УДК 517.5

ОЦІНКА ІНТЕГРАЛА МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА НА ОДИНИЧНОМУ КОЛІ

М. В. Гаєвський[1], Н.М. Задерей[2], Г.Д. Нефьодова[2]

[1]Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка,
[2]Національний технічний університет України
«Київський політехнічний іститут імені Ігоря Сікорського»
mgaevskij@gmail.com, zadereypv@ukr.net

В роботі отримано асимптотичну формулу для інтеграла від модуля многочлена із комплексними коефіцієнтами на одиничному колі, причому коефіцієнти якого задовольняють умові квазіопуклості. Даний результат є поширенням результатів С.О. Теляковського та інших з дійсного випадку на комплексний.

In the paper we obtain an asymptotic formula for an integral from a module of a polynomial with complex coefficients on a unit circle, and whose coefficients satisfy the condition of quasiconvex. This result is the distribution of the results of S.A. Telyakovskii and others from the real case to the complex.

В работе получено асимптотическую формулу для интеграла от модуля многочлена с комплексными коэффициентами на единичной окружности, причем коэффициенты которого удовлетворяют условию квазиопуклости. Данный результат является распространением результатов С.А. Теляковского и других из действительного случая на комплексный.

Вступ. В теорії наближень важливу роль відіграють величини типу

$$\int_0^{2\pi} |K_n(x)|\,dx, \tag{1}$$

де $K_n(x)$ може бути чи тригонометричним поліномом степеня n над полем R, чи алгебраїчним поліномом над полем C тощо.

Зазвичай перевірка умови (1) є трудомісткою, тому важливою є отримання оцінки величини (1) в термінах коефіцієнтів полінома $K_n(x)$.

Якщо коефіцієнти многочлена з дійсними коефіцієнтами

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

задовольняють умови квазіопуклості, тобто $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 a_k|<\infty$ та $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 b_k|<\infty$ ($\Delta^2 c_k=\Delta c_k-\Delta c_{k+1}=c_k-2c_{k+1}+c_{k+2}.$), С. О. Теляковський [1] отримав співвідношення

$$\left|\int_0^{2\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|dx-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right|=A\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 a_k|+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 b_k|\right)$$

де A – деяка додатна стала, $\xi_k=\xi\left(b_k,\sqrt{a_{n-k}^2+b_{n-k}^2}\right)$, а функція $\xi(t,u)$ визначається так

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|t|, & де\ |u|\le|t|,\\ |t|\arcsin|\frac{t}{u}|+\sqrt{u^2-t^2}, & де\ |t|<|u|.\end{cases}$$

В роботі [2] можна ознайомитися із оглядом відомих результатів більш детально, крім того там отримано наступний результат: *Якщо коефіцієнти ряду* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_ke^{ikt}$ *задовольняють умови* $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0,$ існують такі числа A_k, що $|\Delta c_k|:=|c_k-c_{k+1}|\le A_k, k=0,1,2...,$ причому $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k|<\infty$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}<\infty,$ *то для інтеграла* $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_ke^{ikt}\right|dt$ *рівномірно відносно* $m=0,1,...,$ *справедлива асимптотична рівність*

$$I=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)\mathrm{I}_{m,k}(c)+2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}+O(T_m(A)),\ \text{де}$$

$\mathrm{I}_{m,k}(c):=\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-4\frac{|c_k|\cdot|c_{m-k}-c_{m+k}|}{(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)^2}\sin^2 t}\,dt$, а $T_m(A):=\sum\limits_{k=0}^{m}(k+1)|\Delta A_k|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|\Delta A_{k+m+1}|.$

Основні результати. В цій роботі ми отримаємо асимптотичну формулу для інтеграла модуля многочлена степеня n на одиничному колі за умови квазіопуклості його коефіцієнтів. Хоча отриманий результат є менш загальним ніж [2], але отриманий іншими методами та в деяких випадках отримане співвідношення є точнішим.

Нехай далі $K_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_ke^{ikx},$ розглянемо інтеграл $\int_0^{2\pi}|\sum\limits_{k=0}^{n}c_ke^{ikx}|\,dx.$

Теорема 1. Нехай $\rho_k=|c_k|,$ $\beta_k=\arg c_k,$ $t_n(x)=Re\sum_{k=0}^{n}c_ke^{ikx},$ $\tau_n(x)=Im\sum_{k=0}^{n}c_ke^{ikx},$ *тоді справедлива рівність*

$$\int_0^{2\pi}|\sum_{k=0}^{n}c_ke^{ikx}|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n}^{2n}\rho_{k-n}\cos(kx+\beta_{k-n})|\,dx+O\left(\frac{V_0^{2\pi}t_n+V_0^{2\pi}\tau_n}{n}\right),\qquad(1)$$

де $V_0^{2\pi}f$ *– повна варіація функції* f *на* $[-\pi,\pi]$.

Для доведення цієї теореми сформулюємо відому лему Фейера ([3] чи [4]): *якщо* $g(x)$ *та* $h(x)$ *є* $2\pi-$*періодичними функціями,* $\alpha\in R,$ *то для функції*

$$\varphi(x)=g(x)\cos(nx+\alpha)+h(x)\sin(nx+\alpha)$$

має місце наступна рівність

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{g^2(x)+h^2(x)}dx + O\left(\frac{V_0^{2\pi}g + V_0^{2\pi}h}{n}\right).$$

Доведення. Нехай

$$t_n(x) = Re\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \rho_k \cos(kx+\beta_k)$$

та

$$\tau_n(x) = Im\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \rho_k \sin(kx+\beta_k).$$

Покладемо в лемі Фейера $\alpha = 0,\ g(x) = t_n(x)$ та $h(x) = -\tau_n(x),$ тоді

$$\varphi(x) = t_n(x)\cos nx - \tau_n(x)\sin nx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \rho_k (\cos(kx+\beta_k)\cos nx - \sin(kx+\beta_k)\sin nx) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \rho_k \cos(kx+\beta_k+nx) = \sum_{k=n}^{2n} \rho_{k-n} \cos(kx+\beta_{k-n}).$$

Звідки і слідує теорема.

Теорему доведено.

Коли функції $t_n(x)$ та $\tau_n(x)$ є функціями обмеженої варіації, то з рівності (1) можна отримати асимптотичну формулу, в іншому випадку це не завжди можливо. В наступній теоремі буде отримано асимптотичну формулу норми алгебраїчного полінома на одиничному колі за умови, що $\{\rho_k \cos\beta_k\}$ та $\{\rho_k \sin\beta_k\}$ утворюють квазівипуклу послідовність дійсних чисел, що прямує до нуля. Нагадаємо, що послідовність $\{a_k\}$ є квазівипуклою, коли має місце $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty,$ де $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$

Теорема 2. Нехай послідовності $\{\rho_k \cos\beta_k\}$ *та* $\{\rho_k \sin\beta_k\}$ *прямують до нуля та є квазівипуклими, тобто*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2(\rho_k \cos\beta_k)| \le \infty \ \text{ та } \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2(\rho_k \sin\beta_k)| < \infty,$$

тоді має місце рівність

$$\int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}|\, dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{n-k+1} + \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k |\sin\beta_k|}{k+n} +$$

$$+O(|\rho_0|+\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1}(|\Delta^2(\rho_{k-1}\cos\beta_{k-1})|+|\Delta^2(\rho_{k-1}\sin\beta_{k-1})|))+O(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\rho_k|).$$

Доведення. Розглянемо інтеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n}^{2n}\rho_{k-n}\cos(kx+\beta_{k-n})|\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n}^{2n}(\rho_{k-n}\cos\beta_{k-n}\cos kx-\rho_{k-n}\sin\beta_{k-n}\sin kx)|\,dx.$$

Покладемо в асимптотичній формулі С.О. Теляковського [5, 6] $a_k=b_k=0$ при $k<n,$ $a_k=\rho_{k-n}\cos\beta_{k-n}$ та $b_k=\rho_{k-n}\sin\beta_{k-n}$ при $n\le k\le 2n,$ отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n}^{2n}\rho_{k-n}\cos(kx+\beta_{k-n})|\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\xi(b_k,\sqrt{a_{2n-k+1}^2+b_{2n-k+1}^2})}{k}+O(|a_0|+\sum_{k=1}^{2n}\frac{k(2n-k+1)}{2n+1}(|\Delta^2a_{k-1}|+|\Delta^2b_{k-1}|))=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_{n-k+1}}{k}+\frac{\pi}{4}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\rho_{k-n}|\sin\beta_{k-n}|}{k}+$$

$$+O(|\rho_0|+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k(2n-k+1)}{2n+1}(|\Delta^2(\rho_{k-n-1}\cos\beta_{k-n-1})|+|\Delta^2(\rho_{k-n-1}\sin\beta_{k-n-1})|))$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{n-k+1}+\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k|\sin\beta_k|}{k+n}+$$

$$+O(|\rho_0|+\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1}(|\Delta^2(\rho_{k-1}\cos\beta_{k-1})|+|\Delta^2(\rho_{k-1}\sin\beta_{k-1})|)). \quad (2)$$

Знайдемо тепер оцінки для $V_0^{2\pi}t_n$ та $V_0^{2\pi}\tau_n$. Згідно властивостей функцій обеженої варіації маємо

$$V_0^{2\pi}t_n=V_{-\pi}^{\frac{-\pi}{n+1}}t_n+V_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}}t_n+V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}t_n,$$

тоді

$$V_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}}t_n=\int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}}|\sum_{k=0}^{n}k\rho_k\cos(kx+\beta_k)|\,dx\le$$

$$\le\int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}}|\sum_{k=0}^{n}k\rho_k\cos\beta_k\cos kx|\,dx+\int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}}|\sum_{k=0}^{n}k\rho_k\sin\beta_k\sin kx|\,dx\le\frac{4\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\rho_k. \quad (3)$$

Для оцінки величини $V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}t_n$, застосуємо оцінку С.О.Теляковського [6]

$$V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}t_n\le V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}(\sum_{k=0}^{n}k\rho_k\cos\beta_k\cos kx)+V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}(\sum_{k=0}^{n}k\rho_k\sin\beta_k\sin kx)\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |\rho_k| + O(\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\cos\beta_k)| + \sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\sin\beta_k)|) + O(\rho_{n+1}) \qquad (4)$$

Враховуючи, що $V_{-\pi}^{\frac{-\pi}{n+1}} t_n = V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t_n$, з (3) та (4) отримаємо, що

$$\frac{1}{n}V_0^{2\pi}t_n \le \frac{4\pi}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\rho_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\rho_k| +$$

$$+O(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\cos\beta_k)| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\sin\beta_k)|) + O(\frac{1}{n}\rho_{n+1}) =$$

$$+O(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\cos\beta_k)| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)|\Delta^2(k\rho_k\sin\beta_k)|) + O(\frac{1}{n}\rho_{n+1}) = O(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\rho_k|). \quad (5)$$

Аналогічно отримаємо оцінку величини

$$\frac{1}{n}V_0^{2\pi}\tau_n = O(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\rho_k| + O(\frac{1}{n})). \qquad (6)$$

Тоді склавши докупи (2), (5) та (6) отримаємо

$$\int_0^{2\pi}|\sum_{k=0}^{n}c_k e^{ikx}|\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{n-k+1} + \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k|\sin\beta_k|}{k+n} +$$

$$+O(|\rho_0| + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1}(|\Delta^2(\rho_{k-1}\cos\beta_{k-1})| + |\Delta^2(\rho_{k-1}\sin\beta_{k-1})|)) + O(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\rho_k|).$$

Що й треба було довести.

Теорему доведено.

ПОСИЛАННЯ

[1] Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 27:2, 1963 — С. 253-272

[2] Задерей П.В., Гаєвський М.В., Веремій М.А. Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є.// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, Вип. 1, 2017 – С. 10-17.

[3] Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 145, 1980 — С. 126–151.

[4] Fejer L. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen// J. reine und angew. Math., 138, 1910. — S. 22–53.

[5] Теляковский С. А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР, 109, 1971 — С. 65–97.

[6] Теляковский С. А. Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами. // Матем. сб., 186:11, 1995 — С. 111–122.