УДК 512.552.1

МІНОРИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ НЕТЕРОВИХ БАГАТОРЯДНИХ КІЛЕЦЬ

Ю. В. Яременко, Г. В. Шторфунова

Описано мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець.

The minors of orders 3 of noetherian multiserial rings are described.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Велике значення в структурній теорії кілець має те, що кільце можна розглядати як модуль над собою. Тоді праві (ліві) підмодулі кільця – це не що інше як праві (ліві) ідеали.

Рівність $1=e_1+\ldots+e_n$, будемо називати розкладом одиниці кільця A.

Елемент $e^2=e\in A$ називається і*демпотентом*.

Два ідемпотенти e і f називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Твердження 1 [1,с.9]. *Якщо* $1=e_1+\ldots+e_n$ *– розклад одиниці кільця* A*, то* $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_iA$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ *– розклад кільця* A *в пряму суму правих (лівих) ідеалів* e_iA (Ae_i).

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A. Тоді можна записати $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_iae_j$. Елементи із e_iAe_j позначимо A_{ij}. Отже, будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (A_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення матриць. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця* A [2, c.31]

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів є лінійно впорядкованою.

Модуль M називається *нетеровим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Кільце A називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Нехай A – довільне кільце, $e^2 = e \in A$, $1=e+f$. Тоді двосторонній пірсовський розклад кільця $A=\begin{pmatrix} eAe & eAf \\ fAe & fAf \end{pmatrix}$.

Для нетерових (артинових) кілець має місце теорема:

Теорема 1 [1,с.48]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільце eAe і fAf - нетерові, (артинові) справа, fAf – модуль eAf та eAe – модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконані для деяких ідемпотентів e, f∈A таких, що e+f=1, то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Радикалом Джекобсона R кільця A називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Кільце A називається *локальним*, якщо в нього всього один максимальний правий ідеал.

В цьому випадку цей ідеал є радикалом Джекобсона R кільця A. Тому у кільця A всього один максимальний лівий ідеал.

Ідемпотент $e \in A$ називається *локальним ідемпотентом*, якщо кільце eAe локальне.

Кільце A називається *напівлокальним*, якщо факторкільце $\overline{A} = A/R$ артинове справа.

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Напівлокальне кільце A називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [3].

Теорема 2 [1,с.33]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли* $1 \in A$ *розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Напівдосконале кільце A називається *зведеним,* якщо факторкільце A/R є прямим добутком тіл.

Згідно теореми Моріти [4] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму головних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$.

Підмодуль N модуля M називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля X модуля M.

Модуль P називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля M на модуль N ($\varphi : M \to N$) і для будь-якого гомоморфізму $\psi : P \to N$ існує гомоморфізм h: $P \to M$ такий, що $\psi = \varphi h$.

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля M, якщо існує епіморфізм φ: $P \to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ - косуттєвий підмодуль в P.

Теорема 3 [3] (Басс). *Наступні умови рівносильні для кільця A:*

(а) кільце A напівдосконале;

(б) будь-який циклічний A-модуль має проективне накриття.

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, P_1, …, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Тоді проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad (i,j = 1, \dots, s).$$

Співставимо модулям P_1, …, P_s вершини (точки) $1, \dots, s$ і з’єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $K(A)$.

Аналогічно визначається лівий сагайдак $K'(A)$ нетерового зліва напівдосконалого кільця A.

Відмітимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кілець, еквівалентних в сенсі Моріти. Очевидно, також, що $K(A)=K(A/R^2)$.

Напівдосконалі кільця та їх сагайдаки вивчалися у роботах [5-7].

Кільце називається *нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді добутку двох ненульових кілець.

Теорема 4 [8]. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця A:*

(а) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(б) A/R^2 нерозкладне в прямий добуток кілець;

(в) сагайдак кільця A зв'язний.

Модуль M називається *дистрибутивним,* якщо для будь-яких підмодулів K, L, N справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Теорема 5 [9]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля*.

Цоколь – сума всіх мінімальних підмодулів модуля, тобто простих модулів.

Лема 1[8]. *Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля e_iR/e_iR^2 (Re_i/R^2e_i) тоді і тільки тоді, коли $e_iR^2e_k$ ($e_kR^2e_i$) строго міститься в e_iRe_k (e_kRe_i).*

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним*, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \ldots, K_n$ (можливо і нульові) такі, що $K_1 + \ldots + K_n$ є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, – нуль або простий модуль [10].

Напівдосконале кільце A будемо називати *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [10].

Ясно , що можна розглядати і n-рядні тільки справа або зліва кільця. Часто, не уточнюючи n, n-рядне кільце називають багаторядним.

Зрозуміло, що при n =1 ми отримаємо напівланцюгові кільця, а при n = 2 – бірядні кільця.

Теорема 6 [10]. *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Теорема 7 [10]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Нагадаємо, що кільце називається *нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді добутку двох ненульових кілець.

Розглянемо нетерові багаторядні кільця. Охарактеризуємо сагайдаки багаторядних кілець.

Нагадаємо, що для нетерового багаторядного кільця *A,* згідно теореми 4, нерозкладність у прямий добуток кілець еквівалентна зв'язності його сагайдака.

Теорема 8 [10]. *Нехай A – нетерове n-рядне кільце. Тоді з будь-якої точки сагайдака кільця A виходить не більше n стрілок і в будь-яку точку сагайдака кільця A входить не більше n стрілок, причому з однієї точку в іншу (можливо, співпадаючу з вихідною) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, що задавольняє цим умовам, то існує n-рядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Нерозкладний проективний A-модуль P називається в точності *n-рядним*, якщо він дистрибутивний і його радикал PR – сума $K_1, \dots, K_n$ таких, що $K_i \cap K_j$ або простий, або нуль, $i \neq j$, $(i, j = 1, \dots, n)$, і для будь-якого i модуль K_i не міститься в $\sum_{j \neq i} K_j$.

Лема 2 [10]. *Нерозкладний проективний модуль P над багаторядним нетеровим кільцем A в точності m-рядний тоді і тільки тоді, коли з вершини сагайдака K(A), що відповідає модулю P, виходить рівно m стрілок.*

Лема 3. *Якщо із точки сагайдака нетерового багаторядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Теорема 9 [10]. *Нерозкладне нетерове напівдосконале багаторядне кільце A з нульовим цоколем є напівланцюговим первинним кільцем.*

Мінором n-го порядку кільця A називається кільце ендоморфізмів B скінченно–породженого проективного A-модуля, який розкладається в пряму суму n – нерозкладних модулів [11].

Твердження 2. *Кожний мінор n-рядного кільця є n-рядним кільцем.*

Д о в е д е н н я випливає з теореми 6, яка стверджує, що для довільного ідемпотента e n-рядного кільця A кільце eAe також n-рядне.

Мінори нетерових бірядних кілець розглядалися у роботах [12-14]. Мінори другого порядку нетерових багаторядних кілець розглядалися у роботах [10, 15].

Первинні сагайдаки напівспадкових багаторядних кілець розглядалися у роботі [16]. Багаторядні кускові області вивчалися у роботі [17].

Розглянемо зведені мінори третього порядку нетерових багаторядних кілець. Враховуючи теорему 8, будемо мати, з точністю до ізоморфізму, 86 сагайдаків побудованих на 3-х вершинах, а отже і 86 мінорів третього порядку нетерових многорядних кілець з умовами, які накладаються на їх компоненти.

Мінор третього порядку нетерового багаторядного кільця має вигляд:

$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, а його радикал Джекобсона $R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & R_3 \end{pmatrix}$, де

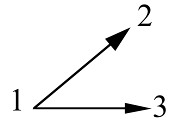
R_i– радикал Джекобсона кільця ϑ_i $(i = 1,2,3)$. Згідно з теоремами 3 та 6.1[18] ϑ_i – дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – ланцюговий лівий ϑ_i – модуль і ланцюговий правий ϑ_j – модуль.

Твердження 3 [19]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} – підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} – підмодулем в A_{ij}.*

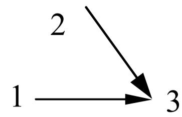
З теореми *3* випливає, що сагайдакам з трьома вершинами відповідають, як максимум, трирядні кільця.

Якщо в сагайдаку відкинути петлі, то він називається *базовим* [20, с.94].

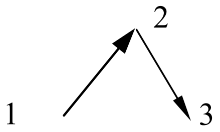
Згрупувавши мінори, які мають однаковий базовий сагайдак, отримаємо такі мінори нетерових n-рядних кілець:

1-6). 

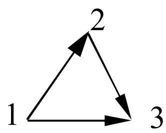
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

7-12). 

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

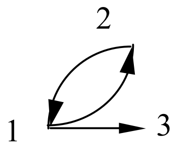
13-20). 

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

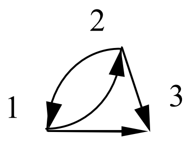
21-28). 

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad A_{12}A_{23} = 0.$$

Для кілець 1-28 ϑ_i $(i = 1,2,3)$ – тіло, якщо в точці i немає петлі, і ϑ_i – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, якщо в точці i є петля.

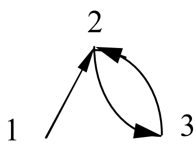
29-36). 

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix},$$ де $A_{23} = A_{21}A_{13}$, $R_1 = A_{12}A_{21}$, якщо в точці *1* немає петлі, $R_2 = A_{21}A_{12}$, якщо в точці *2* немає петлі і $R_2=0$ або $A_{23}=0$.

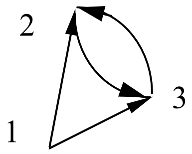
37-42). 

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix},$$ де $A_{12}A_{23} = 0$, $A_{21}A_{13} = 0$ і $R_1 = A_{12}A_{21}$, якщо в точці *1* немає петлі, $R_2 = A_{21}A_{12}$, якщо в точці *2* немає петлі.

Для кілець 29-42 ϑ_1 і ϑ_2 – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, ϑ_3 – тіло, якщо в точці *3* немає петлі, і ϑ_3–дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, якщо в точці *3* є петля.

43-50). 

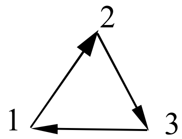
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix},$$ де $A_{13} = A_{12}A_{23}$, $R_2 = A_{21}A_{12}$, якщо в точці *2* немає петлі, $R_3 = A_{32}A_{23}$, якщо в точці *3* немає петлі, і $R_3=0$ або $A_{13}=0$.

51-56). 

$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $A_{12}A_{23}=0,\ A_{13}A_{32}=0$ і

$R_2 = A_{21}A_{12}$, якщо в точці *2* немає петлі, $R_3 = A_{32}A_{23}$, якщо в точці *3* немає петлі.

Для кілець 43-56 ϑ_2 і ϑ_3 – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, ϑ_1 – тіло, якщо в точці *1* немає петлі, і ϑ_1 – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, якщо в точці *1* є петля.

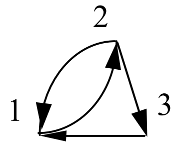
57-60). 

$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $A_{13} = A_{12}A_{23}; A_{21} = A_{23}A_{31}; A_{32} = A_{31}A_{12}$

і

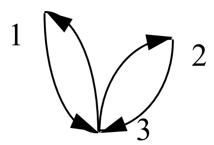
$R_1 = A_{12}A_{21} = A_{13}A_{31}$, якщо в точці *1* немає петлі, $R_2 = A_{21}A_{12} = A_{23}A_{32}$, якщо в точці *2*

немає петлі, $R_3 = A_{31}A_{13} = A_{32}A_{23}$, якщо в точці *3* немає петлі.

61-68). 

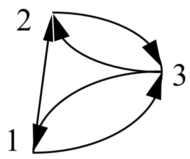
$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $A_{13} = A_{12}A_{23}$; $A_{32} = A_{31}A_{12}$; $R_1 = A_{12}A_{21}$,

якщо в точці *1* немає петлі, $R_2 = A_{21}A_{12}$, якщо в точці *2* немає петлі, $R_3 = A_{31}A_{13} = A_{32}A_{23}$, якщо в точці *3* немає петлі і $A_{13} = 0$ або $R_1 = A_{23}A_{31} = 0$; $A_{32} = 0$ або $R_2 = A_{23}A_{31} = 0$.

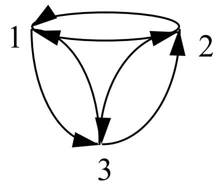
69-74). 

$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $A_{12} = A_{13}A_{32}; A_{21} = A_{23}A_{31};$

$R_1 = A_{13}A_{31}$, якщо в точці *1* немає петлі; $R_2 = A_{23}A_{32}$, якщо в точці *2* немає петлі; $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$ якщо в точці *3* немає петлі і $R_1 = R_2 = 0$, або $A_{12} = A_{21} = 0$.

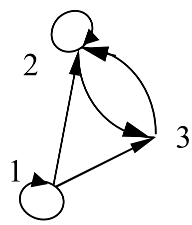
75-82).  $\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $A_{13}A_{32} = A_{31}A_{12} = A_{12}A_{23} = 0$;

$A_{21} = A_{23}A_{31}$; $R_1 = A_{13}A_{31}$, якщо в точці *1* немає петлі, $R_2 = A_{23}A_{32}$, якщо в точці *2* немає петлі, $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$ якщо в точці *3* немає петлі і $A_{21} = 0$ або $R_1 = R_2 = 0$.

83-86).  $\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де $R_1 = A_{12}A_{21}$, або $R_1 = A_{13}A_{31}$, якщо в точці *1* немає петлі; $R_2 = A_{21}A_{12}$, або $R_2 = A_{23}A_{32}$, якщо в точці *2* немає петлі; $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$ якщо в точці *3* немає петлі і

$A_{12}A_{21} = A_{32}A_{23} = 0$ або $A_{12}A_{23} = A_{32}A_{21} = 0$;
$A_{13}A_{31} = A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{13}A_{32} = A_{23}A_{31} = 0$;
$A_{21}A_{12} = A_{31}A_{13} = 0$ або $A_{21}A_{13} = A_{31}A_{12} = 0$.

Для кілець 57-86 ϑ_1, ϑ_2 і ϑ_3 – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете.



Для отримання умов, накладених на компоненти кільця *A* розглянемо, наприклад, сагайдак з двома петлями випадку 51-56):

Так як сагайдак *K(A) = K(A/R²)*, і з точки *2* в точку *1* немає шляху, то бімодуль $A_{21} = 0$. Аналогічно, з точки *3* в точку *1* немає шляху, отже, $A_{31} = 0$.

Таким чином отримали кільце: $$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix},$$

де ϑ_1 – дискретно нормоване кільце, або однорядне кільце Кете, бо в противному випадку $R_1 = 0$ і в точці *1* немає петлі (якщо радикал Джекобсона кільця ϑ_1 рівний нулю, то це кільце – тіло D_1).

У вершині *3* немає петлі, тому $R_3 / R_3^2 + A_{32}A_{23} = 0$. Оскільки для нетерових кілець $R_3 \supset R_3^2$ то $R_3 = A_{32}A_{23}$.

З точки *1* в точку 3 іде стрілка, отже $A_{13} \neq 0$, а також є шлях з точки *1* в точку *2* і з *2* в точку *3*. Кожній стрілці σ_{ij} відповідає гомоморфізм $\varphi_{ij}: P_j \to P_i$, тобто підмодуль $Im\,\varphi_{ij}$, який має рівно один максимальний підмодуль і $Im\,\varphi_{ij}/(Im\,\varphi_{ij})R = U_i$, де U_i – простий модуль. Якщо $A_{12}A_{23} \neq 0$, то з точки *1* в точку 3 ідуть два шляхи σ_{13} і $\sigma_{12}\sigma_{23}$, і існують фактор-модулі, цоколь яких містить суму двох простих модулів, що суперечить дистрибутивності модуля (Теорема 5). Отже, $A_{12}A_{23} = 0$.

Аналогічно, з точки *1* в точку 2 є стрілка, отже $A_{12} \neq 0$, і є шлях з точки *1* в точку *3* і з точки *3* в точку *2*. Тому $A_{13}A_{32} = 0$.

Відмітимо, що за твердженням 3 для всіх розглянутих мінорів мають місце рівності: $A_{12}R_2 = R_1A_{12}$, $A_{13}R_3 = R_1A_{13}$, $A_{23}R_3 = R_2A_{23}$, $A_{32}R_2 = R_3A_{32}$.

Крім цього, у нашому випадку A_{12} – одновимірний лівий ϑ_1 / R_1 – простір і одновимірний правий ϑ_2 / R_2 – простір, A_{13} – одновимірний лівий ϑ_1 / R_1 – простір і одновимірний правий ϑ_3 / R_3 – простір, A_{23} – одновимірний лівий ϑ_2 / R_2 – простір і одновимірний правий ϑ_3 / R_3 – простір, A_{32} – одновимірний лівий ϑ_3 / R_3 – простір і одновимірний правий ϑ_2 / R_2 – простір.

ПОСИЛАННЯ

[1] Кириченко В.В. (1981). Кольца и модули. – К: Из-во Киев. ун-та.
[2] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. (1980). Конечномерные алгебры. – К.: Вища школа
[3] Bass H. (1960). Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95, 466-488.
[4] Morita K. (1958). Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 6, 83-142.

[5] Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. (1993). Полусовершенные кольца и их колчаны. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 438-456.

[6] Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В. (1995). Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними. Сб. „Алгебраические исследования". – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 5-32.

[7] Кириченко В.В., Яременко Ю.В. (2001) О полусовершенных полудистрибутивных кольцах. Мат. заметки. 69, №1, 153-156.

[8] Кириченко В.В. (1976). Обобщенно однорядные кольца. Мат. сб. 99, № 4, 559-581.

[9] Camillo V.P. (1975). Distributive modules. J.Algebra. 36, № 1, 16-25.

[10] Кириченко В.В., Яременко Ю.В. (1996). Многорядные кольца. Укр. мат. журнал. 48, № 9, 1223-1235.

[11] Drozd Yu. A. (1971). Minors and reduction theorems. Coll Math. Soc. J. Bolyai. 6, 173-176.

[12] Яременко Ю.В. (2001). Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком. Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. №1, 67-74.

[13] Яременко Ю.В. (2002). Мінори нетерових бірядних кілець. Наукові записки КДПУ. Фізико-математичні науки. 43, 83-90.

[14] Яременко Ю.В., Демченко Ю.М. (2004). Нетерові бірядні кільця з сильнозв'язним сагайдаком. Наукові записки КДПУ. Математичні науки. 57, 100-108.

[15] Яременко Ю.В. (2013). Нетерові багаторядні кільця. Наукові записки КДПУ. Серія: математичні науки. 72, 68-78.

[16] Яременко Ю.В. (1999). Первинні сагайдаки напівспадкових багаторядних кілець Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. №2, 59-65.

[17] Яременко Ю.В. (2002). Багаторядні кускові області. Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. №4, 50-55.

[18] Кириченко В.В. (1975). Обобщенно однорядные кольца. – К: (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).

[19] Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. (1988). Бирядные кольца и модули над ними. Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 35-74.

[20] Яременко Ю.В. (2018). Кільця та модулі. – Кропивницький: Вид-во Кропивн. ун-ту.