УДК 532.59

КАПІЛЯРНІ ХВИЛІ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

Ю.В. Гуртовий

Проведений аналіз дисперсійного співвідношення для двошарової системи на наявність гравітаційних і капілярних ефектів. Показано, що групова і фазова швидкість рівні, коли фазова швидкість досягає свого мінімуму. Знайдений взаємозв'язок між фазовою та груповою швидкостями для капілярних хвиль.

The analysis of the dispersion equation for a two-layer system for capillary and gravitational effects. It is shown that the phase and group velocities is equal when the phase velocity reaches its minimum. Found correlation between the group and phase velocities for capillary waves.

Вступ. Реальну гідродинамічну систему з плоскою межею між фазами можна розглядати так, ніби вона складається з двох шарів, розділених плоскою мембраною нульової товщини, що створює поверхневий натяг. Хвилі, властивості яких істотним чином визначаються силами поверхневого натягу, називають капілярними. Вони можуть збуджуватися або безпосереднім збуренням поверхні розділу, або шляхом нелінійної трансформації на гребенях гравітаційних хвиль. Капілярні хвилі спотворюють гладкість поверхні розділу та істотно впливають на процеси відбивання і розсіювання електромагнітних і акустичних хвиль поверхнею рідини, зокрема на її оптичні властивості

Постановка задачі. Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x,y,z), |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 < z < 0)\}$ і $\Omega_2 = \{(x,y,z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < h_2)\}$ у безрозмірному вигляді визначається системою

$$\nabla^2 \varphi_j \equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j (\, j = 1, 2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[(\vec{\nabla}\varphi_1)^2 - (\vec{\nabla}\varphi_2)^2] - T\left[1 + \alpha^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = \alpha\eta(x, y, z)$$

$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0$ при $z = -h_1$,

$\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0$ при $z = h_2$,

де $\alpha = a/L$ - коефіцієнт нелінійності, φ_i $(i = 1, 2)$ - потенціали швидкостей в рідких середовищах, η - відхилення поверхні контакту, $\rho = \rho_2/\rho_1$ - відношення густин рідин, T- поверхневий натяг.

Розв'язки та аналіз. В лінійному наближенні маємо розв'язки

$$\eta_1 = A\exp(i\theta) + \bar{A}\exp(-i\theta),$$

$$\varphi_{11} = -i\omega k^{-1}[A\exp(i\theta) - \bar{A}\exp(-i\theta)]\frac{\mathrm{ch}(k(h_1 + z))}{\mathrm{sh}(kh_1)},$$

$$\varphi_{21} = i\omega k^{-1}[A\exp(i\theta) - \bar{A}\exp(-i\theta)]\frac{\mathrm{ch}(k(h_2 - z))}{\mathrm{sh}(kh_2)},$$

де A - обвідна хвильового пакету, $\theta = kx_0 - \omega t_0$, – хвильове число центру хвильового пакету та ω - частота центру хвильового пакету. Підставляючи розв'язки в останнє з рівнянь системи, отримуємо дисперсійне рівняння для капілярних хвиль [1]

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\mathrm{cth}(kh_1) + \rho\,\mathrm{cth}(kh_2)}.$$

На рис.1 зображено графік залежності $\omega = \omega(\mathrm{k})$ для таких параметрів гідродинамічної системи: $h_2 = 1,\ h_1 = 2,\ \rho = 0.5,\ T = 0.1$. Всі величини подані в безрозмірному вигляді. Як видно з характеру дисперсійної діаграми, спочатку крива веде себе подібно до $k^{1/2}$, а потім перегинається і змінює закон залежності на $k^{3/2}$. Це вказує на те, що при достатньо великих довжинах хвиль визначальними є гравітаційні ефекти, а при малих довжинах основну роль відіграють капілярні сили.

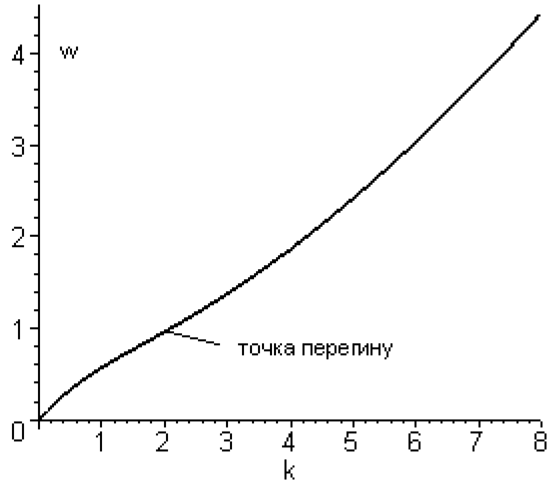

Рис.1. Дисперсійна діаграма для двошарової гідродинамічної системи

Фазова і групові швидкості капілярно-гравітаційних сил відповідно дорівнюють

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1-\rho+Tk^2}{\mathrm{k}(\mathrm{cth}(kh_1)+\rho\,\mathrm{cth}(kh_2))}}$$

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2Tk^2 + \frac{\omega^2}{k}\left[\mathrm{cth}\,kh_1 - kh_1\left(1-\mathrm{cth}^2\,kh_1\right) + \rho\left(\mathrm{cth}\,kh_2 - kh_2\left(1-\mathrm{cth}^2\,kh_2\right)\right)\right]}{2\omega\left(\mathrm{cth}\,kh_1 + \rho\,\mathrm{cth}\,kh_2\right)}$$

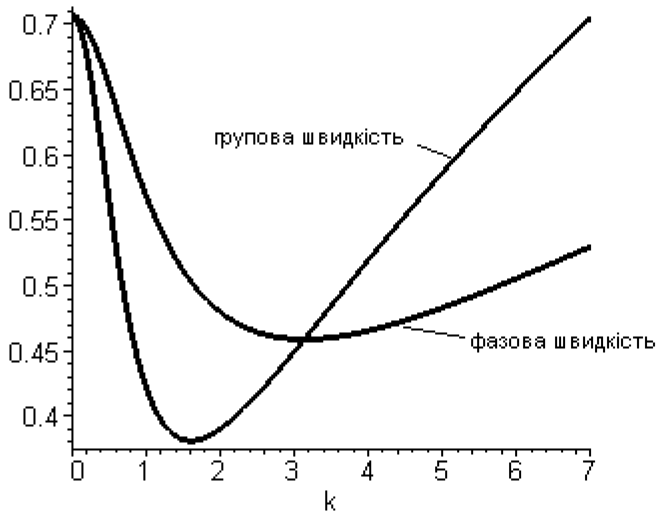

Рис. 2. Графіки залежності фазової і групової швидкості від хвильового числа

Якщо проаналізувати графіки залежності фазової і групової швидкості від хвильового числа (рис.2) , отримаємо декілька цікавих висновків. По-перше, для малих хвильових чисел, тобто для великих довжин хвиль, фазова швидкість більша за групову, що вказує на перевагу гравітаційних ефектів в цьому діапазоні. По-друге, з ростом хвильового числа швидкості зменшуються до певного мінімуму, після якого починається зростання, причому групова швидкість спадає і зростає більш інтенсивно. Слід відмітити, що перетин графіків відбувається на локальному мінімумі фазової швидкості. Тобто групова і фазова швидкість є рівними в той момент, коли фазова швидкість досягає свого мінімуму. Це можна підтвердити і аналітично: $\upsilon' = \dfrac{\omega_k' k - \omega}{k^2} = 0$ тоді, коли $\upsilon_g = \upsilon$. Якщо аналізувати криві правіше перетину, то групова швидкість стає більшою за фазову, що вказує на аномальну дисперсію для малих довжин хвиль, тобто для хвиль, які утворюються за допомогою капілярних ефектів.

Якщо хвильове число є досить великим, тоді дисперсійне співвідношення можна записати у вигляді, яке є справедливим для капілярних хвиль

$$\omega^2 = Tk^3 \big/ (cth(kh_1) + \rho cth(kh_2))$$

Відповідно фазова та групові швидкості для капілярних хвиль у двошаровій рідині дорівнюють

$$c = \sqrt{Tk \big/ (cth(kh_1) + \rho cth(kh_2))} \quad ,$$

$$c_g = \omega_k' = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{3Tk^2(cth(kh_1) + \rho cth(kh_2)) + Tk^3\left(\dfrac{h_1}{sh^2(kh_1)} + \dfrac{\rho h_2}{sh^2(kh_2)}\right)}{(cth(kh_1) + \rho cth(kh_2))^2} \right)$$

Якщо виконати деякі перетворення, то можемо отримати співвідношення, яке пов'язує фазову та групову швидкості капілярних хвиль

$$c_g = \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{Tk^3}\left(\dfrac{h_1}{sh^2(kh_1)} + \dfrac{\rho h_2}{sh^2(kh_2)}\right)}{2(cth(kh_1) + \rho cth(kh_2))^{3/2}} .$$

Отже, капілярні хвилі володіють аномальною дисперсією. Проведений аналіз граничних випадків останніх формул в порівнянні з одношаровою системою [2]. Показано, що для капілярних хвиль при фіксованих товщинах шарів фазова та групова швидкості зростають при зменшенні довжини хвилі, причому групова швидкість завжди більша за фазову. Відношення товщин шарів майже не впливає на дисперсійні ефекти.

ПОСИЛАННЯ

[1] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распостранения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // *Прикладна гідромеханіка.* – 2005. – Том 7(79), № 1. - С. 80-89.2.

[2] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* Пер. с англ. В.В. Жаринова. Под ред. А.Б. Шабата. – М.: Мир, 1977. – 624 с.