)\} = 0 \Rightarrow x \notin A$

Отже, $A \equiv S_\xi$.

Якщо, $x \notin A$ то зрозуміло, $F_\xi(x) = 0$, Якщо, $x \in A$ то зрозуміло,

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \dots = 0,$$

Отже, ξ не містить атомів а тому є неперервним.

Це також можна було довести з використанням теореми Леві, адже максимальний стрибок $\xi_n - 0.5$, нескінченний добуток яких рівний 0.

Як, відомо множина слабонормальних чисел за основою 5 має міру Лебега 1, а множина чисел $A \equiv S_\xi$ не містить в своєму п'ятірковому розкладі цифр 1,3,4 тому $\lambda(S_\xi) = 0$, а тому ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Для випадкових величин такого типу S_ξ і N_ξ співпадають.

Оскільки множину $A = \{ \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \dots + \frac{a_k}{5^k} + \dots \mid a_n \in \{0; 2\}, \forall n \in N \}$ можна представити у вигляді об'єднання двох множин

$$A_1 = \{ \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \dots + \frac{a_k}{5^k} + \dots \mid a_1 = 0, a_{n+1} \in \{0; 2\}, \forall n \in N \}$$
 та

$$A_2 = \{ \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \dots + \frac{a_k}{5^k} + \dots \mid a_2 = 0, a_{n+1} \in \{0; 2\}, \forall n \in N \},$$

кожна з яких подібна до A з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, то розмірність Хаусдорфа-

Безиковича є розв'язком рівняння

$$2\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = \log_5 2, \text{ тобто, } \alpha_0(N_\xi) = \log_5 2.$$

Побудуємо носій функції розподілу випадкової величини з заданими фрактальними властивостями

Теорема 2. Для довільного $a \in [0; 1]$ існує випадкова величина ξ , така що $\alpha_0(N_\xi) = a$, де α_0 – розмірність Хаусдорфа-Безиковича, N_ξ - носій випадкової величини ξ .

Доведення.

Розглянемо окремо три випадки:

- 1) $a \in (0; 1)$
- 2) $a = 1$
- 3) $a = 0$

1) Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними Q_3 символами:

$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots}^{Q_3}$, де ξ_n – незалежні дискретно розподілені випадкові величини(символи), які мають наступні розподіли:

ξ_n :

| | | |
|---------------|---|---------------|
| 0 | 1 | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

також візьмемо $q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_1 = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, що можливо адже $q_0, q_2 \in (0;1)$

і $q_0 + q_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}} = 2^{1-\frac{1}{a}} < 2^0 = 1$.

Оскільки $P\{\xi_n = 1\} = 0$, то $\xi \in$, як відомо, (Турбин А.Ф, Працевытий Н.В Фрактальные множества, функции распределения) випадковою величиною типу Джессена-Вінтнера I-го роду, тобто $S_\xi = N_\xi$. S_ξ – представляє собою множину всіх реалізацій ξ , тобто множину чисел в яких у їх $Q_3 \in$ цифри 0 і 2, але немає цифри 1. S_ξ представляє собою самоподібну множину, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої співпадає з самоподібною розмірністю і \in

розв’язком рівняння $q_0^\alpha + q_2^\alpha = 1$, тобто $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}} = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{a} = 1$,

$\alpha = a$. (Працевытий М.В. Фрактальный підхід у дослідженнях сингулярних розподілів)

Отже, $\alpha_0(N_\xi) = \alpha_0(S_\xi) = a$.

Потрібно зазначити, що при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ $F_\xi(x)$ є функцією Кантора, а $S_\xi \equiv N_\xi$ – є множиною Кантора.

2) $a = 0$.

Побудуємо випадкову величину у якої носій є аномальним фракталом

Розглянемо випадкову величину $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n^2}}$, де ξ_n – незалежні дискретно розподілені випадкові величини, які мають розподіли

ξ_n :

| | |
|---------------|---------------|
| 0 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Покажемо, що $\lambda(S_\xi) = 0$, тоді $S_\xi \equiv N_\xi$. Дійсно $S_\xi = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{n^2}} \mid \varepsilon_n = 0 \vee 1, \forall n \in N \right\}$.

Нехай $x \in S_\xi$, $x = \Delta_{0,\varepsilon_1 0..0\varepsilon_2 0.. \varepsilon_3 .. \varepsilon_{n-1} 0.. \varepsilon_n 0.. \varepsilon_{n+1}}$ $k \in N$, тоді для деякого $n \in N$:

$n^2 \leq k \leq (n+1)^2$, маємо: $\frac{N_1(x, k)}{k} \leq \frac{n}{k} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, тобто $v_1(x) = 0$ і $v_0(x) = 1$,

тому $S_\xi \subset E[1;0]$, причому $\lambda(E[1;0]) = 0$ і $S_\xi \equiv N_\xi$.

За формулою Безиковича-Егглстона $\alpha_0(E[1;0]) = -\frac{\ln 1^1 \cdot 0^0}{\ln 2} = 0$, тобто

$$0 \leq \alpha_0(S_\xi) \leq \alpha_0(E[1;0]) = 0 \Rightarrow \alpha_0(N_\xi) = \alpha_0(S_\xi) = 0.$$

$$3) a = 1$$

Побудуємо випадкову величину у якої носій є суперфракталом

Нехай $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]$. Оскільки $\lambda\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = 0 \quad \forall n \in N$, то

$$\lambda(E) = 0.$$

Оскільки $E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right] \subset E$, то

$$\alpha_0(E) \geq \alpha_0\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = -\frac{\ln\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}}\right)}{\ln 2} \rightarrow -\frac{\ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\ln 2} = 1 \quad (n \rightarrow \infty,$$

тому $\alpha_0(E) = 1$.)

ПОСИЛАННЯ

- [1] Гонтаренко М.О. Спектри та носії випадкових величин // *VIII Всеукраїнська студентська наукова конференція "Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання"*, 17-18 квітня 2013 р., Ніжин. Матеріали конференції. Ніжин, 2013., 95 с.
- [2] Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Критерії сингулярності та абсолютної неперервності випадкової величини в термінах ймовірності суттєвого носія щільності // *Вісник НПУ імені М.П.Драгоманова*. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2002., Випуск 1. С.156-158.
- [3] Гончаренко Я.В. Згортки сингулярних розподілів ймовірностей // *Український математичний конгрес. Теорія ймовірностей і математична статистика*. Тези доповідей..Київ: ІМ НАНУ, 2001, С.8.