УДК 519.21

ТЕРНАРНЕ БРОУНІВСЬКЕ БЛУКАННЯ В $\boldsymbol{R}^1$.

О.П. Макарчук

Робота присвячена дослідженню ймовірнісної структури асиметричного випадкового блукання на прямій з трьома станами переходу.

The paper is devoted to the investigation of the probabilistic structure of asymmetric random walk in a straight line with three transition states.

Під асиметричним броунівським рухом розуміють випадкову послідовність (дискретний випадковий процес з дискретним часом)

$$\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – послідовність незалежних (в сукупності) випадкових величин, які набувають значень $1, 0, -1$ з ймовірностями p_0, p_1, p_2

Отже, ξ_k, $k = 1, \dots, n$ мають наступний розподіл:

ξ_k

-1	0	1
	p_1	

Послідовність τ_n виникає в зв'язку з наступною задачею. Броунівська частинка знаходиться на координатній прямій в точці 0 і може на кожному кроці здійснити стрибок вправо і вліво на 1, або ж залишитись на місці з однаковими ймовірностями. Тоді $p_n(k) = P(\tau_n = k)$ – є ймовірністю того, що після n кроків броунівська частинка матиме координату *k*.

Знайдемо явну формулу для $p_n(k)$.

Теорема 1. *Виконуються рівності:*

$$p_n(k) = \begin{cases} 0, \text{при } k \notin \{-n, -(n-1), \dots, n-1, n\} \\ (p_2)^n, \text{при } k = n \\ (p_0)^n, \text{при } k = -n \end{cases}$$

Доведення.

Зрозуміло, що броунівська частинка може опинитись після n стрибків в точці з максимальною координатою лише тоді, коли на кожному кроці вона буде здійснювати стрибок вправо на 1. У цьому випадку максимальна координата дорівнює відповідно n. Причому на кожному кроці уверх ймовірність переходу p_0, тому $p_n(k) = (p_2)^n$, при $k = n$.

Аналогічно мінімальна координата дорівнює $-n$ та $p_n(k) = (p_0)^n$, при $k = -n$.

Теорему доведено.

Виведемо рекурентну формулу для $p_n(k)$.

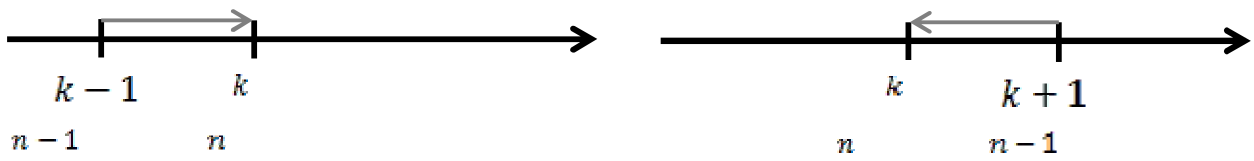
Теорема 2. *Виконується рівність:*

$$p_n(k) = p_0 \cdot p_{n-1}(k-1) + p_1 \cdot p_{n-1}(k) + p_2 \cdot p_n(k+1)$$

Доведення.

Броунівська частинка після n кроків може опинитись в точці з координатою k лише в 3 випадках:

1. на $n-1$ кроці частинка знаходиться в точці з координатою $k-1$ після чого здійснює стрибок вправо;
2. на $n-1$ кроці частинка знаходиться в точці з координатою $k+1$ після чого здійснює стрибок вліво.



3. залишається на місці.

Звідки випливає потрібне. З точки зору теорії ймовірностей доведення ґрунтується на формулі повної ймовірності та має вигляд:

$$\begin{aligned} p_n(k) = P(\tau_n = k) = P(\tau_{n-1} + \xi_n = k) = \\ = P(\xi_n = 1) \cdot P(\tau_{n-1} = k-1) + P(\xi_n = 0) \cdot P(\tau_{n-1} = k) \\ + P(\xi_n = -1) \cdot P(\tau_{n-1} = k+1) \\ = p_0 \cdot p_{n-1}(k-1) + p_1 \cdot p_{n-1}(k) + p_2 \cdot p_n(k+1). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Вище доведені теореми дозволяє знаходити ймовірнісні характеристики положення броунівської частинки для доволі невеликих n i k.

Зрозуміло, що для великих n i k, вище вказані формули є малоефективні в практичному розумінні. Однак зрозуміло, що за рахунок симетрії, при $p_0 = p_2$ виконується рівність :

$p_n(k) = p_n(-k)$,

тому в подальшому (при $p_0 = p_2$) для простоти обмежимось випадком $k \in \{0, \dots, n\}$.

Теорема 3. *Виконується рівність*

$$p_n(k) = \sum_{0 \le c \le n-k, c \equiv n+k \ (mod\ 2)} C_{n-c}^{\frac{n+k-c}{2}} \cdot (p_2)^{\frac{n+k-c}{2}} \cdot (p_0)^{\frac{n-k-c}{2}};$$

Доведення.

Нехай після n стрибків броунівська частинка опинилась в точці з координатою k, при цьому було здійснено a і b стрибків вправо і вліво відповідно і c стоянок на місці. Маємо:

$$\begin{cases} a - b = k \\ a + b + c = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{n+k-c}{2} \\ b = \dfrac{n-k-c}{2} \end{cases}$$

Для підрахунку кількості всіх можливих марштрутів при заданому c потрібно використати перестановки з повтореннями, тобто при заданому c ми однозначно визначаємо a і b, після чого потрібно зазначити, що кількість все можливих наборів з a одиничок, b мінус одиничок і c нулів дорівнює:

$$\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}.$$

Безумовно ймовірність здійснення фіксованого набору $(a;b;c)$ стрибків дорівнює $(p_2)^c \cdot (p_0)^a$, звідки отримаємо потрібне.

Теорему доведено.

Безумовно актуальним є питання про найімовірніше положення броунівської частинки.

Незважаючи на те, що ми говоримо про найімовірніше положення броунівської частинки, відповідно ймовірність достатньо мала, тому логічно говорити ***про діапазон***, в який потрапить броунівська частинка з деякою ймовірністю (наприклад 95%).

Спочатку розглянемо випадок фіксованого діапазону і дослідимо відповідну асимптотику попадання броунівської частинки в нього відповідно.

Для цього скористаємось класичною центральною граничною теоремою у формулі Ляпунова.

Нехай $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, тоді S_n представляє положення броунівської частини на n кроці . За центральною граничною теоремою Ляпунова[4]

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} \in [a;b]\right) = G(b) - G(a);$$

Оскільки в нашому випадку:

$$M_{\xi_1} = p_0 \cdot (-1) + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1 = p_2 - p_0;$$

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{D_{\xi_1}} = \sqrt{p_0 \cdot (-1)^2 + p_1 \cdot 0^2 + p_2 \cdot 1^2 - M_{\xi_1}^2} = \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}$$

маємо:

$$P\left(\frac{S_n - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}} \in [a;b]\right) \approx G(b) - G(a)$$

Отже,

$$P\left(\frac{S_n - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}} \in [a;b]\right) =$$

$$P(S_n \in \Big[n(p_2-p_0)+\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}a; n(p_2-p_0) + \sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}b\Big])$$

І якщо, ми розглядаємо ***деякий фіксований діапазон*** $[\boldsymbol{c};\boldsymbol{d}]$, в який попадає броунівська частинка, то

$$n(p_2-p_0)+\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}a=c;$$

$$n(p_2-p_0)+\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}b=d.$$

Звідки отримуємо, що

$$a=\frac{c-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}};$$

$$b=\frac{d-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}};$$

Враховуючи теорему Лагранжа маємо, що існує

$$t\in\left[\frac{c-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}};\frac{d-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}}\right],$$

Для якого

$$P(S_n\in[c;d])\approx G\Big(\frac{d-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}}\Big)-G\left(\frac{c-n(p_2-p_0)}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}}\right)$$
$$=\frac{dG}{dx}\Big|_{x=t\in[a;b]}\left(\frac{d-c}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}}\right)$$
$$\sim\frac{d-c}{\sqrt{p_0+p_2-(p_2-p_0)^2}\sqrt{n}},$$

адже

$$t\in[a;b]\to -sign(p_2-p_0)\cdot\infty \quad (n\to+\infty) \Rightarrow$$

$$\frac{dG}{dx}\Big|_{x=t\in[a;b]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sim O(e^{-n}).$$

Отже, при $p_2\neq p_0$ маємо наступну асимптотику:

$$P(S_n \in [c;d]) \sim O(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}).$$

Безумовно, є бажання сказати, ймовірність попадання броунівської частинки у діапазон асимтотично прямує до 0, з порядком $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, але потрібно більш детально проаналізувати похибку при наближеному переході по теоремі Ляпунова.

Використовуючи нерівність Беррі-Ессеєна, можна встановити наступні асимпотитики:

$$P(S_n \in [c;d]) \sim \begin{cases} O\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\right), p_2 \neq p_0 ; \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), p_2 = p_0 . \end{cases}$$

Незважаючи на те, що ми говоримо про найімовірніше положення броунівської частинки, відповідно ймовірність достатньо мала, тому логічно говорити ***про діапазон***, в який потрапить броунівська частинка з деякою ймовірністю (наприклад 95%).

Знайдемо тепер аналітичний вид ***діапазону в який з ймовірністю 95% попадає броунівська частинка.***

Як було показано,

$$0{,}95 = -1 + 2G(u) = G(-u) - G(u) \Rightarrow$$

$$G(u) = 0{,}975$$

і за таблицею

$$u = 1{,}96 \Rightarrow u = 1{,}5923$$

$$P\left(\frac{S_n - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}} \in [-1{,}5923; 1{,}5923]\right) = 0{,}95$$

Наслідок . *Отже, з* ***ймовірнісю 95%*** *броунівська частинка попаде в діапазон*

$$\left[n(p_2 - p_0) - 1{,}5923\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}; n(p_2 - p_0) + 1{,}5923\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}\right],$$

Використовуючи нерівність Беррі-Ессеєна, легко показати, що відповідна похибка має асимптотику: $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.:Наука.,1986. – 176 с.
[2] Булинский А.В, Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Физматлит, 2005. – 359 с.
[3] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. −1975. − 320 с.
[4] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
[5] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 527 с., Т. 2. – 751 с.