УДК 519,21

ПРО ДЕЯКІ КВАНТОВІ РОЗПОДІЛИ

Ю. І. Волков, Н. М. Войналович

В статті розглядаються дискретні квантові розподіли (q-біноміальний, q-від'ємний біноміальний, q-пуассонівський). Отримано формули для моментів цих розподілів.

The discrete quantum distributions (q-binomial distribution, negative q-binomial distribution, q-poisson distribution) are considered in this aticle. We obtain the formulas for a moments this distributions.

Будемо використовувати позначення й основні факти квантового числення (q-числення) з книги [3]:

$$[n]=[n]_q:=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+\cdots+q^{n-1}, q>0,\ [0]:=0,$$

$$[n]!=[n][n-1]\cdots[3][2][1],[0]!:=1,\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[k]![n-k]!}=\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix},$$

$$[a+b]_q^n=(a+b)(a+qb)(a+q^2b)\cdots(a+q^{n-1}b),$$

$$\mathrm{D}_q\, f(x):=\frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)},\ \mathrm{e}_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]!},$$

$$\mathrm{e}_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]!},\ \mathrm{D}_q(\mathrm{e}_q(ax)=a\,\mathrm{e}_q(ax),\ \mathrm{D}_{1/q}(\mathrm{e}_q(x)=\mathrm{e}_q(q^{-1}x),$$

$$q\text{-формула Тейлора: } f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-c)_q^k}{[k]!}\mathrm{D}_q\, f(x)|_{x=c}.$$

Лема 1.

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k(1-x)_q^{n-k}=1 \tag{1}$$

Доведення. Застосуємо q-формулу Тейлора:до функції $f(x)=x^n$, взявши c=1. Матимемо $x^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(x-1)_q^k$. Замінивши x на $1/x$, отримаємо

$$\frac{1}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-q\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-q^{k-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{-k}(1-x)_q^k,\text{ звідси}$$

$1=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}(1-x)_q^k$, що рівносильне (1).

Лема 2.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}=1, x>0, 0<q<1, n>0 \qquad (2)$$

Доведення. Застосуємо q-формулу Тейлора:до функції $f(t)=\dfrac{1}{(1-t)_q^n}$.

Матимемо

$$\frac{1}{(1-t)_q^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-c)_q^k}{[k]!}D_q^k\frac{1}{(1-t)_q^n}\Big|_{t-c}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{(t-c)_q^k}{(1-c)_q^{n+k}}.$$

Через те, що $(t-c)_q^k=(t-c)(t-qc)\cdots(t-q^{k-1}c)$, при t=0 і c=-x

$(t-c)_q^k=q^{k(k-1)/2}$, а тому $1=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2}\dfrac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}$.

Лема 3.

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k(k-1)/2}\frac{x^k}{[k]!}e_q(-xq^{-k})=1 \qquad (3)$$

Доведення. Застосуємо q-формулу Тейлора:до функції $f(t)=\mathrm{e}_q(-t)$.

Матимемо

$$\mathrm{e}_q(-t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-x)_{1/q}^k}{[k]_{1/q}!}D_{1/q}^k\,\mathrm{e}_q(-t)\,|_{t=x}=\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-x)_{1/q}^k}{[k]_{1/q}!}(-1)^k q^{-k(k-1)/2}\,\mathrm{e}_q(-q^{-k}t)\,|_{t=x}.$$

Взявши в останній сумі t=0, і, врахувавши, що $(-x)_{1/q}^k=(-1)^k q^{-k(k-1)2}$, $[k]_{1/q}!=q^{-k(k-1)/2}[k]!$, тримаємо (3).

Вирази під знаками сум в формулах (1), (2), (3) невід'ємні, отже, можуть служити для побудови розподілів випадкових величин.

Означення 1. Будемо говорити, що випадкова величина ξ має q-біноміальний розподіл з параметрами n і x, якщо

$$\Pr\{\xi=[k]\}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k(1-x)_q^{n-k},\ 0<x<1,\ 0<q<1,\ k=0,1,2,\ldots,n.$$

Цей факт записуватимемо так: $\xi \subset B_q(n,x)$.

Означення 2. Будемо говорити, що випадкова величина ξ має від'ємний q-біноміальний розподіл з параметрами n і x, якщо

$$\Pr\left\{\xi=\frac{[k]}{q^{k-1}}\right\}=\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{-k(k-1)/2}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}, x>0, 0<q<1, k=0,1,2,\ldots$$

Цей факт записуватимемо так: $\xi \subset NB_q(n,x)$.

Означення 3. Будемо говорити, що випадкова величина ξ має q-пуассонівський розподіл з параметром x, якщо

$$\Pr\{\xi=[k]\}=q^{-k(k-1)/2}\frac{x^k}{[k]!}e_q(-xq^{-k}), x>0, q>1, k=0,1,2,\ldots$$

Цей факт записуватимемо так: $\xi \subset P_q(x)$.

Лема 4.

$$x(1-x)\,\mathrm{D}_q(x^k(1-x)_q^{n-k})=x^k(1-x)_q^{n-k}([k]-[n]x). \qquad (4)$$

Доведення.

$\mathrm{D}_q(x^k(1-x)_q^{n=k})=$

$(x^k(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n=k-1}x)-q^kx^k(1-xq)(1-q^2x)\cdots(1-q^{n-k}x))/(x(1-q))=$

$x^{k-1}(1-qx)\cdots(1-q^{n-k-1}x)([k]-[n]x)$, а звідси випливає (4).

Лема 5.

$$\frac{x(x+q)}{q}\mathrm{D}_{1/q}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}=\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}-[n]x\right) \qquad (5)$$

Доведення.

$$\mathrm{D}_{1/q}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}=$$

$$\frac{1}{x(1-1/q)}\left(\frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n+k-1}x)}-\frac{x^k}{(1+x/q)(1+x)\cdots(1+q^{n+k-2}x)}\right)=$$

$$\frac{q}{x(q-1)}\frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n+k-2}x)}\left(\frac{1}{1+q^{n+k-1}x}-\frac{1}{q^k(1+x/q)}\right)=$$

$$\frac{q}{x(q-1)}\frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n+k-2}x)}\left(\frac{q^k+xq^{k-1}-1-q^{n+k-1}x}{(1+q^{n+k-1}x)(q+x)q^{k-1}}\right)=$$

$$\frac{q}{x(q+x)}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}\left(\frac{(q^k-1)/(q-1)-xq^{k-1}(1-q^n)/(1-q)}{(1+q^{n+k-1}x)q^{k-1}}\right)=$$

$$\frac{q}{x(x+q)}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}\left(\frac{[k]q^{=k+1}-[n]x}{(1+q^{n+k-1}x)(q+x)}\right),$$ а звідси випливає (5).

Лема 6.

$$x\,\mathrm{D}_q(x^k\,\mathrm{e}_q(-q^{-k}x))=x^k\,\mathrm{e}_q(-q^{-k}x)([k]-x) \qquad (6)$$

Доведення.

За правилами знаходження q-похідної від добутку двох функцій матимемо:

$$\mathrm{D}_q(x^k\,\mathrm{e}_q(-q^{-k}x))=q^kx^k\,\mathrm{D}_q\mathrm{e}_q(-q^{-k}x)+\mathrm{e}_q(-q^{-k}x)\,\mathrm{D}_q\,x^k,$$

а звідси випливає (6).

Нехай $m\in N, a\in R$. Позначимо через $s_m(a)$ математичне сподівання випадкової величини ξ, тобто, $s_m(a)=\mathrm{E}(\xi-a)^m$. Тоді $s_m(0)=\alpha_m$ це початкові моменти m-того порядку, а $s_m(\alpha_1)=\mu_m$ це центральні моменти m-того порядку.

Теорема. *Якщо* $\xi\subset B_q(n,x)$, *то*

$$s_{m+1}(a)=x(1-x)\,\mathrm{D}_q\,s_m(a)+([n]x-a)s_m(a),\, s_0(a)=1,\, s_1(a)=[n]x-a. \qquad (7)$$

Якщо $\xi\subset NB_q(n,x)$, *то*

$$s_{m+1}(a)=x(x/q+1)\,\mathrm{D}_{1/q}\,s_m(a)+([n]x-a)s_m(a), s_0(a)=1,\, s_1(a)=[n]x-a. \qquad (8)$$

Якщо $\xi\subset P_q(x)$, *то*

$$s_{m+1}(a)=x\,\mathrm{D}_q\,s_m(a)+(x-a)s_m(a), s_0(a)=1,\, s_1(a)=x-a. \qquad (9)$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$визначена на множині значень випадкової величини ξ. Тоді для $\xi\subset B_q(n,x)$ в силу леми 4

$$x(1-x)\,\mathrm{D}_q\mathrm{E}\,f(\xi)=\sum_{k=0}^{n}f([k])\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\mathrm{D}_q(x^k(1-x)_q^{n-k})=$$

$$\sum_{k=0}^{n} f([k])\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1-x)_q^{n-k} ([k]-a+a-[n]x) = \mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)+(a-[n]x)\,\mathrm{E}\,f(\xi).$$

Звідси $\mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)=x(1-x)\,\mathrm{D}_q\mathrm{E}\,f(\xi)+([n]x-a)\,\mathrm{E}\,f(\xi)$.

В цьому співвідношенні замість $f(x)$ візьмемо $(x-a)^m$, отримаємо (7).

Якщо $\xi \subset NB_q(n,x)$, то в силу леми 5

$$\frac{x(x+q)}{q}\mathrm{D}_{1/q}\,\mathrm{E}\,f(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{x(x+q)}{q}\mathrm{D}_{1/q}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}-a+a-[n]x\right)=$$

$$\mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)+(a-[n]x)\,\mathrm{E}\,f(\xi).$$

Звідси $\mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)=\dfrac{x(x+q)}{q}x(1-x)\,\mathrm{D}_{1/q}\mathrm{E}\,f(\xi)+([n]x-a)\,\mathrm{E}\,f(\xi)$

В цьому співвідношенні замість $f(x)$ візьмемо $(x-a)^m$, отримаємо (8).

Якщо $\xi \subset P_q(x)$, то в силу леми 6

$$x\,\mathrm{D}_q\mathrm{E}\,f(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} f([k])q^{-k(k-1)/2}\frac{x}{[k]!}\mathrm{D}_q(x^k e_q(-q^{-k}x))=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f([k])q^{-k(k-1)/2}\frac{1}{[k]!}\mathrm{D}_q(x^k e_q(-q^{-k}x))=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f([k])q^{-k(k-1)/2}\frac{x^k}{[k]!}e_q(-q^{-k}x)([k]-a+a-x)=\mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)+(a-x)\,\mathrm{E}\,f(\xi)$$

Звідси $\mathrm{E}((\xi-a)f(\xi)=x\,\mathrm{D}_q\mathrm{E}\,f(\xi)+(x-a)\,\mathrm{E}\,f(\xi)$.

В цьому співвідношенні замість $f(x)$ візьмемо $(x-a)^m$, отримаємо (9).

Наслідок 1. *Якщо* $\xi \subset B_q(n,x)$, *то*

$s_2(a)=a^2+[n](1-2a)x+[n]([n]-1)x^2,$

$s_3(a)=-a^3+(1-3a+3a^2)[n]x+([n]-1)[n](1+[2]-3a)x^2+$

$([n]-1)[n]([n]-[2])x^3,$

$s_4(a) = x(1-x)(1-3a+3a^2)[n]+([n]-1)[n]((1+[2]-3a)[2]x+$

$([n]-1)[n]([n]-[2])[3]x^2+([n]x-a)s_3(a),$

Зокрема.

$\alpha_2 = [n]x+[n]([n]-1)x^2,\ \mu_2 = [n]x(1-x)\,,$

$\alpha_3 = [n]x+([n]-1)[n](1+[2])x^2+([n]-1)[n]([n]-[2])x^3\,,$

$\mu_3 = [n]x-[n](1+2[n]+[2]-[2][n])x^2+[n]([2][n]-2[n]+[2])x^3\,,$

$\alpha_4 = [n]x+([n]-1)[n](1+[2]+[2]^2)x^2+(([n]-1)[n]([n]-[2])(1+[2]+[3])x^3+$

$([n]-1)[n]([n]-[2])([n]-[3])x^4,$

$\mu_4 = x(1-x)([n]-1[n]([n]-[2])[3]x^2+([n]-1)[n](1+[2]-3[n]x)+$

$[n](1-3[n]x+3]n]^2x^2.$

Якщо в цих формулах взяти q=1, то отримаємо відомі формули для моментів звичайного біноміального розподілу ([1], p.110).

$\alpha_2 = nx(1-x+nx, \mu_2 = nx(1-x),$

$\alpha_3 = nx(1-3x+3nx+(n-1)(n-2)x^2, \mu_3 = nx(1-x)(1-2x),$

$\alpha_4 = nx(1+7(n-1)x+6(n-1)(n-2)x^2+(n-1)(n-2)(n-3)x^3)$**,**

$\mu_4 = nx(1-x)(1-6x+6x^2+3nx-3nx^2)$**.**

Наслідок 2. *Якщо* $\xi \subset NB_q(n,x)$*, то*

$s_2(a) = a^2+[n](1+2a)x+[n]([n]+1/q)x^2,$

$s_3(a) = -a^3+(1-3a+3a^2)[n]x+([n]q+1)[n](q+[2]+3aq)q^{-2}x^2+$

$([n]q+1)[n]([n]q^2+[2])q^{-3}x^3,$

$s_4(a) = x(1+x/q)(1-3a+3a^2)[n]+([n]q+1)[n]((q+[2]+3aq)[2]q^{=2}x+$

$([n]q+1)[n]([n]q^2+[2])[3]q^{-5}x^2+([n]x-a)s_3(a),$

Зокрема.

$\alpha_2 = [n]x+[n]([n]+1/q)x^2,\ \mu_2 = [n]x(1+x/q)\,,$

$\alpha_3 = [n]x+([n]q+1)[n](q+[2])q^{-2}x^2+([n]q+1)[n]([n]q^2+[2])q^{-3}x^3$

$\mu_3 = [n]x - [n](-q + 2[n]q^2 + [2] - [2][n]q)q^{-2}x^2 +$

$[n](2[n]q^2 - [2] - [2][n]q)q^{-3}x^3,$

$\alpha_4 = [n]x + ([n]q+1)[n](q^2 + [2]q + [2]^2)q^{-3}x^2 + (([n]q+1)[n]([n]q^2 +$

$[2])(q^2 + [2]q + [3])q^5x^3 + ([n]q+1)[n]([n]q^2 + [2])([n]q^3 + [3])q^{-6}x^4,$

$$\mu_4 = [n]x + \begin{pmatrix} -4[n]^2 + [n](1/q + [n]) + [n](1/q + [n])[2]q^{-1} + \\ [n](1/q + [n])[2]^2 q^{-2} \end{pmatrix} x^2 +$$

$(6[n]^3 - 4[n]^2(1 + [n]q)q^{-1} - 4[n]^2(1 + [n]q)[2]q^{-2} +$

$[n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])q^{-3} + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])[2]q^{-4} +$

$[n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])[3]q^{-5})x^3 + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])([n]q^3 + [3])q^{-6})x^4$

Якщо в цих формулах взяти q=1, то отримаємо відомі формули для моментів звичайного від'ємного біноміального розподілу ([1], p.316).

$\alpha_2 = nx(1 + x + nx), \mu_2 = nx(1 + x),$

$\alpha_3 = nx(1 + 3(n+1)x + (n+1)(n+2)x^2), \mu_3 = nx(1 + x)(1 + 2x),$

$\alpha_4 = nx(1 + 7(n+1)x + 6(n+1)(n+2)x^2 + (n+1)(n+2)(n+3)x^3,$

$\mu_4 = 3n^2x^2(1+x)^2 + nx(1+x)(1 + 6x + 6x^2).$

Наслідок 3. *Якщо* $\xi \subset P_q(x)$*, то*

$s_2(a) = x + (x-a)^2,$

$s_3(a) = -a^3 + (1 - 3a - 3a^2)x + (1 + [2] - 3a)x^2 + x^3,$

$s_4(a) = a^4 + (-a + 3a^2 - 4a^3 + (1 - 3a + 3a^2))x + (1 - 4a + 6a^2 - [2]a +$

$1 + [2] - 3a)[2]x^2 + (1 - 4a + [2] + [3])x^3 + x^4,$

$s_5(x) = -a^5 + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4)x + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + [2] - 5[2]a +$

$10[2]a^2 + [2]^2 - 5[2]^2a + [2]^3)x^3 + (1 - 5a + 10a^2 + [2] - 5[2]a + [2]^2 + [3]$

$-5[3]a + [2][3] + [3]^3)x^3 + (1 + [2] + [3\} + [4])x^4 + x^5.$

Зокрема.

$\alpha_2 = x + x^2,\ \mu_2 = x,$

$\alpha_3 = x + (1 + [2])x^2 + x^3,\ \mu_3 = x(1 - 2x + [2]x),$

$\alpha_4 = x + (1 + (1 + [2])[2]x^2 + (1 + [2] + [3])x^3 + x^4$,

$\mu_4 = x + (-3 + [2] + [2]^2)x^2 + (3 - 3[2] + [3])x^3$,

$\alpha_5 = x + (1 + [2](1 + [2] + [2]^2))x^2 + (1 + [2] + [2]^2 + (1 + [2] + [3](1 + [2] + [3]))x^3 +$
$(1 + [2] + [3] + [4])x^4 + x^5$,

$\mu_5 = x + (-4 + [2] + [2]^2 + [2]^3)x^2 + (6 - 4[2] - 4[2]^2 + [3] + [2][3] + [3]^2)x^3 +$
$(-4 + 6[2] - 4[3] + [4])x^4$.

Якщо в цих формулах взяти q=1, то отримаємо відомі формули для моментів звичайного від’ємного біноміального розподілу ([1], p. 163):

$\alpha_2 = x + x^2$, $\mu_2 = x$,

$\alpha_3 = x + 3x^2 + x^3$, $\mu_3 = x$,

$\alpha_4 = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4$, $\mu_4 = x + 3x^2$,

$\alpha_5 = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5$, $\mu_5 = x + 10x^2$.

ПОСИЛАННЯ

[1] Johnson N.L., Kemp A.W., Kotz S., Univariate Discrete Distributions, Wiley, New Jersy, (2005), 646 pp.
[2] Charalambos A. Charalambides, Discrete *q*-Distributions, Wiley, New Jersy, (2016), 245 pp.
[3] Kupershmidt B. A., *q*-Probability: I. Basic Discrete Distributions, Journal of Nonlinear Phisics, (2000), v.5, №1, 73-93.
[4] Kac V., Cheung P., Quantum Calculus, Springer, New Jork, (2002), 112pp.