УДК 517.5

ШВИДКІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ ПІДСУМОВУВАННЯ ЇХ РЯДІВ ТЕЙЛОРА

М.В. Гаєвський

An asymptotic equality for the least upper bounds of the deviations of triangular summation methods for Taylor series of functions in the class H_∞^ψ.

Получено асимптотические равенства для точных верхних граней уклонений треугольных методов суммирования рядов Тейлора от функций из класса H_∞^ψ.

Введемо такі позначення: $D=\{z\in \mathrm{C}:|z|<1\}$, $T=\{z\in \mathrm{C}:|z|=1\}$,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k, z\in D \tag{1}$$

– розклад в ряд Тейлора-Маклорена аналітичної в крузі D функції, де $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Розглянемо множину H_∞ аналітичних в D функцій з нормою

$$\|f\|_{H_\infty}=\|f\|_\infty=\sup_{z\in D}|f(z)|<\infty,$$

а UH - одинична куля в H_∞, тобто для $f\in UH$ $\|f\|_\infty=\sup_{z\in D}|f(z)|\le 1$.

Нехай $\{\psi(k)\}$, $k=0,1,2,\ldots$ - послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)|\ne 0$, $k\in \mathrm{N}$ і $\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0$, $f\in H_\infty$ з рядом Тейлора виду (1). Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞ для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}a_k z^k, z\in D \tag{2}$$

є рядом Тейлора функції $f^\psi\in UH$. Вперше подібний клас функцій був розглянутий Шейком [1].

Нехай задано трикутну матрицю комплексних чисел $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}, n\in \mathrm{Z}_+, k=0,1,\ldots,n;$ $\lambda_k^{(n)}=0$ для $n<k$. Кожній функції $f\in H_\infty^\psi$ з рядом Тейлора

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k, z\in D$ поставимо у відповідність поліном $U_n(f;\Lambda;z)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k z^k, z\in \overline{D}.$

Тоді кажуть, що задано лінійний метод підсумовування рядів Тейлора.

О.М. Швецова [3] розглянула загальні методи підсумовування рядів Тейлора і отримала такий результат:

Нехай $n \in \mathrm{N}$, $\psi:(0,\infty)\to \mathrm{X}$ *- локально абсолютно неперервна функція на* $[n+1,\infty)$, $\psi(k)\neq 0, k\in \mathrm{N}$, $\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0$ *та*

$$\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)=\int_{n+1}^{\infty} \operatorname{vraisup}_{u\geq t}|\psi'(u)|dt<\infty, \tag{3}$$

і для функції φ *виконуються наступні умови:* $\varphi:[0,1]\to \mathrm{X}$ *абсолютно неперервна на* $[0,1]$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$ *і* $\widetilde{V}_0^1((1-\varphi(\cdot))\psi((n+1)\cdot)<\infty$.

Тоді $\sup\limits_{f\in H_\infty^\psi}\| f(z)-\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi\Big(\dfrac{k}{n+1}\Big)a_k z^k\|_\infty=$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\left|(1-\phi(1-\frac{k}{n+1}))\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)\right|}{k}+\theta_1\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)+\theta_2\widetilde{V}_0^1((1-\varphi(\cdot))\psi((n+1)\cdot),$$

де $|\theta_i|\leq M, i=1,2.$

В даній роботі буде отримано оцінку величини $\|f(z)-U_n(f;\Lambda;z)\|_\infty$ класі аналітичних функцій H_∞^ψ, де на послідовність ψ накладемо слабші за (3) умови. Будемо говорити, що послідовність ψ задовольняє умови Боаса-Теляковського [2], якщо:

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0; \tag{4}$$

$$V(\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\psi(k)|<\infty, \tag{5}$$

де $\Delta\psi(k)=\psi(k)-\psi(k+1)$;

$$B(\psi)=\sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\Delta\psi(k-m)-\Delta\psi(k+m)}{m}\Big|<\infty. \tag{6}$$

Для скорочення запису покладемо $\lambda_k^{(n)}=\lambda_k$ та

$$V_1^n(\psi)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta\psi(k)|; B_1^n(\psi)=\sum_{k=2}^{2n}\Big|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\Delta\psi(k-m)-\Delta\psi(k+m)}{m}\Big|.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція* $f \in H_{\infty}^{\psi}$, $n \in \mathrm{N}$, *послідовність* ψ *задовольняє умови* **(4)-(6),** $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}, k = 0,1,\ldots,n$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ *для* $n < k$, – *деяка послідовність комплексних чисел, така що* $V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) < \infty$ **.** *Тоді*

$$\sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \left\| f(z) - U_n(f, \Lambda, z) \right\|_{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|(1-\lambda_{n+1-k}^{(n)})\psi(n+1-k) - \psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big).$$

Умовам теореми задовольняють багато класичних середніх (Валле-Пуссена, Зигмунда тощо).

Якщо в теоремі 1 візьмемо $\lambda_k^{(n)} = 1$ при $k \le n$ та $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $n < k$, то отримаємо результат для частинних сум Тейлора $S_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, z \in D$:

Наслідок 1. *Нехай* $\psi(k) \in \mathrm{C}$, $k = 0,1,2,...$ - *послідовність для якої виконуються умови (4)-(6) та* $|\psi(k)| \ne 0$.*Тоді для довільної функції* $f \in H_{\infty}^{\psi}$ *та будь-якого* $n \in N$ *справедливе співвідношення*

$$\sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \| f(z) - S_n(f,z) \|_{\infty} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big),$$

де O(1) – величина рівномірно обмежена по n *та* f.

Наведемо тепер результат для середніх типу Валле-Пуссена $V_p^n(f,z)$, де матриця Λ задається наступним чином:

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le k \le n-p, \\ 1 - \dfrac{k+p-n}{p+1}, & \text{при } n-p+1 \le k \le n. \end{cases}$$

Наслідок 2. *Нехай* $f \in H_{\infty}^{\psi}$, $n \in \mathrm{N}$, *дійсна та уявна частини послідовності* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *є монотонно спадними до 0,* $V_p^n(f,z) = \sum_{k=0}^{n-p} a_k z^k + \sum_{k=n-p+1}^{n}\left(1 - \dfrac{k+p-n}{p+1}\right) a_k z^k$ *– середні Валле Пуссена. Тоді*

$$\sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \| f(z) - V_p^n(f,z) \|_{\infty} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{n} \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(|\psi(n-p+1)|)$$

Дійсно, мають місце наступні оцінки $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta\psi_1(k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta\psi_1(k) = \psi_1(n+1)$

та (доведення див. [4, с. 102])

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{\Delta\psi_1(k+n+1-l)-\Delta\psi_1(k+n+1+l)}{l}\right|\le M\psi_1(n+1),$$

тому $V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)=O(|\psi(n-p+1)|)$.

Оскільки

$$\lambda_{n-k+1}^{(n)}=\begin{cases}1, & \text{при } p+1\le k\le n+1,\\ \dfrac{k-2}{p+1}, & \text{при } 0\le k\le p,\end{cases}$$

тому остаточно отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_k)\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1)|}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{\left|\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1)-\dfrac{k-2}{p+1}\psi(n+1-k)\right|}{k}+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}=$$

$$=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}+O\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\left|\sum_{n+1-k}^{n+k}\Delta\psi(\nu)\right|}{k}+|\psi(n-p+1)|\right)=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}+O\big(|\psi(n-p+1)|\big).$$

ПОСИЛАННЯ

[1] Scheik J. T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc., 17:6, 1966. – P. 1238–1243.

[2] Теляковский С. А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР, 109, 1971 – С. 65-97

[3] Швецова А. М. Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге.// Вісник Харків. нац. ун–ту. Серія ”Математика, прикладна математика і механіка”, Т.475, 2000. – С. 208–217.

[4] Задерей П. В. Об уклонении $(\psi,\overline{\beta})$-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье. – Варшава, 1990. С. 96-110 - (Preprint Institute of mathematics Polish Academy of Sciences, XXXIV semester in Banach center theory of real functions; 482)