

Міністерство освіти і науки України

Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Студентські наукові записки

ВИПУСК 6

**ЗБІРНИК НАУКОВИХ СТАТЕЙ
СТУДЕНТІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО
ФАКУЛЬТЕТУ**

Кіровоград – 2013

ББК 22
УДК 51
С 88

СТУДЕНТСЬКІ НАУКОВІ ЗАПИСКИ (Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету). – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. – Випуск 6. – 103 с.

Збірник містить статті, підготовлені за результатами виконання магістерських та дипломних робіт студентами фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка у 2012-2013 навчальному році.

Редакційна колегія:

Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор (головний редактор);
О. В. Авраменко, доктор фізико-математичних наук, професор;
В. А. Кушнір, доктор педагогічних наук, професор;
З. Ю. Філер, доктор технічних наук, професор;
Р. Я. Ріжняк, кандидат педагогічних наук, професор;
І. В. Лупан, кандидат педагогічних наук, доцент (відповідальний редактор).

Друкується згідно рішення вченої ради фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, протокол №9 від 30.04.2013 року.

Відповідальність за якість поданих матеріалів несуть автори та їхні наукові керівники.

РОЗВИТОК ПОШУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Тетяна Берест

Науковий керівник – доктор педагогічних наук, професор В.А. Кушнір

Сучасний етап розвитку суспільства значно посилює вимоги до наукової компетентності фахівців з вищою освітою. Вони повинні творчо мислити, самостійно поповнювати свої знання, орієнтуватися у бурхливому потоці наукової інформації. Адже професійна діяльність буде неповноцінною, якщо будуватиметься тільки на відтворенні одного разу засвоєних методів роботи. Така діяльність має недоліки не тільки тому, що в ній не використовуються об'єктивно наявні можливості для досягнення кращих результатів діяльності, але і тому, що вона не сприяє розвитку особистості самого працівника. Фахівець, здатний постійно шукати нові методи, набагато швидше досягає вищого рівня професіоналізму. Зокрема, він повинен володіти вміннями здійснювати пошуково-дослідницьку діяльність. Зрозуміло, що вміння проведення пошуково-дослідної діяльності потрібно розвивати з початком навчання у ВНЗ.

Незважаючи на те, що у філософській, соціологічній та психолого-педагогічній літературі термін “дослідницька діяльність” зустрічається досить часто й багато авторів підкреслюють величезне значення формування її у студентів, чіткого наукового визначення цього поняття немає.

Так дослідник О.Павленко зазначає, що у психолого-педагогічній науці таку діяльність визначають по-різному: науково-дослідницька, науково-пошукова, навчально-дослідницька, пошуково-дослідницька, тощо [1]. Натомість дослідниця С.П.Балашова стверджує, що навчально-дослідницька і науково-дослідницька роботи студентів відрізняються між собою самостійністю її виконання та суб'єктивністю або об'єктивністю новизни результатів [2]. Це говорить про те, що дане питання є недостатньо вивченим і потребує подальших досліджень.

На думку дослідників О. Глобіна та В. Лапінського, одним із перспективних напрямків розвитку пошукової діяльності студентів є посилення моделювального аспекту навчання математики з метою створення у студентів більш повного уявлення про технологію розв'язування прикладних задач за допомогою комп'ютера і посилення мотивації навчання математики шляхом розвитку у студентів уявлень про можливі застосування математики до задач інформатики.

У процесі розв'язування задач моделі виконують різні функції: конкретизації, схематизації, побудови наочного образу, абстрагування, узагальнення. Різні види моделей пов'язують зміст задачі, з її аналізом, розв'язуванням, дослідженням отриманого результату. Являючи матеріалізовані опори мислення, моделі значною мірою визначають і скеровують хід міркувань учнів. Це дає змогу говорити про те, що моделі є основним засобом розв'язування задач, а моделі – основною формою діяльності з їх розв'язування.

У процесі навчання у студентів складається неповне уявлення щодо технології послідовності розв'язування прикладної математичної задачі з використанням ІКТ. Ця послідовність може бути представлена таким чином [6]:

1. Формалізована постановка математичної задачі шляхом заміни термінів, у яких сформульована задача, їх математичними еквівалентами.
2. Побудова математичної моделі задачі. Це етап остаточної формалізації вербальної моделі. Він включає визначення складових (елементів) об'єкта моделювання, їх найважливіших властивостей, основних залежностей, що виражають ці властивості.
3. Аналіз математичної моделі з метою виявлення її загальних властивостей та характеристик. Найважливіший елемент аналізу полягає у визначенні існування розв'язків математичної моделі (відповідних рівнянь (нерівностей), які є їх складовими). Якщо вдається довести, що їх немає, то необхідно або скорегувати

постановку задачі, або способи її математичної формалізації. У тих випадках, коли такі розв'язки можливі, але не вдається з'ясувати спосіб аналітичного розв'язання математичної моделі, вдаються до чисельних методів розв'язування (дослідження).

4. Розроблення алгоритму (логіко-символьної моделі) розв'язування задачі.
5. Описання розробленого алгоритму мовою програмування або в термінах конкретного діяльнісного (програмного) середовища (електронних таблиць, моделюючої програми тощо) – створення моделі комп'ютерного розв'язання задачі.
6. Налаштування та тестування програми або опису моделі (уточнення моделі розв'язання).
7. Інтерпретація та аналіз отриманого результату (розв'язку задачі).

Дослідимо проблему конструювання логарифмічного рівняння виду

$$\log_s \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} = \log_s (mx + n), \quad (1)$$

де $S > 0, S \neq 1$, за умови щоб квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(mx + n), \quad (2)$$

мало два різних дійсних корені x_1, x_2 , і щоб обидва вони були коренями логарифмічного рівняння (1). Рівняння (2) дістаємо з рівняння (1) шляхом потенціювання та множення на вираз $px + q$, що може привести тільки до виникнення сторонніх коренів. Отже, якщо рівняння (1) матиме два різних дійсних корені, то й рівняння (2) матиме тільки ті ж самі корені. Тому достатньо створити математичну модель, яка забезпечить те, що рівняння (1) матиме два різних дійсних корені.

Математична модель. Початковою математичною моделлю задачі конструювання рівнянь виду (1) може бути така система:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, p \neq 0, q \neq 0, m \neq 0, n \neq 0, a - pm \neq 0, \\ \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{px_1 + q} = mx_1 + n, \\ \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{px_2 + q} = mx_2 + n, \\ mx_1 + n > 0, \\ mx_2 + n > 0, \\ \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{px_1 + q} > 0, \\ \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{px_2 + q} > 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Дослідження і перетворення моделі на основі принципів її “повноти” і “мінімальної складності”. Якщо виконується нерівність $mx_1 + n > 0$ системи (3), то з огляду на рівняння

$$\frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{px_1 + q} = mx_1 + n \text{ цієї ж системи (3) буде виконуватися і нерівність}$$

$$\frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{px_1 + q} > 0. \quad (4)$$

Отже, нерівність (4) із системи (3) можна вилучити. На основі аналогічних міркувань, із (3) можна вилучити також нерівність

$$\frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{px_2 + q} > 0. \quad (5)$$

Запишемо рівняння системи (3) у вигляді

$$bx_1 + c = (mx_1 + n)(px_1 + q) - ax_1^2 \quad (6)$$

$$bx_2 + c = (mx_2 + n)(px_2 + n) - ax_2^2.$$

Розв'яжемо систему (6) відносно b, c . Оскільки визначник системи (6)

$$\Delta = x_1 - x_2 \neq 0 \quad (7)$$

то b, c визначається однозначно. Розв'язавши систему (6), отримаємо:

$$b = (mp - a)(x_2 + x_1) + mq + np \quad (8)$$

$$c = (a - mp)x_2x_1 + np \quad (9)$$

Після вилучення із системи (3) нерівностей (4) і (5) і перетворень рівнянь дістанемо перетворену й спрощену модель:

$$\begin{cases} a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, p \neq 0, q \neq 0, m \neq 0, n \neq 0, a - pm \neq 0, \\ px_1 + q \neq 0, px_2 + q \neq 0, \\ b = (mp - a)(x_2 + x_1) + mq + np, \\ c = (a - mp)x_1x_2 + np, \\ mx_1 + n > 0, \\ mx_2 + n > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Нелінійну систему (10) потрібно розв'язати відносно $a, b, c, p, q, m, n, x_1, x_2$. Зрозуміло, що значення наведених величин можна знайти неоднозначно.

Зауважимо, що в самій моделі (1) виконання першого рядка ще не гарантовано. Перший рядок моделі (10) буде виконаний у алгоритмі.

Ідея способу розв'язання нелінійної системи (10) полягає у зведенні її до лінійної та в подальшій декомпозиції задачі. Для цього довільно виберемо (згенеруємо) $x_1 < x_2$, що можна зробити, оскільки невідомих у моделі дев'ять, а умов тільки п'ять, із них тільки два рівняння. Тоді невідомі значення m, n визначаємо із системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} mx_1 + n > 0, \\ mx_2 + n > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Розв'язком нерівності (11) може бути

$$n = \begin{cases} -mx_1 + i, m \geq 0, \\ -mx_2 + j, m < 0, \end{cases} \quad (12)$$

де $i > 0, j > 0$ довільні додатні числа, а $m \neq 0$ дійсне число. У розв'язку (12) системи (11) легко переконатися з графічного зображення множини розв'язків системи (11).

Вибираємо довільним чином (генеруємо) $p \neq 0, q \neq 0, a \neq 0$. очевидно, що з (4) і (5) повинні виконуватися умови:

$$px_1 + q \neq 0, px_2 + q \neq 0. \quad (13)$$

За формулами (8) і (9) визначаємо b і c . Процес розв'язування системи (10) завершено.

Алгоритм розв'язування системи (10):

1. Генеруємо $x_1, x_2 \in [-3..3]$ ($x_1 = 1, x_2 = 3$).
2. Якщо $x_1 \geq x_2$, то повернутися до пункту 1.
3. Генеруємо $p, q \in [-3..3]$ ($p = 2, q = -1$).
4. Якщо $pq = 0 \vee px_1 + q = 0 \vee px_2 + q = 0$, то повернутися до пункту 3.
($pq = 1 \neq 0, px_1 + q = 1 \neq 0, px_2 + q = 5 \neq 0$).
5. Генеруємо $a, m \in [-3..3]$ ($a = 1, m = -2$).
6. Якщо $a = 0$, то повернутися до пункту 5.
7. Генеруємо $i, j \in [1..2]$ ($i = 1, j = 2$).

8. Обчислюємо: $n = \begin{cases} -mx_1 + i, m \geq 0, \\ -mx_2 + j, m < 0, \end{cases} \quad (n=8).$

9. Якщо $n=0$, то повернутися до пункту 8.

10. $b = (mp - a)(x_2 + x_1) + mq + np \quad (b = -2).$

11. Обчислюємо: $c = (a - mp)x_2x_1 + nq \quad (c=7).$

12. Створюємо рівняння виду $\log_s \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} = \log_s (mx + n)$ сконструйоване:

$$\log_s \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1} = \log_s (-2x + 8)$$

13. Якщо потрібно сконструювати ще приклади, то повернутися до пункту 1.

14. Кінець роботи алгоритму.

Наведемо програму реалізації заданого алгоритму (створену засобами Maple 12), а також варіанти завдань:

```
>
y := rand(-6..6) : k := 1 : l := 5 : z := rand(1..3) :
while k ≤ l do x1 := y() : x2 := y() : i := z() : m := y() :
while x1 = x2 or m = 0 do x1 := y() : x2 := y() : i := z() : j
:= z() : m := y() : end do:
if m > 0 then n := -m·x1 + i else n := -m·x2 + j : end if:
p := y() : q := y() :
while p·q·(p·x1 + q)·(p·x2 + q) = 0 do p := y() : q := y() :
end do:
```

```
a := y() :
while a = 0 do a := y() : end do:
b := (m - p·a)·(x2 + x1) + m·q + n·p :
c := (a - m·p)·x1·x2 + n·q :
print( lg( (a·x^2 + b·x + c) / (p·x + q) ) = lg(m·x + n) ) : print('x1' = x1, 'x2'
= x2) : k := k + 1 : end do:
```

$$\lg\left(\frac{-5x^2 + 105x + 15}{6x - 1}\right) = \lg(3x - 15) \quad x1 = 6, x2 = 0$$

$$\lg\left(\frac{x^2 + (-2 + 4j)x + 120 - 6j}{4x - 6}\right) = \lg(-2x + 10 + j) \quad x1 = 4, x2 = 5$$

$$\lg\left(\frac{x^2 + (-60 - 5j)x + 99 - 3j}{-5x - 3}\right) = \lg(-5x + 15 + j) \quad x1 = -2, x2 = 3$$

$$\lg\left(\frac{6x^2 - 51x + 137}{6x + 5}\right) = \lg(3x - 11) \quad x1 = 4, x2 = -4$$

$$\lg\left(\frac{2x^2 + 34x + 60}{3x + 5}\right) = \lg(x + 8) \quad x1 = -5, x2 = 4$$

Висновки. Беручи до уваги викладене вище, а також враховуючи, що професійна діяльність фахівців інформаційно-технологічного профілю передбачає розв'язування переважно прикладних задач, отримуємо висновок щодо необхідності цілеспрямованого формування у студентів умінь інформаційного моделювання. З одного боку, це дозволить створити в студентів більш повне уявлення про технологію розв'язування прикладних задач за допомогою ІКТ. З іншого боку, безпосереднє ознайомлення старшокласників із сутністю понять “модель”, “математична модель”, “інформаційна модель” та цілеспрямоване формування умінь діяльності моделювання сприятиме усвідомленню студентами того факту, що абстрактні математичні моделі є моделями реальних об'єктів, явищ і процесів, а це, у свою чергу, посилить прикладну спрямованість навчання математики, дозволить зробити

навчальну діяльність більш умотивованою, усвідомленою та продуктивною. За наведеною методикою можна конструювати також такі об'єкти з наперед визначеними властивостями: квадратні рівняння, ірраціональні рівняння, матриці, лінійні алгебраїчні рівнянь, неперервні дробово-раціональні функції, многочлени з наперед визначеною кількістю екстремумів.

Список використаних джерел:

1. Павленко О. Пошуково-дослідницька діяльність учнів у навчальному закладі // Рідна школа. – 2003. – №9. – с.21-23.
2. Балашова С.П. Формування науково-дослідницьким умінь у студентів педагогічного коледжу в процесі вивчення природознавчих дисциплін: автореф. дис. ... канд. пед. Наук: спец. 13.00.04 / С.П. Балашова. – К., 2000.
3. Квиткина Л.Г. Научное творчество студентов / Л.Г. Квиткина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
4. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности / Высшая школа. – М.: 1981. – 240 с.
5. Князян М.О. Навчально-дослідницька діяльність студентів як засіб актуалізації професійно значущих знань (на базі вивчення іноземних мов): автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. / М.О. Князян. – О., 1998.
6. Глобін О., Лапінський В. Моделювання як ефективний засіб реалізації міжпредметних зв'язків у профільному навчанні математики та інформатики. // Математика в школі. – 2010. – №7-8. – С. 17-20.

РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ З ІМІТАЦІЙНИМИ МОДЕЛЯМИ ТА ВДОСКОНАЛЕННЯ АЛГОРИТМУ ПОШУКУ СУСІДІВ, СТВОРЕННЯ СКРИПТОВОЇ МОВИ ДЛЯ ОПИСУ ПОВЕДІНКИ МОДЕЛЕЙ

Юрій Брайко, КМК КНТУ

**Наукові керівники – ст. викладач О.М. Дреєв, КНТУ;
кандидат фізико-математичних наук, доцент Л.В. Ізюмченко, КДПУ**

У наш час імітаційні комп'ютерні моделі використовують досить часто. Вони дають змогу проводити віртуальні експерименти, які можна повторювати у різноманітних умовах. Перевагою таких досліджень є те, що не потрібно витратити кошти на створення реальних споруд або приладів, які внаслідок більшості випробувань будуть зруйновані. Також існує ціла низка ситуацій, які не дозволяють проводити повномасштабну серію експериментів для отримання даних про об'єкт дослідження, наприклад запуск ракети на орбіту Землі або дослідження результатів вибуху атомної бомби. Раніше досить часто використовували математичні моделі, але вони не настільки гнучкі як імітаційні. Останні дозволяють враховувати різні фактори при випробуваннях, є більш наочними. Також вони дозволяють набагато простіше симулювати випадкові ситуації та спостерігати їхні наслідки. Отож, розробка програм для проведення експериментів з імітаційними моделями є надзвичайно актуальною. Саме тому логічно дослідити це питання, а саме – створити програму, яка б дозволяла проводити експерименти з імітаційними моделями на відносно слабких персональних комп'ютерах; розробити інструменти для створення нових моделей та керування їхньою поведінкою.

Роботу над програмою було розпочато зі створення статичної моделі “Трава-Заєць-Вовк”. Алгоритми її поведінки були жорстко визначені у вихідному коді самої програми. Використання цієї моделі було викликано тим, що на етапі розробки надзвичайно важко працювати з абстрактними моделями, і майже неможливо оптимізувати їхню роботу. Звичайно, можна було б обрати і іншу модель, наприклад, модель броунівського руху молекул, модель дифузійних процесів або будь-яку іншу модель. Але ми зупинилися на системі “Хижак-Жертва”, тому що вона є досить наочною і простою та не потребує знання

складних формул для обрахунку поведінки її елементів. До того ж з упевненістю можна сказати, що всі люди зустрічалися з нею в реальному світі.

Аналіз моделі “Хижак-Жертва” показав, що її елементи більшість часу витрачають на пошук своїх сусідів, а прийняття рішення про подальші дії та їхня реалізація відбувається досить швидко. Окрім того схема поведінки більшості імітаційних моделей схожа: кожен елемент приймає рішення про наступні дії залежно від свого оточення, а воно складає незначний відсоток від загальної кількості елементів моделі. Тому логічно, що алгоритм пошуку сусідів потрібно оптимізувати. Для цього слід змінити схему представлення даних про елементи моделі таким чином, аби не шукати сусідів серед усіх об’єктів моделі. Перша думка була про введення списку сусідів для кожного елементу моделі, але такий вибір не приніс суттєвих покращень. По-перше, на списки сусідів доводиться виділяти додаткову пам’ять, і, як наслідок, це накладає обмеження на кількість елементів в моделях, з якими можна проводити дослідження. По-друге, список сусідів доводиться оновлювати на кожному кроці, а для цього потрібно або знову переглядати всіх істот моделі (сумнівне покращення), або ж досліджувати сусідів існуючих сусідів. Отож можна зробити висновок, що введення списку сусідів для кожного елементу вносить надзвичайно мізерні покращення в швидкість програми, а в певних ситуаціях виявляється навіть гіршим від початкового алгоритму.

Кращих результатів дала зміна схеми представлення елементів моделі в програмі. Ідея представлена на рисунку 1. Нами створено клас комірки, який містить список істот, що знаходяться в ній, та посилання на сусідні комірки. Комірка, в яку потрапить елемент моделі, залежить від його координат у віртуальному середовищі моделі. Для адекватної роботи моделі “довжина” комірки повинна бути більшою за радіус зору елементів моделі. Тепер пошук сусідів здійснюється серед істот своїх та сусідніх комірок, а отже не потрібно переглядати координати всіх складових моделі або створювати додаткові списки сусідів. Перехід істоти з комірки теж не викликає значних труднощів, адже кожна комірка має посилання на своїх сусідів, а елементи моделі не можуть мати крок більшим за довжину комірки.

Схема представлення елементів моделі в оптимізованому алгоритмі

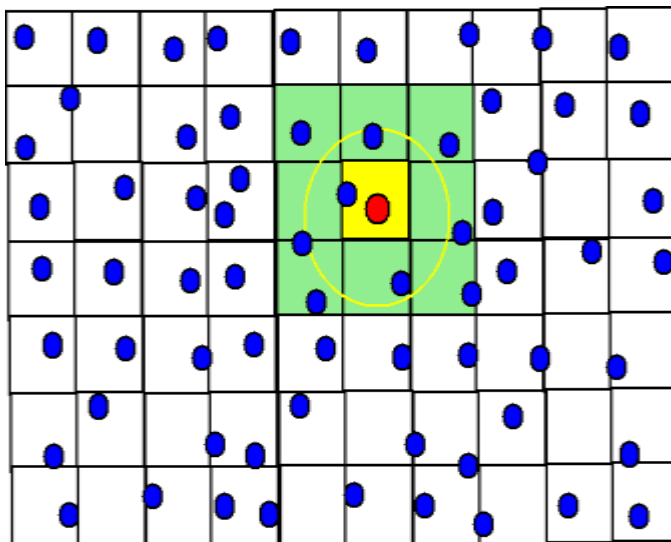


Рис. 1

Аналіз кількості перевірок, потрібних для пошуку сусідів кожного об’єкту моделі в старому та новому алгоритмі, виконується за допомогою відповідних формул: $k = (n-1) \cdot n$,

$k = \left(\frac{n \cdot 9}{M} - 1 \right) \cdot n$, де k – кількість перевірок, n – кількість елементів моделі, M – кількість

підмножин (комірок). Як можна помітити, обидва алгоритми мають квадратичну складність. Окрім того слід зауважити, що при кількості комірок більше ніж 9, новий алгоритм потребує менше перевірок, аніж старий. Це демонструє і графік, зображений на рисунку 2 (для

обчислень кількості перевірок оптимізованого алгоритму віртуальне поле було розділено на 50 комірок, в більшості моделей ця цифра значно більша).

Графік залежності кількості перевірок від кількості елементів моделі

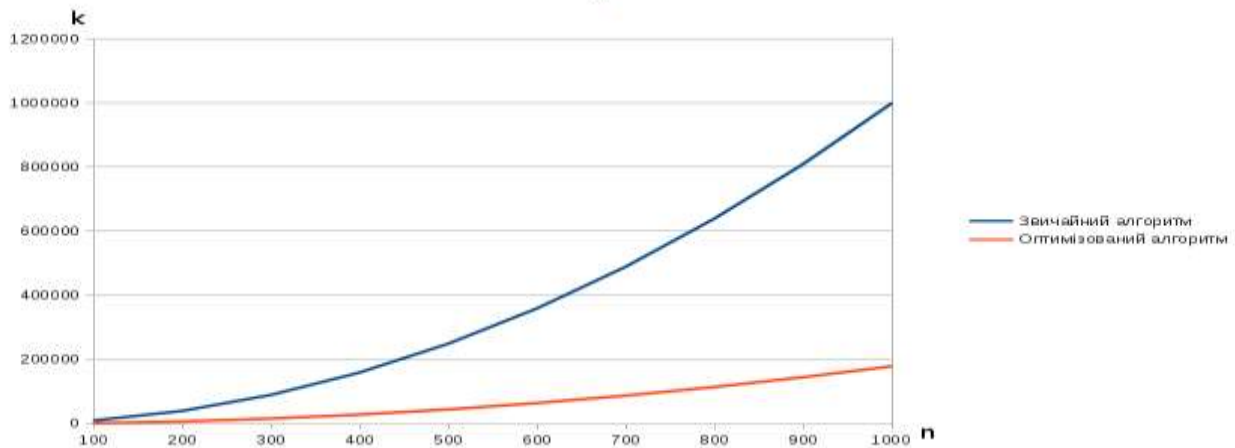


Рис. 2

Система “Трава-Заєць-Вовк” допомогла оптимізувати не лише алгоритм пошуку сусідів, а й провести низку дрібніших вдосконалень. У результаті дослідження отримано стабільну екологічну модель, яку і залишено у кінцевому варіанті програми. Пересічний користувач може використати її для ознайомлення з процесом проведення експериментів в програмі, або ж як приклад стабільної екологічної системи “Хижак-Жертва”.

За сучасними вимогами програми мають бути максимально гнучкими. У нашому випадку це означає, що програма моделювання повинна надавати інструменти для створення та редагування поведінки нових моделей. Тому нами розроблено спеціальну скриптову мову для програмування з наступними можливостями:

1. Визначення параметрів навколишнього середовища.
2. Додавання майже необмеженої кількості класів елементів моделей.
3. Визначення індивідуальних параметрів для кожного виду елементів.
4. Окремий елемент моделі має змогу зчитувати та редагувати параметри своїх сусідів та навіть параметри навколишнього середовища.
5. Жорстка типізація даних.
6. Розроблено інтерпретатор математичних та логічних виразів.
7. В якості параметрів математичних виразів можуть бути поля елементів та моделі і посилання на них.
8. Наявні стандартні умовні оператори.
9. Вбудовані функції на кшталт пошуку сусідів, випадкового переміщення чи зміни кольору елемента.

Нам не вдалося відшукати бібліотеку для синтаксичного розбору скриптової програми, тому довелося реалізовувати його власними силами. Окрім того, для полегшення створення нових моделей було створено вбудований редактор вихідного коду скриптових програм. Він поки що вміє працювати з декількома файлами і підсвічувати ключові слова. У подальшому плануємо створити інструменти відлагодження коду скрипту.

Для того, аби дізнатися про помилки в програмі та побажання кінцевого користувача створено спеціальний сайт, який можна знайти за адресою: <http://simulationmodel.inf.ua/>.

У результаті дослідження було створено алгоритми для роботи з імітаційними моделями, скриптову програму для задання їхньої поведінки. Також написана спеціальна програма, яка включає в себе модуль для проведення експериментів з моделями (логіка роботи задається скриптовою програмою); модуль, який реалізує роботу екологічної моделі; редактор вихідних кодів скриптових програм. Також наявні засоби для проколювання ходу експерименту.

Список використаних джерел:

1. Шлее М. Qt4.5. Профессиональное программирование на C++. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 896 с.
2. Степанов А., Мак-Джонс П. Начала программирования. – Москва: Вильямс, 2011. – 272 с.
3. Давыдов В. C++. Технологии программирования. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 672 с.
4. <http://habrahabr.ru/post/122036/>

**ТЕСТУВАННЯ В СИСТЕМІ ПЕДАГОГІЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ:
ІСТОРІЯ І СЬОГОДЕННЯ**

Ілона Гідулян, Вікторія Корецька

У період реформування національної системи освіти спостерігається активна інтеграція України до європейської спільноти, що супроводжується формуванням спільного освітнього простору та розробкою єдиних критеріїв і стандартів у сфері освіти. Одним із важливих напрямків співпраці є впровадження якісно нових підходів до оцінювання навчальних досягнень учнів та студентів. У цьому контексті особливе місце посідає тестування, як ефективний метод педагогічної діагностики.

Збереження, збагачення та відновлення історичного досвіду тестового методу вимірювання розкриє його значимість та сприятиме розвитку.

Метою представленої статті є з'ясування історії виникнення та розвитку тестового методу діагностики з найдавніших часів до сьогодення, визначення основних етапів розвитку тестування, а також аналіз внеску різних вчених у становлення тестології як науки.

Це модне нині захоплення сучасного суспільства (тестологія) з'явилося дуже давно – ще в епоху античності, проте вчені досі не можуть визначити точного часу. У Стародавньому Єгипті мистецтву жреців навчали тільки тих, хто витримував певну систему випробувань (рівень освіченості, вміння вести бесіду, біографічні дані тощо). У Древній Греції використовували в освіті систему різних випробувань для оцінки розумових і фізичних навичок учнів, зокрема, Піфагор у свою школу приймав учнів, які проходили цілу низку суворих випробувань і відбору: цим перевірялася готовність кожного до тривалої освіти. У Древньому Китаї застосовувалися перші елементи професійного відбору на різні посади, спроби державних іспитів, на яких проводилася перевірка знань претендентів. Існувало тестування і в середні віки, адже вже тоді в багатьох європейських університетах студентам доводилося складати іспити.

Проте таким, яким ми його знаємо сьогодні, тестування сформувалося в кінці XIX – на початку XX ст.

Серед зарубіжних і вітчизняних вчених немає єдиної думки про час і місце появи перших тестів. Дослідженням історії розвитку тестології присвячено багато робіт, серед них роботи В. Аванесова, А. Майорова, В. Кадневського та ін. [1, 2]. Зокрема, В. Кадневський звертав увагу на те, що тести (вимірювання) відігравали набагато важливішу роль в історії людства, ніж ми про це знаємо [2].

Тест в перекладі з англійської мови – випробування, дослідження, перевірка, проба. Але для наукового аналізу цього недостатньо, адже таке трактування не розкриває суттєвих ознак, які виділяють його серед інших засобів психодіагностики, контролю знань, методів оцінки здібностей та ін. Це свідчить про те, що теорія тестів є результатом набутого людством досвіду. На сьогодні існують різні трактування поняття “тест” як з психологічної, так і з педагогічної точок зору. Тест у педагогіці – це система завдань різної складності, специфічної форми, що дозволяє оцінити знання, уміння і навички, виміряти їх рівень.

Термін “тест” вперше був використаний американськими психологами Дж. Кеттелом і В. Маккеоном у їх праці “Розумові тести та виміри” [3]. Дж. Кеттелу відводять особливе місце у розвитку тестування, його ідеї становлять основу сучасної тестології: рівність умов

для всіх випробуваних; обмеженість у часі; відсутність сторонніх; надійність і чіткість завдань; обробка результатів тестування статистичними методами.

До теоретичного обґрунтування проблем тестування зверталися на початку XX ст. американські вчені – Ф. Гальтон (“розумові тести”), К. Пірсон (основи теорії кореляції), Ч. Спірмен (двофакторна теорія), А. Біне і Т. Сімон (шкала Біне-Сімона), Л. Термен (Станфордська шкала інтелекту Біне, коефіцієнт інтелектуальності IQ), В. Макколл (поділ тестів на психологічні й педагогічні), Е. Торндайк (перший стандартизований педагогічний тест), А. Отіс (Альфа- та Бета-тести – перші групові тести) та ін. Нова хвиля використання тестів починається з 60-х рр. XX ст. і пов’язана з розробками американського педагога Р. Тайлера “Державна програма педагогічних вимірювань”, що суттєво вплинула на впровадження тестування в систему освіти США. У 1981 році у США створено Національну раду зі стандартів освіти й тестування.

Теорія тестів у вітчизняній психолого-педагогічній науці розвивалася досить суперечливо. На початку XX ст. відбулися перші спроби впровадження тестів у практику шкільного контролю, характерним для цього періоду було накопичення інформації з тестових технологій. У період сталізму (1930-і рр.) тестологію почали розглядати як ворожу і буржуазну науку, були скасовані не тільки інтелектуальні тести, а й тести успішності, що призвело до застою в експериментальній педагогіці та психології. Пізніше (1950-і рр.) тести використовували переважно у сфері психологічних досліджень. Лише, починаючи з 60-рр. XX ст., тестування почали використовувати як метод вимірювання знань, в основному в спеціальних навчальних закладах військового спрямування. Але ці спроби були невдалими як і організація тестування успішності випускників загальноосвітніх навчальних закладів, здійснена Міністерством освіти 1993-1994 рр.

Після здобуття Україною незалежності розпочинається новий етап у розвитку тестології в нашій країні. У 2002-2005 рр. Центр тестових технологій за підтримки Міністерства освіти і науки України та Міжнародного фонду “Відродження” започаткував експеримент щодо впровадження зовнішнього незалежного оцінювання в систему загальної середньої освіти. Згідно з Указом Президента України від 4 липня 2005 року “Про невідкладні заходи щодо забезпечення функціонування та розвитку освіти в Україні”, з 2006 року в Україні впроваджена національна система зовнішнього незалежного оцінювання, в основу якої покладено модель зовнішнього стандартизованого тестування.

На основі аналізу архівних, педагогічних, психологічних, історико-педагогічних матеріалів та, враховуючи періодизацію розвитку тестування Е. Торндайка, ми пропонуємо весь період розвитку теорії тестів в світовій науці класифікувати в наступні етапи:

I етап (кінець XIX ст.) визначено як період зародження сучасної тестології, початок систематичних вимірювань у педагогіці, появою перших тестів “розумових”, визначено основні принципи тестування (Ф. Гальтон); зроблено перші спроби складання педагогічних тестів (Дж. Фішер); започатковано основи теорії кореляції, вдосконалено методи кореляційного, регресійного і факторного аналізу тестів, введений коефіцієнт кореляції для визначення надійності та валідності тестів (К. Пірсон).

II етап (1900-1920-і рр.) характеризувався посиленою увагою вчених до подальшого розвитку тестології, виокремився педагогічний напрямок у тестуванні, зокрема, здійснено першу класифікацію тестів на чотири класи (тести інтелекту, тести здібностей, тести досягнень, тести особи), створено шкалу на виявлення диференціації нормальних, розумово відсталих дітей і дорослих (тести Біне-Сімона). Розробки Біне-Сімона активізували наукові дослідження вчених багатьох країн, що сприяло створенню нових психологічних, психолого-педагогічних та педагогічних тестів. Крім того, психологами вперше було порушено питання складності тестів. Бурхливий розвиток тестології на даному етапі спровокований Першою світовою війною, що потребувала масових досліджень щодо військово-професійного відбору (Альфа- й Бета-тести).

III етап (1930-1950-і рр.) – починається сучасний етап розвитку шкільного тестування. Створено найбільш популярні тести у світі – вербальні тести і тести на виконання (дію),

розроблено шкалу розумового розвитку. 1940-і рр. відзначилися застосуванням технічних засобів для підрахунку тестових показників. Хоча в атмосфері 30-х рр. XX ст. у вітчизняній науці термін “тест” став символом “педагогічних перекручень”.

IV етап (1960-1980-і рр.) – новий поштовх в розвитку як світової так і вітчизняної тестології, що носив загальноосвітній характер. Характерними для даного етапу стали пошуки вчених, що були спрямовані на підвищення об’єктивності тестів, створення безперервної освітньої системи тестової діагностики, створення нових, більш досконалих засобів опрацювання результатів тестування, накопичення й ефективного використання діагностичної інформації. Зокрема, у вітчизняній педагогіці широко розповсюджувалися збірники завдань і вправ, призначених для використання їх машинами типу “репетитор” і контрольні завдання-тести – “екзаменатор”. Однак полеміка щодо правильності впровадження тестів періодично велася до середини 70-х рр. XX ст. і майже повністю була припинена до початку 1980-х рр.

V етап (1990 рр. – до сьогодення) – для сучасного етапу розвитку тестології характерним є популяризація тестового методу педагогічного оцінювання. Найпоширенішими формами тестування вважається комп’ютерне анкетування та комп’ютерне тестування. Але проблема вдосконалення форм тестування залишається актуальною і сьогодні. Існує ціла мережа Міжнародних організацій з питань тестування, серед яких Альянс для розвитку (Global Development Alliance), Програми сприяння зовнішнього тестування в Україні (USETI – The Ukrainian Standardized External Testing Initiative) та ін.

Список використаних джерел:

1. Аванесов В.С. Тесты в социологическом исследовании / В.С. Аванесов. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
2. Кадневский В.М. Тестовая культура как феномен цивилизации // Образование: исследовано в мире [Электронный ресурс] / В.М. Кадневский. – М.: ОІМ. RU. – Режим доступа: <http://www.oim.ru>.
3. Cattell, James McKeen. 1890. Mental tests and measurements. Mind 15: 373-81.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РЕЗОЛЮЦІЙ

Наталія Головка

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент, З.П. Халецька

Актуальність. Існують комп’ютерні програми, які розроблено для автоматизації доведення логічних теорем. У багатьох із цих програм використано правило висновку, відоме як резолюція. Метод резолюцій був запропонований у 1930 році Жаком Ербраном (1908-1931) для доведення теорем у формальних системах першого порядку. На основі правила резолюції Джон Алан Робінсон (1930 р.н.) у 1965 році запропонував *метод резолюцій* автоматичного доведення логічних теорем. Він опублікував роботу “Машинно-орієнтована логіка, заснована на принципі резолюції”, яка є основоположною в автоматизації правила резолюцій в логіці та є основою для виведення механізмів, що використовуються при програмуванні логіки і мови програмування Пролог [1].

Мета даної статті проілюструвати метод резолюцій та його застосування в алгебрі висловлень і логіці предикатів.

Метод резолюцій застосовується як для формул логіки висловлень, так і для логіки предикатів. В ньому використовується тільки одне правило виводу – *правило резолюції*, яке схематично можна подати так:

$$\frac{X \vee A, Y \vee \bar{A}}{X \vee Y}.$$

Правило резолюції можна подати і у дещо узагальненому вигляді, а саме:

Дж. Робінсон показав, що метод резолюції є коректним і повним в тому розумінні, що порожній диз'юнкт виводиться із вхідної множини диз'юнктив шляхом деякої послідовності кроків резолюції тоді і тільки тоді, коли множина диз'юнктив суперечлива.

Саме по собі правило резолюції утворює повну систему правил виводу для множини диз'юнктивів логіки висловлень. Іншими словами, при використанні одного правила резолюції можна вивести будь-який наслідок з множини формул, які подані у вигляді множини диз'юнктивів.

Розв'язання. Посилки уже записані у кон'юнктивній нормальній формі. Отже, їм відповідатиме така множина диз'юнктивів:

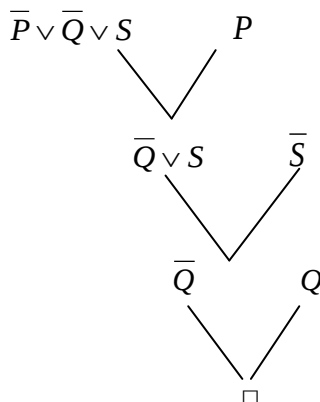
Подамо заперечення висновку у кон'юнктивній нормальній формі:

Отже, отримали таку клаузальну множину: $\{\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R, \bar{P} \vee \bar{Q} \vee S, P, \bar{S}, Q\}$.

Для окремої зручності запишемо елементи (диз'юнкти) цієї множини в позначеннях:

До диз'юнктивів $\alpha_1 - \alpha_5$ застосуємо резолюційний процес. Застосувавши правило резолюцій до диз'юнктивів α_3 і α_2 , дістанемо резольвенту $\alpha_6 = \overline{Q} \vee S$. α_6 і α_4 породжують резольвенту $\alpha_7 = \overline{Q}$, а α_7 і α_5 породжують порожній диз'юнкт $\square$. Це означає, що співвідношення має місце.

Алгоритм дедуктивного виводу зручно зображати у вигляді дерева. Так, для наведеного прикладу дедуктивне дерево матиме такий вигляд:



Зазначимо, що оскільки доведення логічного слідування $\bar{P} \vee S \vee \bar{Q}$ з припущень $\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R$ і $\bar{P} \vee \bar{Q} \vee S$ рівносильне дослідженню формули:

на тотожну істинність, то задачу можна розв'язувати й як перевірку її заперечення на не виконуваність. Подамо заперечення формули (1) в кон'юнктивній нормальній формі:

$$(\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q} \vee S) \wedge P \wedge \bar{S} \wedge Q.$$

Отже, маємо такий самий, як і в попередньому випадку, набір диз'юнктив. Застосувавши до них резолюційний процес, отримуємо порожній диз'юнкт. А це означає, що заперечення формули (1) є суперечністю. Отже, формула (1) є тавтологією.

Приклад 2. Перевірити логічність міркування:

“Якщо Іван – брат Марії або Іван – син Марії, то Іван і Марія – родичі. Іван і Марія – родичі. Іван – не син Марії. Отже, Іван – брат Марії”.

Позначимо висловлення “Іван – брат Марії” буквою А, висловлення “Іван – син Марії” – буквою В і висловлення “Іван і Марія – родичі” – буквою С.

Міркування буде логічне, якщо матиме місце таке співвідношення: $\frac{A \vee B \rightarrow C, C, \bar{B}}{A}$.

Слідування буде мати місце тоді і тільки тоді, коли формула $((A \vee B \rightarrow C) \wedge C \wedge \bar{B}) \rightarrow A$, в якій А, В, С, трактуються як змінні, є тавтологією. А це можна перевірити, склавши таблицю істинності або рівносильними перетвореннями, чи методом від супротивного. А ми застосуємо метод резолюцій. КНФ для формули $A \vee B \rightarrow C$ матиме вигляд $\bar{A} \wedge \bar{B} \vee C \equiv (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee C)$. Інші посилки уже записані у кон'юнктивній нормальній формі. Отже, посилки дають таку множину диз'юнктив: $\alpha_1 = \bar{A} \vee C$, $\alpha_2 = \bar{B} \vee C$, $\alpha_3 = C$, $\alpha_4 = \bar{B}$. До неї слід приєднати заперечення висновку, тобто $\bar{A}$: $\alpha_5 = \bar{A}$.

До диз'юнктив α_1 α_5 жодного разу не застосовано правило резолюції. Отже, порожнього диз'юнкта з такої множини вивести не можна. А це й означає, що логічне слідування місця не має, а, значить, міркування не логічне.

Є багато різних процедур для реалізації методу резолюцій: локрезолюція, метод насичення рівня, стратегія викреслювання тощо.

У логіці предикатів для дослідження невиконаності множини диз'юнктив потрібно провести додаткову процедуру уніфікації формул. Тут літералом є елементарна формула, терми якої можуть містити змінні, сталі або вирази із функціональних символів і термів, наприклад, $P(x, f(y), b)$, $\overline{Q(g(x, a))}$.

Підстановкою у літерали термів замість змінних можна отримати різні частинні випадки (приклади) літерала. Підстановку терма t замість змінної x позначають $\{t/x\}$.

Множина літералів $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ називається уніфікованою, якщо існує така підстановка θ , що $(L_1)_\theta = (L_2)_\theta = \dots = (L_n)_\theta$. Підстановка θ називається уніфікатором множини літералів $\{L_i\}$. Нехай деякий диз'юнкт D містить літерали $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$, для яких існує спільний уніфікатор. Тоді замість k літералів залишають один і така процедура називається склейкою.

Перед побудовою резольвент спочатку виконують склейку у кожному диз'юнкті (якщо це можливо). Для перевірки логічного слідування методом резолюцій використовують алгоритм [2]:

- 1) утворити формулу $F = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \bar{B}$, при цьому у кожній посилці та висновку змінні перейменувати, позначивши усі різними буквами, оскільки вони можуть мати різний зміст;
- 2) знайти сколемівську стандартну форму цієї формули $F_s = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (F^*)$ і записати її матрицю у кон'юнктивній нормальній формі $F^* = D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_k$;
- 3) до множини диз'юнктив $D_1, D_2, \dots, D_n$ застосувати метод резолюцій провівши, за необхідності, уніфікацію літералів. Якщо у результаті побудови всіх можливих резольвент отримується порожній диз'юнкт $\square$, то множина диз'юнктив невиконувана, формули F_s і F тотожно хибні, отже, є логічне слідування.

Приклад 3. Перевірити за допомогою методу резолюцій, чи правильне наступне міркування: $\forall x(M(x) \rightarrow \overline{P(x)}) \quad \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x(S(x) \rightarrow \overline{P(x)})$.

З посилок та висновку утворимо формулу, яку потрібно перевірити на не виконуваність. Змінні у формулах в областях дії кванторів перейменуємо: $F = \forall x(M(x) \rightarrow \overline{P(x)}) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow M(y)) \wedge \exists z(S(z) \rightarrow \overline{P(z)})$. Зведемо формулу до випередженої нормальної форми:

$$F \equiv \forall x(\overline{M(x)} \vee \overline{P(x)}) \wedge \forall y(\overline{S(y)} \vee M(y)) \wedge \exists z(\overline{S(z)} \vee \overline{P(z)}) \equiv \forall x(\overline{M(x)} \vee \overline{P(x)}) \wedge \forall y(\overline{S(y)} \vee M(y)) \wedge \exists z(S(z) \wedge \overline{P(z)}) \equiv \exists z \forall x \forall y((\overline{M(x)} \vee \overline{P(x)}) \wedge (\overline{S(y)} \vee M(y)) \wedge S(z) \wedge \overline{P(z)}).$$

Квантор існування виносимо першим, оскільки для кон'юнкції справедливий переставний закон. Це спростить запис сколемівської форми:

$$F_s = \forall x \forall y ((\overline{M(x)} \vee \overline{P(x)}) \wedge (\overline{S(y)} \vee M(y)) \wedge S(a) \wedge \overline{P(a)}).$$

Випишемо множину диз'юнктив: (1) $\overline{M(x)} \vee \overline{P(x)}$, (2) $\overline{S(y)} \vee M(y)$; (3) $S(a)$; (4) $\overline{P(a)}$.

Далі проводимо уніфікацію літералів та утворюємо резольвенти, виписуючи їх за методом насичення рівня:

- (5) $\overline{P(x)} \vee \overline{S(x)}$ із (1), (1) після $\{x/y\}$;
- (6) $\overline{M(a)}$ із (1), (4) після $\{a/x\}$;
- (7) $M(a)$ із (2), (3) після $\{a/y\}$;
- (8) $\square$ із (6) і (7).

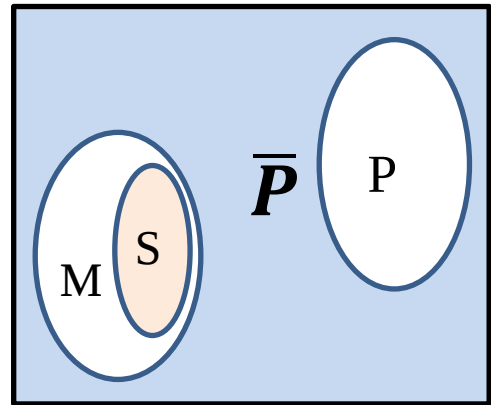


Рис.1.

Оскільки отримали порожній диз'юнкт, то формула не виконувана, тому дане логічне слідування є правильним. Це один з правильних силогізмів Арістотеля *Celarent*. З рис.1 видно, що з даних посилок висновок є очевидним.

Висновок. Отже, ми розглянули метод резолюцій, який є одним з базових методів в теорії доведення. Навели приклади використання даного методу як в логіці висловлень, так і в логіці предикатів.

Список використаних джерел:

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 1991. – 287 с.
2. Лісова Т. В. Математична логіка та теорія алгоритмів. [практикум] – Ніжин: Вид-ць ПП Лисенко М.М., 2011 – 116 с.

СПІВВІДНОШЕННЯ ФІЗИКИ Й ФІЛОСОФІЇ НА РІЗНИХ ЕТАПАХ РОЗВИТКУ НАУКИ

Анна Гринчишина, Микола Садовий

Актуальність проблеми. В розвитку фізики як науки відбуваються зміни: відкриття нових явищ, встановлення законів, удосконалення методів дослідження, виникнення нових теорій. Все це потребує певного співвідношення історичного і логічного в науковому навчальному пізнанні, а також способів реалізації цього принципу в навчально-виховному процесі з фізики. Методологічною основою розуміння наукової сучасності і закономірностей складних об'єктів, дидактичної теорії і практики, які розвиваються, є принцип історизму. Він є одним з компонентів діалектичних методів, які розглядають минуле, сучасність і майбутнє цих об'єктів, явищ і процесів у діалектичній єдності, виходячи не тільки з їх динаміки і мінливості у часі, але саме з їх розвитком, тобто незворотної спрямованості і закономірними змінами явищ і процесів, що визначає напрямки і характер їх історичної трансформації [1]. В

той же час відбувається оновлення технічних і дидактичних засобів навчання, що сприяє урізноманітненню форм і методів проведення уроків з фізики, модернізації прийомів розкриття елементів історії фізики під час вивчення певної теми.

Мета статті – висвітлити теорію і практику єдиного історичного наукового процесу розвитку природи і способів її вивчення та дослідження, розкрити історичні закономірності становлення фундаментальних фізичних явищ, понять, теорій, показати їх еволюцію, суспільно-історичну значущість досягнень фізичної науки, а також співвідношення фізики й філософії на різних етапах розвитку науки.

Ю. О. Храмов виділяє *чотири етапи розвитку сучасної фізики* [1]. Перші два етапи відносяться до періоду становлення квантової фізики.

О. М. Трифонова стверджує, що з 2003 року розпочався новий, *п'ятий етап*, пов'язаний з виходом експериментальної бази фізики за межі Землі у Всесвіт, де у єдності охоплюються всі процеси природи [4].

На рисунку 1 схематично зображено еволюційний перехід від понятійної структури класичної фізики до квантової, потім до загальної теорії поля, теорії вакууму, струн та ін.

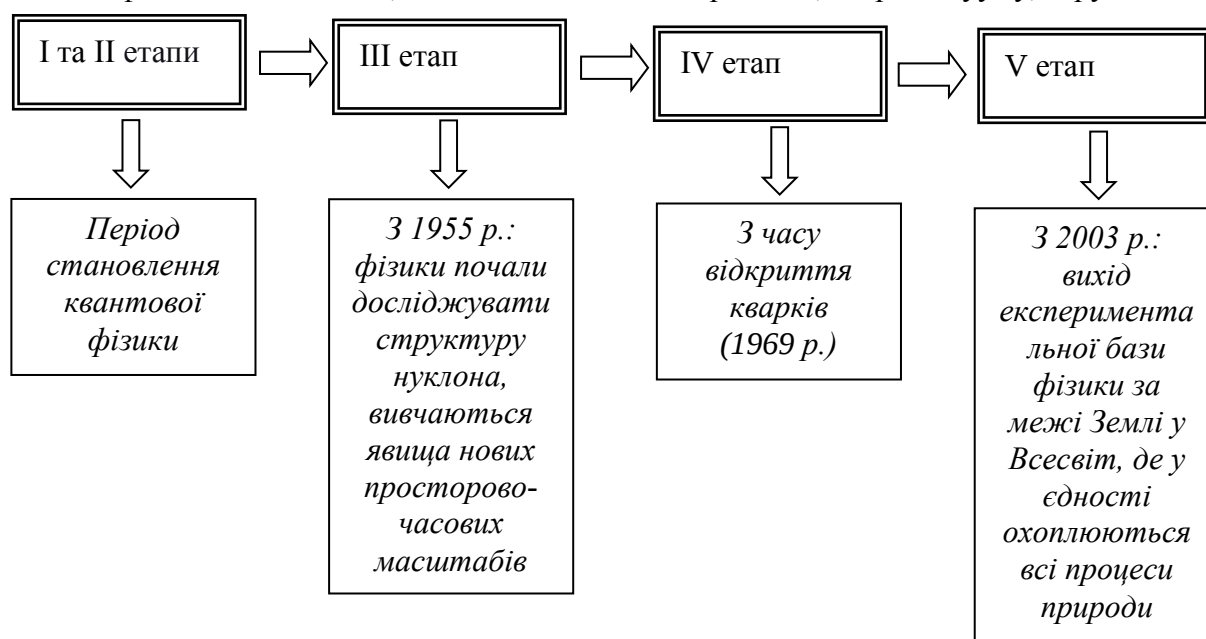


Рис. 1. Етапи розвитку сучасної фізики

Аналізуючи етапи розвитку сучасної фізики, становлення класичної фізики ми пов'язуємо з виходом у світ у 1687 р. “Математичних початків натуральної філософії” І. Ньютона. Роботи М. Фарадея та Д. Максвелла, Р. Рентгена, А. Бекереля, Д. Томсона, подружжя Кюрі, Х. Лоренца, А. Пуанкаре забезпечили подальший розвиток фізики.

Перший етап у формуванні квантової фізики охоплює 1905-1931 р.р. У цей час формується спеціальна теорія відносності і змінюється погляд на абсолютні і відносні величини, виникає релятивістська та ядерна фізика, здійснюється становлення квантової механіки. Ми особливо звертаємо увагу на відмінність у поглядах на абсолютні та відносні величини І. Ньютона та А. Ейнштейна, а також те, що квантова механіка виникла як механіка електрона у атомі.

Другий етап (1932-1954 р.р.) розпочався розщепленням атомного ядра, було створено ядерну фізику, фізику елементарних частинок, квантову електроніку. До 60-х років ХХ ст. наукові досягнення вказаних напрямків були засекреченими у провідних державах, що негативно вплинуло на формування достатньої методики навчання

Третій етап (1955-1968 р.р.) характерний розвитком фізики елементарних частинок, прискорювачів, лазерів, плазми і термоядерного синтезу, комічних польотів, теорії кварків.

Фізики почали досліджувати структуру нуклона, особливістю якого є вивчення явищ нових просторово-часових масштабів.

Четвертий етап (1969-2002 р.р.) розпочався системним експериментальним доведенням існування кварків, субадронної їх моделі.

П'ятий етап (2003 р.), на нашу думку, розпочався з часу одержання підтвердження існування темної матерії, темної енергії, прискорення розширення нашого Всесвіту, реєстрації утворення чорної діри при зіткненні двох нейтронних зірок, створенням інфляційних моделей як результат зв'язку, який встановлено між фізикою елементарних частинок та космологією.

Виходячи з поданої класифікації, ми розглянули вплив філософських підходів на розвиток фізики.

Співвідношення фізики та філософії вперше проглядається у працях М. Фарадея і Д. Максвелла. Поняття про поле поступово усвідомлюється як самостійна сутність, яка не зводиться до механічних процесів в ефірі та переходить із захисного поясу гіпотез механічної дослідницької програми в основу нової фундаментальної теорії. З останньої починається побудова базисної теорії, що покладена за основу дослідницької освітньої програми.

О. М. Трифонова узагальнила роботи Д. Лармора, Д. Томсона, Г. Лоренца, і обґрунтувала методику навчання поняття фізичного поля, і запропонувала методику вивчення електромагнітної теорії матерії [3]. На цій основі запропоновано програму навчання електромагнетизму у школі.

На початку ХХ ст. виникла спеціальна теорія відносності і відповідна дослідницька програма. Перехід до релятивістської дослідницької програми розпочався зі створення нової фундаментальної теорії – електродинаміки рухомих тіл Г. Лоренца і А. Ейнштейна. На цьому рівні не забезпечено перехід релятивістських координат із області захисного поясу старої дослідницької програми у тверде ядро нової релятивістської програми. Якщо не враховувати наявності таких зв'язуючих механізмів, то помітним є існування неузгодженостей у розвитку фізичних картин світу, наприклад, між декартівською, ньютонівською і релятивістською картинами світу. Ці зміни сприяли виявленню нових вимог принципу науковості.

Дискретні зміни ґрунтувались на нових принципах та ідеях. Зокрема, філософське значення ідеї доповнюваності для фізичної теорії полягає в тому, що відповідно до неї не лише можна, але при певних умовах навіть необхідно, застосовувати дуалістичні поняття до одного і того ж предмету дослідження. У принципі доповнюваності Н. Бора щодо суперечності між корпускулярними і хвильовими властивостями понять не стільки розв'язуються, скільки загострюються уявлення про протилежні взаємовиключаючі властивості фізичних явищ. На нашу думку слабкість такого підходу у тому, що виклад відповідних питань концентрується на тлумаченні обмеженості старих основних класичних понять, а не на якісно нових фундаментальних поняттях.

Ми поділяємо точку зору фізиків, які вважають, що наукова революція у сучасній фізиці мікросвіту є специфічною. Характеризуючи стан у цій галузі, академік В.Л. Гінзбург писав, що вже близько 50 років фронт фізики проходить в області релятивістської квантової теорії. Досягнення в цій області величезні, в останні роки вони особливо випуклі [5].

Виникає неоднозначність у визначенні того, що маємо: закінчується стара революція чи розпочинається третя, або настав період між революціями? Проте однозначність є незаперечною у наступному. Зміна дослідницьких програм відбувалась за схемою: механічна програма → електропольова → релятивістська → квантова → вакууму → струн → Всесвіту визначала еволюцію принципу наочності: від уявних засад до експериментальних, а далі до наочних моделей, системності.

Л.Б. Окунь вважає: “Що стосується експериментальних і теоретичних відкриттів останніх двадцяти п'яти років, то насамперед необхідно підкреслити, що всі вони знаходяться в руслі лагранжевої квантової теорії поля, створеної у першій половині минулого століття. Не дивлячись на незвичність таких об'єктів, як кварки чи Хігсові

бозони, теорії, які їх описують, не порушують жодного з установлених раніше принципів. Напевне Н. Бор не відніс би їх до тих “божевільних” теорій, про необхідність яких він говорив в кінці 50-х років” [6].

В.С. Березовський вказує, що за останнє десятиліття локально-калібровочні теорії здійснили революцію в фізиці, але він вважає, що це була “без галаслива революція”, щодо науковості та наочності [7]. На думку Д. Ліопулоса, “теорії неабелевих калібровочних полів не лише ознаменували колосальний прогрес в сучасній фізиці, але їх дія виявилась набагато глибшою, і вона помітно змінила наше мислення”.

Висновки. Досліджуючи розвиток фізичних понять та теорій, ми прийшли до висновку, що історико-методологічні проблеми науки складають філософську основу пізнання природи та розвитку суб’єктів навчання. Найкраще розвиток та зміна дослідницьких програм відображено в історичному аспекті становлення квантових ідей. Приведений нами аналіз періодів зміни парадигм і теорій у фізиці та методиці її навчання мало розглядався. Це говорить про те, що шляхи реалізації викладених вище ідей потребують науково-методичних досліджень. Отриманий результат можна назвати імпульсом для початку оновлення формування методики навчання студентів новітніх понять, явищ, суджень у курсі загальної фізики.

Список використаних джерел:

1. Храмов Ю.А. История физики / Храмов Ю.А. – К.: Феникс, 2006. – 1176 с.
2. Ахиезер А. И. Биография элементарных частиц/А. И. Ахиезер, М. П. Рекало. – [изд. 2-е] – К.: Наукова думка, 1983. – С. 27-34.
3. Воронов В. К. Основы современного естествознания: учебное пособие для вузов/ В. К. Воронов, М. В. Гречнева, Р. З. Сагдеев. – [издание 2-е] – М.: Высшая школа, 1999. – 247 с.
4. Трифонова О.М. Взаємозв’язки принципів науковості та наочності в умовах кредитно-модульної системи навчання квантової фізики студентів вищих навчальних закладів: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Трифорова Олена Михайлівна. – Кіровоград, 2009. – Т. 1. – 216 с.; Т. 2. (Додатки) – 301 с.
5. Садовий М.І. Історія фізики з перших етапів становлення до початку ХХІ століття: навчальний посібник [для студ. ф.-м. фак. вищ. пед. навч. закл.] / М.І. Садовий, О.М. Трифонова – Кіровоград: ПП «Ексклюзив-Систем», 2012. – 415 с.
6. Садовий М.І. Становлення та розвиток фундаментальних ідей дискретності та неперервності у курсі фізики середньої школи / Садовий М.І. – Кіровоград: Принт-Імідж, 2000. – 396 с.
7. Березовский В.С. Объединенные калибровочные теории и нестабильный протон. /В.С.Березовский // Природа. – 1984. – № 11. – С. 25.

ПОТІК ЕНЕРГІЇ ХВИЛЬ В ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ “ШАР-ШАР”

Надія Дорофєєва, Юрій Гуртовий

Вступ. Системи зі стратифікованою структурою охоплюють широке коло об’єктів та процесів. Вивчення нелінійних хвильових процесів в таких системах має значний загальнофізичний і прикладний інтерес та є предметом багатьох досліджень. Внутрішні хвилі в системах, що складаються з рідин з різними властивостями, відносяться до гідродинамічних задач вказаного класу.

У випадку двошарової рідини, коли верхня і нижня рідини мають скінчену глибину, важливою характеристикою системи є відношення глибин рідких шарів. Цей параметр може істотно впливати на баланс нелінійних і дисперсійних ефектів і, отже, на стійкість та еволюцію хвильових пакетів при їхньому поширенні вздовж поверхні дотику шарів.

Великі труднощі математичного характеру, що зустрічаються при розв’язуванні задач точної хвильової теорії, призводять до необхідності розвитку різного роду наближених нелінійних теорій. В результаті інтенсивно розвинулись асимптотичні підходи, і вони, по

суті, домінують у проведенні кількісного і якісного аналізу явищ. Широке розповсюдження одержали різні варіанти асимптотичних підходів Ж. Буссінеска, Д. Кортвега і Г. де Вріза, К. Фрідрікса, В.Е.Захарова та ін. [2].

Постановка задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідкого шару

$$\varphi_{21} = i\omega k^{-1} \left[A \exp(i\theta) - \bar{A} \exp(-i\theta) \right] \frac{ch(k(h_2 - z))}{sh(kh_2)}$$

$$\Omega_1 = \{(x, y, z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h_1 < z < 0\} \text{ з густиною } \rho_1$$

та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, y, z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h_2\}$ з густиною ρ_2 .

Швидкості в Ω_j виражені через градієнт потенціалу φ_j , $j=1,2$. Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$. Введемо безрозмірні змінні, що дозволило в якості малого параметру асимптотичного аналізу використовувати параметр нелінійності $\alpha = a/L \ll 1$. Математична постановка задачі у безрозмірному вигляді має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_j &= \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \text{ в } \Omega_j, j=1,2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} &= -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2} \alpha \left[(\bar{\nabla} \varphi_1)^2 - (\bar{\nabla} \varphi_2)^2 \right] - T \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0 \text{ при} \\ z &= \alpha \eta(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = -h_1, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = h_2 \end{aligned}$$

Для визначення наближеного розв'язку задачі (1)-(5) для малих, але кінцевих амплітуд, застосуємо метод багатомасштабних розвинень

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\alpha^3),$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\alpha^3), \quad (j=1, 2)$$

де, як було зазначено вище, α – коефіцієнт нелінійності, $x_i = \alpha^i x$, $t_i = \alpha^i t$, $i=0, \dots, n-1$ – масштабні змінні.

В ході розв'язання отримано наближення першого порядку [1]:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A \exp(i\theta) + \bar{A} \exp(-i\theta), \\ \varphi_{11} &= -i\omega k^{-1} \left[A \exp(i\theta) - \bar{A} \exp(-i\theta) \right] \frac{ch(k(h_1 + z))}{sh(kh_1)}, \\ \varphi_{21} &= i\omega k^{-1} \left[A \exp(i\theta) - \bar{A} \exp(-i\theta) \right] \frac{ch(k(h_2 - z))}{sh(kh_2)}. \\ \varphi_{11} &= i\omega k^{-1} \cdot A \sin(kx - \omega t) \frac{chk(h_1 + z)}{shkh_1}, \\ \varphi_{21} &= \frac{i\omega}{k} \cdot A \sin(kx - \omega t) \frac{chk(h_2 - z)}{shkh_2}. \end{aligned}$$

Енергія, яку переносить хвиля у такій системі, в першому наближенні обчислюється наступним чином [2]:

$$\text{Нижній шар: } E_1 = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} dz.$$

$$\text{Верхній шар: } E_2 = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} dz.$$

Після деяких перетворень маємо:

$$E_1 = \frac{\omega^2}{\tau k} A^2 \int_t^{t+k} dt \int_{-h_1}^0 k \cos(kx - \omega t) \frac{ch^2 k(h_1 + z)}{sh^2 h h_1} \cdot (-\omega) \sin(kx - \omega t) dz = \frac{1\omega^3 A^3}{4ksh^2 k h_1} \cdot \left(h_1 + \frac{shkh_1}{2k} \right);$$

$$E_2 = \frac{\omega^2 \rho}{\tau k} A^2 \int_t^{t+k} dt \int_0^{h_2} k \cos(kx - \omega t) \frac{ch^2 k(h_2 + z)}{sh^2 h h_2} \cdot (-\omega) \sin(kx - \omega t) dz = \frac{1\omega^3 A^3 \rho}{4ksh^2 k h_2} \cdot \left(h_2 + \frac{shkh_2}{2k} \right).$$

Висновок: таким чином потік енергії прямо пропорційний в напрямку квадрату амплітуди та переноситься з груповою швидкістю в напрямку розповсюдження хвилі.

Список використаних джерел:

1. Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особливості хвильових пакетів у двошаровій рідині//Каразінські природознавчі студії. Матеріали міжнародної наукової конференції 14-16 червня 2004 р. – Харків: Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2004. – С.168.
2. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. – Ч.3: Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ОКОЛІ РЕГУЛЯРНОЇ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

Наталя Драна, Інна Ключник

У наш час теорія асимптотичних методів продовжує розвиватися. Увагу вчених, що досліджують асимптотичні методи диференціальних рівнянь, привернула так звана проблема сингулярних збурень. Вона знаходить своє застосування в розвитку таких прикладних областей, як теорія автоматичного регулювання, квантова механіка, газодинаміка, кінематика та інші.

Багато років працюють в області асимптотичних методів теорії диференціальних рівнянь В. Вазов, Й. Сібуйя, Г. Лангер, Сяо Линь. Загальну теорію диференціальних рівнянь та теорію динамічних систем розглядав Дж. Біркгоф [1]. С.А. Ломов запропонував метод інтегрування лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь [2], та розглядав сингулярно збурене диференціальне рівняння з регулярною особливістю. Американський математик Ф. Олвер досліджував асимптотичні наближення розв'язку рівняння з великим параметром [3]. М. В. Федорук – аналітичне рішення в комплексній площині рівнянь з аналітичними коефіцієнтами, зокрема явище Стокса [4]. Асимптотичний розклад за малим параметром розв'язку нелінійних систем виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

запропоновано А. Б. Васильєвою та В.Ф. Бутузовим [5].

Аналітичні розв'язки нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійними відхиленнями аргументів досліджував А. М. Самойленко [6]. Він же вперше побудував асимптотичні розв'язки нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь при наявності імпульсного впливу. Метод асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем з виродженою в точці матрицею при похідній, з використанням степеневих функцій, запропоновано Г.В. Завізіоном [7].

Дана стаття присвячена побудові розв'язку систем диференціальних рівнянь в околі регулярної особливої точки.

Розглянемо рівняння вигляду

$$xY' = A(x)Y \quad (1)$$

де $A(x)$ голоморфна матриця.

Означення. Точка $x=0$ називається регулярно особливою точкою або особливою точкою першого порядку диференціального рівняння (1).

Зробимо у рівнянні (1) заміну

$$Y = P(x)Z$$

Рівняння (1) прийме вигляд

$$xZ' = B(x)Z \quad (2)$$

де

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) = xP^{-1}(x)P'(x) \quad (3)$$

Причому, рівняння (3) еквівалентне рівнянню

$$xP'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x) \quad (4)$$

Покладемо

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r, A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r, B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^r \quad (5)$$

Підставимо матриці вигляду (5) у рівняння (4) та, почленно перемноживши і прирівнявши члени з однаковими степенями x в обох частинах отриманої рівності, отримаємо рівняння вигляду:

$$A_0 B_0 - P_0 B_0 = 0 \quad (6)$$

$$(A_0 - rI)P_r - P_r B_0 = -\sum_{s=0}^{r-1} (A_{r-s} P_s - P_s B_{r-s}), r \geq 0$$

У (6) найпростіше вибрати B_0 , вважаючи $B_0 = A_0$, тоді $P_0 = I$. У [8] доведено наступну теорему:

Теорема. Якщо $A(x)$ голоморфна при $x=0$ і якщо жодні два власних значення $A(0)$ не відрізняються на додатне ціле число, то диференціальне рівняння

$$xY' = A(x)Y$$

має матричний розв'язок вигляду

$$Y = P(x)x^{A(0)}, P(0) = I \quad (7)$$

причому $P(x)$ голоморфна при $x=0$, I – одинична матриця. Степеневий розклад $P(x)$ можна отримати за допомогою раціональних операцій над коефіцієнтами A_r розкладу

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$$

Застосовуючи цю теорему, знайдемо розв'язок наступного рівняння з регулярно особливою точкою.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$xY' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix} Y. \quad (8)$$

Представимо матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix}$ для диференціального рівняння (8), у вигляді (5):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{A^{(n)}(0)}{n!}, A(0) = A_0, \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right|_{x=0}}{2!} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Знайдемо власні значення матриці A_0 з рівняння

$$|A_0 - \lambda I| = 0, \lambda_{1,2} = 0, \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Як ми бачимо, власні значення не відрізняються на ціле додатне число, тому згідно теореми, розв'язок рівняння шукаємо у вигляді (7), де $I - (2 \times 2)$ розмірна одинична матриця.

$$P_0 = I, \quad (10)$$

$$B_0 = A_0, r=1$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$(A_0 - I)P_1 - P_1B_0 = -(A_0P_0 - P_0B_0) \quad (11)$$

З цього рівняння знайдемо P_1 . Для знаходження P_1 , покладемо $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ і

підставивши в (11) маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Після елементарних перетворень отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_1 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

З якої $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$, отже

$$P_1 \equiv 0 \quad (12)$$

Знайдемо матрицю P_2 . Для цього покладемо в (6) $r=2$, B_1 - нульова матриця.

Отримаємо наступне рівняння:

$$(A_0 - 2I)P_2 - P_2B_0 = -(A_1P_0 - P_0B_1) \quad (13)$$

Поклавши $P_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ у (13) одержимо:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язавши останню систему рівнянь, маємо $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$, отже

$$P_2 \equiv 0 \quad (14)$$

Таким чином, врахувавши значення (10), (12), (14) з (7) маємо розв'язок рівняння (8) з точністю до x^2 .

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 \right) x^{A(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{A(0)},$$

де A_0 визначена в (9).

Список використаних джерел:

1. Биркгоф Дж. Природа, влияние и значение относительности.- Ижевск: НИЦ. – 2001. – 176 с.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука. – 1981. – 400 с.
3. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.:Наука. – 1978. – 376 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1983. – 352 с.
5. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённых уравнений. – М.:Наука. – 1973. – 272 с.
6. Самойленко А.М., Пелюх А.Г. Асимптотически ограниченные на всей оси решения систем линейно дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. // Укр. мат. журн. – 1994. –Т.46,№11. – С.1597-1601.
7. Завизион Г.В. Система линейных дифференциальных уравнений с вырожденностью в точке. // Мат. Заметки. – 2008. – Т.83, вып.5. – С.796-800.
8. Wasow W. Linear Turning Point Theory. – NewYork, Springer-Verlag 1985.

ЕКОНОМІКО-СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЦІЇ ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ В УКРАЇНІ

Маргарита Дроздова

Науковий керівник – кандидат економічних наук, доцент Я.О. Довгенко

Актуальність теми. Заробітна плата традиційно належить до основних показників матеріального добробуту, зокрема, доходів. У загальних доходах домогосподарств України заробітна плата становить найбільшу частку, і саме її динаміка визначає структурні зрушення у сукупних ресурсах домогосподарств. Однією з актуальних проблем у сфері оплати праці в Україні є наявність необґрунтованої галузевої, регіональної та професійної диференціації заробітної плати найманих працівників. Об'єктивна диференціація рівня заробітної плати – важлива умова підвищення її мотиваційної функції.

Постановка проблеми. Ефективне функціонування та розвиток ринку праці в Україні вимагає адекватної організації оплати праці, що передбачає як забезпечення її відтворювальної функції, так і взаємозв'язок рівня заробітної плати найманих працівників з результативністю та продуктивністю їхньої праці, кваліфікацією, досвідом тощо.

Мета дослідження. На основі теоретичного матеріалу проаналізувати сучасний стан заробітної плати в Україні та дослідити її розподіл за рівнем оплати праці на нерівномірність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню питань, пов'язаних з організацією оплати праці, її рівнем і динамікою, чинниками, що зумовлюють диференціацію, присвячено праці відомих українських учених, зокрема, О. Грішної [1], Н. Шульги [2], С. Цимбалюка [3], А.М. Колота, Г.Т. Кулікова [4] та інших.

Виклад основного матеріалу дослідження. Заробітна плата – це винагорода, обчислена, як правило, у грошовому виразі, яку за трудовим договором роботодавець виплачує працівникові за виконану ним роботу. Розмір заробітної плати залежить від складності та умов виконуваної роботи, професійно-ділових якостей працівника, результатів його праці та господарської діяльності підприємства.

Диференціацією заробітної плати називають відмінності у рівнях заробітної плати працівників залежно від різних чинників [2, с.10]. Під рівнем диференціації розуміють кількісні оцінки, що характеризують співвідношення рівня оплати праці (заробітної плати) окремих груп працівників, а під ступенем диференціації – якісні характеристики таких відмінностей. При вивченні диференціації оплати праці виокремлюють різні її види, зокрема галузеву, регіональну, професійну (кваліфікаційну, посадову), гендерну [3, с.18], тощо.

Інформаційною базою оцінювання і статистичного аналізу диференціації оплати праці є результати групування найманих працівників за суттєвими ознаками, при цьому кожна група характеризується абсолютними і середніми показниками. Більш складний спосіб аналізу диференціації доходів населення – розрахунок накопичуваних або кумулятивних частот і побудова кумулятивних кривих або *кривих Лоренца*. Область між лінією абсолютної рівності і кривою Лоренца вказує на ступінь нерівності у розподілі доходів [1, с. 55]. Чим більшою є ця область, тим більша нерівність розподілу доходів у суспільстві. З кривою Лоренца пов'язаний інший вимірювач нерівності доходів – *коефіцієнт Джині*, який дорівнює відношенню площі фігури, що утворюється між кривою Лоренца та лінією абсолютної рівності, до площі трикутника, що утворюється лінією абсолютної рівності та координатними осями. Цей коефіцієнт коливається в діапазоні між нулем (у випадку абсолютної рівності) та одиницею (у випадку абсолютної нерівності).

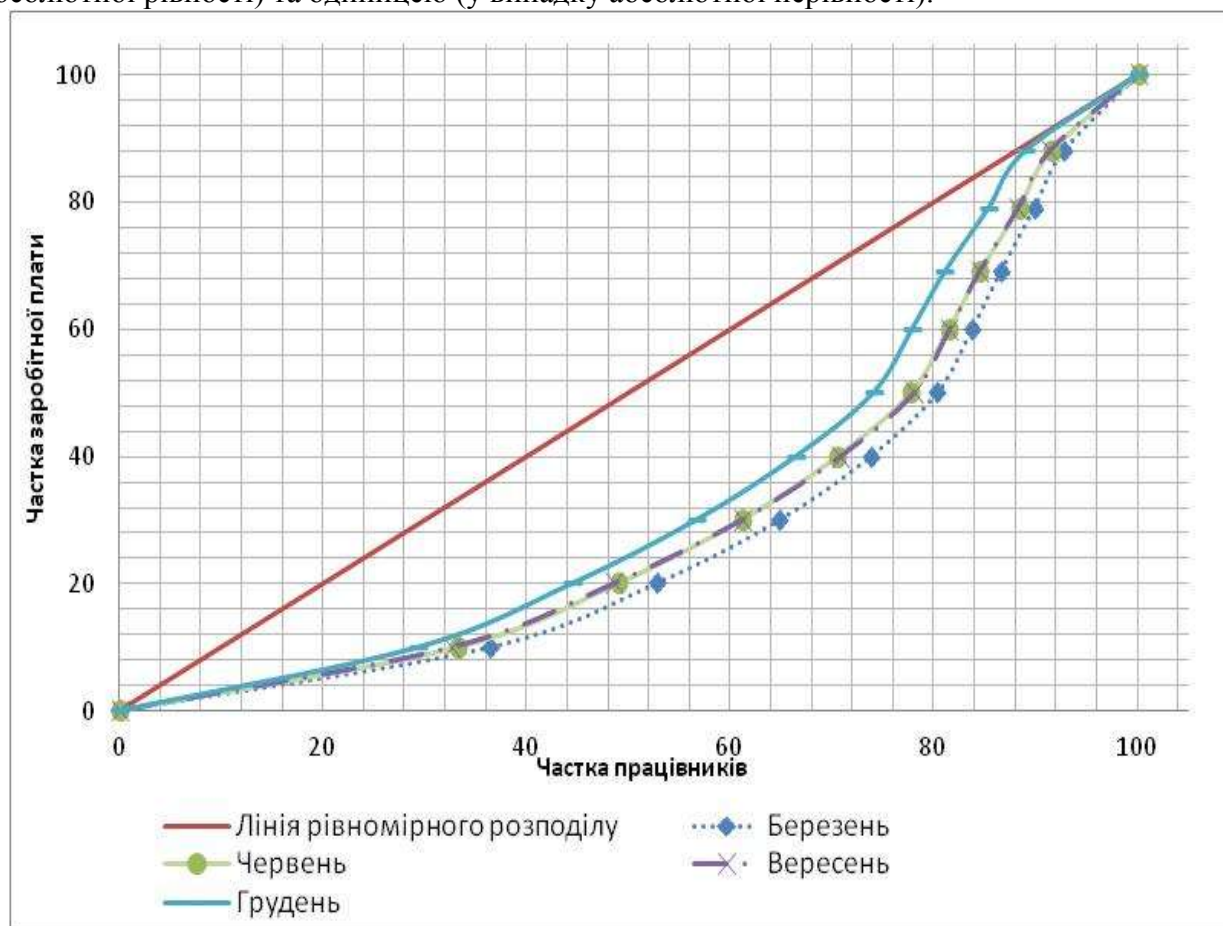


Рис. 1. Криві Лоренца для кварталів 2011 року.

Для перевірки розподілу заробітної плати на нерівномірність, побудуємо і проаналізуємо криві Лоренца та коефіцієнти Джині для 2011 року, використовуючи дані сайту державного комітету статистики [5] про розподіл кількості працівників за розмірами нарахованої заробітної плати за 2011 рік.

З рисунка 1 можна побачити нерівномірність розподілу заробітної плати населення України у 2011 році. Найбільша нерівномірність спостерігається у березні, а найменша – у грудні. 20% найбіднішого населення отримує близько 5% сукупної заробітної плати, а 20% найбагатшого населення отримує близько 50% сукупної заробітної плати. Можна

спостерігати, що для 10% найбагатшого населення України заробітна плата розподілена майже рівномірно.

Розрахувавши коефіцієнт Джині для 2011 року, отримаємо: $G=0,329$. Тобто можна зробити висновок, що нерівномірність в розподілі заробітної плати не дуже велика.

Оцінка нерівномірності розподілу значень ознаки між окремими складовими сукупностей ґрунтується на порівнянні часток двох розподілів – за кількістю елементів сукупності d_j та за обсягом значень ознаки D_j . Якщо розподіл значень ознаки рівномірний, то $d_j=D_j$. Відхилення часток свідчить про певну нерівномірність розподілу, яка вимірюється коефіцієнтами локалізації і концентрації [3, с. 102]: $L_j = \frac{D_j}{d_j}$; $K = \frac{1}{2} \sum_1^m |D_j - d_j|$.

Таблиця 1. Коефіцієнти локалізації і концентрації для розподілу заробітної плати (2011 рік):

Заробітна плата у межах, грн:	Коефіцієнти локалізації			
	Березень	Червень	Вересень	Грудень
<1500	0,274725	0,301205	0,306748	0,341297
1500-2000	0,613497	0,636943	0,628931	0,662252
2000-2500	0,826446	0,819672	0,793651	0,819672
2500-3000	1,111111	1,06383	1,030928	1,020408
3000-3500	1,538462	1,388889	1,388889	1,315789
3500-3750	2,941176	2,702703	2,857143	2,631579
3750-4000	3,571429	3,225806	3,448276	3,125
4000-4500	3,030303	2,631579	2,631579	2,325581
4500-5000	3,448276	3,125	3,225806	2,777778
>5000	1,369863	1,176471	1,149425	0,900901
Коефіцієнти концентрації	0,37	0,35	0,32	0,30

Розрахунки показали, що, що велика концентрація заробітної знаходиться в інтервалах більше 2500 гривень. Тобто для всього 2011 року найменша концентрація значень ознаки в інтервалі до 1000 гривень, а найбільша – в інтервалі від 3750 до 4000 гривень. Коефіцієнт концентрації найбільший у березні, що свідчить про найбільшу нерівномірність розподілу, а у грудні найменший, тобто розподіл заробітної плати найбільш наближений до рівномірного в цьому кварталі.

Для оцінювання й аналізу регіональної диференціації оплати праці у динаміці використаємо дискретні ряди розподілу, що містять середньомісячну заробітну плату та середньооблікову кількість штатних працівників у кожному регіоні України в 2000 р., 2005 р. і 2011 р.

Таблиця 2. Статистичні оцінки рівня регіональної диференціації оплати праці в Україні:

Середньомісячна заробітна плата одного працівника по регіонах України, грн:	2000	2005	2011	2011 в порівнянні з 2000 (рази)
в середньому по Україні	230	806	2633	11,45
максимальна	405	1314	4012	9,91
мінімальна	135	553	1871	13,86
медіанна	194	713	2213	11,41
перший квартиль	171	622,5	2072,5	12,12
третій квартиль	234	785,5	2478,5	10,59
розмах варіації	270	761	2141	7,93
Лінійний коефіцієнт варіації	0,19	0,13	0,12	0,61
Квадратичний коефіцієнт варіації	0,28	0,24	0,23	0,67
Коефіцієнт осциляції	1,17	0,94	0,81	0,69
Квартильний коефіцієнт варіації	0,16	0,11	0,09	0,56
Квартильний коефіцієнт диференціації	1,37	1,26	1,20	0,87

Отже, у 2011 р. максимальний абсолютний розмір диференціації середньомісячної заробітної плати (розмах варіації) у регіонах становив 2141 грн., або 81,3% порівняно з середнім значенням цього показника в Україні, у 25% регіонів середньомісячна заробітна плата не перевищувала 2072,5 грн. (оцінка першого квартиля), у 75% – 2478,5 грн. (оцінка третього квартиля). Значення лінійного коефіцієнта варіації вказують, що заробітна плата відхиляється в середньому на 19 % від загальної середньої у 2000 році і на 12% у 2011 році. Значення квадратичного коефіцієнта варіації свідчать про наявність досить сильної регіональної диференціації оплати праці, але вона має тенденції до зменшення. Значення коефіцієнта осциляції вказують на високе відносне коливання значень навколо медіанної зарплати у 2000 році і набагато менше у 2011. Впродовж досліджуваного періоду можна констатувати наявність досить сильної регіональної диференціації середньомісячної заробітної плати, проте зменшення значень коефіцієнтів свідчить про зменшення її інтенсивності.

Для аналізу регіональної диференціації рівня оплати праці було виконане групування регіонів (за винятком м. Києва) у 2000 р. і 2011 р. за середньомісячною заробітною платою з утворенням трьох груп, різних по рівню оплати праці. Порівняння результатів групування свідчить про те, що впродовж 2000–2011 рр. істотних змін у розподілі регіонів за рівнем оплати праці не відбулося, проте до групи регіонів з низьким рівнем оплати праці перемістились Херсонська, Чернігівська, Вінницька та Закарпатська області. До регіонів з середнім рівнем оплати праці піднялись Кіровоградська, Вінницька та Хмельницька області, а опустились м. Севастополь та Одеська область. До регіонів з високими заробітними платами піднялись Полтавська і Луганська області.

Висновки. Результати економіко-статистичного аналізу ряду розподілу заробітної плати в Україні за розмірами оплати праці за допомогою кривої Лоренца та коефіцієнта Джині показали, що ряд розподілений нерівномірно, але простежується тенденція до наближення до рівномірного розподілу при великих заробітних платах. Дослідження динамічних змін концентрації і локалізації за групами населення підтвердили нерівномірність ряду розподілу і показали, наскільки розподіл відхиляється від рівномірного.

Проведений варіаційний аналіз середньомісячної заробітної плати в Україні вказує на наявність диференціації оплати праці в регіональному аспекті, але динаміка статистичних оцінок рівня регіональної диференціації оплати праці свідчить про тенденцію до її скорочення, а результати ранжування регіонів за середньомісячною заробітною платою виявляють обернену залежність між рейтингом регіону і темпами її зростання.

Список використаних джерел:

1. Грішнова О.А. Економіка праці та соціально-трудові відносини: Підручник. – К.: Знання, 2004. – 535 с.
2. Шульга Н.В. Сутність оплати праці, її форми і системи – К.: Знання, 2005. – 192 с.
3. Цимбалюк С. Диференціація заробітної плати: види, чинники, сучасний стан в Україні [Текст] / С. Цимбалюк // Україна: аспекти праці. – 2009. – №4. – С.16-22.
4. Дослідження проблем оплати праці: порівняльний аналіз (Україна та країни ЄС): монографія / А.М. Колот, Г.Т. Куліков, О.М. Поплавська [та ін.]; за заг. ред. А.М. Колота, Г.Т. Кулікова. – К.: КНЕУ, 2008. – 274 с.
5. Офіційний сайт державного комітету статистики України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>.

ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ТА МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАСОБАМИ MAPLE

Юлія Завізіон

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор О.В.Авраменко

В останні десятиліття відбулася інформаційна революція, пов'язана з упровадженням комп'ютера в усі сфери життєдіяльності людини. Розширилися обчислювальні можливості як комп'ютерів, так і програмного забезпечення. Особливий інтерес представляють Системи комп'ютерної алгебри (СКА). Під цим терміном розуміється “сукупність методів і засобів, що забезпечують максимально комфортну й швидку підготовку алгоритмів і програм для розв'язування математичних завдань будь-якої складності з високим ступенем візуалізації усіх етапів розв'язування” [4]. Стало можливо без утруднень формально розв'язувати задачі, які ще кілька років тому вважалися пошуковими, творчими. Претендентом на лідерство серед систем символьної математики є пакет комп'ютерної алгебри Maple.

Роль комп'ютерної алгебри Maple під час навчання математики останнім часом неухильно росте, полегшуючи розв'язування складних математичних задач, що робить навчання цікавішим і зрозумілішим. Тому можна сказати, що грамотне застосування системи у навчальному процесі сприяє підвищенню якості математичної освіти.

Maple має потужні, універсальні можливості, саме тому їх широко використовують під час розв'язування математичних задач. Цей пакет є незамінним у розробці програмного забезпечення при вивченні елементів теорії випадкових процесів. Розробка програмного забезпечення для символьного визначення основних характеристик випадкових процесів дає можливість швидкого та точного знаходження значень математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції, взаємно кореляційної функції, нормованої кореляційної функції та ін. Система комп'ютерної алгебри Maple також дає можливість моделювання задач систем масового обслуговування.

На даний час існує необхідність у розробці програмного забезпечення за допомогою засобів Maple, яке б полегшило розрахунки в задачах з теорії випадкових процесів.

Для розробки програмного забезпечення (маплету) модуля “Елементи теорії випадкових процесів” проведено огляд теоретичного матеріалу Ламперті Дж. [6], Сеньо П.С. [8], Сін Л.І. [9], Таха Х. А. [10]. Для ознайомлення з методами програмування Maple були використані такі посібники [1], [4].

Маплет для знаходження розв'язків задач з курсу “Елементи теорії випадкових процесів” має містити наступне (рис. 1):

- Постановку задач з системи вправ.
- В кожній задачі програми, введені дані прикладів.

Програма має забезпечувати виконання перерахованих нижче функцій:

- можливості швидкого перегляду постановки задачі в програмному забезпеченні, яка розташована в лівій верхній частині вікна;
- можливості перегляду інструкції користувача, для правильного користування програмою;
- введення нових коефіцієнтів, щоб розв'язати інші варіанти задач;

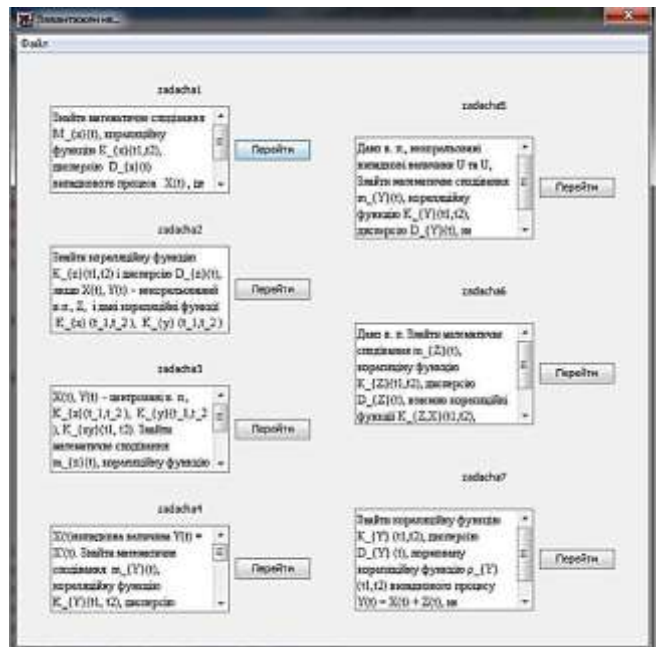


Рис. 1.

Інструменти для:

- знаходження математичного сподівання;
- знаходження дисперсії;
- знаходження кореляційної функції;
- знаходження взаємно кореляційної функції;
- знаходження нормованої кореляційної функції;
- знаходження нормованої взаємно кореляційної функції.

При запуску програми відкривається вікно “Завантаження”, в якому записані постановки задач. При натисканні кнопки “Перейти” відкривається головна сторінка потрібної задачі.

Розглянемо приклад розв’язання задачі з випадкових процесів.

Приклад 1. Знайти кореляційну функцію $K_Z(t_1, t_2)$ і дисперсію $D_Z(t)$, якщо $X(t)$, $Y(t)$ – некорельовані випадкові процеси, $Z(t) = \sin t^2 X(t) + 4t^4 Y(t)$, і задано кореляційні функції $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2$, $K_Y(t_1, t_2) = \sin t_1 t_2$.

Розв’язання:

Вводимо параметри випадкового процесу та кореляційні функції $K_X(t_1, t_2)$, $K_Y(t_1, t_2)$ в поле “Введення коефіцієнтів” (рис. 2): $a(t) = \sin t^2$, $b(t) = 4t^4$, $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2$, $K_Y(t_1, t_2) = \sin t_1 t_2$.

Виконайте послідовно кроки:

Знайти кореляційну функцію $K_Z(t_1, t_2)$ і дисперсію $D_Z(t)$, якщо $X(t)$, $Y(t)$ – некорельовані в. п., Z , і дані кореляційні функції $K_X(t_1, t_2)$, $K_Y(t_1, t_2)$.

Інструкція:
1. Введіть випадковий процес та кореляційні функції $K_X(t_1, t_2)$, $K_Y(t_1, t_2)$ в поле Введення

Введіть коефіцієнти

$a(t) = \sin(t^2)$ $b(t) = 4*t^4$ $c(t) = 0$

$K_X(t_1, t_2) = t_1^2*t_2$ $K_Y(t_1, t_2) = \sin(t_1*t_2)$

$Z(t_1):$
 $\sin(t_1^2) X(t_1) + 4 t_1^4 Y(t_1)$ Знайти

$K_Z(t_1, t_2):$
 $\sin(t_1^2) \sin(t_2^2) t_1^2 t_2 + 16 t_1^4 t_2^4 \sin(t_1 t_2)$ Знайти

$D_Z(t):$
 $\sin^2(t^2) t^3 + 16 t^8 \sin(t^2)$ Знайти

Закрити

Рис. 2.

При натисненні першої кнопки “Знайти” можна перевірити правильність введення випадкового процесу $Z(t)$.

$$Z(t) = \sin t^2 X(t) + 4t^4 Y(t),$$

Натиснувши кнопку “Знайти”, знайдемо $K_Z(t_1, t_2)$ і $D_Z(t)$.

$$K_Z(t_1, t_2) = K_{\sin t^2 X}(t_1, t_2) + K_{4t^4 Y}(t_1, t_2)$$

Тепер отримуємо

$$K_Z(t_1, t_2) = \sin t_1^2 \cdot \sin t_2^2 \cdot K_X(t_1, t_2) + 4t_1^4 \cdot 4t_2^4 \cdot K_Y(t_1, t_2) = \\ = \sin t_1^2 \cdot \sin t_2^2 \cdot (t_1^2 t_2^2) + 16t_1^4 t_2^4 \cdot \sin t_1 t_2.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D_Z(t) = K_Z(t, t) = t^3 \cdot \sin^2 t^2 + 16t^8 \cdot \sin t^2.$$

Для закінчення роботи потрібно натиснути кнопку “Закрити”.

У формі маплету вбудовано інструкцію користувачеві щодо виконання практичних завдань.

Для розробки програмного забезпечення модуля “Системи масового обслуговування” проведено огляд теоретичних розробок та посібників Гнеденка Б.М., Коваленко І.Н. [3], Борисова К.І. [2], Івченка Г.І. [5], Овчарова Л.А. [7].

Маплет дає змогу визначення основних характеристик систем масового обслуговування:

- визначення значення відносної пропускної здатності q ;
- визначення значення абсолютної пропускної здатності A ;
- визначення значення імовірності відмови ;
- порівняння фактичної пропускної здатності СМО з номінальною;
- проведення статистичного моделювання задач та інше.

Програма досить зручна у використанні а також простим інтерфейсом. Для полегшення використання зроблено опис користувацьких можливостей.

Розглянемо приклад розв’язання задачі та проілюструємо її виконання за допомогою програмного забезпечення.

Приклад 2. Нехай одноканальна СМО з відмовами являє собою обслуговування одного перукаря. Клієнт, що прибув у момент, коли майстер зайнятий, одержує відмову. Інтенсивність надходження клієнтів $\lambda=1$ (один клієнт в годину). Середня тривалість обслуговування - 1,8 години. Надходження клієнтів і потік обслуговування є найпростішими. Потрібно:

- 1) визначити значення відносної пропускної здатності q ;
- 2) визначити значення абсолютної пропускної здатності A ;
- 3) визначити значення імовірності відмови ;
- 4) порівняти фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, що була б, якби кожний пацієнт обслуговувався точно 1,8 години й клієнт поступали б один за одним без перерви.

Розв’язання:

1. Визначимо інтенсивність потоку обслуговування за формулою:

$$\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{1,8} = 0,556.$$

2. Обчислимо відносну пропуску здатність. Обчислення можна вести за формулою

$$L_S = \sum_{i=0}^N i P_i = \begin{cases} \frac{\rho(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, \rho \neq 1 \\ \frac{N}{2}, \rho = 1 \end{cases}$$

або за її частковим випадком для одноканальних СМО з відмовами:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,556}{1 + 0,556} = 0,357.$$

Величина q означає, що в сталому режимі система буде обслуговуватися приблизно 35,7% клієнтів, що надходять до майстра.

3. Визначимо абсолютну пропуску здатність за формулою:

$$A = \lambda q = 1 \cdot 0,357 = 0,357.$$

Це означає, що система здатна здійснити в середньому 0,357 обслуговувань на годину.

4. Обчислимо ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{відм}} = 1 - q = 1 - 0,357 = 0,643.$$

Це означає, що близько 64,3% клієнтів, що прибудуть до перукаря, одержать відмову в обслуговуванні.

5. Визначимо номінальну пропускну здатність системи:

$$A_{\text{норм}} = \frac{1}{t} = \frac{1}{1,2} = 0,833$$

(пацієнтів за годину).

Виявляється, що $A_{\text{норм}}$ у 1,85 рази ($0,833/0,454=1,85$) більша, ніж фактична пропускну здатність, обчислена з врахуванням випадкового характеру потоку надходжень пацієнтів і часу обслуговування.

При запуску програми відкривається вікно “Завантаження” в якому записані постановки задач (рис. 3).

При натисненні на кнопку “Перейти” відкривається головне вікно потрібної задачі (рис. 4).

В поля вводу даних t_{sredn} (середня тривалість обслуговування), λ (інтенсивність потоку), k (тривалості роботи СМО) записуємо потрібні нам коефіцієнти (рис. 4). Для знаходження потрібних значень натискаємо на кнопки: μ (інтенсивність потоку обслуговування), q (відносна пропускну здатність), A (абсолютної пропускну здатності) і так далі.

Для побудови статистичної моделі натискаємо кнопку “Знайти” [11]. В результаті отримаємо кількість заявок, що надійшли в систему масового обслуговування, були виконані та відмовлені в обслуговуванні, а також середню кількість заявок, які були обслужені в СМО за заданий час. За допомогою генератора випадкових чисел можна змоделювати різні ситуації задачі та також зробити висновки про середню ефективність обслуговування.

Висновки:

Отже, розроблено маплет для визначення основних характеристик випадкових процесів та систем масового обслуговування за допомогою Maple; створено набір процедур для моделювання статистичної моделі в одноканальній та багатоканальній СМО з відмовами; Маплет має інтуїтивно-зручний інтерфейс; до маплету вбудована інструкція для користувача щодо виконання практичних завдань.

Розроблене програмне забезпечення може використовуватись у навчальному процесі при викладанні курсу “Елементи теорії випадкових процесів” для студентів спеціальності Статистика та “Системи масового обслуговування” та “Теорія систем та математичне моделювання” для студентів спеціальності “Інформатика”.

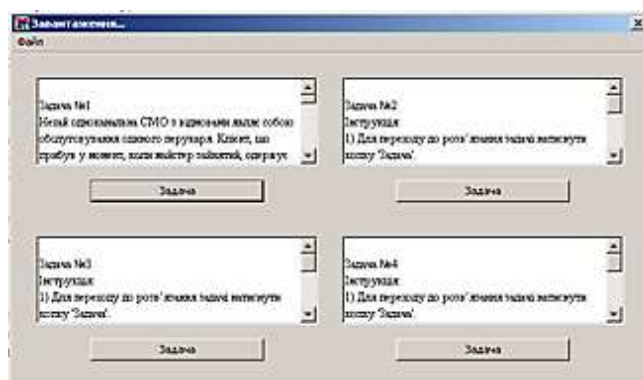


Рис. 3.

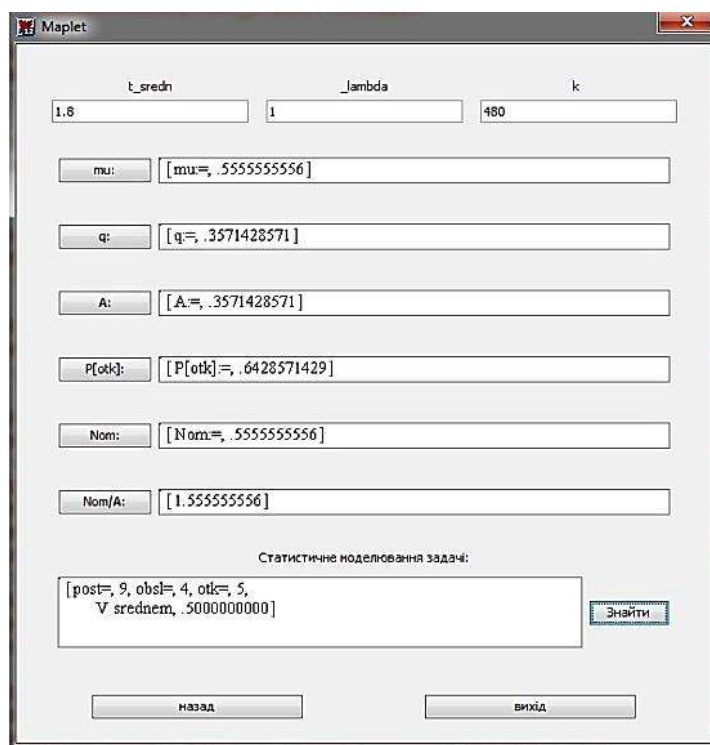


Рис. 4.

Список використаних джерел:

1. Аладьев В. З. Основы программирования в Maple, Таллинн, 2006. – 301 с.
2. Борисов К.И. Теория массового обслуживания. – М.: Наука, 2001. – 522 с.
3. Гнеденко Б.Н., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1988. – 301 с.
4. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.
5. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. – М., 1982.
6. Ламперти Дж. Случайные процессы, — Київ: Вища школа, 1983, — 244 с.
7. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
8. Сеньо П.С. Випадкові процеси. – Львів: Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с.
9. Син Л.И., Задания к типовому расчету по теме “Элементы теории случайных процессов”. – Шахты: ЮРГУЭС, 2002.
10. Таха Х. А. Введение в исследование операций, 7-ме видання.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005, — 912 с.
11. Гомбоев Л.Г. Системы массового обслуживания. Лабораторные работы. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.exponenta.ru/>

ВСТАНОВЛЕННЯ ГРАНИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ НАЙБІЛЬШОЇ ТРИВАЛОСТІ ЖИТТЯ

Олена Заворуєва

Науковий керівник – викладач К.С.Акбаш

Актуальність теми. Однією з найпоширеніших проблем у найрізноманітніших галузях науки, техніки, промисловості є проблема екстремальних значень: як часто мінімальне чи максимальне значення будь-якої величини може перевищити заданий рівень? Прикладами можуть бути висота паводка на річці, частота неврожайних років, найбільша тривалість життя. Число областей, в яких необхідно оцінити максимальне (або мінімальне) значення випадкової величини при послідовних її спостереженнях, буквально необмежені.

Задача асимптотичної теорії екстремальних значень полягає в аналізі спостережуваних екстремумів і прогнозів тих екстремумів, які можуть мати місце при наступних спостереженнях. Екстремуми не є фіксованими величинами – це нові випадкові величини, які залежать від початкового розподілу і від обсягу вибірки [1].

З подібними питаннями зустрічаються проектувальники гідротехнічних споруд при прогнозі катастрофічних паводків, геофізики – при оцінці максимальної швидкості вітру, спеціалісти з електромереж – при розрахунку максимального завантаження електромереж промислових підприємств.

Мета дослідження. Встановлення типу граничного розподілу екстремальних значень найбільшої тривалості життя.

Постановка задачі. Для визначення граничного розподілу екстремальних значень досліджуємо найбільшу тривалість життя чоловіків Японії (таблиця 1, Рис. 1).

Таблиця 1. Дані тривалості життя чоловіків Японії (1945-2011 рр.)

Роки	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2011
<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
тривалість життя (x_i)	60,2	60,3	60,4	64,1	66,5	68,7	70,5	72,6	74,1	75,5	76,3	77,1	78,3	79,3	80,1

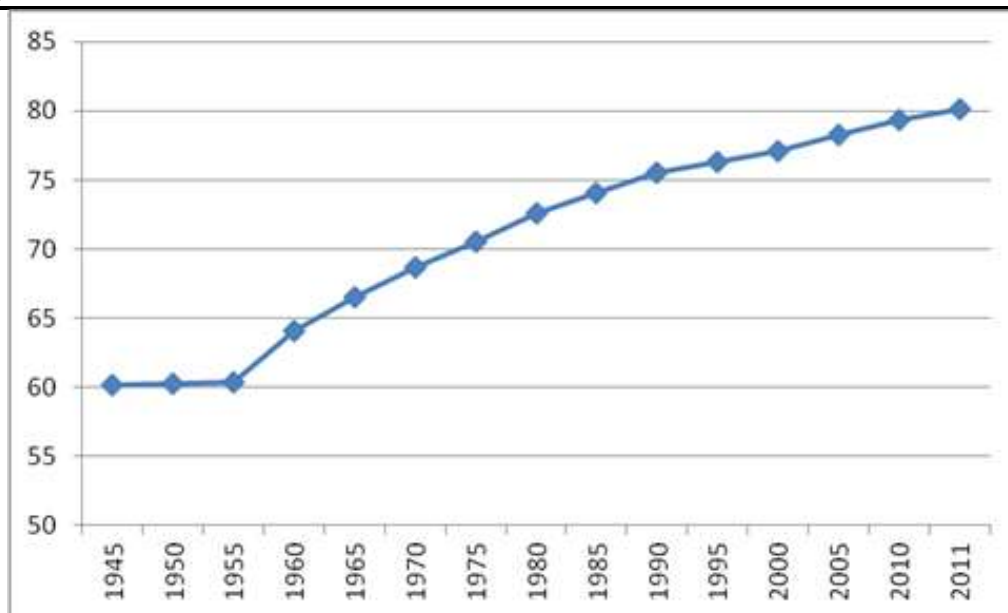


Рис.1. Тривалість життя чоловіків Японії.

Для практичного застосування методів теорії ймовірності та математичної статистики знання законів розподілу ймовірностей надзвичайно важливе. Знаючи закон розподілу ймовірностей спостережуваної випадкової величини, дослідник в змозі розв'язати практичні задачі, пов'язані з плануванням виробництва, оцінкою ефективності і стабільності виробництва. Спроба застосувати методи аналізу результатів спостережень, в умовах, коли реальний розподіл відрізняється від гіпотетичного, є найпоширенішою на практиці помилкою, тому будь-яка обробка результатів спостережень повинна починатися з висування гіпотези.

За припущенням розподіл найбільшої тривалості життя відбувається за експоненціальним законом. Перевіримо гіпотезу експоненціального розподілу ймовірностей випадкових величин для тривалості життя чоловіків Японії на рівні значущості $\alpha = 0,10$ за допомогою критерію Колмогорова-Смирнова [2]. Припустимо, що має місце гіпотетичний закон розподілу ймовірностей $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-\mu}{v}}$, де μ і v – невідомі параметри, оцінки яких по вибірці можуть бути знайдені із формул $\hat{v} = \frac{n(\bar{x}-x_1)}{n-1}$; $\hat{\mu} = x_1 - \frac{\hat{v}}{n}$. Позначивши $w_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{v}}$, переходимо до нормованого експоненціального розподілу $z_i = 1 - \exp(-w_i)$, для якого маємо аналоги відомих статистик критеріїв згоди за критерієм Колмогорова-Смирнова:

$$D_n^+ = \max_i \left[\frac{i}{n} - z_i \right]; \quad D_n^- = \max_i \left[z_i - \frac{i-1}{n} \right]; \quad D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$$

Для випадку перевірки експоненціального розподілу з невідомими параметрами критичні значення перерахованих статистик для різних рівнів значущості наведено в таблиці “Критичні значення статистик критеріїв згоди типу Колмогорова-Смирнова для перевірки експоненціального розподілу з невідомими параметрами” [2].

$$\text{Маємо } \bar{x} = 70,9333; \quad \hat{v} = \frac{15 \cdot (70,9333 - 60,2)}{15-1} = 11,5; \quad \hat{\mu} = 60,2 - \frac{11,5}{15} = 59,4333.$$

Далі обчислимо:

$$w_1 = \frac{x_1 - \hat{\mu}}{\hat{v}} = \frac{60,2 - 59,4333}{11,5} = 0,06667; \quad z_1 = 1 - e^{-0,066667} = 0,064493.$$

Таблиця 2. Розрахунки коефіцієнтів w_i та z_i

w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}
0,08	0,08	0,41	0,61	0,81	0,96	1,15	1,28	1,39	1,47	1,54	1,64	1,73	1,79

z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0,07	0,08	0,33	0,46	0,55	0,62	0,68	0,72	0,75	0,77	0,79	0,81	0,82	0,83

Результати розрахунків D_n^+ та D_n^- представлено в таблиці 3:

Таблиця 3.

i	$\frac{i}{n}$	z_i	$\frac{i}{n} - z_i$	$\frac{i-1}{n}$	$z_i - \frac{i-1}{n}$
1	0,067	0,06449	0,00217	0	0,06449
2	0,133	0,07259	0,06074	0,06667	0,00593
3	0,2	0,08062	0,11938	0,13333	-0,0527
4	0,267	0,33355	-0,0669	0,2	0,13356
5	0,333	0,45908	-0,1258	0,26667	0,19242
6	0,4	0,55327	-0,1533	0,33333	0,21994
7	0,467	0,61799	-0,1513	0,4	0,21799
8	0,533	0,68175	-0,1484	0,46667	0,21509
9	0,6	0,72067	-0,1207	0,53333	0,18734
10	0,667	0,75269	-0,086	0,6	0,15269
11	0,733	0,76931	-0,036	0,66667	0,10264
12	0,8	0,78481	0,01519	0,73333	0,05148
13	0,867	0,80613	0,06053	0,8	0,00613
14	0,933	0,82228	0,11106	0,86667	-0,0444
15	1	0,83422	0,16578	0,93333	-0,0991

Із таблиці 3 видно, що $D_n^+ = \max_i \left[\frac{i}{n} - z_i \right] = 0,16578$; $D_n^- = \max_i \left[z_i - \frac{i-1}{n} \right] = 0,21993$;

$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) = 0,21993$. Значенням статистики критерію Колмогорова-Смирнова буде $\sqrt{n} \cdot D_n = \sqrt{15} \cdot 0,21993 = 0,8518$.

Із таблиці “Критичні значення статистик критеріїв згоди типу Колмогорова-Смирнова для перевірки експоненціального розподілу з невідомими параметрами” [2] для $\alpha = 0,10$ і $n=15$ знаходимо, що критичне значення статистики дорівнює 0,912. Оскільки $\sqrt{n} \cdot D_n = 0,8518 < 0,912$, то гіпотеза про експоненціальний розподіл ймовірностей випадкових величин приймається.

Для того, щоб встановити екстремальний тип для функції розподілу тривалості життя чоловіків Японії, треба перевірити, для якого із трьох типів граничних законів належить знайдена функція розподілу $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-59,43}{11,5}\right)$. Використаємо наступну теорему.

Теорема. Припустимо, що функція розподілу F незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_n\}$, абсолютно неперервна і має щільність f . Тоді наступні умови є достатніми для того, щоб функція розподілу F належала відповідній області тяжіння:

Тип I: f має від’ємну похідну f' для всіх x в деякому інтервалі

$$(x_0, x_F) \quad (x_F \leq \infty), \quad f(x) = 0 \text{ для } x \geq x_F \text{ та } \lim_{t \rightarrow x_F} \frac{f'(t)(1-F(t))}{f^2(t)} = -1$$

Тип II: $f(x) > 0$ для всіх кінцевих $x \geq x_0$ та $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot f(t)}{1 - F(t)} = \alpha > 0$

Тип III: $f(x) > 0$ для всіх x в деякому кінцевому інтервалі (x_0, x_F) , $f(x) = 0$ для $x > x_F$ та $\lim_{t \rightarrow x_F} \frac{(x_F - t) f(t)}{1 - F(t)} = \alpha > 0$.

Для цього, знаходимо першу та другу похідну від функції розподілу $F(x)$:

$$f = 0,8695652174 \cdot \exp(-0,08695652174x + 5,167826087)$$

$$f' = -0,007561436673 \cdot \exp(-0,08695652174x + 5,167826087)$$

Перевіряємо на відповідність першому типу:

f' від'ємна і

$$\lim_{t \rightarrow 80,1} \left(\frac{(-0,0076 \cdot \exp(-0,0869 \cdot t + 5,1678)) \cdot \left(1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{t - 59,43}{11,5}\right)\right)\right)}{(0,0869 \cdot \exp(-0,0869 \cdot t + 5,1678))^2} \right) = -1.$$

Перевіряємо на відповідність другому типу:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t \cdot (0,0869 \cdot \exp(-0,0869 \cdot t + 5,1678))}{\left(1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{t - 59,43}{11,5}\right)\right)\right)} \right) = \text{Float}(\infty).$$

Перевіряємо на відповідність третьому типу:

$$\lim_{t \rightarrow 80,1} \left(\frac{(80,1 - t) \cdot (0,0869 \cdot \exp(-0,0869 \cdot t + 5,1678))}{\left(1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{t - 59,43}{11,5}\right)\right)\right)} \right) = -3,74000000 \cdot 10^{-10}$$

Висновок: Перевірка гіпотези на експоненціальний розподіл ймовірностей випадкових величин критерієм Колмогорова-Смирнова приймається. Результатом встановлення екстремальних типів функції розподілу для тривалості життя чоловіків Японії є перший тип граничного закону.

Список використаних джерел:

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М: Мир, 1965. – 454 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
3. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М. Наука, 1984. – 304 с.

ОСНОВНІ ВИДИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ФУНКЦІЙ ТА МІР

Дар'я Крупська

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент В.О. Романов

Розглядаючи міри, ми вивчаємо природу основних операцій математичного аналізу. Диференційовність мір є узагальненим поняттям диференційовності функцій. У 1968 році

С.В. Фомін ввів поняття напряму диференційовності міри відносно топології збіжності на системі вимірних множин [1]. Таку диференційовність можна більш стисло назвати поточною диференційовністю. У 1975 А.В. Скороход дослідив диференційовність мір відносно топології слабкої збіжності [2]. Для всіх мір, як скалярних, так і векторних, – можна розглядати також варіаційну диференційовність, а для векторних мір – ще і напівваріаційну. Відомо, що для скалярних мір означення поточної та варіаційної диференційовності рівносильні між собою, але є сильнішими в порівнянні з диференційовністю у розумінні Скорохода. У 2002 році В.О. Романов довів, що для векторних мір в загальному випадку попарно нерівносильними є вже всі чотири означення диференційовності і що для мір із значеннями в банаховому просторі із властивістю Радона-Нікодима означення варіаційної та поточної (а тому і напівваріаційної) диференційовностей залишаються рівносильними [3].

Дана тема залишається актуальною, тому що поняття “міра” широко застосовується у функціональному аналізі, теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, квантовій теорії поля, квантовій механіці та ін.

Розглянемо спочатку основні види диференційовності функцій, навівши деякі з основних теорем. З’ясуємо, які умови треба накласти на функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційовна в точці $z = x + iy$. Тут справедлива така теорема.

Теорема 1: Для того щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційована в точці z , необхідно і достатньо, щоб для її дійсної та уявної частини виконувалися одночасно дві наступні умови:

1. Функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є диференційованими в точці з координатами (x, y) .
2. Для частинних похідних названих функцій виконуються такі рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Якщо виконуються всі умови теореми, то похідну $f'(z)$ можна обчислити за формулою:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

Доведення.

Необхідність: Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$, тоді справедлива рівність

$$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z. \quad (3)$$

Зазначимо, що $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta f(z) = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)$.

Позначимо $f'(z) = a + ib$, $\alpha(z, \Delta z) = \alpha_1(x, y, \Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$, де a і b – дійсні числа, а α_1, α_2 – дійсна функція від Δx і Δy , причому $\alpha_1 \rightarrow 0$ і $\alpha_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$, рівність (3) матиме вигляд: $\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y)$.

Прирівнявши дійсні та уявні частини, отримаємо:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y,$$

$$\Delta v = a\Delta y + b\Delta x + \alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta x.$$

Звідси випливає, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці з координатами (x, y) і, крім того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a.$$

Маємо: $a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ і $b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, – тобто виконуються умови (1).

Для обчислення $f'(z)$ дістанемо:

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Достатність: Якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці з координатами (x, y) , то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_3 \Delta x + \beta_4 \Delta y,$$

де $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rightarrow 0$ при Δx і $\Delta y \rightarrow 0$.

Введемо позначення $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тоді $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ і $\Delta f(z) = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)$.

Звідси і з умов (1) випливає:

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_3 \Delta x + \beta_4 \Delta y \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y + i\beta_3 \Delta x + i\beta_4 \Delta y = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \\ &+ i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \alpha (\Delta x + i\Delta y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z + \alpha \Delta z, \end{aligned}$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y + \beta_3 \Delta x + \beta_4 \Delta y}{\Delta z}.$$

Оскільки $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1$, $\left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1$, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rightarrow 0$ при Δx і $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

$$\text{Отже, } \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha, \text{ звідки } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тобто функція в точці z диференційовна.

Умови (1) називаються умовами Коші-Рімана (Д'Аламбера-Ейлера).

Сильний диференціал (Диференціал Фреше)

Нехай X і Y – нормовані простори і F – відображення, яке діє з X в Y і визначене на деякій відкритій підмножині O простору X . Назвемо це відображення диференційовним у точці $x \in O$, якщо існує такий обмежений лінійний оператор $L_x \in \mathcal{L}(X, Y)$, що

$$F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h), \quad (4)$$

де

$$\frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0 \quad (5)$$

Вираз $L_x h$ (є очевидно, при кожному $h \in X$) називають *сильним диференціалом* (або *диференціалом Фреше*) відображення F у точці x . Сам лінійний оператор L_x називається *похідною*, точніше, *сильною похідною* відображення F у точці x . Позначимо цю похідну символом $F'(x)$.

Якщо відображення F диференційовне в точці x , то відповідна похідна визначається єдиним способом. Нехай:

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)} h + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)} h + \alpha_2(x, h);$$

Тоді

$$L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h = \alpha_1(x, h) - \alpha_2(x, h)$$

і на підставі (5)

$$\frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0 \quad (6)$$

Але якщо $L_x^{(1)} \neq L_x^{(2)}$, то для якого-небудь h $\frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} = \lambda \neq 0$.

Тоді при кожному $\varepsilon \neq 0$

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h) - L_x^{(2)}(\varepsilon h)\|}{\|\varepsilon h\|} = \lambda,$$

і співвідношення (6) неможливе.

Встановимо тепер деякі елементарні факти, які безпосередньо впливають з означення похідної:

1. Якщо $F(x) = y_0 = \text{const}$, то $F'(x) \equiv 0$ (тобто $F'(x)$ у цьому випадку є нулевим оператором).
2. Похідна неперервного лінійного відображення L є саме це відображення.

За означенням маємо:

$$L(x+h) - L(x) = L(h).$$

3. (Похідна складної функції) Нехай X, Y, Z – три нормовані простори, $U(x_0)$ – окіл точки $x_0 \in X$, F – неперервне відображення цього околу в Y , $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ – окіл точки $y_0 \in Y$ і G – неперервне відображення цього околу в Z . Тоді, якщо відображення F диференційовне в точці x_0 , то відображення $H = GF$ (яке визначене і неперервне в деякому околі точки x_0) диференційовне в точці x_0 і

$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0). \quad (7)$$

Зробимо припущення, що

$$\frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Тоді $F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\xi + o_1(\xi)$ і $G(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\eta + o_2(\eta)$.

Але $F'(x_0)$ і $G'(y_0)$ – обмежені лінійні оператори.

Тому

$$\begin{aligned} H(x_0 + \xi) &= G(y_0 + F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) + o_2(F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + o_3(\xi). \end{aligned}$$

Якщо F, G і H – числові функції, то формула (7) перетворюється у відоме правило диференціювання складної функції:

4. Нехай F і G – два неперервні відображення, які діють з X в Y . Якщо F і G диференційовані в точці x_0 , то й відображення $F+G$ і aF (a – число) також диференційовані в цій точці, причому

$$(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0), \quad (8)$$

$$(Fa)'(x_0) = aF'(x_0). \quad (9)$$

Справді, з визначення суми операторів і добутку оператора на число відразу дістаємо, що

$$(F + G)(x_0 + h) = F(x_0 + h) + G(x_0 + h) = F(x_0) + G(x_0) + (x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h)$$

$$\text{і } aF(x_0 + h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o_2(h).$$

Звідки випливають рівності (8) і (9).

Нехай F є відображення, яке діє з X і Y . Слабким диференціалом, або диференціалом Гато, відображення F у точці x (при прирості h) називається границя

$$DF(x, h) = \frac{d}{dt} F(x + th) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t},$$

де збіжність розуміємо як збіжність по нормі в просторі Y .

Слабкий диференціал $DF(x, h)$ може й не бути лінійним по h . Якщо ж така лінійність має місце, тобто якщо $DF(x, h) = F'_c(x)h$, де $F'_c(x)$ – обмежений лінійний оператор, то цей оператор називається слабкою похідною (або похідною Гато).

Перейдемо до головних означень та теорем які стосуються основних видів диференційовності мір.

Нехай X та Y – два банахових простори, m – Y -значна міра в X , $h \in X$.

Варіація, напівваріація, повна варіація векторної міри.

Означення 1: Значенням варіації векторної міри m на борелевській множині A називається число, яке позначається через $v(\mu)(A)$ і яке дорівнює верхній грані сум $\sum_n \|m(A_n)\|$, причому верхня грань береться за всіма скінченними системами неперерізних борелевських підмножин A множини A .

Означення 2: Значенням напівваріації векторної міри m на борелевській множині A називається число, яке позначається через $\|m\|(A)$ і яке дорівнює верхній грані величин $\|\sum_n \alpha_n m(A_n)\|$, причому верхня грань береться за всіма скінченними системами неперерізних борелевських підмножин A_n множини A та за всіма наборами скалярів α_n , модуль яких не перевищує 1.

Означення 3: Векторна міра m називається варіаційно неперервною за напрямом h , якщо $\lim_{t \rightarrow 0} Var(m_{th} - m) = 0$.

Означення 4: Векторна міра m називається напівваріаційно неперервною за напрямом h , якщо $\lim_{t \rightarrow 0} \|m_{th} - m\| = 0$.

Означення 5: Векторна міра m називається поточною неперервною за напрямом h , якщо для кожної борелевської множини A $\lim_{t \rightarrow 0} (m_{th} - m)(A) = 0$.

Нерівносильність варіаційної та напівваріаційної диференційовності.

Теорема 2[4]: Для довільного не нульового вектора h банахова простору X існує така l_∞ -значна міра m , яка є напівваріаційно, але не є варіаційно диференційованою за напрямом h .

Доведення: Нехай L – лінійна оболонка вектора h . Для кожної пари натуральних чисел $k \leq l$ розглянемо T - функцію відрізка $\left[\frac{k-1}{l}h; \frac{k}{l}h\right]$. Занумеруємо всі ці функції підряд в одну нескінченну послідовність (f_n) та позначимо через m_n скалярні міри на L , які є добутками функцій f_n на міру Лебега. Функції f_n та їх диференціали $d_h f_n$ є рівномірно обмеженими, а тому l_∞ -значні функції множини m та $d_h m$, скалярними компонентами яких є добутки f_n та $d_h f_n$ на міру Лебега, є l_∞ -значними мірами.

Виконується рівність: $\left\| \frac{1}{t} (m_{th} - m) - d_h m \right\| = \sup \int_L \left| \frac{1}{t} (m_{th} - m) - d_h m - d_h f_n(x) \right| dx$.

Кожна підінтегральна функція в правій частині відмінна від нуля лише на множині, лебегівська міра якої не перевищує подвоєної довжини носія функції f_n , а ця довжина прямує до нуля, коли $n \rightarrow \infty$. Крім того, підінтегральні функції, рівномірно обмежені (числом $2\|h\|$). Тоді для великих значень n (починаючи з деякого n_0) інтеграли можна зробити як завгодно малими рівномірно відносно t . Для решти значень n (які не перевищують n_0) малість інтегралів можна забезпечити за рахунок того, що $t \rightarrow 0$. Тоді права частина прямує до нуля, коли $t \rightarrow 0$, а тому міра m напівваріаційно диференційовна за напрямом h .

Також випливає:

$$\text{Var} \left\| \frac{1}{t} (m_{th} - m) - d_h m \right\| = \int_L \sup \left| \frac{1}{t} (f_n(x + th) - f_n(x)) - d_h f_n(x) \right| dx.$$

Довжини відрізків, на яких побудовані T -функції f_n , прямують до нуля (коли $n \rightarrow \infty$), а тому для кожного фіксованого $t \neq 0$ знайдеться таке n_0 , що для $n > n_0$ кожне значення функції f_n за модулем не перевищує $4^{-1}|t|\|h\|$. Оскільки модуль диференціала T -функції приймає на своєму носії (який співпадає з носієм самої T -функції) значення $\|h\|$, то для $n > n_0$ в усіх точках носія функції f_n виконується нерівність $\left| \frac{1}{t} (f_n(x + th) - f_n(x)) - d_h f_n(x) \right| \geq 2^{-1}\|h\|$. Об'єднання всіх таких носіїв (для всіх $n > n_0$) співпадає з відрізком $[0; h]$, а тому на цьому відрізку підінтегральна функція не менша за сталу $2^{-1}\|h\|$. Тоді права частина не прямує до нуля, коли $t \rightarrow 0$, а тому міра m не є варіаційно диференційовною за напрямом h . *Теорему доведено.*

Нерівносильність напівваріаційної та поточної диференційовності.

Теорема 3 [4, с. 48]: Для довільного не нульового вектора h банахова простору X існує така l_∞ -значна міра m , яка є поточною, але не є напівваріаційно диференційованою за напрямом h .

Доведення: На цей раз кожну функцію f_n задамо як суму n T -функцій відрізків $\left[\frac{2k}{2n}h; \frac{2k+1}{2n}h\right]$, де $k=0, 1, \dots, n-1$. Оскільки кожну обмежену борелевську множину прямої можна апроксимувати (в розумінні міри симетричної різниці) множинами, які складені із скінченної кількості інтервалів, то для доведення поточної h – диференційовності достатньо обґрунтувати рівність $\lim_{t \rightarrow 0} \sup \int_B \left(\frac{1}{t} f_n(x + th) - f_n(x) \right) dx = 0$ лише для випадку коли множина B є інтервалом.

Для Т-функції відрізка довжини $(2n)^{-1}\|h\|$ існує відрізок довжини $((2n)^{-1} + |t|)\|h\|$, який включає в себе носій як самої Т-функції (а тому і носій диференціала), так і носій її зсуву на вектор $(-th)$. Інтеграл за цим відрізком від різниці між самою Т-функцією та її зсувом на вектор $(-th)$, а також інтеграл від диференціала функції дорівнює нулю. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі натуральне n_0 та $\delta > 0$, що за умов $n > n_0$ та $|t| < \delta$ знайдуться n відрізків (не обов'язково неперерізних) довжини $((2n)^{-1} + |t|)\|h\|$ кожний, об'єднання А яких має наступні властивості: по-перше, лебегівська міра симетричної різниці множин В та А менша за ε і, по-друге, при заміні множини інтегрування В множиною А відповідний інтеграл обернеться в нуль. Оскільки підінтегральні функції обмежені за модулем числом $2\|h\|$, то для $n > n_0$, $|t| < \delta$ модулі інтегралів за самими множинами В є меншими за $2^\varepsilon\|h\|$. Для решти значень n (які не перевищують n_0) малість вказаних інтегралів можна забезпечити за рахунок того, що $t \rightarrow 0$. Отже, поточкова диференційованість за напрямом h доведена.

Позначимо $t_n = (6n)^{-1}$. Тоді величина $|t_n|\|h\|$ є меншою за половину довжини відрізків, що є носіями Т-функцій, з яких складається f_n , а тому одержуємо, що для n -ої компоненти виконується рівність $\left\| \frac{1}{t_n}((m_n)_{t_n}h - -m_n) - d_h(m_n) \right\| = (2|t_n|\|h\|^2)n = 3^{-1}\|h\|^2$. Звідси випливає, що для самої векторної міри виконується нерівність

$$\left\| \frac{1}{t_n}(m_{t_n h} - -m) - d_h m \right\| \geq 3^{-1}\|h\|^2.$$

Оскільки права частина цієї нерівності не прямує до нуля (хоча $t_n \rightarrow 0$), то наша векторна міра не є напівваріаційно диференційованою за напрямом h . *Теорема доведена.*

Із зробленого огляду можна зробити висновок, про те що дослідження диференціальних властивостей мір важливі не тільки для виявлення структурно-логічних зв'язків в середині теорії диференційовності, але і для застосувань в задачах безкінечного аналізу, теорії наближень і в диференціальних рівняннях.

Список використаних джерел:

1. Фомин С.В. Дифференцируемые меры в линейных пространствах// Успехи матем. наук. – 1968. – 23, №1. – С.221-222.
2. Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 230 с.
3. Романов В.А. О неэквивалентности различных определений дифференцируемости для векторных мер//Матем. заметки. – 2002. – 72, №4. – С.528-534.
4. Романов В. О. Неперервні міри. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – 63 с.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Ірина Ланецька

Науковий керівник – доктор педагогічних наук, професор В.А. Кушнір

Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки і техніки, процеси, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище.

Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та їхні похідні. Такі рівняння називають *диференціальними*, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – *інтегруванням* диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають *диференціальною моделлю* цього явища або процесу. Диференціальні моделі називають ще *динамічними математичними моделями* описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні

шуканих залежностей (швидкості, прискорення та ін.). Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їхніх станів, описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову і дослідження математичних моделей, але й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на ЕОМ. У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї галузі науки, з якою пов'язана досліджувана задача. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо. Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їхнього порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Під математичним моделюванням будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів. В основу методу покладемо адекватність між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. Зрозуміло, що на практиці ці процеси не будуть абсолютно ідентичні. Але можна удосконалювати математичну модель, яка більш точно буде описувати цей процес. Треба пам'ятати, що в останньому випадку, як правило, математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх моделювання на ЕОМ потребує більше часу.

Схема таких досліджень починається з постановки задачі і закінчується проведенням ефективного обчислювального експерименту. Її можна записати в такій формі:

- постановка задачі;
- побудова математичної моделі та перевірка її адекватності;
- узагальнення та теоретичне дослідження даного класу задач;
- розробка алгоритмічного забезпечення для розв'язування досліджуваних задач;
- створення програмного забезпечення;
- проведення обчислювального експерименту;
- впровадження цих результатів у виробництво.

Розглянемо прикладну задачу, яка приводить до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача. Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 7%.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ – кількість публікацій у момент часу t , y_0 – початкова кількість публікацій, тобто $y(0) = y_0$. Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$y'(t) = ky(t) \quad (1)$$

де $k > 0$, k – коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань.

Диференціальне рівняння (1) разом з умовою $y(0) = y_0$ є математичною моделлю зростання інформаційних потоків.

Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $y'(t) = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} \quad ky = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} \quad kdt = 0 \Rightarrow d(\ln y \quad kt) = 0 \Rightarrow \ln y \quad kt = C_1 \Rightarrow y = e^{C_1 + kt},$$

де C_1 – довільна стала.

Якщо перепозначити e^{C_1} через C , то $y(t) = Ce^{kt}$. Оскільки $y(0) = y_0$, то $C = y_0$, тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою

$$y(t) = y_0 e^{kt} \quad (2)$$

Знайдемо тепер час T , за який потік наукової інформації у порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі відносна швидкість y'/y зростання інформаційних потоків складає 7%, а тому

$$k = 0,07. \text{ Оскільки } y(t) = 2y_0, \text{ то } y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,07} \approx 10 \text{ років}$$

Розглянемо питання використання диференціальних рівнянь в деяких предметних областях.

Використання диференціальних рівнянь в математичних дослідженнях

Обчислити невластний інтеграл $I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx$, залежний від параметра a .

Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= -2x \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx = -(2x + 2a) \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx + 2a \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx = \\ &= + \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} d(-x^2 - 2ax) + 2aI(a) = e^{-x^2 - 2ax} \Big|_0^{\infty} + 2aI(a) = 2aI(a) - 1. \end{aligned}$$

Отримаємо диференціальне рівняння $\frac{dI}{da} = 2aI(a) - 1$.

При цьому відомо $I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Розв'язуючи задачу Коші, отримаємо

$$I(a) = e^{a^2} \left[I(a) - \int_0^a e^{-t^2} dt \right] = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{a^2 - t^2} dt.$$

Диференціальні рівняння закону попиту і пропозиції в економічних дослідженнях.

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай $p(t)$ – ціна, наприклад, на фрукти, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді як попит, так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад, залежностями $q = 4p' - 2p + 39$, $S = 44p' + 2p - 1$.

Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно їх прирівняти ($q=S$):

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$40p' + 4p - 40 = 0,$$

$$4dp = -4(p - 10),$$

$$\frac{10dp}{p-10} = -dt, \quad p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10.$$

Припустимо, що в момент $t=0$ 1кг фруктів коштував $p(0)=1$ крб. Тоді $1=c-10$, $c=-9$. Отже $p = -9e^{-\frac{1}{10}t} + 10$.

Це закон зміни ціни за умови, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

Список використаних джерел:

1. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.:Наука, 1987. – 132 с.
2. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.:Вища школа, 1984. – 200 с.
3. Перестук М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.:Либідь, 1997. – 192 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.:ГИТТЛ, 1952. – 416 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.:Наука, 1992. – 128 с.

НЕРІВНІСТЬ КОШІ У ШКІЛЬНІЙ МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

Олександра Ломанюк

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент О.М. Вороний

В останні десятиліття на різних етапах математичних олімпіад учням пропонуються різноманітні рівняння і нерівності, розв'язання яких передбачає застосування нестандартних методів, непередбачених для вивчення програмою з математики або рідко застосовуються на уроках алгебри та геометрії в загальноосвітній школі. Одним із таких методів розв'язування олімпіадних задач є застосування нерівності Коші, яка в деяких випадках дає змогу із найменшими зусиллями розв'язати завдання та дозволяє заощадити час на його виконанні.

Згідно з навчальною програмою з математики нерівність Коші для двох невід'ємних чисел a та b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

розглядається у розділі «Нерівності» у курсі алгебри 9 класу. В підручнику [4] учням пропонується алгебраїчне доведення цієї нерівності

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

Отже, нерівність, що доводиться, є правильною, при цьому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b$ і $a \geq 0$.

У свою чергу в підручнику [1] запропоновано цікаву геометричну інтерпретацію доведення нерівності Коші, в якому фігурує прямокутний трикутник, вписаний в коло. Головна ідея, полягає в тому, щоб учні виразили висоту, проведену з прямого кута до гіпотенузи трикутника, через значення проекцій катетів на гіпотенузу, а радіус описаного кола подали як півсуму цих проекцій, отримавши нерівність Коші для двох невід'ємних чисел.

Однак знайомство із нерівністю Коші на цьому не варто завершувати, оскільки задачі на доведення нерівності Коші можна гармонійно подати в рамках інших розділів математики, запропонувавши формулювання задачі відповідно до теми, що вивчається.

Зокрема, вивчаючи в 11 класі розділ «Похідна», поряд із іншими задачами на

побудову дотичної доцільно розглянути задачу, яка приведе до відомого співвідношення між середнім арифметичним та середнім геометричним.

Задача 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 2\sqrt{ax}$ в точці з абсцисою a . Побудувати графік функції та дотичну до неї.

Розв'язання. Спочатку обчислимо значення функції $y = f(x)$ в точці $x_0 = a$:

$$y_0 = f(x_0) = f(a) = 2a.$$

Скористаємось рівнянням дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Обчислимо значення похідної функції в точці a :

$$f'(x) = 2 \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \sqrt{\frac{a}{x}}, f'(x_0) = f'(a) = 1.$$

Тоді рівняння дотичної до графіка функції у точці з абсцисою x_0 запишемо так:

$$y - 2a = 1 \cdot (x - a), y = a + x.$$

Відомо, що графік функції f (рис. 1) опуклий угору, тому всі його точки, за винятком точки дотику, розташовані під дотичною, а отже, ординати точок дотичної не менші за ординати відповідних точок функції, тобто $a + x \geq 2\sqrt{ax} \Rightarrow \frac{a+x}{2} \geq \sqrt{ax}$ для всіх $x > 0$. Отримали нерівність Коші. При цьому знак рівності має місце лише тоді, коли $x = a$ [2].

Нерівність Коші для двох невід'ємних чисел також може бути отримана на уроках алгебри в 11-му класі при вивченні теми "Знаходження найбільшого і найменшого значень функції", у завданнях на кшталт наступного: знайдіть найменше значення функції $y = \frac{a+x}{2} - \sqrt{ax}$, де $a \geq 0, x \geq 0$.

З метою формування творчого мислення в учнів при вивченні різних тем шкільного курсу математики залежно від рівня засвоєння навчального матеріалу, учням можна запропонувати доведення нерівності Коші для трьох чисел.

Задача 2. Доведіть, що для будь-яких невід'ємних чисел $a, b, c \in$ справедливою нерівність: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $a = b = c$.

Розв'язання. Якщо хоч одне з чисел a, b, c дорівнює нулю, то нерівність очевидна. Тому будемо вважати, що всі вони додатні, причому $a = x^3, b = y^3, c = z^3$. Тоді вказану нерівність запишемо так: $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$.

Фактично необхідно довести, що $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$.

Це можна виконати за допомогою розкладання на множники і виділення квадрата двочлена

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz = \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = \\ &= (x + y + z)((x + y)^2 - (x + y)z + z^2) - 3xy(x + y + z) = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \\ &= (x + y + z) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) = \\ &= (x + y + z) \cdot \frac{1}{2} \cdot ((x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2). \end{aligned}$$

Таким чином, різниця між лівою і правою частинами нерівності, що доводиться, є добутком трьох невід'ємних чисел. Очевидно також, що рівність в цьому співвідношенні реалізується тоді і тільки тоді, коли $x + y + z = 0$, тобто $x = y = z = 0$, або коли одночасно виконуються три рівності: $x - y = 0, x - z = 0, y - z = 0$, тобто знову ж таки, коли

$x = y = z$. Доведення завершено.

Розглядаючи нерівність Коші в класах з поглибленим вивченням математики, іноді корисно виходити за межі, вказані в підручнику, і розглядати нерівність Коші для n невід'ємних чисел. Такі додаткові дослідження найприродніше спонукають учнів до самостійних досліджень.

На факультативних заняттях та на засіданнях математичного гуртка до уваги учнів можна запропонувати задачі математичних олімпіад, які розв'язуються за допомогою нерівності Коші. Тож розглянемо кілька задач математичних олімпіад різних років [3].

Задача 3. Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника, а S — його площа. Доведіть, що

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

(Кіровоградська обласна олімпіада юних математиків, III етап, 2002-2003 рр., 11 кл.)

Розв'язання. З формули Герона маємо рівність $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Застосовуючи нерівність Коші для трьох параметрів, отримаємо:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3,$$

$$\frac{S^2}{p} \leq \frac{p^3}{27} \Rightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow S \leq \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Беручи до уваги, що

$$(a+b+c)^2 = (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

з останньої нерівності отримаємо:

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Задача 4. Знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{x^4}{(y-2)(z-2)} + \frac{y^4}{(z-2)(x-2)} + \frac{z^4}{(x-2)(y-2)}, \text{ де } x, y, z \in (2, +\infty).$$

(ЛІІ Всеукраїнська олімпіада юних математиків, III етап, I тур, 2012 р., 10 кл.)

Розв'язання. Нехай $x = 2 + a, y = 2 + b, z = 2 + c$, де a, b, c додатні. Тоді заданий вираз запишемо наступним чином:

$$\frac{x^4}{(y-2)(z-2)} + \frac{y^4}{(z-2)(x-2)} + \frac{z^4}{(x-2)(y-2)} = \frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab}.$$

Застосовуючи нерівність Коші, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab} &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+2)^4}{bc} \cdot \frac{(b+2)^4}{ca} \cdot \frac{(c+2)^4}{ab}} \geq \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{(2\sqrt{2}a)^4 (2\sqrt{2}b)^4 (2\sqrt{2}c)^4}{a^2 b^2 c^2}} = 192. \end{aligned}$$

При $a = b = c = 2$, тобто при $x = y = z = 4$, даний вираз дорівнюватиме 192, що і є найменшим значенням.

Список використаних джерел:

1. Бевз Г.П. Алгебра: підріч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Зодіак-ЕКО, 2009. — 288 с.
2. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. — Х.: Вид. група «Основа», 2008. — 255 с.
3. Вороний О.М. Кіровоградські математичні олімпіади школярів 2000 — 2008 рр.: Методичний посібник. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. — 212 с.

4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра 9 клас. Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики Х.: Гімназія, 2009. — 384 с.

ОРГАНІЗАЦІЯ ОЦІНЮВАННЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ НАВЧАННЯМ

Костянтин Мошніков

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А.М.Плічко

Досягнення в галузі інформаційно-комунікаційних технологій забезпечують необхідні технічні можливості для розробки та впровадження в систему освіти сучасних інформаційних технологій. Найбільш істотним внеском у вирішення цих задач є застосування автоматизованих систем навчання і контролю знань.

Інтенсивний розвиток процесу інформатизації системи освіти є важливою складовою комплексної національної програми України. При переході від локальних навчальних систем до мережових якісно змінюються їхні функціональні можливості, які дозволяють значно розширити коло користувачів, зробити спілкування між тими, хто навчається, і викладачем більш інтенсивним. Всі ці питання відносять до сфери E-learning – скорочення від англ. Electronic Learning, – системи електронного навчання. Синонімами терміну є електронне навчання, дистанційне навчання, навчання із застосуванням комп'ютерів, мережеве навчання, віртуальне навчання, навчання за допомогою інформаційних, електронних технологій. Основними компонентами E-learning є система управління навчанням (LMS – від англ. Learning Management System) та система управління навчальним контентом (LCMS).

Система управління навчанням – основа системи управління навчальною діяльністю, використовується для розробки, управління та розповсюдження навчальних онлайн-матеріалів із забезпеченням спільного доступу. Навчальні матеріали створюються у візуальному навчальному середовищі з заданням послідовності вивчення. До складу системи входять індивідуальні завдання, проекти для роботи в малих групах та навчальні елементи для всіх студентів, засновані як на змістовній, так і на комунікативній компоненті [3]. До найбільш відомих систем управління навчанням відносять: Moodle, ILIAS, aTutor, Blackboard Learning System, CCNet, Claroline, eCollege, JoomlaLMS, Learn.com та інші.

При використанні систем управління навчанням однією з найважливіших задач є організація об'єктивного і надійного контролю знань. Тому актуальним стає аналіз можливостей автоматизованих систем управління навчанням і контролю знань, адекватних сучасним тенденціям розвитку інформаційних технологій і дидактичним принципам організації та проведення навчальної роботи.

На сучасному ринку поширено близько п'ятидесяти LMS. Переважна більшість з них призначена для комерційного корпоративного навчання і, відповідно, платна [3]. Також існують LMS, які поширюються за ліцензією GNU/GPL і розробляються здебільшого спільнотами користувачів. Згідно до ліцензії GNU/GPL – однієї з найпопулярніших ліцензій на вільне програмне забезпечення (часто її скорочено називають GNU GPL чи просто GPL), користувач отримує права копіювати, змінювати і розповсюджувати програми, та зобов'язання, згідно з якими користувачі усіх похідних програм теж отримують перераховані вище права [1].

Аналізуючи різні системи управління навчанням [2], ми зупинили вибір на тих програмних продуктах, які поширюються безкоштовно за GNU/GPL-ліцензією та мають підтримку російської (в ідеалі української) мови. У результаті отримано перелік, наведений у таблиці 1.

Після більш детального ознайомлення з запропонованими до аналізу в таблиці 1. системами управління навчанням ми відкинули дві з них: ILIAS та OpenACS: вони не мають демонстраційного серверу і система перевірки знань представлена лише тестами. Системи OLAT і Sakai ми відкинули пізніше на етапі порівняння у зв'язку з частими помилками демонстраційного серверу (OLAT) та проблемами при установці на локальний веб-сервер (Sakai).

Перелік LMS, які поширюються за ліцензією GNU/GPL

Назва платформи	Офіційний веб-сайт	Демонстраційний сервер	Підтримка російської / української мови	Система перевірки знань
Claroline LMS	http://claroline-lms.ru/	Так	Так/Ні	тести, вправи
E-front	http://www.efrontlearning.net	Так	Так/Ні	тести
ILIAS	http://www.ilias.de	Ні	Так/Ні	тести
Moodle	www.moodle.org	Так	Так/Так	тести, завдання, семінари, активність на форумах
Sakai	http://www.sakaiproject.org/	Ні	Так/Ні	тести, завдання, активність на форумах
ATutor	http://atutor.ca/	Так	Так/Так	тести
OLAT	http://www.olat.org/	Так	Так/Ні	тести, завдання
OpenACS	http://openacs.org/	Ні	Так/Ні	тести

Отже після проведення початкового аналізу для порівняння ми відібрали такі системи управління навчанням: ATutor, Claroline LMS, E-front, Moodle.

Для роботи з обраними системами управління навчанням ми використовували демонстраційні веб-сервери, а для системи Moodle – систему встановлену у КДПУ і доступну за адресою m2.kspu.kr.ua.

Після ознайомлення з оцінюваними можливостями кожної з систем та узагальнення отриманих даних було виділено основні критерії, яким на нашу думку повинні відповідати сучасні системи управління навчанням, коли йдеться про оцінювання навчальної діяльності:

- 1) наявність банку питань;
- 2) можливість створення тестів з випадкових тестових завдань;
- 3) задання ваги кожного окремого питання;
- 4) оцінювання окремо виділених компетенцій;
- 5) наявність стандартних шкал оцінювання;
- 6) можливість створення власної шкали оцінювання;
- 7) наявність інших видів діяльності для оцінювання;
- 8) ручне оцінювання певних видів діяльності;
- 9) наявність механізму об'єднання оцінок (сума, середня і т.п.);
- 10) аналіз результатів тестування.

Відповідно до виділених критеріїв нами було здійснено порівняння можливостей підтримки оцінювання в деяких системах управління навчанням (таблиця 2).

Таблиця 2.

Порівняльна характеристика систем оцінювання LMS

Критерій	LMS			
	ATutor	Claroline	E-front	Moodle
Наявність банку питань	✓	✓	✓	✓
Кількість підтримуваних типів тестових завдань	8	5	6	11
Можливість створення тестів з випадкових тестових завдань	✓	✗	✗	✓
Задання ваги кожного окремого питання	✓	✓	✓	✓

Оцінювання окремо виділених компетенцій				
Наявність стандартних шкал оцінювання				
Можливість створення власної шкали оцінювання				
Наявність інших видів діяльності для оцінювання				
Ручне оцінювання певних видів діяльності				
Наявність механізму об'єднання оцінок (сума, середня і т.п.)				
Вбудований аналіз результатів тестування				
Всього позитивних	6	2	3	9

Отже, виходячи із результатів проведеного аналізу обраних нами LMS, можемо зробити такі висновки: найкращу підтримку для організації оцінювання навчальних досягнень надає LMS Moodle. Тьютори та викладачі, використовуючи платформу Moodle, мають можливість ефективно організовувати та керувати процесом оцінювання як для підтримки очного, так і для організації дистанційного навчання та забезпечення самостійної роботи студентів. Інструментарій системи дозволяє оцінювати як в автоматичному, так і в ручному режимі різні види діяльності, має розвинену систему аналізу результатів тестування.

Список використаних джерел:

1. GNU GENERAL PUBLIC LICENSE Version 3, 29 June 2007 [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>.
2. List of learning management systems. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_learning_management_systems.
3. Каталог LMS/LCMS рішень. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.smart-edu.com/index.php/issledovaniya-v-sfere-distantsionnogo-obucheniya/katalog-lms/lcms-resheniy.html>
4. Лодатко Є. О. Педагогічні моделі, педагогічне моделювання і педагогічні вимірювання: that is that? / Є. О. Лодатко // Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології // Вища освіта України: Теоретичний та науково-методичний часопис. У 2-х тт. – Вип 3. – 2011. – Т. 1. – С. 339-344.
5. Обзор бесплатных систем управления обучением. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://ifets.ieee.org/russian/depository/v10_i3/html/9_bogomolov.htm

ПРОБЛЕМА СИНТАКСИЧНОГО НАЛАГОДЖЕННЯ ПРОГРАМ

Сергій Нагорний, Володимир Євладенко

Як відомо, написання складної програми в алгоритмічній мові є трудомістким процесом, внаслідок чого, як правило, така програма містить помилки, які необхідно усунути в процесі її налагодження.

З часу появи ЕОМ розроблено досить багато прийомів, засобів і методів налагодження та тестування програм.

Істотна роль в загальному процесі налагодження програм належить так званому **синтаксичному налагодженню програм**, яке включає в себе вирішення наступних проблем:

- 1) знаходження синтаксичних суперечностей (помилки) в тексті програми;
- 2) видачу діагностичної інформації про ці помилки в тому чи іншому вигляді;

З) їхнє автоматичне чи автоматизоване виправлення.

Складовою частиною проблеми синтаксичного налагодження є **задача синтаксичного контролю**, яка полягає в наступному.

Нехай X – термінальний алфавіт мови, $F(X)$ – вільна півгрупа з одиницею ε в алфавіті X , Γ – контекстно-вільна граматика, а $Y(\Gamma)$ – мова, що породжується граматикою Γ . Для заданого слова $\alpha \in F(X)$ і заданої граматики Γ потрібно визначити істинність предиката $\alpha \in Y(\Gamma)$.

Синтаксичний контроль слова $\alpha \in F(X)$ методом “розгортки” з використанням граматики Γ можна представити як побудову зліва направо α -керованого виводу в Γ , тобто як побудову деякого виводу в Γ , керування яким здійснюється за допомогою інформації, що одержується при побуквенному перегляді слова α . Формалізацією такої обробки заданого слова є **метод поділу на слово** [1], суть якого полягає в наступному:

Слово α засилається у вхідний стек, а аксіома граматики Γ – в стек виводу, який функціонує, взагалі кажучи, як недетермінований. Далі слово α по мірі побудови α -керованих виводів в Γ зберігається в стеку виводу. При цьому, якщо слово, на яке покомпонентно (зліва) ділиться пара (α_i, β_i) (α_i – вміст вхідного стеку, β_i – вміст стеку виводу) не пусте, то скорочення можна розуміти як синхронний зсув вершин цих стеків.

Якщо в процесі цього зсуву вміст вхідного стеку – пусте слово, а стеку виводу – множина слів (адже стек недетермінований), якому належить пусте слово, значить $\alpha \in Y(\Gamma)$, інакше $\alpha \notin Y(\Gamma)$.

В основі синтаксичного налагодження програм лежать алгоритми синтаксичного контролю: початкову програму переглядають зліва направо до виявлення першої синтаксичної помилки; після виправлення помилки, контроль починається з початку програми. Цілком зрозуміло, що для підвищення продуктивності синтаксичного контролю, за один перегляд програми важливо автоматично виявити інформацію про декілька (по можливості, про всі) наявних в ній синтаксичних помилок. Іншими словами, важливо забезпечити можливість продовження синтаксичного контролю програми без внесення яких би то не було виправлень.

У загальному плані проблема продовження синтаксичного контролю програми за один її перегляд зліва направо розглядається в роботі В.А.Васильєва [2], де запропоновано використовувати так звані **ключові символи** та **генератори списків**. При цьому відповідний алгоритм синтаксичного контролю інколи видає сигнали про помилки, яких насправді немає. Недоліком алгоритму є також і те, що при деяких помилках він пропускає досить довгий відрізок вхідного тексту, не піддаючи його контролю. Хоч вказані недоліки і усуваються, але при цьому на вхідні мови накладається ряд суттєвих обмежень.

Розроблений нами метод продовження синтаксичного контролю, так званий **метод синтаксичного налагодження програм**, є, з одного боку, достатньо простим і природним, з іншого – за потужністю не поступається відомим і перевершує їх внаслідок того, що після виявлення синтаксичної помилки в тексті програми дозволяє продовжувати її синтаксичний контроль без всяких пропусків частини тексту програми, яка залишилась не проконтрольованою.

В основі запропонованого **методу синтаксичного налагодження програм** покладено використання так званих **допустимих послідовностей** символів контрольованої мови.

Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – термінальний алфавіт мови Y . Слово α_1 в алфавіті X назвемо **допустимою послідовністю** символів мови Y , якщо воно входить як підслово хоч би в одне слово (програму) цієї мови. Іншими словами, $\alpha_1 \in F(X)$ – допустима послідовність мови Y , якщо знайдеться таке $\alpha \in Y(\Gamma)$, що $\alpha = u_1 \alpha_1 u_2$ ($u_1, u_2 \in F(X)$). Будь-яку послідовність символів мови, відмінну від допустимої, будемо називати **недопустимою**. Недопустиму послідовність символів мови надалі будемо називати **синтаксичною помилкою**, а символ x_{ir} – **кінцем помилки** або просто **помилковим** символом, якщо підслово $x_{i1}x_{i2}\dots x_{ir}$ ($x_{ij} \in X$) слова $\alpha \in F(X)$ є недопустимою послідовністю мови Y , а $x_{i1}x_{i2}\dots x_{ir-1}$ – допустима послідовність.

Нехай $\alpha \in F(X)$. Очевидно, що $\alpha \notin Y(\Gamma)$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha = u_1 \alpha_1 u_2$ ($u_1, u_2 \in F(X)$, а α_1 - недопустима послідовність символів мови Y).

Для реалізації запропонованого нами методу синтаксичного налагодження програм потрібно задати множину пар виду (x, Y_x) , де $x \in X$, а Y_x – мова, що задає всі допустимі послідовності символів контрольованої мови Y , що починаються символом x .

Мова Y_x ($x \in X$) задається деякою граматикою Γ_x , аксіома якої A_x . Сукупність граматик Γ_x будемо називати **налагоджувальним синтаксисом** заданої мови $Y(\Gamma)$. Множина пар (x, Γ_x) задається в результаті дослідження мови Y та її граматики. При цьому вказані пари можна задавати лише для деяких термінальних символів (ключових), хоч максимальне число помилок буде знайдено, коли такі пари будуть задані для переважної більшості термінальних символів [3].

Для опису методу синтаксичного налагодження, в основі якого лежить ідея використання допустимих послідовностей символів контрольованої мови, будемо використовувати один із алгоритмів синтаксичного контролю, який орієнтований на клас вхідних мов [3]. Нагадаємо, що такий алгоритм відноситься до алгоритмів типу “розгортки”, в процесі свого функціонування використовує вхідний стек, стек виводу та метод ділення на слово [4].

Отже, якщо в тексті $\alpha = uabvcs$, що перевіряється на приналежність до мови Y , яка задається граматикою Γ ($u, v, w \in F(X)$, X – термінальний алфавіт мови Y ; $a, b, c \in X$), ua – недопустима послідовність, а a – помилковий символ, тоді запропонований метод синтаксичного налагодження полягає в наступному:

Після відшукування синтаксичної помилки ua і видачі інформації про неї подальший контроль вхідного тексту здійснюється з символу, який слідує за помилковим символом a . При цьому для забезпечення продовження контролю використовуються задані для мови Y пари (x, Γ_x) , де Γ_x – граматики з того ж класу, що і граматика Γ мови Y . Якщо ж для символу b , що безпосередньо слідує за помилковим символом a , пара (b, Γ_b) не задана, то цей символ в тексті пропускаємо, потім переходимо до розгляду наступного за ним і так до тих пір, поки не зустрінемо символу, для якого пара вказаного виду задана. Якщо ж жодного такого символу не знайшлося, синтаксичне налагодження тексту вважається завершеним. Нехай v таких символів не містить, а c буде першим після виявленої помилки символом, для якого пара (c, Γ_c) задана. Тоді повністю очищається стек виводу і в нього засилається метасимвол A_c – аксіома граматики Γ_c . Подальший контроль вхідного тексту проводиться тим же алгоритмом синтаксичного контролю при наступних станах вхідного стеку і стеку виводу: вміст вхідного стеку є слово sw , а в стеці виводу міститься аксіома A_c . При цьому синтаксичний контроль тексту sw , що залишився, проводиться уже незалежно від інформації, яка містилася в початковому слові $uabvcs$.

При практичній реалізації налагоджувальної системи доцільно користуватися рядом рекомендацій.

1. Для окремих термінальних символів доцільно задавати такі пари (x, Γ_x) , що Γ_x породжує не всі допустимі послідовності контрольованої мови, що починаються символом x , а тільки їх деякі початкові відрізки.

Щоб і при цьому, дещо модифікованому методі синтаксичного налагодження, можна було користуватися тим самим алгоритмом синтаксичного контролю, необхідно після виявлення першої помилки провести настройку алгоритму контролю, яка полягає в наступному:

а) той оператор, який при обробці пари (r, v) , де r – слово, що є вмістом вхідного стеку, а v – вміст стеку виводу, – при $r \neq \varepsilon$, $v = \varepsilon$ видавав інформацію про помилку, тепер замінюється оператором переходу на п. б);

б) в слові $r = uxw$ ($x \in X$; $u, w \in F(X)$) шукаємо перший зліва символ x такий, для якого пара (x, Γ_x) задана. Якщо жодного такого символу не знайшлося, синтаксичне налагодження на цьому закінчується. Нехай u такого символу не містить, а x – перший зліва символ, для якого пара (x, Γ_x) задана. Далі очищається стек виводу і в нього засилається метасимвол A_x –

аксіома граматики Γ_x . Подальший контроль з використанням того ж алгоритму синтаксичного контролю проводиться при наступних станах вхідного стеку і стеку виводу: вміст вхідного стеку – слово xw , вміст стеку виводу є аксіома A_x .

2. Налагоджувальний синтаксис доцільно задавати так, щоб граматики Γ_x істотним чином використовували метаозначення, вже наявні в граматиці Γ , яка породжує початкову мову $Y(\Gamma)$. Це дає можливість економити число допоміжних метасимволів і компактно записувати множину всіх підстановок граматик Γ_x .

3. У багатьох мовах програмування є конструкції типу «алгольний рядок», що складаються з будь-якої послідовності символів мови. Перевірка таких конструкцій пов'язана з великим перебором і уповільнює час контролю. Тому їх контроль доцільно здійснювати спеціальними підпрограмами, винесеними поза алгоритмом синтаксичного контролю.

На завершення відмітимо, що якщо відомі методи синтаксичного налагодження після виявлення помилки вимагають пропуску значної частини тексту програми, що слідує за помилкою, то запропонованим методом можна здійснювати подальше синтаксичне налагодження вхідного тексту без всяких пропусків його частин.

Список використаних джерел:

1. Редько В.Н. Параметрические грамматики и проблема параметризации. //Автоматизация программирования. –К.: ИК АН УССР, 1969, вып. 1. – С. 27-36.
2. Васильев В.А. О строении конструкций в формализованных языках. //Журнал вычислительной математики и математической физики. – М.: Наука, 1966, вып. 6, № 4. – С. 46-50.
3. Евладенко В.Н. Алгоритм распознавания для одного класса параметрических грамматик квазирекурсивного типа. – Программирование. - М.: Наука, 1980, № 5. – С. 26-30.
4. Евладенко В.Н. Об одном параметрическом алгоритме синтаксического контроля. // Сб. “Математическое обеспечение ЭЦВМ”, – К.: ИК АН УССР, 1970, вып. 5. – С. 3-20.

ПОТОЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ З ІСТОРІЇ ДЕРЖАВИ І ПРАВА УКРАЇНИ

Ірина Наточий

Науковий керівник – кандидат педагогічних наук, доцент Н.О.Пасічник

Актуальність теми дослідження обумовлена тим, що Україна чітко визначила вектори входження в європейські освітні структури та в єдиний європейський освітній простір. Прагнення українських університетів долучитися до Болонського процесу передбачає подальше вдосконалення модульної організації навчального процесу, системи рейтингового оцінювання знань студентів, як необхідних умов запровадження кредитно-модульної системи.

Як показує ознайомлення з матеріалами офіційних освітніх сайтів Інтернету, чисельних науково-практичних конференцій, оприлюдненими результатами наукових досліджень останнього часу, питання щодо оцінювання успішності студентів в умовах впровадження кредитно-модульної системи навчання є одним з найбільш дискусійних. На сьогоднішній день існує досить багато різноманітних пропозицій, як загального, так предметно-орієнтованого характеру, який враховує специфіку окремих навчальних дисциплін. Так, З.Слепкань детально аналізує елементи модульно-рейтингової системи навчання й оцінювання навчальних досягнень студентів, розкриває механізми формульного підрахунку балів [1]; А.Есаулов пропонує оцінювати ключові знання і вміння з предмету, використовуючи при цьому спеціально підібрані вимірники, зокрема завдання у формі тестів [2]. На фоні різноманітних рекомендацій виділяються ті, які орієнтовані не тільки на оцінювання досягнень студентів, а й на врахування їхніх ставлень до навчання, коли оцінюванню підлягає навіть відвідування занять [3].

Існують і такі пропозиції, які вирізняються достатньо складними процедурами підрахунку проміжних і підсумкових балів (Л.Флегантов [4]). Однак, у контексті впровадження компетентнісного підходу до організації навчання у вищій школі постає питання, яке ще не

знайшло достатньо повного висвітлення у науково-педагогічній літературі, а саме: щодо оцінювання успішності студентів за характером діяльності, яку вони здатні виконувати.

Метою даної статті є загальна характеристика поточного оцінювання навчальних досягнень студентів в умовах кредитно-модульного навчання, розробка та апробація тестової форми поточного оцінювання з курсу “Історія держави і права України”.

Поточний контроль передбачає перевірку якості засвоєння знань у процесі вивчення конкретних тем [5, с. 22]. *Поточне оцінювання* – це систематична перевірка і оцінювання освітніх результатів учня з конкретних тем та на окремих заняттях. До поточного оцінювання належать: опитування; використання тестів; взаємоконтроль студентів в парах або групах; самоконтроль студента.

Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних, лабораторних та семінарських занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Поточний контроль реалізується у формі опитування, захисту лабораторних робіт, виступів на семінарських та практичних заняттях, експрес-контролю тощо, перевірки результатів виконання різноманітних індивідуальних навчально-дослідних завдань (розрахунково-графічних робіт, рефератів тощо), контролю засвоєння навчального матеріалу, запланованого на самостійне опрацювання студентом.

Форми проведення поточних контрольних заходів та критерії оцінювання всіх видів навчальної діяльності студента, кількість змістових модулів розробляються викладачем кафедри та фіксується навчальною програмою дисципліни і доводяться до відома студентів на початку вивчення дисципліни. Поточний контроль знань студента є обов’язковим видом контролю, що проводиться протягом навчального семестру і покликаний:

- допомагати студентові в організації його роботи;
- привчати студента до систематичного опрацювання матеріалу і підготовки до сприйняття наступних тем з програми дисципліни;
- виявляти ступінь відповідальності студента та його ставлення до навчання, причини, що перешкоджають виконувати навчальну програму;
- стимулювати активність та інтерес студента до вивчення дисципліни;
- виявляти обсяг, глибину і якість сприйняття студентом матеріалу, який вивчається;
- визначати недоліки і прогалини у знаннях та шляхи їх усунення;
- виявляти рівень опанування навичками самостійної роботи.

Загалом оцінці підлягають [8]:

- результативність роботи на семінарських (практичних) заняттях;
- рівень знань, продемонстрований у відповідях на питання з тем, винесених для розгляду на семінарське заняття;
- виступи на семінарських заняттях з доповіддю або презентацією;
- активність при обговореннях та дискусіях на семінарських заняттях (включаючи доповнення до виступів, уточнення та виправлення озвучених відповідей інших студентів);
- результати проведення експрес-опитування;
- виконання індивідуальних завдань (підготовка рефератів, есе; заповнення таблиць із завданнями; підготовка навчальних чи наукових текстів тощо);
- самостійне опрацювання тем (розділів, питань);
- виконання модульних завдань.

Зміст курсу “Історія держави і права України” поділений на 2 змістові модулі, кожний з яких включає лекції, практичні заняття, тематично-ситуативні тести під час окремих лекцій та семінарських занять і самостійну роботу студентів, що завершується рейтинговим контролем рівня засвоєння знань програмного матеріалу даної частини курсу [6].

Завдання поточного контролю полягає у перевірці та засвоєнні студентами певного блоку інформації, її розуміння, вироблення навичок самостійного опрацювання джерел та літератури, вміння публічно або письмово виявити свої знання та навички. Мета поточного контролю – стежити за ходом навчання [7, с. 10].

На семінарських заняттях оцінці можуть підлягати: рівень знань, продемонстрований у відповідях і виступах; активність при обговоренні питань, що винесені на семінарські заняття; експрес-тестування тощо. З курсу історії держави і права України передбачено 8 семінарських занять, оцінювання поточної роботи (усні відповіді, підготовка додаткових повідомлень, письмові роботи в різних формах) студента здійснюється в межах 60 балів.

У процесі нашого дослідження було розроблено та проведено поточне оцінювання навчальних досягнень студентів у тестовій формі з теми: “Предмет і завдання курсу. Стародавні держави і право на території України”. Тест складається з 17 питань. Одна правильна відповідь – один бал. Тестування триває 35 хвилин. Форма завдань: завдання з вибором однієї правильної відповіді. До кожного завдання пропонується 4 варіанти відповідей, з яких лише один правильний. Завдання вважається виконаним правильно, якщо вибрано правильний варіант відповіді. Завдання вважається виконаним неправильно, якщо:

- а) позначено неправильну відповідь;
- б) позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо серед них є правильний;
- в) відповідь не позначено взагалі.

Даний тест було розроблено і проведено для того аби виявити прогалини у знаннях студентів. Результати тестування наведено нижче (Таблиця 1):

Таблиця 1.

№ п/п	9	10	14	15	16	17	12	13	1	8	11	5	2	3	7	4	6	індивід.бал
10	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	15
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	14
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	13
3	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	12
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	12
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	11
12	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	10
2	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	9
11	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	9
4	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7
6	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	7
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
Rj	10	10	9	9	9	9	8	8	7	7	7	6	5	5	5	4	3	

За даними таблиці обраховуємо міри центральної тенденції, описові характеристики, міри симетрії і гостровершинності кривих розподілу.

Для нашої вибірки балів найчастішим значенням, що зустрічається серед індивідуальних (сирих) балів є 12. Медіаною даної вибірки є значення 10,5, середнє значення є близьким до медіани і дорівнює 10,08. Розмах вимірює на шкалі відстань в межах якої змінюються всі показники в розподілі і має значення 13. Дисперсія є мірою відхилення значень випадкової величини від центру розподілу і для отриманих результатів дорівнює 12,99. Стандартне відхилення показує, на скільки в середньому відхиляються індивідуальні значення ознаки X_i від їх середньої величини. У даному випадку, стандартне відхилення дорівнює 3,6. За класичною теорією тестування, якщо $\bar{X} \approx 3S_x$, то дисперсія оптимально висока і можна прийняти гіпотезу про нормальність розподілу, в даному випадку обрахувавши праву частину рівності, отримаємо 10,81, що є досить близьким до середнього значення, отже розподіл є близьким до нормального. Асиметрія для даної вибірки має значення (-0,86), це свідчить про зміщення розподілу відносно центру у ліву сторону. Експес в даному випадку має значення 0,98, що свідчить про наявність гостровершинного розподілу.

Далі будуємо полігон частот аби побачити щільність ймовірності випадкової величини. Для цього використовуємо дані Таблиці 2 і будуємо графік, зображений на Рис.1.

Таблиця 2.

бал	15	14	13	12	11	10	9	7	2
частота	1	1	1	2	1	1	2	2	1

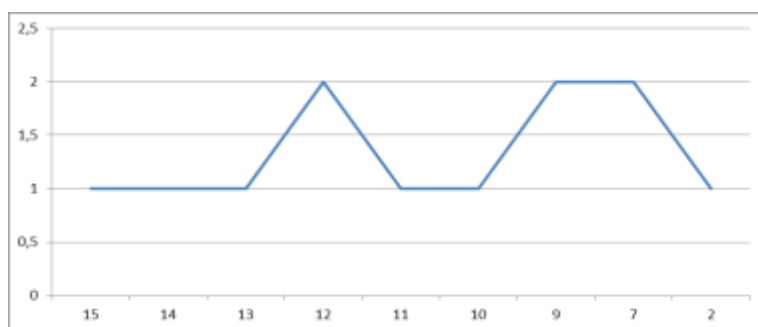


Рис. 1.

Далі визначаємо кореляційні зв'язки завдань. Коефіцієнти кореляції завдань наведено у таблиці 3.

Таблиця 3.

	9	10	14	15	16	17	12	13	1	8	11	5	2	3	7	4	6
9	1,00	-0,20	0,26	0,77	0,26	0,26	0,63	0,63	0,53	0,53	0,53	0,00	-0,08	0,38	-0,08	-0,16	0,26
10		1,00	-0,26	-0,26	-0,26	0,26	0,16	-0,32	-0,38	-0,38	-0,38	-0,45	0,38	-0,53	-0,53	-0,63	-0,26
14			1,00	0,11	0,56	0,11	0,41	0,00	0,68	0,29	0,29	0,19	-0,68	0,10	0,10	0,00	-0,11
15				1,00	0,11	0,11	0,41	0,82	0,29	0,29	0,68	0,19	0,10	0,10	0,10	0,00	0,33
16					1,00	0,11	0,00	0,00	0,68	0,68	0,29	0,58	-0,68	0,49	0,49	0,41	0,33
17						1,00	0,41	0,41	-0,10	-0,10	0,29	-0,19	0,10	0,10	-0,29	0,00	0,33
12							1,00	0,25	0,48	0,12	0,12	-0,35	-0,12	-0,12	-0,48	-0,63	0,00
13								1,00	0,12	0,12	0,84	0,00	0,24	0,24	-0,12	0,13	0,41
1									1,00	0,66	0,31	0,17	-0,66	0,37	0,03	-0,12	0,10
8										1,00	0,31	0,51	-0,31	0,71	0,37	0,24	0,10
11											1,00	0,17	0,03	0,37	0,03	0,24	0,49
5												1,00	-0,51	0,17	0,85	0,71	0,19
2													1,00	-0,03	-0,37	-0,24	-0,10
3														1,00	0,31	0,48	0,29
7															1,00	0,84	0,29
4																1,00	0,41
6																	1,00

Коефіцієнти бісеріальної кореляції представлено у Таблиці 4.

Таблиця 4.

завдання	9	10	14	15	16	17	12	13	1	8	11	5	2	3	7	4	6
r(bis)	0,72	-0,4	0,4	0,68	0,68	0,35	0,27	0,63	0,56	0,71	0,76	0,46	-0,3	0,62	0,37	0,39	0,54

Статистичний аналіз даних тестового випробування з курсу “Історія держави і права України” показав, що в даному тесті досить велике значення дисперсії, що вказує на неоднорідність результатів тесту, а, отже, тест потрібно вдосконалити. Асиметрія має від’ємний показник, що свідчить про рівень складності тесту. Даний тест підходить для обраної групи. Значення ексцесу показує, що в тесті є завдання середньої складності. Досить велике значення розмаху. В проведеному тесті є завдання, в яких досить низький рівень кореляції, що вказує на відсутність зв'язку їх змісту зі змістом інших завдань тесту. Аналіз значень коефіцієнта бісеріальної кореляції вказує на три доволі невдалих завдання тесту (це завдання 2, 10 і завдання 12). Це свідчить про недостатню внутрішню узгодженість тестових

завдань, що призводить до невинновданого збільшення обсягу завдань тесту. Ці завдання виявилися некоректними, і для покращення тесту їх потрібно вдосконалити. Для отримання об'єктивних результатів, надалі потрібно проводити даний тест з більшою кількістю студентів.

Список використаних джерел:

1. Слєпкань З.І. Модульно-рейтингова система навчання й контролю успішності студентів Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: Навч. посіб. / З.І.Слєпкань. – К.: Вища шк., 2005. – С 148-159.
2. Есаулов А.О. Методологічні аспекти оцінювання успішності студентів /А.О.Есаулов // Військова освіта: 36. наук. пр. – К., 2004. – № 2(14). – С 142-150.
3. Рекомендації по оцінюванню успішності студентів // Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: Навч. посіб. для педагогічних університетів / З.І.Слєпкань, А.В.Грохольська, В.Я.Забранський та ін. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. – С 290-291.
4. Флегантов Л.О. Оцінка результатів навчальної роботи студентів у кредитно-модульній системі / Л.О.Флегантов // Тезиси докладов міжнародной научно-практической конференции (15-17 ноября 2005г.). -Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – С. 282-283.
5. Алексюк А.М. Педагогіка вищої освіти України. Історія. Проблеми. – К: Либідь, 1998 – 558 с.
6. Іванов В. М. Навчальна програма дисципліни «Історія держави і права України» (для бакалаврів, спеціалістів). – К.: МАУП, 2004. – 42 с.
7. Лутченко Л.І., Пасічник Н.О. Основи педагогічного оцінювання: навчально-методичний посібник – Кіровоград: ПП Лисенко В.Ф., 2012. – 71 с.
8. Положення про організацію навчального процесу в Кіровоградському державному педагогічному університеті імені Володимира Винниченка на 2012-2013 навчальний рік / Уклад.: Козир І.А. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2012. – 72 с.

МОДЕЛІ З ПАНЕЛЬНИМИ ДАНИМИ

Світлана Новіцька, Наталія Шевченко

Науковий керівник – професор, доктор фізико-математичних наук А.М.Плічко

Актуальність. Економетричні методи в основному спрямовані на аналіз спостережень, які мають порівняно просту одновимірну структуру: одномоментні дані або часові ряди. Панельними називають дані, які містять відомості про одну й ту ж множину об'єктів за ряд послідовних періодів часу. В якості панелі можуть виступати індивідууми, групи осіб, підприємства, регіони, країни. Методи аналізу панельних даних можуть застосовуватися практично в усіх галузях соціально-економічної статистики, так як статистична звітність характеризує одні й ті ж об'єкти. Завдяки цьому панельні дані дозволяють будувати гнучкі і змістовні моделі та отримувати відповіді на питання, які недоступні в рамкахмоделей, які базуються, наприклад, тільки на просторових даних.

Регресійна модель для панельних даних записується у вигляді $y_{it} = \alpha x_{it} + \gamma_t + f_i + \varepsilon_{it}$, де коефіцієнти f_i виражають індивідуальні ефекти, які не залежать від часу. Відносно них використовується два основні підходи, що розрізняються припущеннями відносно статусу змінних f_i у моделі: *модель з фіксованими ефектами* припускає, що ефекти f_i являють собою N фіксованих невідомих параметрів моделі; *модель з випадковими ефектами* припускає, що ефекти f_i є випадковими величинами, які некорельовані з залишками ε_{it} .

Метою нашої роботи є побудова моделі множинної лінійної регресії на основі панельних даних про кількість стипендій, які отримують студенти різних спеціальностей фізико-математичного факультету, пропусків занять та кількості заліків та екзаменів в

кожній сесії. Нами перевірялася гіпотеза про вплив кількості пропусків та відношення кількості профільних і непрофільних предметів на кількість стипендій (в розрахунку на одного студента). Ставилась також задача: дослідити вплив спеціальності, на якій навчаються студенти, на кількість стипендій.

Для дослідження використовувалися дані за спеціальностями “Технологічна освіта”, “Фізика”, “Математика”, “Інформатика” та “Статистика” ($k=1, \dots, 5$) за 7 семестрів з 2008 по 2012 рр. Дані за перший семестр навчання не враховано, оскільки стипендія призначалася не за результатами навчання в університеті, а за результатами вступної компанії.

За результативну ознаку у взято відношення кількості стипендій до кількості студентів, за x_1 – кількість пропусків на одного студента, за x_2 – відношення кількості заліків та екзаменів з профільних предметів до непрофільних. У загальному отримали 35 спостережень. Побудована панель виявилася збалансованою, тобто в ній присутні всі дані за всі періоди часу.

Попередньо за допомогою “Пакету аналізу” MS Excel було побудовано регресійне рівняння без включення фіктивних змінних (звичайна лінійна регресія). Його вигляд $\tilde{y} = 0,619 - 0,001x_1 + 0,002x_2$. При цьому коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,026$ (значимість $F = 0,66 > 0,01$), свідчить про те, що отримане рівняння не можна вважати значимим (лише 2,6% дисперсії пояснюється цим рівнянням). Отже можна зробити висновок, що змінні x_1 та x_2 не впливають на результат.

Побудова моделі методами панельного аналізу включала декілька етапів.

1 етап. Побудова регресійної моделі з фіксованими ефектами. Для побудови даної моделі вводиться 5 фіктивних змінних за формулою:

$$i_k = \begin{cases} 1, \text{ для } k-i \text{ спеціальності,} \\ 0, \text{ для інших спеціальностей.} \end{cases}$$

Побудоване регресійне рівняння (без вільного члена) має вигляд: $y = 0,879i_1 + 0,675i_2 + 0,733i_3 + 0,459i_4 + 0,679i_5 - 0,003x_1 + 0,007x_2$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,98$ близький до одиниці і вказує на те, що лише 2% дисперсії не пояснюється отриманою моделлю. Значення критеріальної статистики для перевірки значимості регресії $F = 1,46 \cdot 10^{-21}$ набагато менше того, що відповідає прийнятому рівню значущості $\alpha = 0,01$, тому можна вважати, що регресія значима.

Для перевірки значимості групових ефектів, тобто для доведення того, що введення у модель фіксованих ефектів виправдане, застосуємо F-статистику, яка обчислюється за формулою:

$$F_{1-\alpha}(N-1, NT-N-K) = \frac{(RSS^r - RSS^{FE})/(N-1)}{RSS^{FE}/(NT-N-K)},$$

де RSS^{FE} – сума квадратів залишків моделі з фіксованими ефектами, RSS^r – сума квадратів залишків моделі, яка включає лише один вільний член, N – кількість панелей, T – кількість спостережень у панелі, K – кількість факторів.

У нашому випадку $F_{0,95}(4,28) = 17,65 > F_{kp} = 2,72$, отже, побудована модель y , яка враховує групові фіксовані ефекти, правомірна. Тому можна вважати, що на кількість стипендій впливає спеціальність, на якій навчаються студенти.

2 етап. Побудова регресійної моделі з випадковими ефектами, тобто припускається, що індивідуальні ефекти можна розглядати як одну з складових похибки. Для цього обчислювалися середні значення результативної та факторних змінних для кожної панелі:

Таблиця 1.

$\bar{y}_{i\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$	$\alpha + b\bar{x}_{i\cdot}$	$(\bar{y}_{i\cdot} - \alpha - b\bar{x}_{i\cdot})^2$
60,06	2,51	0,74	0,55	0,03
78,51	1,40	0,47	0,53	0,00

47,29	3,38	0,63	0,57	0,00
40,95	3,75	0,37	0,58	0,04
38,28	4,03	0,60	0,58	0,00
Сума квадратів відхилень				0,08

Для побудови рівняння обчислюємо параметри $\sigma_u^2 = (0,08 - 0,008)/7 \approx 0,08$ та $\theta = 1 - \sqrt{\frac{0,008}{7 \cdot 0,08 + 0,008}} \approx 0,88$. Здійснивши спеціальне перетворення даних, отримали за допомогою «Пакету аналізу» рівняння $y = 0,292 - 0,001x_1 + 0,002x_2$. Для цього рівняння коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,011$, а значимість $F = 0,84 > 0,01$, що свідчить про те, що отримане рівняння не можна вважати значимим.

Таким чином, побудовано модель множинної лінійної регресії на основі панельних даних про кількість стипендій, які отримують студенти різних спеціальностей фізико-математичного факультету, пропусків занять та кількості заліків та екзаменів в кожній сесії. При побудові моделі без врахування індивідуальних ефектів (без введення фіктивних змінних) отримане рівняння виявилось незначущим.

Підтверджена гіпотеза про вплив кількості пропусків та відношення кількості профільних і непрофільних предметів на кількість стипендій (в розрахунку на одного студента) за умови врахування індивідуальних особливостей спеціальностей. Отже, доведено вплив спеціальності, на якій навчаються студенти, на кількість стипендій.

Список використаних джерел:

1. Балаш В.А., Балаш О.С. Модели линейной регрессии для панельных данных. – М.: 2002. – 65 с.
2. Давнис В.В. и др. Эконометрика сложных экономических процессов. – Воронеж, 2004. – 83 с.
3. Носко В.П. Эконометрика для начинающих (дополнительные главы). – М.: ИЭПП, 2005. – 379 с.

ОЦІНКА ВПЛИВУ ПРЯМИХ ІНОЗЕМНИХ ІНВЕСТИЦІЙ НА ЕКОНОМІКУ УКРАЇНИ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ХАРРОДА-ДОМАРА

Мар'яна Овчаренко

Науковий керівник – кандидат економічних наук, доцент Я.О.Довгенко

Актуальність теми. Initial Public Offering (IPO) – це первинне розміщення компанією, банком акцій на фондовій біржі, де вони стають доступними широкому колу інвесторів і перетворюються в інструмент біржової гри. Як процес зовнішнього запозичення коштів українськими компаніями та банками з метою збільшення їх власних засобів (капіталу), IPO є дуже важливим, а дослідження механізму проведення IPO та отриманих результатів в наслідок його здійснення – актуальним.

Сформовані засоби можна направляти на інвестиційні програми, подальше сприяння розвитку малого й середнього бізнесу, вдосконалення й підтримку активності банків на ринку послуг, що в свою чергу сприятиме загальному зростанню економіки і, як наслідок, – підвищенню рівня життя населення [1, с.38].

Метою нашого дослідження є проведення аналізу існуючої міжнародної і вітчизняної практики первинного публічного розміщення цінних паперів, проведення оцінки впливу прямих іноземних інвестицій на економіку України за допомогою моделі економічного зростання Харрода-Домара.

Модель Харрода-Домара належить до допоміжних інструментів, які використовуються при розв'язуванні проблем економічного зростання у довгостроковому періоді. Вона також допомагає виявити характер взаємозв'язків у економічній системі в

динаміці та проілюструвати їх стан. Показники, які використовуються в моделі Харрода-Домара розраховуються за формулами [2]:

$$\text{Частка інвестицій в національному доході: } S_t = \frac{J_t}{Y_t} \quad (1)$$

Y_t – об'єм основного капіталу t -го року,

J_t – об'єм інвестицій t -го року.

Приріст капіталовіддачі, яка виражає кількість нового продукту створеного одиницею інвестицій, обчислюється за формулою $\beta_t = \frac{\Delta Y_t}{J_t}$, (2)

де ΔY_t – приріст основного капіталу.

$$\text{Темп приросту інвестицій в основний капітал: } \lambda_t = \frac{\Delta Y_t}{Y_t} \quad (3)$$

Для оцінки впливу прямих іноземних інвестицій (ПІІ) на сектори економіки країни-реципієнта необхідно вищенаведені показники перетворити наступним чином [2]:

$$\beta_t^A = \frac{\Delta Y_t^A}{J_t^B} \quad (4)$$

$$\beta_t^B = \frac{\Delta Y_t^B}{J_t^B} \quad (5)$$

$$J_t = J_t^A + J_t^B \quad (6)$$

$$Y_t = Y_t^A + Y_t^B \quad (7)$$

$$n_t = \frac{J_t^B}{J_t} \quad (8)$$

де А і В – позначення секторів економіки з та без ПІІ країни-реципієнта; J_t^A та J_t^B – національні та іноземні інвестиції в секторах економіки країни-реципієнта; Y_t^A та Y_t^B – приріст об'єму основного капіталу, створюваного власними та іноземними інвестиціями в секторах економіки країни-реципієнта; n_t – частка інвестицій в загальному об'ємі інвестицій в економіку країни-реципієнта.

За допомогою цих показників варіанти впливу прямих іноземних інвестицій на економіку країни зводяться до наступних ситуацій [2]:

- $\lambda_t > 0$, $n_t = 0$, $\beta_t^I > 0$ – національна економіка на підйомі, при відсутності іноземного сектора;
- $\lambda_t < 0$, $n_t = 0$, $\beta_t^I < 0$ – національна економіка в стані рецесії і спад виробництва може бути подолано, за допомогою іноземного капіталу;
- $\lambda_t > 0$, $n_t \neq 0$, $\beta_t^I > \beta_t^B > 0$ – сектор з іноземним інвестуванням менш ефективний, чим просто вітчизняна економіка;
- $\lambda_t > 0$, $n_t \neq 0$, $\beta_t^I = \beta_t^B > 0$ – ефективність національного і зарубіжного секторів економіки однакова;
- $\lambda_t > 0$, $n_t \neq 0$, $\beta_t^B > \beta_t^I > 0$ – сектор з іноземним інвестуванням більш ефективний, чим вітчизняна економіка.

Таким чином, ефективність прямих іноземних інвестицій для економіки країни-реципієнта визначається різницею функцій $\beta_t^B - \beta_t^A$, яка змінюється в межах:

$$-\infty > \beta_t^B - \beta_t^A > +\infty.$$

За наявності даних про такі основні економічні параметри як основний капітал, нематеріальні активи, їхнє співвідношення, розміри чистих заощаджень та прямих іноземних інвестицій можна прогнозувати приблизні темпи зростання економіки на майбутнє. Мультиплікатором-акселератором, поєднуючим в собі базові поняття моделі Харрода-Домара, в даній моделі являється темп приросту виробництва, обумовлений зміною частки інвестицій іноземного сектора країни W_t :

$$W_t = \frac{(\beta_t^B - \beta_t^A) \cdot S_t \cdot \Delta n_t}{1 + \lambda_t}, \quad (9)$$

де Δn_t – збільшення частки інвестування іноземного сектора за t -й рік.

Економічний зміст показника W_t полягає у відношенні темпу приросту надходжень іноземних інвестицій в економіку країни до темпу приросту нематеріальних активів та основного капіталу.

За допомогою мультиплікатора-акселератора W_t вплив іноземних інвестицій на економіку країни можна звести до двох випадків:

1. При $W_t > 0$ вплив іноземних інвестицій сприяє підвищенню темпів економічного зростання (при $\lambda_t > 0$) та пом'якшує кризові тенденції (при $\lambda_t < 0$).
2. При $W_t < 0$ вплив іноземних інвестицій сповільнює економічне зростання (при $\lambda_t > 0$) та ускладнює виробничу регресію (при $\lambda_t < 0$).

Оцінимо вплив ПІІ на економіку України (основний капітал), за допомогою описаної моделі (таблиця 1).

Таблиця 1. Дані для розрахунку моделі економічного зростання.

Рік	Основний капітал		Інвестиції в основний капітал	
	Основний капітал (млн. грн.)	Основний капітал з урахуванням ПІІ (млн. грн.)	Національних (млн. грн.)	Зарубіжних (млн. грн.)
2009	3149627	3156486	144918	6859
2010	3903714	3907143	147238	3429
2011	6648861	6655405	202586	6544

Розрахуємо приріст капіталовіддачі, яка виражає кількість нового продукту створеного одиницею інвестицій за формулами (4) та (5):

$$\beta_{2010}^A = \frac{3903714 - 3149627}{147238} = 5,12 \text{ млн. грн.};$$

$$\beta_{2011}^A = \frac{6648861 - 3903714}{202586} = 13,55 \text{ млн. грн.};$$

$$\beta_{2010}^B = \frac{3907143 - 3156486}{3429} = 218,91 \text{ млн. грн.};$$

$$\beta_{2011}^B = \frac{6655405 - 3907143}{6544} = 419,97 \text{ млн. грн.};$$

Розрахуємо темп приросту основного капіталу за формулою (3):

$$\lambda_{2010} = \frac{(3903714 + 3903739,1) - (3149627 + 3149642,8)}{3149627 + 3149642,8} = 0,239 \text{ млн. грн.};$$

$$\lambda_{2011} = \frac{(6648861 + 6648872,1) - (3903714 + 3903739,1)}{3903714 + 3903739,1} = 0,703 \text{ млн. грн.};$$

Проаналізуємо отримані результати:

1. У 2010 році отримали наступні показники: $\lambda_{2010} = 0,239 > 0$, $\beta_{2010}^B = 218,91 > \beta_{2010}^A = 5,12 > 0$. Отже відмічається приріст іноземних інвестицій та зростання основного капіталу.
2. У 2011 році – $\lambda_{2011} = 0,703 > 0$, $\beta_{2011}^B = 419,97 > \beta_{2011}^A = 13,55 > 0$. Отже спостерігається тенденція 2010 року – відмічається приріст іноземних інвестицій та зростання основного капіталу.

Розрахуємо частку іноземних інвестицій в об'ємі національних інвестицій в економіку країни за формулою (8).

$$n_{2010} = \frac{3429}{144918 + 147238} = 0,012 \text{ млн. грн.};$$

$$n_{2011} = \frac{6544}{147238 + 202586} = 0,019 \text{ млн. грн.};$$

Розрахуємо збільшення частки іноземних інвестицій в об'ємі національних інвестицій в економіку країни.

$$\Delta n = 0,019 - 0,012 = 0,007 \text{ млн. грн.}$$

Розрахуємо частку інвестицій в національному доході за формулою (1):

$$S_{2011} = \frac{6544 + 202586}{6648861 + 6655405} = 0,016 \text{ млн. грн.}$$

На основі усіх вище проведених показників розрахуємо мультиплікатор-акселератор W_t за формулою (9):

$$W_{2011} = \frac{(419,97 - 13,55) \cdot 0,016 \cdot 0,007}{1 + 0,703} = 0,026.$$

Оскільки $W_{2011} = 0,026$ і $\lambda_{2011} = 0,703 > 0$, то зростання частки іноземних інвестицій приведе до незначного підвищення темпів економічного зростання. Для покращення ситуації рекомендується створити більш сприятливі умови для іноземних інвесторів.

Список використаних джерел:

1. Ільченко-Сюйва Л. Ринок первинного публічного розміщення акцій: світовий досвід та українські реалії / Л. Ільченко-Сюйва, С. Радзімовська // Суспільна політика та стратегічний менеджмент. – 2008. – № 1. – с. 36–44.
2. Оценка влияния иностранных инвестиций на экономику принимающей страны на основе модифицированной разностной модели мультипликатора-акселератора ПРАКТИКУМ по дисциплине “Иностранные инвестиции” – [Електронний ресурс]. Режим доступу <http://udgutura.ru/metodica/investicii.pdf>

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬ У ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Артем Олійник, Ольга Авраменко

Актуальність теми визначається насамперед тим, що хвильові рухи відіграють важливу роль чи не в усіх океанічних динамічних явищах. Застосування математичного моделювання випадкових хвильових процесів і аналіз отриманих результатів важливе не тільки в теоретичному аспекті (як база розробки чисельних досліджень та нових експериментів), а й зумовлене потребами практики, адже розв’язання задач поширення хвиль використовується в океанології, біомеханіці, гідравліці, також інших галузях машино- та суднобудування.

Метою статті є виведення динамічних рівнянь слабконелінійних стохастичних хвиль у рідких системах та виведення наближень отриманих рівнянь.

Хвиля – це збурення, що рухається по простору зі скінченною і не обов’язково сталою швидкістю. Важливим елементом теорії хвиль, що розповсюджуються, є гармонічна функція: $u_0 = e^{i(kx - \omega t)}$. Тут $\theta = (kx - \omega t)$ – фаза хвилі. Ця рівність описує поширення хвилі в додатному напрямку вісі Ox . Якщо фаза хвилі має вигляд: $\theta = (kx + \omega t)$, то хвиля поширюється в протилежному напрямку. Хвиля такого вигляду називається гармонічною, монохроматичною або біжучою хвилею.

Хвилі на поверхні води виникають під дією сили тяжіння та сил поверхневого натягу. Поверхневий натяг починає істотно впливати при утворенні хвиль у декілька сантиметрів. Якщо якимось чином поверхня води виведена із горизонтального стану, то сила тяжіння буде повертати цю поверхню до її рівноважного стану, що викличе коливання поверхні.

В загальному випадку хвильові рухи на поверхні рідини описуються наступною системою рівнянь:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla}_3 P - \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t);$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_3(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$u_z|_{z=\eta(x,t)} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \vec{\nabla}_2 \eta)$$

$$u_z|_{z=-H(x)} = (\mathbf{u} \vec{\nabla}_2 H(x))$$

Тут $\rho(z, t)$ – щільність рідини; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_x, u_y, u_z)$ – поле хвильових швидкостей; $P(\mathbf{x}, z, t)$ – поле тиску; g – прискорення сили тяжіння; $f(\mathbf{x}, z, t)$ – сили зовнішньої дії; $\eta(\mathbf{x}, t)$ – поле піднесенень вільної поверхні; $H(\mathbf{x})$ – рельєф дна; $\mathbf{x}(x, y)$ – горизонтальний вектор координат; z – вертикальна координата; $\vec{\nabla}_2 = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ – горизонтальний градієнт; $\vec{\nabla}_3 = (\vec{\nabla}_2, \frac{\partial}{\partial z})$ – повний градієнт.

Для розглянутої задачі були введені наступні припущення. Припускається, що дно під рідиною плоске, а також вводиться потенціальне наближення, для якого поле швидкості представляється у вигляді градієнта деякої скалярної функції – потенціалу поля швидкості $\varphi(\mathbf{x}, z, t)$. У статті розглядається потенціальний хвильовий рух з нескінченно малою амплітудою на поверхні рідини під дією сили тяжіння. Далі записано постановку описаної задачі:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla_3 \varphi)^2 = -g\eta - P|_{z=\eta} \quad (2)$$

$$\eta_t + (\nabla_2 \eta \nabla_2 \varphi) = \varphi_z|_{z=\eta} \quad (3)$$

$$\varphi(x, t)|_{z=-\infty} = 0 \quad (4)$$

Отримано систему рівнянь відносно стохастичних амплітуд

$$-i\omega A_q + gB_q = -C_q + \frac{1}{2} \int \{i(\omega - \omega_1) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| A_{q-q_1} B_{q_1} + i\omega_1 k_1 A_{q_1} B_{q-q_1} + (k_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|) A_{q_1} A_{q-q_1}\} dq_1 + \dots$$

$$i\omega B_q + kA_q = -\frac{1}{2} \int \{k_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) A_{q-q_1} B_{q_1} dq_1 + k_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) B_{q-q_1} A_{q_1} + k_1^2 B_{q-q_1} A_{q_1} + |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 A_{q-q_1} B_{q_1}\} dq_1 - \dots$$

Основне динамічне рівняння має вигляд

$$(g - \frac{\omega^2}{k}) B_q = -C_q + \int f_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1) B_{q_1} B_{q-q_1} dq_1 + \iint f_4(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) B_{q_1} B_{q_2} B_{q-q_1-q_2} dq_1 dq_2 + \dots \quad (5)$$

Для отриманого динамічного рівняння виведено друге та третє наближення для стохастичних поверхневих слабконелінійних хвиль.

Друге наближення набуло вигляду

$$f_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega\omega_1 + \omega^2 - \omega_1(\omega - \omega_1) \cdot \langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle - \omega\omega_1 \langle \mathbf{k}; \mathbf{k}_1 \rangle - \omega(\omega - \omega_1) \langle \mathbf{k}; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle). \quad (6)$$

А також отримане третє наближення

$$\begin{aligned} f_4(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = & -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{k} \omega(\omega_1 - \omega_2) - \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} (\omega_1 k_1^2 + \omega_2 k_2^2) + \\ & + \frac{1}{2} \omega(\omega - \omega_1 - \omega_2) \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \rangle (|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| + |\mathbf{k} - \mathbf{k}_2|) - \\ & - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 (\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle - 1) (k_1 + k_2) - \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \left(\frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \omega_1}{k_1} + \omega_1 k_1 + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \omega_2}{k_2} + \omega_2 k_2 \right) + \\ & + \frac{1}{4} \frac{\omega - \omega_1 - \omega_2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} [\omega_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) (\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle - 1) \omega_2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) (\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2 \rangle - 1)] + \\ & + \frac{1}{4} (\omega - \omega_1 - \omega_2) (\langle \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \rangle - 1) (\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle (\omega_1 k_2 + \omega_2 k_1) - \end{aligned}$$

$$-\omega_1 k_1 - \omega_2 k_2) + \frac{1}{4}(\omega_1^2 k_1 + \omega_2^2 k_2) \quad (7)$$

де $\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}_1 \rangle = \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)}{kk_1}$ – кут між векторами $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k}_1$.

Далі розглядається хвильовий рух у гідродинамічній системі “півпростір-півпростір” у рамках слабконелінійної моделі. Досліджується поле випадкових хвиль на поверхні контакту $z = \eta(x, t)$ двох рідких півпросторів $\Omega_1 = \{(x, y, z), -\infty < x, y < \infty, z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y, z), -\infty < x, y < \infty, z > 0\}$ з різними густинами ρ_1 та ρ_2 .

Математична постановка задачі має вигляд:

- рівняння руху

$$\Delta \varphi^{(1)} = 0 \text{ в } \Omega_1 \text{ і } \Delta \varphi^{(2)} = 0 \text{ в } \Omega_2, \quad (8)$$

- кінематичні умови на поверхні контакту $z = \eta$

$$\eta_t + \alpha(\nabla_2 \eta \nabla_2 \varphi^{(1)}) = \varphi_z^{(1)} \big|_{z=\eta}, \quad (9)$$

$$\eta_t + \alpha(\nabla_2 \eta \nabla_2 \varphi^{(2)}) = \varphi_z^{(2)} \big|_{z=\eta}, \quad (10)$$

- динамічна умова на поверхні контакту $z = \eta$

$$\varphi_t^{(1)} - \rho \varphi_t^{(2)} + \frac{1}{2} \alpha (\nabla_3 \varphi^{(1)})^2 - \frac{1}{2} \rho \alpha (\nabla_3 \varphi^{(2)})^2 = -(1 - \rho) \eta \big|_{z=\eta}, \quad (11)$$

- умови затухання

$$\varphi^{(1)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty \text{ та } \varphi^{(2)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Система рівнянь відносно стохастичних амплітуд включає в себе дві умови:

- динамічну умову:

$$\begin{aligned} & -i\omega(A_q^{(1)} - \rho A_q^{(2)}) + (1 - \rho)B_q = \frac{1}{2} \alpha \int i\omega_1 k_1 (A_{q_1}^{(1)} + \rho A_{q_1}^{(2)}) B_{q-q_1} d\mathbf{q}_1 + \\ & + \frac{1}{2} \alpha \int i(\omega - \omega_1) |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| (A_{q-q_1}^{(1)} - \rho A_{q-q_1}^{(2)}) B_{q_1} d\mathbf{q}_1 - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \int (-\mathbf{k}_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|) (A_{q_1}^{(1)} A_{q-q_1}^{(1)} - \rho A_{q_1}^{(2)} A_{q-q_1}^{(2)}) d\mathbf{q}_1 + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (13)$$

- кінематичну умову:

$$\begin{aligned} & \pm k A_q^{(2)} + i\omega B_q = -\alpha \frac{1}{2} \int \mathbf{k}_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left(A_{q_1}^{(1)} B_{q-q_1} + A_{q-q_1}^{(1)} B_{q_1} \right) d\mathbf{q}_1 - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \int k_1^2 A_{q_1}^{(1)} B_{q-q_1} d\mathbf{q}_1 - \frac{1}{2} \alpha \int |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 A_{q-q_1}^{(1)} B_{q_1} d\mathbf{q}_1 + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (14)$$

Отримано основне динамічне рівняння для стохастичних амплітуд:

$$\left((1 - \rho) - \frac{\omega^2}{k} (1 + \rho) \right) B_q = \alpha \int f_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1) B_{q_1} B_{q-q_1} d\mathbf{q}_1 + O(\alpha^2) \quad (15)$$

де $f_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1)$ – друге наближення основного динамічного рівняння:

$$\begin{aligned} f_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1) = & \frac{1}{2} (1 - \rho) (\omega_1^2 - \omega \omega_1 + \omega^2 - \omega_1 (\omega - \omega_1) \cdot \langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle - \\ & - \omega \omega_1 \langle \mathbf{k}; \mathbf{k}_1 \rangle - \omega (\omega - \omega_1) \langle \mathbf{k}; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \rangle) \end{aligned} \quad (16)$$

де $\langle \mathbf{k}, \mathbf{k}_1 \rangle = \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)}{kk_1}$ – кут між векторами $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k}_1$.

Висновки.

В рамках застосування методу послідовних наближень, застосовного до амплітуди, отримано такі результати:

- виведено систему рівнянь до третього порядку відносно стохастичних амплітуд, попередньо перетворено деякі умови постановки математичної задачі;
- отримано основне динамічне рівняння для досліджуваних у роботі систем “півпростір” та “півпростір-півпростір” шляхом підстановки повного виразу для амплітуди у початкові умови;
- знайдено спосіб симетризації доданків другого та третього наближення основного динамічного рівняння для поверхневих та внутрішніх хвиль.

Список використаних джерел:

1. Авраменко О.В. Зв'язок між стохастичними амплітудами полів слабо нелінійних внутрішніх хвиль у рідкій системі “півпростір-півпростір”. – Наукові записки КДПУ. Серія: Математичні науки. Випуск 68., Кіровоград: РВВ КДПУ 2006. – С.3-8.
2. Полников В.Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде. – Москва: ЛЕНАНД, 2007. – 408 с.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С.58-67.
4. Masuda A., Kuo Y., Mitsuyasu H. On the dispersion relation of random gravity waves. Pt.1 // J.Fluid Mechanics. – 1979. – 92, N 4. – P.717-730.

ОЦІНЮВАННЯ ТА ВІДБІР CASE-ІНСТРУМЕНТІВ

Віталій Паршенков

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А.М. Плічко

Основною тенденцією у розвитку сучасних інформаційних систем (ІС) є всебічне застосування засобів автоматизованої підтримки прийняття рішень, динаміка зміни їхньої структури залежно від діючої парадигми функціонування, підвищення інтелектуальності як самих систем, так і апаратних, програмних, технологічних компонент, подальше зростання розподіленості та складності. Врахування динаміки специфічних вимог оточення, складність задач системної інтеграції диктують необхідність використання методів та засобів підтримки проектування ІС.

Сьогодні розроблено та реалізовано структурний підхід до проектування ІС, особливо на етапі отримання первинної інформації про систему. В суспільстві розробників активно використовуються об'єктні методології проектування ІС. Ці методології орієнтовані на системи, що функціонують у порівняно стаціонарному середовищі і не завжди пристосовані до динамічних середовищ; орієнтовані скоріше на повторне проектування ІС, що вимагає у випадку постійних змін значних додаткових часових та грошових ресурсів. Перераховані чинники сприяли появі програмно-технологічних засобів спеціального класу – CASE (Computer Aided System Engineering) – засобів, що реалізують CASE-технологію створення і супроводу ІС.

CASE є методологією проектування ІС, а також набором інструментальних засобів, що дозволяють у наочній формі моделювати предметну область, аналізувати цю модель на всіх етапах розроблення і супроводу ІС і розробляти застосування відповідно до інформаційних потреб користувачів. Більшість існуючих CASE-засобів ґрунтується на методологіях структурного (переважно) або об'єктно-орієнтованого аналізу і проектування, що використовують специфікації у вигляді діаграм або текстів для опису зовнішніх вимог, зв'язків між моделями системи, динаміки поведінки системи й архітектури програмних засобів.

Тим не менше актуальним залишається питання, який же CASE-засіб найдоцільніше вибрати для раціонального вирішення тих чи інших завдань проектування ІС, за якими критеріями доцільно порівнювати існуючі CASE-системи.

Сучасні CASE-інструменти – це основний компонент розробки та супроводу програмних систем. Відбір CASE-інструментів слід проводити згідно з ДСТУ 3919:99 разом з ISO/IEC 14102:1995 (Інформаційні технології. Основні напрямки оцінювання та відбору CASE-інструментів), які визначають послідовність процесів і структурний набір характеристик CASE-інструмента для використання в технічному оцінюванні та відборі конкретних CASE-інструментів. Це впливає з моделі оцінювання програмного продукту, описаній в ISO/IEC 9126:1991 “Оцінка програмного продукту. Характеристики якості та основні напрямки їхнього використання”.

За технічною оцінкою можна з’ясувати, наскільки CASE-інструмент відповідає вимогам користувача і “проголошеній” функціональності. Метою технічного оцінювання є отримання кількісних результатів, на яких може ґрунтуватися остаточний відбір інструменту. Оцінювання виконується відповідно до конкретних критеріїв, його результати включають як об’єктивні, так і суб’єктивні дані по кожному засобу.

На рис. 1 зображено загальну модель процесу оцінювання і вибору. З рисунка видно, що оцінювання і вибір можуть виконуватися незалежно один від одного або разом, для виконання одного або більше з наступних завдань:

- оцінювання декількох CASE-засобів і вибір одного або більше з них;
- оцінювання одного або більше CASE-засобів і збереження результатів для подальшого використання;
- вибір одного або більше CASE-засобів з використанням результатів попередніх оцінок.

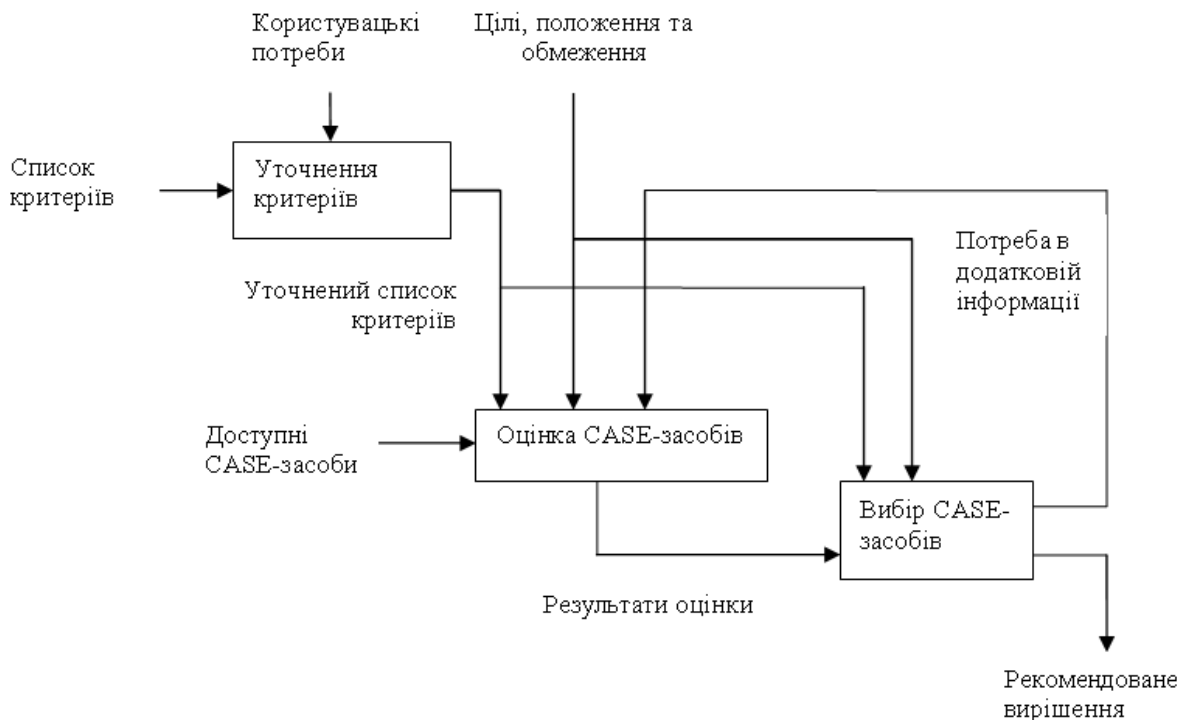


Рис.1. Модель процесу оцінки та вибору

Як показано на Рис. 1, вхідною інформацією для процесу оцінювання є:

- визначення потреб користувача;
- мета і обмеження проекту;
- дані про доступні CASE-засоби;
- список критеріїв, що використовуються в процесі оцінювання.

Результати оцінювання можуть включати попередні оцінки. При цьому набір критеріїв, що використовувалися при попередньому оцінюванні, повинен бути сумісним з поточним набором. Конкретний варіант реалізації процесу (оцінювання та вибір, оцінювання для майбутнього вибору або вибір, заснований на попередніх оцінках) визначається перерахованими вище завданнями.

Елементами процесу оцінювання та вибору є:

- цілі, припущення і обмеження, які можуть уточнюватися в ході процесу;
- потреби користувачів стосовно кількісних і якісних вимог до CASE-засобів;
- критерії, що визначають набір параметрів, відповідно до яких проводиться оцінювання і ухвалення рішення про вибір;
- формалізовані результати оцінювання одного або більше засобів;
- рекомендоване рішення (зазвичай, це рішення про вибір або подальше оцінювання).

Процес оцінювання або вибору можна розпочати тільки тоді, коли проектувальник, група або організація повністю визначила для себе конкретні потреби та формалізувала їх у вигляді кількісних і якісних вимог (критеріїв) у заданій предметній області. Структура набору критеріїв наведена на Рис. 2.



Рис. 2 Структура набору критеріїв.

Результати оцінювання відповідно до конкретного критерію можуть бути багатозначними, знаходитися в деякому числовому діапазоні, мати просто числове значення або мати іншу форму.

Для об'єктивних критеріїв оцінювання слід виконувати таким чином, щоб будь-який фахівець міг отримати такі ж результати. Якщо використовуються тестові приклади, то набір тестів має бути наперед визначеним, уніфікованим і документованим.

За суб'єктивними критеріями CASE-засіб має оцінювати група фахівців, що використовують одні і ті ж критерії. Кожний критерій повинен бути вибраний і адаптований експертом з врахуванням особливостей конкретного процесу. В більшості випадків тільки деякі з великої кількості описаних критеріїв виявляються прийнятними для використання, при цьому також додаються додаткові критерії.

Необхідний рівень досвіду фахівців або груп фахівців має бути наперед визначеним. Результати оцінювання слід стандартним чином документувати (для полегшення подальшого використання) і, при необхідності, затверджувати.

Одним з найважливіших критеріїв в процесі оцінювання може бути потенційна можливість інтеграції кожного із засобів-кандидатів з іншими засобами, що вже знаходяться в експлуатації в даній організації, установі тощо.

Наступним кроком є отримання інформації про CASE-засоби. Вона може складатися з оцінок незалежних експертів, повідомлень і звітів постачальників CASE-засобів, результатів демонстрації можливостей CASE-засобів з боку постачальників і інформації, отриманої безпосередньо від реальних користувачів. У процесі оцінювання інколи критерії доводиться модифікувати. В таких випадках буде потрібне повторне оцінювання. Остаточним результатом оцінювання може бути рекомендація до придбання CASE-засобу або набору CASE-засобів.

В процесі вибору можливо отримання двох результатів:

- рекомендацій по вибору конкретного CASE-засобу;
- запиту на отримання додаткової інформації до процесу оцінювання.

Висновки. Відповідно до вищесказаного можна зробити висновки стосовно вибору і впровадження CASE-інструментарію до створення і супроводу ІС:

- оцінювання та вибір CASE-інструментарію мають виконуватися відповідно до конкретних критеріїв;
- результати оцінки можуть включати як об'єктивні, так і суб'єктивні дані по кожному засобу;
- критерії формують базис для процесів оцінки і вибору CASE-інструментів та можуть приймати різні форми;
- типовий процес оцінки або вибору може використовувати набір критеріїв різних типів.

Таким чином, вибір і уточнення набору критеріїв, що використовуються, є критичним кроком в процесі оцінювання та вибору CASE-засобів.

Список використаних джерел:

1. Перевозчикова О.Л. Основи системного аналізу об'єктів і процесів комп'ютеризації: Навч. Посіб. – К.: Вид. дім “КМ Академія” 2003. – 432 с.
2. Гайна Г.А. Основи проектування баз даних: Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2008. – 200 с.
3. Красильникова М.В. Проектирование информационных систем: Учебное пособие. – М.: МИСиС, 2004. – 106 с.
4. Федотова Д.Е., Семенов Ю.Д., Чижик К.Н. CASE-технології: Практикум. – М.: Гаряча лінія. – Телеком, 2003. – 160 с.

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ КОББА-ДУГЛАСА ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ ПОКАЗНИКА ВВП НА 2013 РІК

Анна Піддубна

Науковий керівник – кандидат економічних наук, доцент Я.О.Довгенко

Перспективи стабільного і прогресивного розвитку українського суспільства залежать від об'єктивних економічних умов, до яких, зокрема, відносяться стабільні темпи зростання ВВП. Збереження стабільних темпів зростання ВВП є важливим завданням, від вирішення якого залежить реальне економічне зростання України, економічна та соціальна політика, доходність підприємств та домогосподарств.

Динаміка та інтенсивність зміни даних по ВВП України за останні 13 років (таблиця 1) відносно робочої сили (L) та вартості основних засобів (K) вказує на нелінійний зв'язок

між зазначеними показниками. На ВВП, окрім робочої сили та вартості основних засобів, можуть впливати й інші фактори. Економічна специфікація економетричної моделі залежності ВВП від вартості основних засобів та трудових ресурсів має вигляд показникової мультиплікативної функції, а саме: $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, – чи в лінійному вигляді: $\ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L)$ [1].

Таблиця 1.

Динаміка ВВП, вартості основних засобів та трудових ресурсів України (2000 – 2012 рр.)

Рік	ВВП, млрд. грн.	ln(ВВП)	Вартість основних засобів, млн. грн.	ln(Вартість основних засобів)	Вартість трудових ресурсів, млн. грн.*	ln(Вартість трудо- вих ресурсів)
2000	170070	12,04397	828822	13,62776	71724546,10	18,08834
2001	204190	12,22681	915477	13,72720	90698570,00	18,32305
2002	225810	12,32745	964814	13,77969	106783120,70	18,48631
2003	267344	12,49629	1026163	13,84134	102743304,95	18,44774
2004	345113	12,75163	1141069	13,94748	147860669,12	18,81178
2005	441452	12,99782	1276201	14,0594	226177987,20	19,23683
2006	544153	13,20699	1568890	14,26588	274718431,58	19,43126
2007	720731	13,48802	2047364	14,53206	362025922,22	19,70723
2008	948056	13,76217	3149627	14,96279	429261875,29	19,87758
2009	913345	13,72487	3903714	15,17744	460174784,58	19,94712
2010	1082569	13,89485	6648861	15,70996	565844554,08	20,15383
2011	1302079	14,07947	7168578	15,78522	665318377,78	20,31578
2012	1400000	14,15198	8270208	15,92817	778053719,19	20,47231

* розраховано автором за даними Держкомстату

Перетворюючи вихідні данні у відповідності з лінійною функцією шляхом логарифмування, отримаємо наступні вихідні данні (таблиця 2).

Аналізуємо вихідні данні за допомогою лінійного регресійного аналізу, який полягає в підборі графіку для набору спостережень за допомогою методу найменших квадратів. Регресія використовується для аналізу впливу на окрему залежну змінну значень однієї чи більше незалежних змінних [2].

Регресійний аналіз логарифмованих змінних можна здійснити за допомогою MS Excel наступним чином:

1) під'єднуємо надбудову “Пакет аналізу”;

2) виконуємо сам розрахунок за допомогою процедури “Регресия” з пакету “Анализ данных”. При цьому варто вказати адресу комірок вхідного інтервалу Y (тобто стовпчик зі значеннями ln(ВВП)) та вхідного інтервалу X (стовпчики зі значеннями ln(Вартість основних засобів), ln(Зайнятість населення)). Вивід підсумків здійснюється на новий робочий аркуш. При цьому α = коефіцієнт при K, β = коефіцієнт при L, $\ln(A)$ = коефіцієнт при Y-перетині.

Щоб знайти A, потрібно здійснити потенціювання за допомогою вбудованої функції EXP(). Точність побудованої економетричної моделі визначається коефіцієнтом детермінації R^2 .

На основі наведених у таблиці 1 даних розраховуємо параметри моделі Кобба-Дугласа.

Таблиця 2.

Розрахунок параметрів моделі Кобба-Дугласа: лінійний регресійний аналіз.

Регресійна статистика	
Множинний R	0,996453
R-квадрат	0,992919
Нормований R-квадрат	0,991503
Стандартна помилка	0,068381
Спостереження	13

Дисперсійний аналіз

	df	SS	MS	F
Регресія	2	6,556892	3,278446	701,1358
залишок	10	0,046759	0,004676	
разом	12	6,603651		

	Коефіцієнти	Стандартна помилка	t-статистика
Y-перетин	-4,0048	0,561522	-7,13206
Змінна X1	0,04766	0,072742	0,655182
Змінна X2	0,852333	0,075073	11,35343

За розрахованими у таблиці 2 даними модель Кобба-Дугласа матиме наступний вигляд:

$$\ln(y) = -4,0048 + 0,04766 \cdot \ln(K) + 0,852333 \cdot \ln(L).$$

Спрогнозуємо вартість основних засобів на 2013 р. для подальшого розрахунку прогнозованого значення ВВП. Динаміку зростання основних виробничих засобів у 2000-2012 рр. та прогноз на 2013 р. наведено на Рис.1.

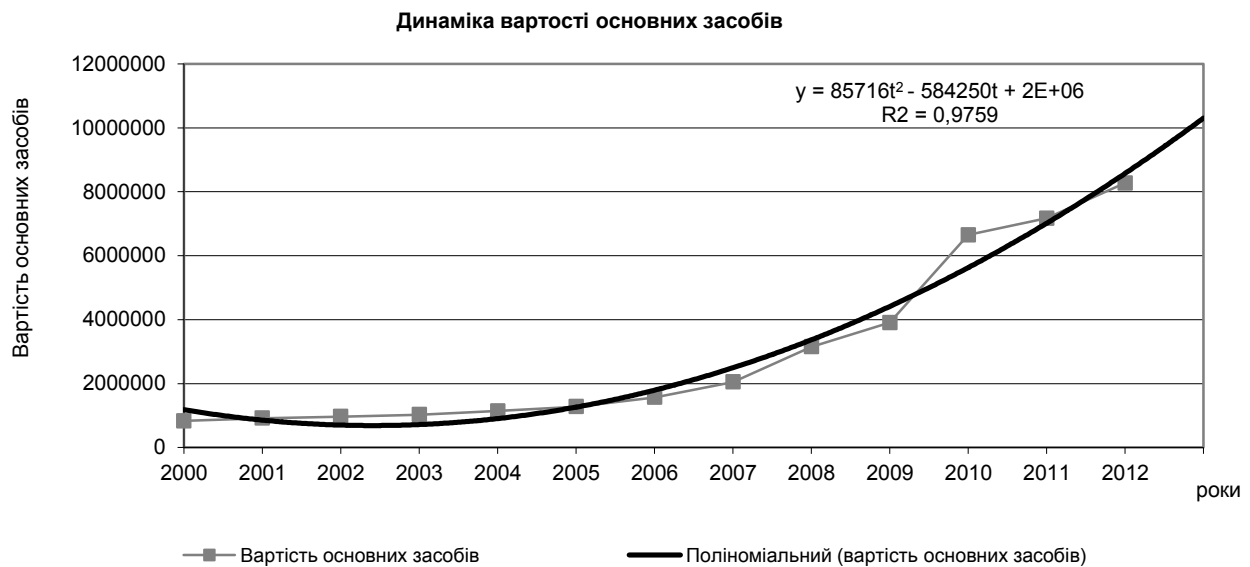


Рис. 1.

Динаміку вартості основних засобів описано поліномом другого степеня. Таким чином $y(14) = 85716 \cdot 14^2 - 584250 \cdot 14 + 2 \cdot 10^6$, тобто за прогнозом на 2013 р. вартість основних засобів становитиме приблизно 10620836.

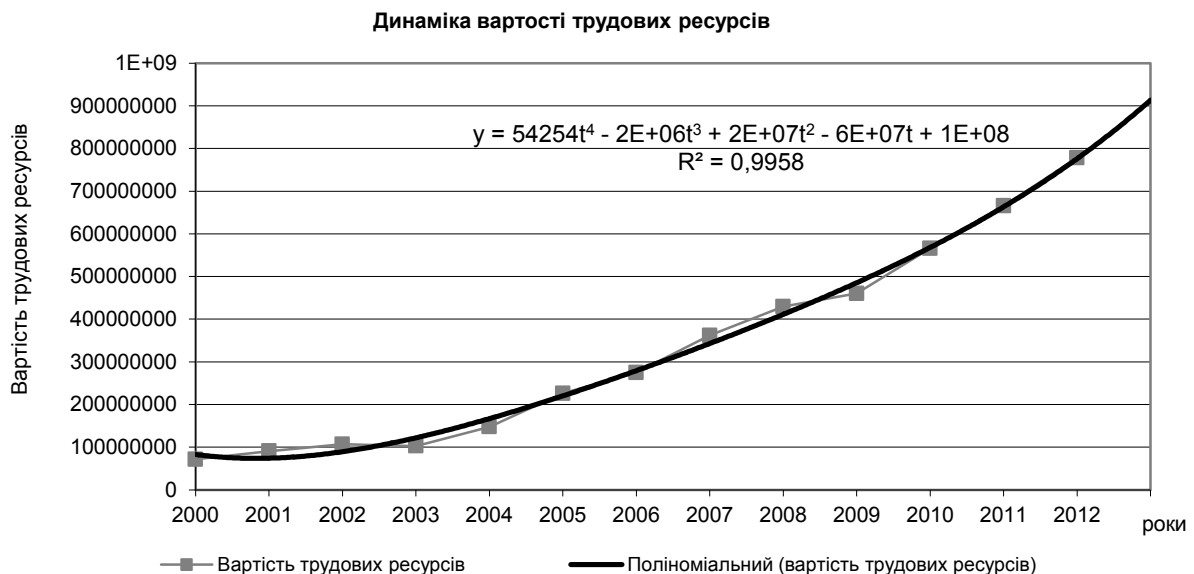


Рис. 2.

Динаміку вартості трудових ресурсів у 2000-2012 рр. та прогноз зростання на 2013 р. представлено на рис.2.

Спрогнозуємо вартість трудових ресурсів на 2013 р. за розрахованою трендовою моделлю четвертого степеня:

$y(14) = 54254 \cdot 14^4 - 2 \cdot 10^6 \cdot 14^3 + 2 \cdot 10^7 \cdot 14^2 - 6 \cdot 10^7 \cdot 14 + 10^8$. Вартість трудових ресурсів у 2013 р. становитиме 932221664.

На основі розрахованих параметрів виробничої функції Кобба-Дугласа шляхом потенціювання: $y = 0,018228 \times K^{0,04766} \times L^{0,852333}$.

Отримана модель $\ln(y) = -4,0048 + 0,04766 \cdot \ln(K) + 0,852333 \cdot \ln(L)$ може бути використана для прогнозування майбутніх значень ВВП на основі відомих чи очікуваних рівня вартості основних засобів та трудових ресурсів. Наочно отримана залежність приросту ВВП від зміни зайнятості населення та вартості основних засобів зображено на рисунку 3.

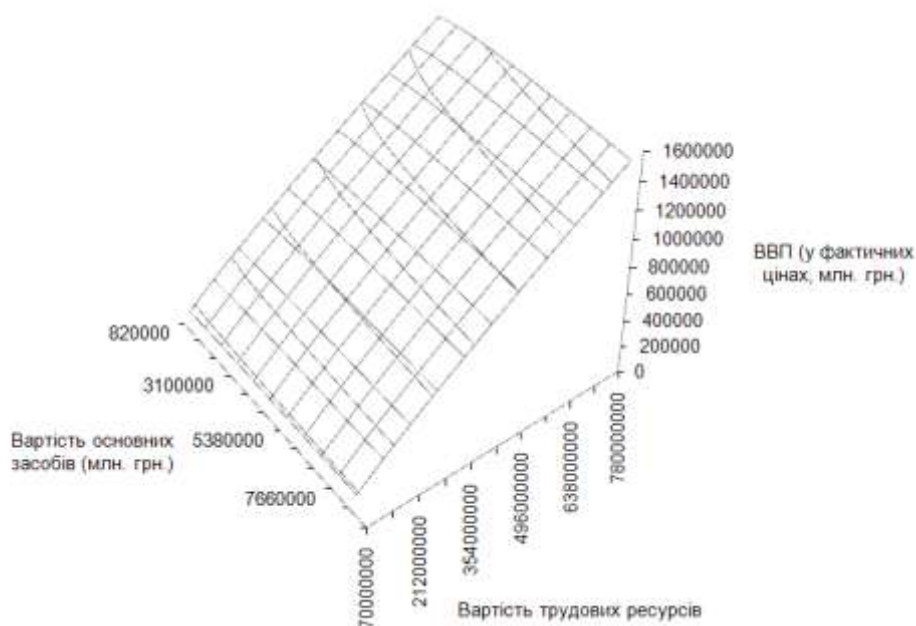


Рис. 3.

Таким чином, прогнозоване ВВП на 2013 р. становитиме:

$$ВВП_{прогн} = 0,018228 \times 10620836^{0,04766} \times 932221664^{0,852333}$$

$$ВВП_{прогн} \approx 1561419 \text{ млрд. грн.}$$

Висновки: За допомогою економетричної моделі Кобба-Дугласа розраховано ВВП на 2013 рік. Прогнозований ВВП становитиме близько 1561419 млрд. грн.

Список використаних джерел:

1. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: Инфра-М, 2001.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити-Дана, 2003.
3. Офіційний сайт Державної служби статистики України: ukrstat.gov.ua

ОКРЕМІ ПІДКЛАСИ ПАРАМЕТРИЧНИХ ГРАМАТИК

Артем Риндич, Володимир Євладенко

Побудова ефективних систем програмування, орієнтованих на клас вхідних мов, тісно пов'язана з розробкою формалізмів, зручних для практичного задання реальних мов програмування. До таких формалізмів практика висуває перш за все такі дві вимоги:

1) формалізм повинен бути орієнтованим на побудову ефективного синтаксичного аналізатора для відповідної мови програмування;

2) формалізм повинен мати досить простий апарат, який дає можливість враховувати погодженість окремих конструкцій і як завгодно далеких фрагментів тексту, що є характерним для мов програмування.

Вказаним двом вимогам не задовольняють ні контекстно-вільні граматики Хомського, які широко застосовуються для опису синтаксису мов програмування, ні їхня модифікація – бекусівські нормальні форми (БНФ).

В статті показано, що ці вимоги можуть бути виконані у випадку використання окремих підкласів параметричних граматик квазірекурсивного типу (ПГКвРТ) [1].

Нехай $Y, Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$, де I – деяка множина індексів) – довільні мови в алфавіті X , а Ω_i ($i \in I$) – довільні бінарні відношення у вільній півгрупі $F = F(X)$, тобто $\Omega_i \subseteq F \times F$ ($i \in I$) – деяка підмножина універсального бінарного відношення.

Під операцією **породження** будемо розуміти таке відображення, яке мовам $Y, Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$) і бінарним відношенням Ω_i ($i \in I$) ставить у відповідність мову $R(Y; Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$, яка є множиною тих і тільки тих слів, які одержуються із слів $\alpha_1^i \alpha_2^i \subset Y$, де $\alpha^i \subset Y_i$, а $(\alpha_1^i, \alpha_2^i) \subset \Omega_i$, шляхом заміни α^i деякими словами із $\bar{Y}_i$. **Породженням мови Y** за допомогою мов $Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$) при бінарних відношеннях Ω_i ($i \in I$) називається мова $R(Y; Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$.

Нехай X і Y – довільні термінальний і нетермінальний алфавіти відповідно, що не перетинаються, а $Y; Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$) – мови в алфавіті $X \cup Y$, Ω_i ($i \in I$) – бінарні відношення (можливо і пусті) у вільній півгрупі $F(X \cup Y)$.

Під **операцією рекурсивного породження** будемо розуміти таке відображення, яке мовам $Y; Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$) і бінарним відношенням Ω_i ($i \in I$) ставить у відповідність мову $R^*(Y; Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$, яка є максимальною підмовою (підмножиною слів) в алфавіті X мови $Y^1 \cup Y^2 \cup \dots$, де $Y^1 = Y$, а $Y^{n+1} = R(Y^n, Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$. Мова $R^*(Y; Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$, називається **рекурсивним породженням мови Y** за допомогою мов $Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$) при бінарних відношеннях Ω_i . Операція рекурсивного породження має ряд цікавих властивостей. Перш за все вона дає можливість в загальному випадку із скінченних мов будувати нескінченні мови. Крім того, ця операція абстрактним способом задає ті композиції, які найбільш часто застосовуються на практиці при побудові нових мов із заданих.

Під **граматикою квазірекурсивного типу** відносно мов $Y; Y_i, \bar{Y}_i$ ($i \in I$), і бінарних відношень Ω_i будемо розуміти об'єкт $R^*(Y; Y_i(\Omega_i)\bar{Y}_i, i \in I)$, що задає рекурсивне породження мови Y за допомогою мов $Y_i, \bar{Y}_i$ при бінарних відношеннях Ω_i .

Виявляється, що клас граматик рекурсивного типу [2] є підкласом граматик квазірекурсивного типу. Дійсно, нехай Y_i ($i = 1, \dots, n$) – довільні мови в алфавіті $X \cup Y$ (X – термінальний, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – нетермінальний алфавіти), а Ω – універсальні бінарні відношення в тому ж алфавіті, тоді $y_i := Y_i$ ($X \cup Y$) = $R^*(y_1; y_1(\Omega)Y_1, \dots, y_n(\Omega)Y_n)$. Отже, і бекусівські нормальні форми є підкласом граматик квазірекурсивного типу.

Параметричною граматикою квазірекурсивного типу (ПГКвРТ) називається об'єкт $G^* = G^*(R^*, \Omega^*, \sigma^*)$, де R^* – граматика квазірекурсивного типу, а зміст параметрів Ω^* і σ^* аналогічний змісту відповідних параметрів Ω і σ в параметричних граматиках рекурсивного типу [2].

Поняття ПГКвРТ є надзвичайно загальним. Природно, що з практичної точки зору важливими є окремі їх підкласи. Такі підкласи виділяються шляхом накладання на параметри R^*, Ω^*, σ^* додаткових обмежень, що ми далі і зробимо.

Нехай R^* – граматика квазірекурсивного типу, яка задається наступною операцією рекурсивного породження:

$R^*(y_1; y_1(\Omega)Y_1, \dots, y_r(\Omega)Y_r, y_{r+1}^i(\Omega)Y_{r+1}^i, \dots, y_n^i(\Omega)Y_n^i)$, ($i = 1, 2, \dots$), де Ω – універсальне бінарне відношення; X – скінченний термінальний алфавіт; $Y = Y_1 \cup Y_2$ – нетермінальний алфавіт, де $Y_1 = \{y_1, \dots, y_r\}$ – скінченна множина нетермінальних символів (метасимволів), $Y_2 = \{y_m^i\}$ ($m = r+1, \dots, n; i = 1, 2, \dots$) – нескінченна множина метасимволів за рахунок того, що індекс i пробігає всю множину натуральних чисел, тобто $Y_2 = \{y_{r+1}^1, y_{r+1}^2, \dots,$

$y^1_n, y^2_n, \dots$; Y_j ($j = 1, 2, \dots, r$) – скінченні мови в алфавіті $X \cup Y$; Y^i_p ($p = r + 1, \dots, n$) скінченні мови в алфавіті $X \cup Y$, кожна із яких містить принаймні одне із слів, що має структуру першого виду:

1) $v_1 \varphi^i_1 v_2 \varphi^i_2 \dots v_r \varphi^i_r v_{r+1}$, де $v_j \in F(X \cup Y)$ ($j = 1, \dots, r + 1$), $\varphi_j \in F(X \cup Y) \setminus \varepsilon$ ($j = 1, \dots, r$), а $\varphi^i_j = \varphi_j \dots \varphi_j$ (φ_j береться i раз, ε – пусте слово), або ж структуру другого виду:

2) $v_1 y_m^{f(i)} v_2$, де $y_m^{f(i)} \in Y_2$ ($m = r + 1, \dots, n$); $f(i)$ – функція натурального аргументу i , що приймає значення із множини $\{1, 2, \dots\}$.

Виділений клас P граматик квазірекурсивного типу будемо називати **одноіндексними граматиками**.

Одноіндексні граматика зручно задавати тією ж схемою, що і БНФ. Дійсно, нехай R^* ($y_1; y_1 (\Omega) Y_1, y^i_2(\Omega) Y^i_2$) – граматика із класу P , де термінальний алфавіт $X = \{a, \varepsilon, (\cdot)\}$, нетермінальний алфавіт $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 = \{y_1\}$, $Y_2 = \{y^i_2\}$, а $Y_1 = \{\varepsilon, (ay_1y^i_2)\}$, $Y^i_2 = \{\varepsilon^i\}$. Тоді, як легко переконатися, ця граматика задається такою схемою БНФ (y_1 – аксіома):

$$y_1 ::= \varepsilon \mid (ay_1y^i_2 \\ y^i_2 ::= \varepsilon^i)$$

При цьому, наприклад, слово $(a(av)\varepsilon)$ як у граматиці R^* , так і в наведеній БНФ одержується наступним породженням (виводом):

$$y_1 \Rightarrow (ay_1y^i_2 \Rightarrow (a(ay_1y^i_2y^i_2 \Rightarrow (a(ay^i_2y^i_2 \Rightarrow (a(av)y^i_2 \Rightarrow (a(av)\varepsilon).$$

Очевидно, що клас одноіндексних граматик містить в собі в явному вигляді засоби побудови погоджених конструкцій в мовах, які вони задають. Так, в наведеному вище прикладі $\frac{(a \quad (a \quad \varepsilon) \quad \varepsilon)}{1 \quad 2 \quad 2 \quad 1}$ погодженими є фрагменти, що позначені однаковими цифрами.

До того ж цей клас граматик суттєво ширший класу контекстно-вільних граматик. Так, наприклад, мова $Y = \{a^i \varepsilon^i c^i \mid i = 1, 2, \dots\}$, яку, як відомо [3], не можна задати ніякою контекстно-вільною граматикою, породжується такою одноіндексною граматикою:

$$y_1 ::= y^i_2 \\ y^i_2 ::= a^i \varepsilon^i c^i \mid y_2^{i+1}$$

Із наведеного зв'язку між параметрами R^* , Ω^* і σ^* слідує, що прості одноіндексні граматика мають чітку орієнтацію на ефективний синтаксичний контроль породжених ними мов. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку керування синтаксичним аналізом здійснюється за допомогою простих бінарних відношень.

ПГКвРТ будемо називати – **простою одноіндексною граматикою**, якщо вона має вид: $\Gamma^* = \Gamma^*(R^*, \Omega^*, \sigma^*)$, де R^* – одноіндексна граматика, яка задається такою БНФ:

$$y_j ::= Y_j(Y \cup X) \quad (j = 1, \dots, r)$$

$$y^i_m ::= Y^i_m(Y \cup X) \quad (m = r + 1, \dots, n; i = 1, 2, \dots),$$

де X – термінальний алфавіт, $Y = Y_1 \cup Y_2$ – нетермінальний алфавіт, $Y_1 = \{y_1, \dots, y_r\}$, $Y_2 = \{y^i_m\}$, а зв'язок між параметрами R^* , Ω^* і σ^* виражається співвідношеннями:

$$\sigma^*(j, \gamma) = \{(v_1 y_j v_2, v_1 x_{kj} F(X))\},$$

де $v_1 \in F(X)$, $x_{kj} \in X$, $v_2 \in F(X \cup Y)$ для всіх $\gamma \in Y_j(Y \cup X)$ ($j = 1, \dots, r$); $\sigma^*(i_s, \gamma) = \{(v_1 y^i_s v_2, v_1 x_{kj} F(X))\}$, де $v_1 \in F(X)$, $x_{kj} \in X$, $v_2 \in F(X \cup Y)$ для всіх $\gamma \in Y^i_s(Y \cup X)$ ($s = r + 1, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots$).

ПГКвРТ будемо називати **k-простою одноіндексною граматикою**, якщо вона має вид:

$$\Gamma^* = \Gamma^*(R^*, \Omega^*, \sigma^*), \text{ де } R^* \text{ – одноіндексна граматика, а зв'язок між параметрами}$$

R^*, Ω^*, σ^* виражається співвідношеннями:

$$\sigma^*(j, \gamma) = \{(v_1 y_j v_2, v_1 (\cup z F(X)))\}, v_1 \in F(X), v_2 \in F(X \cup Y) \text{ для всіх } \gamma \in Y_j(Y) \quad (j = 1, 2, \dots, r);$$

$$\sigma^*(i_s, \gamma) = \{(v_1 y^i_s v_2, v_1 (\cup z F(X)))\}, v_1 \in F(X), v_2 \in F(X \cup Y) \text{ для всіх } \gamma \in Y^i_s(Y)$$

($s = r + 1, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots$); z – деяка множина термінальних слів довжиною k , яка ставиться у відповідність слову γ .

Мова, що задається k -простою одноіндексною граматикою, називається **k-простою одноіндексною граматикою**. У випадку, коли $k = 1$, одержимо 1-просту одноіндексну граматикою (мову).

Клас k -простих одноіндексних граматик має безпосередній зв'язок з $LL(k)$ -граматиками і орієнтований на безперебійний синтаксичний контроль методом "розгортки" [4].

Список використаних джерел:

1. Редько В.Н. Параметрические грамматики и проблема синтаксического анализа языков. //Труды II Всесоюзной конференции по программированию. – Новосибирск, 1970.
2. Редько В.Н. Параметрические грамматики и проблема параметризации. //Автоматизация программирования. Сборник научных трудов. Вып. I. – К.: ИК АН УССР, 1969.
3. Евладенко В.Н. Алгоритм распознавания для одного класса параметрических грамматики квазирекурсивного типа. //Программирование. Вып 5. – М.: Наука, 1980.
4. Братчиков Н.Л. Синтаксис языков программирования. – Новосибирск: Наука, 1975.

**РОЗРАХУНОК IBNR-РЕЗЕРВІВ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ МЕТОДОМ
БОРНХУЕТТЕРА-ФЕРГЮСОНА**

Катерина Сальник

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент З.П.Халецька

Актуальність роботи. Страхові компанії не лише захищають матеріальні та інші інтереси юридичних і фізичних осіб, але й виступають як акумулюючі структури, що накопичують гроші у формі резервів, необхідних для покриття виплат у випадку настання страхових подій.

Управління страховими резервами дозволяє своєчасно реагувати на зміни зовнішнього середовища і внутрішнього стану страховика і однією з його цілей є формування збалансованого страхового портфеля як основи стійкості фінансового стану страхової компанії.

Розрахунок резервів, необхідних для ефективної роботи страхової компанії та забезпечення її платоспроможності, є важливим напрямком сучасної актуарної діяльності.

У 80-90 роках минулого століття методологія розрахунку резервів для забезпечення платоспроможності страхової компанії детально вивчалася *Британською робочою групою з проблем платоспроможності*.

Про важливість розрахунку резервів у випадку даних відносно збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR – incurred but not reported) свідчить також той факт, що *Державна комісія з регулювання ринку фінансових послуг* включила до свого розпорядження спеціальний розділ "Методи розрахунку збитків, які виникли, але не заявлені" [1].

На сьогоднішній день розроблено ряд методів визначення величини IBNR-резервів, одним з яких є метод Борнхуеттера-Фергюсона (В-Ф метод).

Метою статті є дослідження основних етапів В-Ф методу та практичної його реалізації для розрахунку IBNR-резервів страхової компанії.

Виклад основного матеріалу. Перш ніж розглянути основні етапи В-Ф методу варто ввести поняття коефіцієнту збитковості.

Відношення величини заявлених позовів до величини отриманих премій називають коефіцієнтом збитковості.

Дослідження коефіцієнтів збитковості для різних років настання страхової події, як правило, демонструють певну стабільність за умови відсутності кардинальних змін, зокрема, помітних змін у розмірах премій. Очікувані коефіцієнти збитковості також є важливою складовою при визначенні тарифної бази. Тому цілком доречно вважати, що ці коефіцієнти, отримані або з попередніх даних, або з маркетингової інформації, або з оцінки андерайтерів можуть бути використані для прогнозу можливих збитків, відтак і майбутніх позовів. Проте, самі по собі, вони є дуже грубою оцінкою через відхилення в даних, притаманних будь-якій інформації стосовно позовів.

Коефіцієнт збитковості може бути заснованим на історичних даних або бути обґрунтованим здогадкою аналітика.

У найпростішому випадку коефіцієнт збитковості є сталим для усіх років розвитку.

Концепція В-Ф методу включає такі етапи [2, с.162]:

1. Визначення на базі даних щодо зароблених премій і коефіцієнтів збитковості λ початкових оцінок BUL_i величини сумарних остаточних збитків для кожного року i настання страхової події.

Джерелами інформації для розрахунку можуть бути:

- історичні дані за даним видом страхування;
- припущення, зроблені при визначенні грошового тарифу;
- статистика ринку для однорідних видів страхування.

2. На основі коефіцієнта λ величина BUL_i розраховується за формулою:

$$BUL_i = \lambda P_i,$$

де P_i - зароблена премія для i -го року настання страхової події.

3. Для знаходження факторів розвитку ρ_j порахуємо наступні суми для кожного року розвитку:

$$V_j = \sum_{i=1}^n C_{i,j}; \quad W_j = \sum_{i=0}^{n-1} C_{i,j}; \quad \rho_j = \frac{V_{j+1}}{W_j},$$

де $C_{i,j}$ – виплати на кінець j року розвитку за страховими подіями, що настали в i році.

4. Знаходження кінцевих факторів розвитку f_j :

$$f_j = \prod_{k=j}^N \rho_k.$$

5. Знаходимо величину резерву для кожного року настання страхової події за формулою:

$$V_i = BUL_i \cdot \left(1 - \frac{1}{f_i}\right).$$

Отже, загальна величина резерву збитків, що виникли, але не заявлені V_{IBNR}^* для N років настання страхової події розраховується як сума значень резервів для кожного року настання страхової події:

$$V_{IBNR}^* = \sum_{i=0}^N V_i.$$

Продемонструємо реалізацію методу для обчислення IBNR-резервів деякої страхової компанії.

В таблиці 1 наведено подані у формі «run-off» трикутника дані з автотранспортного страхування страхової компанії США стосовно збитків, що виникли [3].

Таблиця 1. Дані за сукупними заявленими позовами:

AY	DY					
	0	1	2	3	4	5
0	3209	4372	4411	4428	4435	4456
1	3367	4659	4696	4720	4730	
2	3871	5345	5398	5420		
3	4239	5917	6020			
4	4929	6794				
5	5217					

На першому кроці порахуємо суми V_j та W_j ; на їх основі обчислимо фактори розвитку ρ та кінцеві фактори розвитку f (таблиця 2).

Таблиця 2. Розрахунок факторів розвитку:

	DY					
	0	1	2	3	4	5
Суми V_j	24832	27087	20525	14568	9165	4456
Суми W_j	19615	20293	14505	9148	4435	
фактори розвитку, ρ	1,381	1,011	1,004	1,002	1,005	
кінцеві фактори розвитку, f	1,412	1,023	1,011	1,007	1,005	1,000

В таблиці 3 наведено дані стосовно зароблених премій (P_i). Припустимо, що очікуване значення коефіцієнту збитковості λ дорівнює 0,75.

Таблиця 3. Зароблені премії для кожного року настання страхової події:

AY	0	1	2	3	4	5
P_i	5160	5340	5892	6433	7288	8013

Наступний крок полягає в застосуванні коефіцієнта збитковості для розрахунку початкових оцінок остаточних збитків (BUL_i) для кожного року настання страхової події:

AY	0	1	2	3	4	5
BUL_i	3870	4005	4419	4825	5466	6010

На основі обчислених вище факторів розвитку ми можемо тепер оцінити збитки, що виникнуть у майбутньому.

Таблиця 4. Розрахунок резерву для кожного року настання страхової події

Рік настання страхової події (AY)	0	1	2	3	4	5
f	1,000	1,005	1,007	1,011	1,023	1,412
$1/f$	1,000	0,995	0,993	0,989	0,978	0,708
$1 - 1/f$	0,000	0,005	0,007	0,011	0,022	0,292
BUL_i	3870	4005	4419	4825	5466	6010
V_i	0	19	29	52	120	1754

Отже, необхідний резерв дорівнює: $V_{IBNR}^* = 1974$.

Висновки. Розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені здійснюється із застосуванням різних математико-статистичних методів, до яких належать метод ланцюгових сходів, метод фіксованого відсотку та ін.. Метод Борнхуеттера-Фергюсона є найбільш складним та водночас найбільш точним методом розрахунку IBNR-резервів страхової компанії, адже він комбінує оцінку коефіцієнта збитковості з методом ланцюгових сходів та враховує інформацію про найбільш недавній розвиток структури позовів.

Список використаних джерел:

1. Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг “Про затвердження Правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя” від 17.12.2004 N 3104. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z0019-05>.
2. Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 213 с.
3. Лемер Ж. Автомобильное страхование, актуарные модели. М.: Янус-К, 2003. – 307 с.

ЕЛЕМЕНТИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Віталій Споран

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент З.П. Халецька

Здатність приймати правильні рішення в умовах неповної і нечіткої інформації – це найбільш вражаюча властивість людського інтелекту. Побудова моделей, наближених до роздумів людини, і використання їх у комп’ютерних системах представляє сьогодні одну з найважливіших проблем науки.

Основи нечіткої логіки були закладені наприкінці 60-х років у працях відомого американського математика Лотфі Заде (1921 р.н.). Для створення інтелектуальних систем, здатних адекватно взаємодіяти з людиною, був потрібен новий математичний апарат, що перекладає невиразні і неоднозначні життєві твердження на мову чітких і формальних математичних формул. Першим серйозним кроком у цьому напрямку була теорія нечітких множин, розроблена Л.Заде. Його робота “Fuzzy Sets” (fuzzy – нечіткий, розмитий, м’який),

що з'явилася в 1965 році у журналі "Information and Control", стала поштовхом до розвитку нової математичної теорії.

Подальші роботи професора Л.Заде та його послідовників заклали міцний фундамент моделювання інтелектуальної діяльності людини і створили передумови для впровадження методів нечіткого управління в інженерну практику. Своє друге народження теорія нечіткої логіки пережила на початку вісімдесятих років, коли відразу кілька груп дослідників (в основному в США і Японії) всерйоз зайнялися створенням електронних, що використовують нечіткі керуючі алгоритми. Теоретичні основи для цих спроб були закладені в ранніх працях професора і письменника Барта Ендрю Коско (1960 р.н.), та інших учених.

Третій період почався з кінця 80-х років XX ст. і дотепер. Цей період характеризується бумом практичного застосування теорії нечіткої логіки в різних сферах науки і техніки. Зсув центра досліджень нечітких систем в бік практичних застосувань привело до постановки цілого ряду проблем, зокрема:

- нові архітектури комп'ютерів для нечітких обчислень;
- елементна база нечітких комп'ютерів і контролерів;
- інструментальні засоби розробки;
- інженерні методи розрахунку і розробки нечітких систем керування, тощо.

Мета нашого дослідження показати доцільність викладання елементів нечіткої логіки в курсі математичної логіки та теорії алгоритмів. Розглянемо основні поняття математичного апарату нечіткої логіки: нечітка множина, лінгвістична змінна та нечітке число.

Нехай E – універсальна множина, x – елемент E , а R – певна властивість. Звичайна (чітка) підмножина A універсальної множини E , елементи якої задовольняють властивості R , визначається як множина впорядкованих пар $A = \{\mu_A(x)/x\}$, де $\mu_A(x)$ – характеристична функція, що набуває значення 1, якщо x задовольняє властивості R , і 0 – в іншому випадку, нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з E немає однозначної відповіді "ні" відносно властивості R . Тому нечітка підмножина A універсальної множини E визначається як множина впорядкованих пар $A = \{\mu_A(x)/x\}$, де $\mu_A(x)$ – характеристична функція належності (або функція належності), що набуває значення в деякій впорядкованій множині M (наприклад, $M = [0, 1]$).

Функція належності вказує ступінь (або рівень) належності елемента x до підмножини A . Множину M називають множиною належностей. Якщо $M = \{0, 1\}$, то нечітку підмножину A можна розглядати як звичайну або чітку множину.

Розглянемо $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; A – нечітка множина, для якої $\mu_A(x_1)=0,6$; $\mu_A(x_2)=0,2$; $\mu_A(x_3)=0,5$; $\mu_A(x_4)=0$; $\mu_A(x_5)=0,7$. Тоді нечітку множину A можна подати у вигляді $A = \{0,6/x_1; 0,2/x_2; 0,5/x_3; 0/x_4; 0,7/x_5\}$ або $A = 0,6/x_1 + 0,2/x_2 + 0,5/x_3 + 0/x_4 + 0,7/x_5$, (знак "+" є операцією не додавання, а об'єднання) або табличному

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A =$	0,6	0,2	0,5	0	0,7

Приклад 1. Розглянемо множину X всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X всіх дійсних чисел від 5 до 8. $A = [5, 8]$.

Тоді функцію належності множини A , що ставить у відповідність число 1 чи 0 кожному елементу в X , залежно від того, належить цей елемент підмножині A чи ні, зображено на рисунку 1.

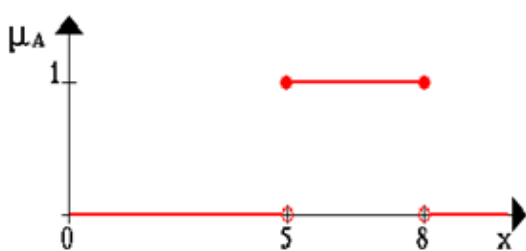


Рис.1 Функція приналежності множини A

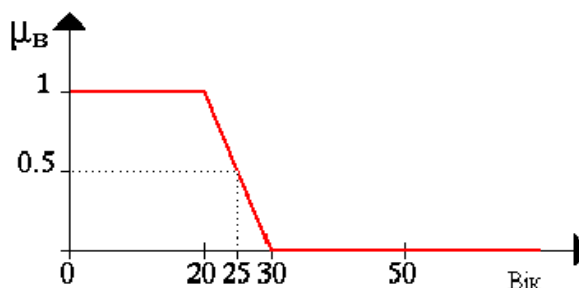


Рис.2 Характеристична функція множини «молодих» людей

Лінгвістичною змінною називають набір $\langle \beta, T, U, G, M \rangle$, де β – найменування лінгвістичної змінної; T – множина її значень (терм-множина), що є найменуваннями нечітких змінних, областю визначення кожної з яких є множина X . Множину T називають базовою терм-множиною лінгвістичної змінної; U – множина синтаксичних правил, що породжують терми за допомогою квантифікаторів; G – синтаксична процедура, що дозволяють оперувати елементами терм-множини T , як приклад, генерувати нові терми (значення); M – семантична процедура, яка формулює нечітку множину.

Значеннями лінгвістичної змінної є нечіткі множини, символами яких є слова та речення звичайної або формальної мови, що виступають деякою елементарною характеристикою явища.

Приклад 2. Опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так:

$V = \{\text{множина молодих людей}\}$.

Природний шлях отримання множини V полягає в ослабленні строгого поділу на молодих і не молодих. Розглянемо, як за допомогою нечіткої множини визначити такий вираз – “він ще молодий”.

В першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простий спосіб узагальнити цю концепцію – ввести значення між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченну кількість значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

Звичайно, знову число 1 ставиться у відповідність тому елементу, що належить множині V , а 0 означає, що елемент точно не належить множині V . Всі інші значення визначають ступінь належності до множини. Тоді характеристичну функцію множини молодих людей (Рис. 2) можна визначити аналітично:

$$\mu_v = \begin{cases} 1 & x \in [0; 20] \\ 0,1(20 - x) + 1 & x \in (20; 30] \\ 0 & x > 30 \end{cases}$$

Нечіткі числа визначаються як нечіткі множини A на множині дійсних чисел M з функцією приналежності $\mu_A(x) \in [0,1]$, де x – дійсне число.

Нечітке число A **нормальне**, якщо $\max_x \mu_A = 1$ **опукле** якщо для будь-яких $x \leq y \leq z$ виконується $\mu_A(x) \geq \mu_A(y) \wedge \mu_A(z)$.

Множина α -рівня нечіткого числа A визначається як $A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Підмножина $S_A \subset R$ називається **носієм нечіткого числа** A , якщо $S_A = \{x / \mu_A(x) > 0\}$

Нечітке число A **унімодальне**, якщо умова $\mu_A(x) = 1$ справедлива тільки для однієї точки дійсної осі.

Опукле нечітке число A називається **нечітким нулем**, якщо $\mu_A(0) = \sup_x (\mu_A(x))$

Нечітке число A **додатнє**, якщо $\forall x \in S_A, x > 0$ і **від’ємне**, якщо $\forall x \in S_A, x < 0$

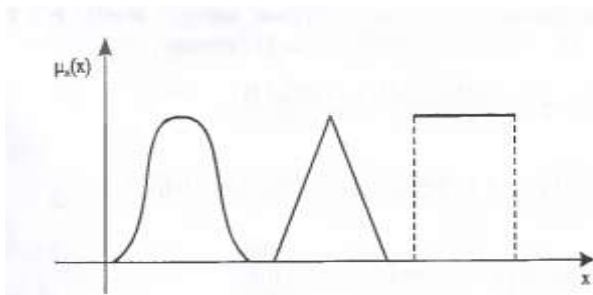


Рис. 3 Приклади нечітких чисел

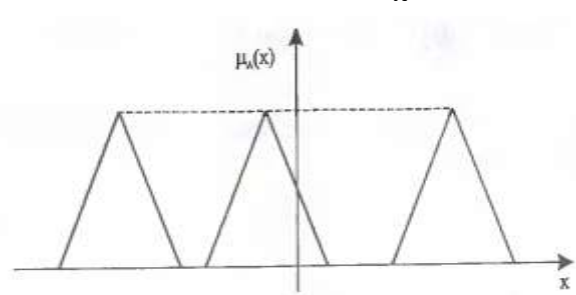


Рис. 4 Приклади нечітких чисел: додатного, від’ємного, а також такого яке не є ні додатнім, ні від’ємним.

Розширені бінарні арифметичні операції (додавання, множення, тощо) для нечітких чисел визначаються через відповідні операції для чітких чисел з використанням принципу узагальнення наступним чином.

Нехай A і B – нечіткі числа, а $*$ – нечітка операція, яка відповідає довільній алгебраїчній операції $*$ над звичайними числами. $C = A * B \Leftrightarrow \sup_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$.

Аналіз властивостей арифметичних операцій над нечіткими числами показав, що нечітке число не має протилежного і оберненого числа, додавання і множення комутативні, асоціативні та в загальному випадку не дистрибутивні.

Приклад 3. Додамо і перемножимо два нечітких числа, які мають вигляд

$$A_1 = \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,6}{4} \quad A_2 = \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{6}.$$

У відповідності з формулою $\mu_B(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$ отримаємо

$$A_1 \sim A_2 = \frac{\min(0,7;0,8)}{5} + \frac{\max\{\min(0,7;1), \min(1;0,8)\}}{6} + \frac{\max\{\min(1;1), \min(0,6;0,8)\}}{7} +$$

$$+ \frac{\max\{\min(0,7;0,5), \min(0,6;1)\}}{8} + \frac{\min(1;0,5)}{9} + \frac{\min(0,6;0,5)}{10} = \frac{0,7}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,6}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,5}{10}$$

На основі формули $\mu_B(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$

$$A_1 \cdot A_2 = \frac{\min(0,7;0,8)}{6} + \frac{\min(0,7;1)}{8} + \frac{\min(1;0,8)}{9} + \frac{\max\{\min(0,7;0,5), \min(1;1), \min(0,6;0,8)\}}{12} +$$

$$+ \frac{\min(0,6;1)}{16} + \frac{\min(1;0,5)}{18} + \frac{\min(0,6;0,5)}{24} = \frac{0,7}{6} + \frac{0,7}{8} + \frac{0,8}{9} + \frac{1}{2} + \frac{0,6}{16} + \frac{0,5}{18} + \frac{0,5}{24}$$

Наведені приклади ілюструють базові поняття нечіткої логіки і можуть бути застосовані студентами при вивченні основ теорії нечітких множин.

Список використаних джерел:

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
2. Яхьяева Г. Э. – Нечеткие множества и нейронные сети: учебное пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.: ил., табл. – (Серия “Основы информационных технологий”).
3. Нечеткая логика – математические основы. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/fuzzylogic/math/>

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ШКОЛІ

Катерина Терещенко, Юрій Гуртовий

У Державному освітньому стандарті з математики [1], програмі з математики для старшої загальноосвітньої школи [2] визначено цілі, завдання і функції шкільної математичної освіти. Особливу увагу приділено реалізації особистісно-орієнтованих технологій, практичному й творчому аспекту навчальної діяльності, виробленню вмінь учитися самостійно і відкривати нові для себе математичні закономірності. У цій програмі також підкреслюється, що учень повинен оволодіти прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язання практичних задач. Отже, формування навичок застосування математики є однією із головних цілей навчання математики. Широке та систематичне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення усього курсу математики є потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою у процесі вивчення природничих предметів, зокрема фізики. Такий підхід посилює прикладну спрямованість навчання математики, сприяє формуванню в учнів стійких мотивів до оволодіння математичними знаннями.

В публікації пропонується один з можливих варіантів методичних розробок (проект) для ознайомлення учнів з математичним моделюванням, який можна використовувати як при проведенні факультативних занять, так і в основному курсі математики.

Проект “Хочеш бути кращим?– Моделью!” створений з метою поглиблення знань учнів 9 -11 класів з математики, інформатики та фізики та розширення кругозору школярів.

Мета проекту: сформувати в учнів правильне уявлення про місце математики в системі наук і роль математичного моделювання в науковому пізнанні й практиці; навчити учнів застосовувати метод математичного моделювання при розв’язуванні задач фізичного змісту за допомогою сучасних пакетів символьних обчислень; показати необхідність математичного моделювання в житті людини; розвивати уміння працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, здійснювати пошук необхідної інформації з використанням пошукових і експертних систем та Інтернету, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті; оцінювати ефективність застосування різних засобів моделювання до реальних об’єктів і процесів; розвивати абстрактне і логічне мислення, формувати науковий світогляд; виховувати математичну культуру.

Завдання проекту:

1. Дослідити еволюцію математичного моделювання як методу пізнання.
2. Визначити місце математичного моделювання в ієрархії інших прийомів діяльності.
3. Навчитися правильно виконувати всі етапи математичного моделювання.
4. Показати практичне застосування математичного моделювання.

Реалізуючи даний проект учням потрібно не просто вміти розв’язувати прикладні задачі, а й навчитися моделювати відповідні ситуації та процеси. Головне завдання проекту - змоделювати процес витікання води з ванної: знайти час витікання води в залежності від параметрів ванни (розмірів, радіуса отвору); побудувати графік залежності часу витікання від висоти води у ванні і графік залежності часу витікання води від радіуса отвору.

Попередній аналіз досліджуваного об’єкта.

Процес витікання води з ванної можна описати класичною механікою елементами гідродинаміки. Під час розгляду руху рідин скористаємося певною ідеалізацією, тобто знехтуємо тертям, застосування такої моделі (так званої – ідеальної рідини) значно спростить розуміння гідродинамічних явищ.

Одне з основних рівнянь гідродинаміки – рівняння Бернуллі. Фактично рівняння Бернуллі виражає закон збереження механічної енергії для рухомої рідини – закон Бернуллі: тиск рідини, що тече в трубі, більший у тих частинах, де швидкість течії менша. Наслідком закону Бернуллі є формула Торрічеллі для розрахунку швидкості витікання рідини з отвору малого перерізу.

Об’єкт моделювання – витікання води.

Побудова математичної моделі:

Модель ванни – прямокутний паралелепіпед з параметрами h – висота стовпа рідини у ванній; a – довжина; b – ширина; r – радіус отвору.

Об’єм ванни – $V_{\text{ванн}} = a \cdot b \cdot h$.

Використаємо формулу Торрічеллі – формула для визначення швидкості витікання рідини з отвору у тонкій стінці відкритої посудини: $v = \sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння. Вона показує, що при витіканні ідеальної нестисливої рідини з отвору в широкій посудині рідина набуває швидкості, яку отримало б тіло, що вільно падає з висоти h . Вперше встановлена Е. Торрічеллі в 1641 році.

Рівняння часу витікання води від висоти:

$$T = \frac{3,3a \cdot b \cdot \sqrt{H}}{2,2\sqrt{2g} \cdot \pi \cdot r^2}$$

Рівняння часу витікання води від радіуса отвору:

$$T = \frac{3,3a \cdot b \cdot \sqrt{h}}{2,2 \cdot \sqrt{2,2g} \cdot \pi \cdot R^2}$$

Хід виконання дослідження:

- 1) побудувати математичну модель;
- 2) скласти програму, яка реалізує дану математичну модель;
- 3) перевірити відповідність результатів моделювання розумному змісту моделі;
- 4) побудувати графік залежності часу витікання від висоти води у ванні і графік залежності часу витікання води від радіусу отвору;
- 5) зробити висновки щодо отриманих результатів.

Виконання обчислень у пакеті Maple:

```

> restart;
> h:=0.55;
                                     h := 0.55
> a:=1.5;
                                     a := 1.5
> b:=0.65;
                                     b := 0.65
> r:=0.025;
                                     r := 0.025
> g:=9.8;
                                     g := 9.8
> Vob:=a*b*h;
                                     Vob := 0.53625
> v:=sqrt(2*g*h);
                                     v := 3.283291032
> V:=int(sqrt(2*g*H),H=0..0.55);
                                     V := 1.203873378
> Vcep:=V/h;
                                     Vcep := 2.188860687
> Sotv:=3.14*r^2;
                                     Sotv := 0.00196250
> w:=Vcep*Sotv;
                                     w := 0.004295639098
> t:=Vob/w;
                                     t := 124.8359063
> T:=((3.3*a*b)/(2.2*sqrt(2*g)*3.14*(r^2)))*sqrt(H);
                                     T := 168.3287017√H
> plot(T,H=0..1);
> Tr:=((3.3*a*b*sqrt(h))/(2.2*sqrt(2.2*g)*3.14))*1/R^2;
                                     Tr :=  $\frac{0.07439147900}{R^2}$ 
> plot(Tr,R=0.01..0.05);

```

Аналіз результатів:

- 1) із збільшенням висоти рідини у ванні – час витікання води збільшується (Рис.1);
- 2) із збільшенням радіусу отвору – час витікання зменшується (Рис.2).

Запропонований проект для ознайомлення учнів з математичним моделюванням є спробою наблизити процес навчання математики до вимог часу та запитів суспільства.

Висновки:

1. Математичне моделювання, виступаючи могутнім універсальним інструментом пізнавальної діяльності, що не має рівних щодо доступності й ефективності, дає можливість формування в учнів таких якостей, як уміння моделювати ситуацію або процес, аналізувати і

порівнювати дані, інтерпретувати результати, оптимізувати, приймати рішення за умови надлишку чи недостатчі даних, оцінювати з різною точністю, уміння працювати зі знаково-символьними представленнями інформації.

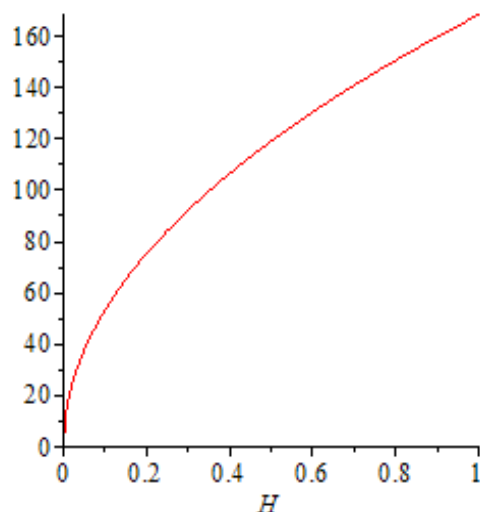


Рис.1

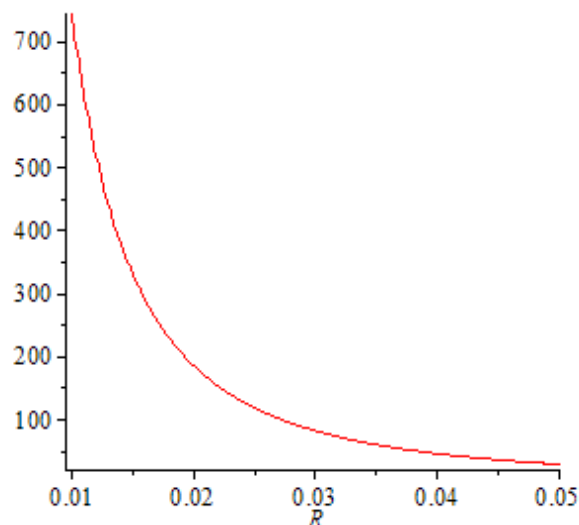


Рис.2

2. Навчання математичному моделюванню неможливе без цілеспрямованого навчання кожному елементу із складу цього прийому діяльності.

3. Математичне моделювання є потужним інструментом при розв'язуванні прикладних задач, особливо фізичного змісту.

4. Наявність у шкільній математичній освіті такого прийому діяльності, як математичне моделювання, є ознакою сучасного підходу в навчанні математики, проявом якісної функціональної математичної підготовки учнів.

Список використаних джерел:

1. Державний освітній стандарт [Ел. ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/files/doshkilna-crednya/serednya/derzh-standart/post_derzh_stan.doc
2. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_ak.pdf

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Альона Ткач

Науковий керівник – доктор педагогічних наук, професор В.А.Кушнір

Соціально-економічні зміни, що відбуваються в останні роки в нашій країні, обумовлюють необхідність формування гармонійної і всебічно розвинутої особистості, здатної вирішувати не тільки типові, але й різноманітні творчі завдання. Разом з тим українська вища освіта повинна не просто адаптуватися до цих змін, але й випереджати їх. Тому сучасний рівень розвитку суспільства вимагає від студентів педагогічних вищих навчальних закладів високої активності і раціональності, уміння підходити до актуальних питань нестандартно, творчо, відмовляти від відомих алгоритмів, що, у свою чергу, є важливим чинником успішної реалізації навчального процесу.

Формування творчих засад майбутніх вчителів, ефективність навчання і виховання ґрунтується на врахуванні всіх особливостей і закономірностей системи психічних пізнавальних процесів, внаслідок чого студентів необхідно не просто навчати прийомам

розвитку пам'яті, уваги, сприйняття, мислення, уяви, а й активізувати, удосконалювати в них ці пізнавальні процеси відповідно до вимог спеціальності.

Філософи і соціологи називають сучасний етап розвитку цивілізації "інформаційним суспільством". Процес інформатизації суспільства безперечно зумовлює процес інформантизації освіти: відбувається забезпечення сфери освіти теорією і практикою розробки та використання сучасних нових інформаційних технологій, орієнтованих на реалізацію психолого-педагогічної мети навчання і виховання. Змінюються завдання освітньої галузі в інформаційному просторі, особистісно-орієнтована система навчання поступово приходить на зміну традиційній, класичні методи конкурують з інноваційними, набуває актуальності технологічний підхід у навчанні.

Інформаційні технології – це сукупність методів і технічних засобів збирання, організації, збереження, опрацювання, передачі й подання інформації за допомогою комп'ютерів і комп'ютерних комунікацій [1, 2].

До безперечних переваг інформаційних технологій можна віднести:

- 1) розширення сфери доступу до різних видів інформації (Інтернет, електронні бібліотеки, довідники, книги, енциклопедії);
- 2) швидкість знаходження, передавання, опрацювання великого обсягу інформації;
- 3) анімаційність та колористика матеріалу;
- 4) зручне та компактне збереження (касета, дискета, диск) і тиражування програм;
- 5) багаторазове та різномірне використання і коригування навчальних програм відповідно до психолого-вікових особливостей студентів та індивідуальних уподобань педагога;
- 6) динамічність у створенні різних за ступенем складності схем, таблиць, кросвордів, ребусів тощо;
- 7) використання значного обсягу аудіовізуального навчального матеріалу (малюнки, фото, репродукції картин, карти, портрети, ілюстрації; аудіо-, відео-, кіно-матеріали) і можливість його творчого комбінування;
- 8) унаочнення абстрактних теоретичних понять;
- 9) моделювання навчальних ситуацій у просторі й часі (віртуальні екскурсії до музеїв і культурних центрів світу, подорожі до різних країн, історичних епох тощо);
- 10) урізноманітнення методів, форм і прийомів навчання;
- 11) ефективність використання мультимедіа у проведенні нестандартних занять;
- 12) можливість індивідуального, групового, колективного, самостійного та дистанційного навчання (взаємодія викладача й студента за допомогою комп'ютерних комунікацій) – використання інтерактивних технологій;
- 13) проектна діяльність (дослідницькі, творчі, ігрові, інформаційні, практико-орієнтовані проекти);
- 14) розвиток творчого потенціалу студента, його здібностей до комунікативних дій;
- 15) розвиток умінь експериментально-дослідницької та культури навчальної діяльності;
- 16) формування інформаційної культури тощо.

У навчальному процесі інформаційні технології застосовуються при вивченні більшості шкільних дисциплін. Завдяки їм навіть сухий теоретичний матеріал перетворюється на живу картину, а абстрактні поняття – на конкретні явища, історичні події – на реальну минувшину, хімічні або фізичні процеси – на закономірності природи.

Основними формами роботи з інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ) на заняттях є:

- безпосереднє застосування в навчальному процесі;
- для організації самостійної роботи;
- для забезпечення пізнавального дозвілля;
- для контролю та самоконтролю знань.

Система сучасної освіти веде до зміни пріоритетів у діяльності педагога: не навчити, а створити умови для самостійного творчого пошуку знань студентами. ІКТ стають необхідним компонентом заняття й сучасний викладач – це високопрофесійний педагог, що використовує у своїй роботі інформаційні технології.

Напрямами використання ІКТ на заняттях є:

1. Оформлення дидактичних, роздаткових матеріалів.
2. Оцінювання знань студентів.
3. Виготовлення наочності до занять (презентації).
4. Використання відео- та аудіо- матеріалів.

Таким чином, інформаційно-комунікаційні технології покликані: стимулювати пізнавальний інтерес до предмету, додати навчальній роботі проблемний, творчий, дослідницький характер, багато в чому сприяти відновленню змістовної сторони предмету, індивідуалізувати процес навчання й розвивати самостійну діяльність студентів. Однак, викладачеві, що використовує ІКТ на заняттях, не слід забувати, що в основі будь-якого навчального процесу лежать педагогічні технології. Інформаційні освітні ресурси повинні не замінити їх, а допомогти їм бути більш результативними. Вони дозволяють оптимізувати працю викладача, щоб навчальний процес став більше ефективним. Але в центрі цього процесу стоїть викладач, його живе слово [3, 4, 5].

Використання комп'ютерних технологій дає змогу створювати принципово нові комп'ютерно-орієнтовані методики навчання і по-новому будувати процес навчання.

Планування, організація, підготовка та проведення заняття з методики навчання математики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій має ряд особливостей.

Серед основних цілей використання ІКТ на заняттях з методики навчання математики доцільно назвати такі.

1. Підсилення мотивації вивчення студентами дисципліни, зокрема і за рахунок таких можливостей: створення мультимедійних ілюстрацій доцільних прикладів з різних розділів шкільного курсу математики та методики навчання математики; розгляду (вивчення, аналіз, порівняння) великої кількості науково-методичних публікацій та ін.

2. Активізація навчального процесу як на етапі підготовки, так і під час лекційних, практичних і семінарських занять.

3. Збагачення студентів способами отримання, зберігання, обробки, узагальнення, систематизації та використання відомостей з методики навчання математики (за рахунок використання інтегрованих пакетів користувачів, графічних редакторів тощо).

4. Формування у студентів стійких умінь розв'язувати задачі з шкільного курсу математики з використанням засобів ІКТ та навчання цих способів учнів.

5. Навчання студентів: виконання обчислень; здійснення експериментально-дослідницької діяльності з моделюванням процесів; створення та перевірки гіпотези; дослідження математичних і методичних моделей; здійснення навчання учнів виконання перелічених процесів з використанням ІКТ.

Більш детально я б хотіла зупинитися використанні пакету Microsoft Office і стандартного додатку Power Point.

До переваг Microsoft Power Point як інструментального середовища для розробки мультимедіа – додатків можна віднести:

- доступність (наявність в більшості персональних комп'ютерів);
- легкість в освоєнні і простоту створення мультимедіа – презентацій (при достатньо широкому виборі можливостей хоча б з оформлення, анімації та ін.);
- на слайдах можуть бути розміщені план і основні положення доповіді, всі необхідні таблиці, діаграми, схеми, малюнки тощо;
- можливість переносу даних з інших додатків Microsoft Office, що дозволяє розширити для непрофесійного користувача можливості підготовки змістовного наповнення;

- можливість включати в презентації матеріали, які раніше були створені засобами Word та Excel;
- можливість швидко оформити доповідь в єдиному стилі, таким чином значно підвищити ступінь сприйняття інформації аудиторією;
- можливість використання відео та звукового супроводу.

Завдяки всім цим перевагам Power Point є дуже зручним для кращого пояснення матеріалу для учнів.

Презентація дає можливість викладачу виявити творчість, індивідуальність, уникнути формального підходу до проведення занять. Вона забезпечує викладачу можливість для:

- інформаційної підтримки;
- ілюстрування;
- використання різноманітних вправ;
- економії часу й матеріальних засобів;
- розширення освітнього простору уроку.

Завдяки використанню презентацій у студентів спостерігається:

- концентрація уваги;
- включення всіх видів пам'яті: зорової, слухової, моторної, асоціативної;
- більше швидке й глибоке сприйняття матеріалу;
- підвищення інтересу до вивчення предмета;
- зростання мотивації до навчання.

На жаль, використання презентацій викладачами під час навчального процесу часто зводиться до заміни написів на дошці. Головними перевагами використання навчальних презентацій у навчальному процесі є інтерактивність і підвищена ефективність сприйняття. Застосування кольорів, графіки й анімації, звуку, сучасних засобів відеотехніки дозволяє моделювати різноманітні ситуації й середовища, розвиваючи при цьому творчі й пізнавальні здібності учнів. Презентації сприяють перетворенню заняття в інтерактивну дію. Інтерактивне навчання – це спеціальна форма організації пізнавальної діяльності, що дозволяє здійснити взаємодію викладача і студента, студента і комп'ютера, що має цілком конкретні й прогнозовані цілі. Одна з таких цілей складається в створенні комфортних умов навчання, таких, при яких студент відчуває свою успішність, свою інтелектуальну заможність, що робить продуктивним сам процес навчання. Від викладача залежить організувати навчальний процес за допомогою презентацій таким чином, що практично всі учні виявляються залученими в процес пізнання [6].

Список використаних джерел:

1. Казанцев І. Творча діяльність як засіб формування міцності знань школярів.// Рідна школа,-2001. – №2. – С.26-29.
2. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. кл.сред.шк. – М.:Просвещение, 1989. – 192 с.
3. Ачкасов А.Є., Використання інформаційних технологій та технічних засобів навчання на уроках історії: доповідь на семінарі вчителів історії Московського району Харківської міської ради.
4. Бахматюк Я. ІКТ і мультимедійне забезпечення навчального процесу на уроках історії. // Історія України – № 37, 2011.
5. Войцех Р.М. Використання ТЗН та комп'ютерної техніки. // Освітнянський вісник, смт Чорнобай. – № 7, 2010.
6. Тополя Л.В. Інтерактивне навчання у вищій школі з використанням комп'ютерних технологій. // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 30. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. – С. 44-44.

МІСЦЕ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ У ФАХОВІЙ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ*Олена Ткаченко**Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент Л.В. Ізюмченко*

Теорія многочленів є фундаментом математики. У початковій школі закладається уявлення про одночлени. Починаючи з 5-го класу вводиться поняття одночленів, але не озвучується. У цей період учні в основному засвоюють три арифметичні дії з одночленами: додавання, віднімання та множення одночленів. Ділення та піднесення до степеня одночленів детальніше починає вводити вчитель із 6-го класу. Вчитель акцентує увагу учнів на зведенні подібних доданків. Поняття многочлена учні зустрічають у 7-му класі та вивчають формули скороченого множення. Здобуті знання учні використовують в подальшому вивченні математики.

У ШКМ вчитель вводить декілька способів розкладання многочлена на множники та знаходження частки і остачі:

1. Ділення многочленів “кутом” (у стовпчик) [1].

Приклад 1. Знайдіть частку та остачу від ділення многочлена $x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ на $x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1 \quad | \quad x^2 + x - 1 \\
 \underline{x^5 + x^4 - x^3} \\
 -x^4 - 2x^3 + x^2 \\
 \underline{-x^4 - x^3 + x^2} \\
 -x^3 + x \\
 \underline{-x^3 - x^2 + x} \\
 x^2 - 1 \\
 \underline{x^2 + x - 1} \\
 -x
 \end{array}$$

Відповідь: $x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1 = (x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 - x + 1) - x$.

2. Метод невизначених коефіцієнтів [1].

Приклад 2. Знайдіть частку та остачу від ділення многочлена $x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ на $x^2 + x - 1$.

$$x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1 = (x^2 + x - 1)(x^3 + ax^2 + bx + c) + dx + e$$

Розкриваємо дужки у правій частині:

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - x^3 - ax^2 - bx - c + dx + e$$

Після зведення подібних членів складаємо систему:

$$\begin{cases}
 a + 1 = 0, \\
 b + a - 1 = -3, \\
 c + b - a = 1, \\
 c - b + d = 1, \\
 -c + e = -1.
 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо $a = -1, b = -1, c = 1, d = -1, e = 0$.

Отже частка буде $(x^3 - x^2 - x + 1)$, а остача $-(-x)$.

Відповідь: $x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1 = (x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 - x + 1) - x$.

3. Схема Горнера [3].

Приклад 3. Знайдіть частку та остачу від ділення многочлена $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5$ на $x - 2$.

Примітка: схему Горнера можна застосувати, якщо ділимо многочлен на двочлен $x + a$.

	2	-1	-9	13	5
2	2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$2 \cdot (3) - 9 = -3$	$2 \cdot (-3) + 13 = 7$	$2 \cdot (7) + 5 = 19$

Відповідь: $P(x) = (2x^3 + 3x^2 - 3x + 7)(x - 2) + 19$.

Приклад 4. Подайте даний многочлен $P(x)$ у вигляді многочлена $P(x + 2)$, тобто розкладіть многочлен $P(x)$ за степенями $x + 2$:

$$P(x) = 3x^4 + 24x^3 + 70x^2 + 51x + 18.$$

Виконаємо послідовне ділення многочлена на двочлен $x + 2$. Значення останнього стовпчика в схемі Горнера – це коефіцієнти при відповідних степенях двочлена.

	3	24	70	51	18	
-2	3	18	34	-17	52	$(x + 2)(3x^3 + 18x^2 + 34x - 17) + 52;$
-2	3	12	10	-37		$(x + 2)[(x + 2)(3x^2 + 12x + 10) - 13] + 52;$
-2	3	6	-2			$(x + 2)[(x + 2)\{(x + 2)(3x + 6) - 2\} - 37] + 52;$
-2	3	0				$(x + 2)[(x + 2)\{(x + 2)(x + 2) \cdot 3 - 2\} - 37] + 52.$
-2	3					

Відповідь: $P(x) = 3(x + 2)^4 - 2(x + 2)^2 - 37(x + 2)^1 + 52(x + 2)^0$.

4. Теорема Безу [1].

Приклад 5. Не виконуючи ділення, встановіть, чи ділиться без остачі многочлен $18x^3 - 105x^2 + 77x - 10$ на $x - 5$.

Потрібно знайти значення многочлена $P(x)$ при $x = 5$. За теоремою Безу $P(5)$ - це остача від ділення $P(x)$ на $x - 5$, якщо $P(5) = 0$, то $P(x)$ ділиться на $Q(x)$ без остачі.

$P(x)$ - ділене, $Q(x)$ - дільник.

$$P(5) = 18 \cdot 5^3 - 105 \cdot 5^2 + 77 \cdot 5 - 10 = 2250 - 2625 + 385 - 10 = 0$$

Відповідь: так, многочлен $18x^3 - 105x^2 + 77x - 10$ ділиться без остачі на $x - 5$.

5. Розкладання квадратного тричлена на множники [1];

Приклад 6. Розкладіть на множники многочлен $x^4 + 3x^2 + 2$.

Введемо змінну $t = x^2 \Rightarrow t^2 + 3t + 2$.

$$D = 9 - 8 = 1, \sqrt{D} = 1.$$

$$t_1 = -1, t_2 = -2 \Rightarrow t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2).$$

Перейдемо від t до x , отримаємо:

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2).$$

Відповідь: $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$.

Приклад 7. Розкладіть на множники многочлен $2x^2 + 6x + 1$.

Знайдемо дискримінант многочлена $2x^2 + 6x + 1$:

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 28, \sqrt{D} = 2\sqrt{7},$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$2x^2 + 6x + 1 = \left(x + \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right).$$

Відповідь: $2x^2 + 6x + 1 = \left(x + \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right)$.

6. Винесення спільного множника за дужки і спосіб групування [1].

Приклад 8. Розкладіть на множники многочлен $x^6 - x^4 - x^2 + 1$.

$$(x^6 - x^4) - (x^2 - 1) = x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^4 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1).$$

Відповідь: $(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1)$.

Теорія многочленів зустрічається в усіх розділах математики. Розглянемо приклад з теми системи рівнянь з трьома невідомими [2].

Приклад 9. Розв'яжіть систему рівнянь у цілих числах:

$$\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$$

Міняємо місцями перше і друге рівняння та віднімаємо:

$$x + yz - xy - z = 1$$

Компонуємо перший і четвертий доданок та другий і третій:

$$(x - z) + (yz - xy) = 1,$$

$$(x - z)(1 - y) = 1.$$

Добуток 2-х виразів буде рівний 1, коли:

$$\begin{cases} x - z = 1, \\ 1 - y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = -1, \\ 1 - y = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Підставляємо значення у в початкову систему, отримаємо:

$$\begin{cases} z = 94, \\ x = 95; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 94, \\ x + 2z = 95. \end{cases}$$

Перша система матиме розв'язок на множині цілих чисел, а друга система не матиме розв'язків на множині цілих чисел.

Відповідь: (95;0;94).

Учитель математики розглядаючи подібні приклади показує учням, як можна використати різні способи розкладання многочленів на множники. Ці знання знадобляться учням при подальшому вивченні математики, фізики, інформатики та ін. дисциплін.

При розв'язуванні таких прикладів вчитель виховує в учнів працьовитість, уважність, старанність, наполегливість тощо.

Список використаних джерел:

1. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математики. Алгебра. Справочное пособие. – М., Наука, 1988. – 432 с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х., Основа, 2008. – 255 с.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу 10 клас. – К., ОСВІТА, 2000. – 318 с.

МОВЛЕННЕВА КОМПЕТЕНТНІСТЬ ШКОЛЯРІВ ТА ЇЇ ОЦІНЮВАННЯ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Юлія Червінська

Науковий керівник – кандидат педагогічних наук, доцент Н.О. Пасічник

На сучасному етапі розвитку освітніх процесів в Україні та в світі основою освіти є система освітніх цінностей і компетентностей, що визначають здатність особистості успішно діяти у різноманітних життєвих і навчальних ситуаціях. Сформовані компетентності дають

можливість молодій людині творчо реагувати на виклики сучасності, усвідомлювати свою роль у суспільстві. Згідно з міжнародними домовленостями однією з ключових компетентностей визначено мовленнєву компетентність, яка виявляється у сформованості умінь користуватися усною і писемною літературною мовою, багатством її виражальних засобів залежно від цілей і завдань висловлювання та громадського життя.

Питання компетентності у вітчизняній науково-методичній літературі в першу чергу пов'язується із поняттям комунікативної компетенції як знань або здатності до ефективної комунікації (Т.І.Гончар, Ю.Н.Емельянов, Н.Б.Завіниченко, Т.Л.Кобзар, С.С.Макаренко, К.Моїсєєнко, О.І.Нещерет, Л.А.Петровська, О.В.Попова, Л.Л.Федорова), котра тісно корелює із соціальною компетентністю (Н.В.Калініна, О.Колеснікова, Л.А.Лепіхова, А.К.Мудрик).

Мовленнєва компетентність є поняттям комплексним. Спираючись на мовну компетентність, вона охоплює систему мовленнєвих умінь (вести діалог, сприймати, відтворювати і створювати усні й писемні монологічні та діалогічні висловлювання різних видів, типів і жанрів), необхідних учнівській молоді у різноманітних життєвих ситуаціях. Мовленнєва компетентність особистості виявляється у сформованості умінь користуватися усною і писемною літературною мовою, багатством її виражальних засобів залежно від цілей і завдань висловлювання та громадського життя. Мовна компетентність є основою мовленнєвої. На основі аналізу науково-методичної літератури можна виділити три аспекти опанування мови: знання мови (мовна компетентність), володіння мовою (мовленнєва компетентність), користування мовою (комунікативна компетентність).

Відповідно, мовленнєва компетентність відображає рівень знань про закономірності утворення із даної системи мови зв'язних висловлювань для формулювання думки. Її змістом є: знання про точність, влучність, адекватність, правильність використання мовних засобів, знання про особливості використання мовних засобів залежно від типу, стилю мовлення, знання особливостей використання зображувально-виражальних засобів мови. У структурі мовленнєвої компетентності відбувається засвоєння знань і перетворення їх на вивідне знання, а у структурі мовленнєвої діяльності – застосування засвоєних знань.

Метою нашого дослідження є розробка та апробація тесту для оцінювання мовленнєвої компетентності учнів шкільного віку, які є одночасно вихованцями обласного центру дитячої і юнацької творчості м. Кіровограда. Ця робота є одним з аспектів дослідження Кіровоградського ОЦДЮТ у рамках дослідницького проекту “Формування базових компетенцій гуртківців в системі позашкільної роботи”. В ЦДЮТ працюють 50 гуртків, в яких навчаються близько 3 тисяч дітей і молоді. Значна кількість колективів спрямована на розвиток мовленнєвої компетентності учнівської молоді, а саме: молодіжний клуб “Імідж”, секція “Дитяча дипломатія та журналістика”, творче об'єднання “Клуб інтелектуального розвитку”, євро клуб “Надія”, студія художнього слова “Юність”, художній колектив театр-студія “Маска”.

Щоб здобути вихідні дані, які характеризують рівень сформованості мовленнєвої компетенції вихованців вищеназваних колективів, серед яких значна кількість учнів старших класів, проводився констатуючий зріз. Ним було охоплено 132 учні 10-11-х класів. Зріз проводився у два етапи. На першому етапі ставилося завдання з'ясувати, наскільки глибоко й правильно учні старших класів оволоділи мовними нормами (вимовні, лексичні, морфологічні, синтактичні), а на другому – як вони уміють висловлювати свої думки в усній і писемній формах, користуючись необхідними мовними засобами відповідно до мети, змісту й умов спілкування. Ці питання вивчалися головним чином за допомогою методу діагностичного анкетування, а також бесід з учнями, спостереження за їх мовленням. Аналіз результату першого етапу показав, що значна кількість респондентів (53%) не мають належного уявлення про стилістичні засоби виразності мови, стикаються з труднощами в процесі сприймання, створення і відтворювання зв'язних висловлювань (усні і писемні, діалог і монолог), не завжди доцільно використовують мовні засоби, що відповідають типу, жанру, мовленнєвій ситуації, недостатньо володіють елементами публічних виступів, мовленнєвим етикетом. Другий етап передбачав розробку тесту для оцінювання мовленнєвої

компетентності вихованців Кіровоградського ОЦДЮТ з подальшою апробацією і узагальненням результатів дослідження. Розроблений нами тест є стандартизованим, упровадження – на рівні обласного центру дитячої і юнацької творчості м. Кіровограда, дослідницьким – за статусом використання, тестом компетентнісним, інтегративним, що містить закриті і відкриті завдання. Тест спрямований на вимірювання рівня розвитку мовленнєвої компетентності та складається з кількох змістових ліній:

1. Мовленнєва лінія (уміння й навички в певних видах мовленнєвої діяльності, зокрема читання та письма).

2. Мовна лінія (системні знання про мову як засіб вираження думок і почуттів людини та формування мовних умінь і навичок).

3. Соціокультурна лінія (ступінь засвоєння культурних і духовних цінностей українського народу, норм, що регулюють стосунки, сприяють естетичному та морально-етичному розвитку).

4. Діяльнісна лінія (загальнонавчальні вміння та навички, стратегії, що визначають мовленнєву діяльність на основі сформованої мовленнєвої компетентності).

Тест оцінювання мовленнєвої компетентності складається із завдань трьох форм: завдань з вибором однієї правильної відповіді, завдань на встановлення відповідності та завдань з розгорнутою відповіддю. Загальна кількість завдань тесту – 24, останнє завдання передбачає створення власного висловлювання. На виконання всіх завдань тесту учасникам буде відведено 75 хвилин. Максимальна кількість балів, яку зможе набрати учасник тестування, правильно виконавши всі завдання тесту – 57.

Для оцінювання мовленнєвої компетентності вихованців Кіровоградського ОЦДЮТ були розроблені критерії оцінювання і для організації тестування – інструкція.

Після проведення тесту для оцінювання мовленнєвої компетентності вихованців Кіровоградського ОЦДЮТ, отримали таку матрицю результатів:

	16	14	3	1	6	9	13	4	11	12	2	10	15	5	7	21	8	22	17	18	19	20	23	24	Заг. бал по тесту
18	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1,5	0	0	1	1	2	2	6	16,5
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0,5	0,5	1	0,5	1	0	0	1	1	8	17,5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0,5	0	1	1	2	2	1	3	10	24,5
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1,5	0	0	0	1	2	1	15	25,5
12	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	2	1,5	1,5	2	1	0	0	0	2	10	27
8	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,5	1	1	1	0	1	1	2	2	12	27,5
11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1,5	0,5	1,5	3	2	2	1	1	9	27,5
10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0,5	1	0,5	2	1	1	2	2	2	14	30
16	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1,5	1	1,5	0,5	2	2	1	0	1	13	28,5
2	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0,5	1,5	0	1	2	1	1	1	2	16	35
19	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1,5	0,5	0,5	2	1	2	2	3	1	14	36,5
4	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0,5	1	1,5	2	3	1	1	2	2	15	36
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1,5	1,5	2	1	2	2	2	3	16	41
3	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	2	3	3	12	40
13	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	2	0,5	2	1	2	3	3	3	3	13	41,5
7	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1,5	1	2	1	1	1	2	19	41,5
6	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	2	2	2	2	3	3	2	2	17	45
17	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2	3	3	16	45
14	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	2	1,5	3	3	3	1	3	15	44,5
20	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1,5	1,5	1,5	2	3	3	3	3	18	48,5
	3	7	9	10	10	11	12	13	13	13	14	14	16	17	22	24	25	26	31	32	33	35	42	268	

Загальна кількість завдань у тесті – 24. У тесті використано завдання з вибором однієї правильної відповіді (№1-6, 9-16), завдання на встановлення відповідності (№7,8,21,22),

завдання на перевірку знання російської та англійської мов (№17-20) та одне завдання з розгорнутою відповіддю (№24).

Для подальшого аналізу залишимо лише ту частину матриці відповідей, що містить дихотомічні завдання:

№ учня по списку	16	14	3	1	6	9	13	4	11	12	2	10	15	5	індив. бал по частині тесту
18	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	4
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	4
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	4
10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	4
11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	6
8	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	7
16	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	7
12	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	8
2	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	9
4	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	9
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	9
13	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9
19	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	10
6	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	10
3	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
7	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
17	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	12
14	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	12
20	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	13
кількість учнів, що відповіли на запитання	3	7	9	10	10	11	12	13	13	13	14	14	16	17	

Розглянемо метод PROX побудови оцінок латентних параметрів θ і β , який не вимагає ітераційних процедур і може використовуватись при обчисленнях вручну. Отримуємо наступні оцінки проміжних і кінцевих значень латентних параметрів:

Оцінка рівня підготовки учасників тестування:

p_i	q_i	θ_i^0	$\bar{\theta}$	V	X	Y	θ_i
0,214	0,786	-1,299	0,398	1,130	1,180	1,243	-1,871
0,286	0,714	-0,916					-1,419
0,286	0,714	-0,916					-1,419
0,286	0,714	-0,916					-1,419
0,286	0,714	-0,916					-1,419
0,429	0,571	-0,288					-0,677
0,500	0,500	0,000					-0,337
0,500	0,500	0,000					-0,337
0,571	0,429	0,288					0,002
0,643	0,357	0,588					0,356
0,643	0,357	0,588					0,356
0,643	0,357	0,588					0,356
0,643	0,357	0,588					0,356
0,714	0,286	0,916					0,744
0,714	0,286	0,916					0,744
0,786	0,214	1,299					1,196
0,786	0,214	1,299					1,196
0,857	0,143	1,792					1,777
0,857	0,143	1,792					1,777
0,929	0,071	2,565					2,690

Оцінка рівня складності завдань:

p_j	q_j	β_j^0	$\bar{\beta}$	U	β_j
0,150	0,850	1,735	-0,337	0,735	2,554
0,350	0,650	0,619			1,168
0,450	0,550	0,201			0,648
0,500	0,500	0,000			0,398
0,500	0,500	0,000			0,398
0,550	0,450	-0,201			0,149
0,600	0,400	-0,405			-0,106
0,650	0,350	-0,619			-0,371
0,650	0,350	-0,619			-0,371
0,650	0,350	-0,619			-0,371
0,700	0,300	-0,847			-0,655
0,700	0,300	-0,847			-0,655
0,800	0,200	-1,386			-1,325
0,850	0,150	-1,735			-1,758

Отримуємо такі результуючі показники:

Бал учня по частині тесту	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13
Рівень підготовки учня до даного тесту (у логітах)	-1,871	-1,419	-0,677	-0,337	0,002	0,356	0,744	1,196	1,777	2,690

Кількість учнів, що відповіли на завдання	3	7	9	10	10	11	12	13	13	13	14	14	16	17
Рівень складності завдання	2,55	1,17	0,65	0,40	0,40	0,15	-0,11	-0,37	-0,37	-0,37	-0,65	-0,65	-1,32	-1,76
Дискримінативність тестових завдань	0,6	0,6	0,8	0,6	0,8	0,6	0,4	0,6	0,4	0,2	1	0,6	0,4	0,4

За даними показниками можемо зробити наступні висновки: найкраще підготовленим до даної частини тесту виявився учень під номером 20 з рівнем підготовки 2,69 логіта і індивідуальним балом рівним 13, а найгірше підготовленим є учасник під номером 18 з рівнем підготовки (-1,871) і індивідуальним балом рівним 3. Найскладнішим для групи тестованих виявилось завдання за номером 16 із рівнем складності 2,55 логіта, а найлегшим завдання за номером 5 із рівнем складності (-1,76) логіта. Завдання за номерами 1-6, 9-11, 13-16 мають високу роздільну здатність, а завдання за номером 11 слід переглянути у плані його викладу.

Застосувавши однопараметричну модель Раша і двопараметричну модель Бірінбаума до завдань, отримаємо наступне графічне представлення: Рис. 1. та Рис. 2.

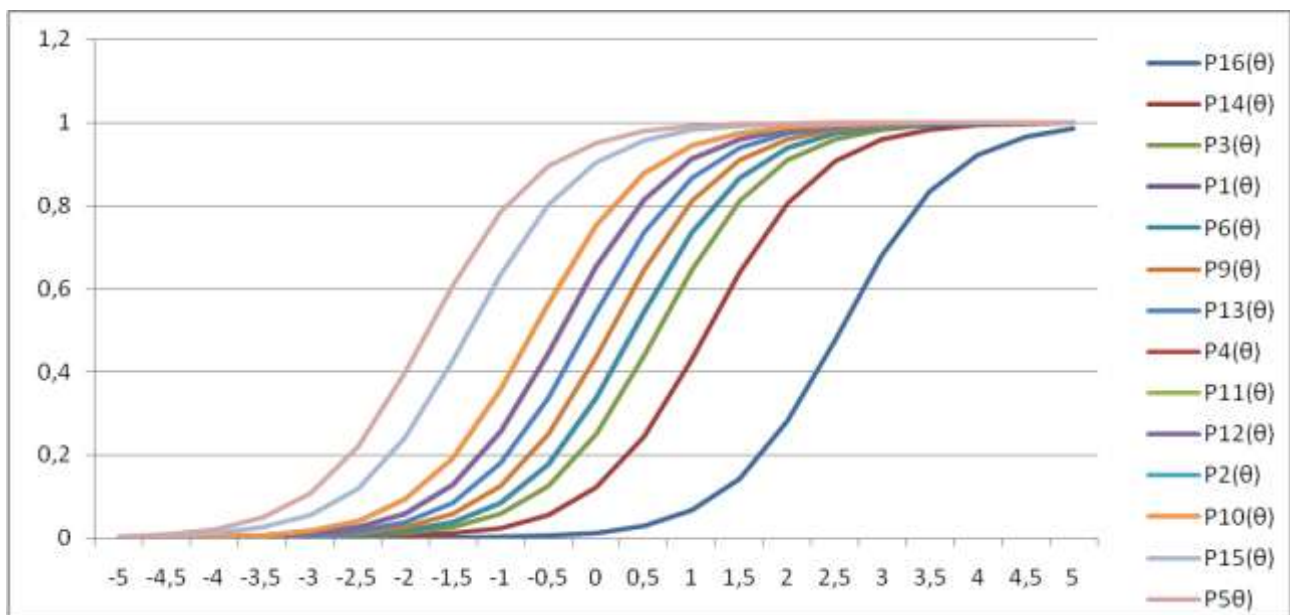


Рис. 1. Однопараметрична модель Раша.

По вісі X даного графіка розташовані рівні підготовки учасників тестування в межах від -5 до 5, а по вісі Y розташовані ймовірності виконання учасником i з рівнем підготовки θ_i набору завдань із рівнями складності β_j . Як бачимо із графічного представлення найскладнішим завданням для групи тестованих є завдання за номером 16, а найлегшим завдання за номером 5. На графіку повинно відображатись 14 кривих (відповідно до кількості завдань), однак криві завдань, що мають однакову складність накриваються, тому в результаті маємо 10 кривих.

Дана модель враховує параметр a_j , що є показником дискримінативності тестових завдань, тобто більш точно описує емпіричні дані. На даному графіку видно кожен з 14 кривих. Найлегшим завданням для слабо підготовлених учасників під впливом нового

параметру стає завдання за номером 12 із складністю $(-0,371)$ і роздільною здатністю рівною 0,2. Для групи більш підготовлених учасників це завдання стає більш складнішим. Найскладнішим для всіх учасників залишилось завдання за номером 16 із складністю 2,554 і роздільною здатністю рівною 0,6.

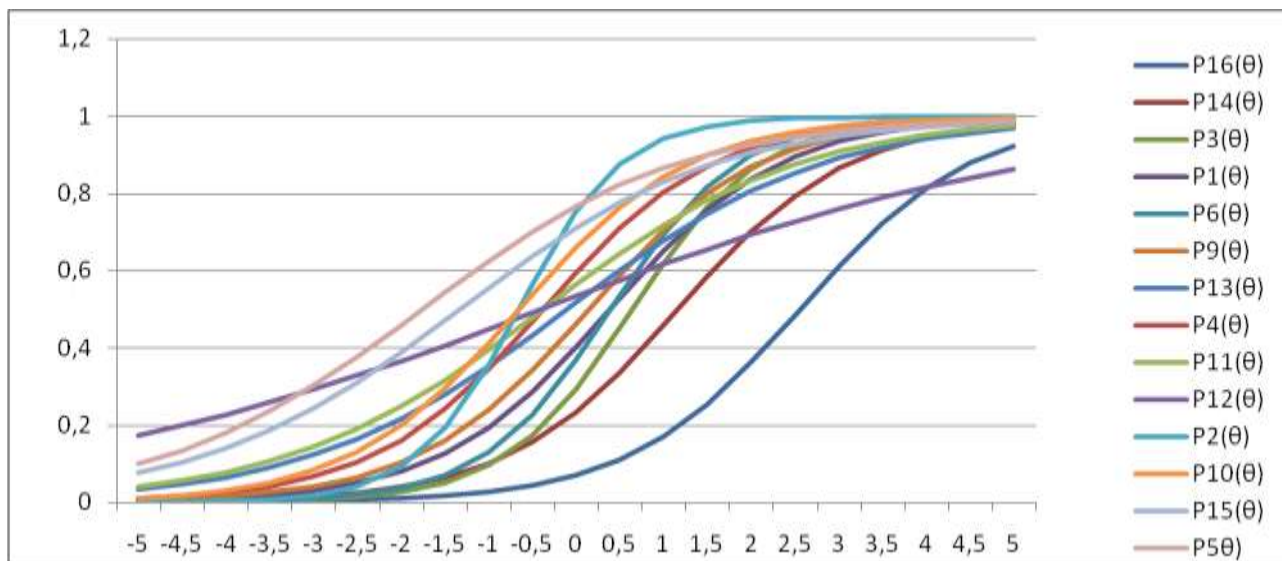


Рис. 2. Двопараметрична модель Бірінбаума.

Таким чином, в результаті дослідно-експериментальної роботи нами було розроблено й апробовано тест для оцінювання мовленнєвої компетентності учнів шкільного віку, які є одночасно вихованцями обласного центру дитячої і юнацької творчості м. Кіровограда. За результатами дослідження зроблено математико-статистичну обробку отриманих результатів.

АНАЛІЗ ВРАЗЛИВОСТІ КРИПТОСИСТЕМИ RSA ЧЕРЕЗ ПОБІЧНІ КАНАЛИ ВИТОКУ ІНФОРМАЦІЇ

Станіслав Чігірьов

Науковий керівник – ст. викладач, кандидат педагогічних наук С.І. Ганжеля

У сучасному програмному забезпеченні (ПЗ) криптоалгоритми широко застосовуються не тільки для задач шифрування, а й для аутентифікації та перевірки цілісності даних. На сьогоднішній день існують добре відомі й апробовані криптоалгоритми (як з симетричними, так і асиметричними ключами), криптостійкість яких або доведена математично, або заснована на необхідності вирішення математично складного завдань (факторизації, дискретного логарифмування і т.п.). До найбільш відомих з них відносяться DES, RSA, не можуть бути розкриті інакше, ніж повним перебором або розв'язком зазначеної задачі. З іншого боку, в комп'ютерному світі з'являється інформація про помилки або "дірки" в тій чи іншій програмі, або про те, що вона була зламана (cracked). Це створює недовіру як до конкретних програм, так і до можливості взагалі захистити що-небудь криптографічними методами не тільки від спецслужб, але і від простих хакерів.

Тому знання історії атак і "дірок" в криптосистемах, а також розуміння причин, за якими вони мали місце, є одним з необхідних умов розробки захищених систем. Перспективним напрямком досліджень у цій області є аналіз успішно проведених атак або виявлених уразливостей в криптосистемах з метою їх узагальнення, класифікації та виявлення причин і закономірностей їх появи та існування.

При розробленні криптосистем і протоколів безпеки часто беруть до уваги умовні припущення щодо їх роботи. Кінцева реалізація представляється у формі ідеальної "чорної скриньки", що виключає будь-які випадки внутрішнього спостереження або втручання з боку

зловмисника. За таких припущень рівень захищеності визначається лише математичними властивостями криптоалгоритмів і розміром їх секретних параметрів [1].

Однак в реальності ці механізми безпеки не забезпечують належний рівень безпеки. Більшість відомих атак на криптографічні системи використовують вразливості саме в реалізації криптоалгоритмів [2]. Такі вразливості дозволяють зловмиснику повністю зламати або значно ослабити теоретичну стійкість кінцевих рішень безпеки.

Так само як криптографи, вдосконалюють свою майстерність і криптоаналітики, тому потрібно завжди досліджувати криптографічні методи автентифікації даних з метою унеможливити перехоплення, зміну, спотворення повідомлень, що передаються мережами передачі даних, а також потрібно аналізувати атаки на криптосистеми, які використовуються. Ці потреби й обумовили вибір теми дослідження.

Важливі теоретичні й практичні результати дослідження, впровадження і створення системи захисту інформації та автентифікації даних на основі криптосистем з відкритими ключами, а також в заходи протидії атакам через побічні канали витоку інформації отримали вітчизняні й зарубіжні дослідники: Zhou Y., Feng D., Kelsey J., Schneier B., Wagner D., Hall C., Kocher P., Biham E., Shamir A., Lin L., Kasper M., Guneyusu T., Paar C., Burleson W., Я.В. Решетар, В.В. Хома, В.В. Гончаров, М.В. Грайворонський, В.В. Домарев, В.А. Жельников, В.М. Корсунський, І.А. Кулик, А.Н. Лебедев, О.М. Новіков, Ю.В. Романец, Р.Е. Серов, Т.М. Спільчук, П.А. Тимофеев, В.Б. Чередниченко, В.Ф. Шаньгин, А.Ю. Щербаков та ін.

Нашою метою є дослідження загальних особливостей уразливостей та атак до кінцевих реалізацій криптоалгоритмів через побічні канали витоку інформації (ПКВІ), та аналіз вразливості криптосистеми RSA.

Модель атаки через ПКВІ може включати цілий набір побічних каналів витоку – потужність споживання електроенергії та електромагнітне випромінювання (ЕМВ), звукові та світлові сигнали, часові параметри виконання, помилки в роботі, частотні параметри і т.д. (рис. 1). Як наслідок, останні дослідження показують, що атаки через ПКВІ є на кілька порядків ефективнішими та більш практичними для здійснення ніж атаки основані на класичному криптоаналізі [1-6].



Рис. 1. Модель ПКВІ для криптографічного пристрою на базі ІС

Серед запропонованих на сьогодні заходів для протидії атакам через аналіз енергоспоживання можна виділити наступні:

- балансування енергоспоживання через застосування додаткових регістрів та вентилів;
- зниження потужності сигналу з ПКВІ за рахунок використання постійного шляху виконання коду, інструкцій з меншим сигналом витоку і т.д.;
- додавання шумових сигналів в вимірювання енергоспоживання;
- маскування секретних параметрів;
- рандомізація секретних параметрів системи.

Більшість реалізацій містять в своїй структурі умовні переходи та розгалуження, що викликає зміну в енергоспоживанні. Тому найпростішим методом для протидії простим атакам є уникання процедур, що використовують секретні параметри для умовних переходів та розгалужень. У випадку якщо алгоритм обов'язково передбачає розгалуження, такі методи вимагають нестандартного підходу до кодування, а також значні втрати в продуктивності [1, 6].

Виділяють дві категорії засобів *протидії атакам через аналіз ЕМВ*: зменшення інтенсивності сигналу та зменшення інформативності сигналу випромінювання. Перші засоби включають захищене конструювання пристрою з метою зменшення каналів випадкових випромінювань в системі, екранування критичних компонентів і т.д. Друга група заходів передбачає рандомізацію процесу обчислень [1].

Необхідною умовою успішного аналізу даних з ПКВІ є наявність відповідного обладнання. Незважаючи на заявлену ефективність та потужність, у порівнянні з класичним криптоаналізом, до цього часу атаки через ПКВІ були справою обмеженого кола дослідників. У своїх працях науковці, як правило самі конструювали обладнання, збирали макети для практичного проведення аналізу. Поряд з тим існувала потреба в універсальних засобах, які дозволяли б здійснювати аналіз за різними параметрами, з різних ПКВІ. Представлена нещодавно тестова платформа Inspector фірми Riscure [6], може послужити прототипом такого універсального засобу.

Під час теоретичних досліджень, створення і впровадження програмного засобу нами отримано такі результати:

- проаналізовано нормативно-правові документи, наукову та навчальну літературу з проблеми дослідження, сучасні публікації з побудови системи захисту інформації та автентифікації даних, використання захисту повідомлень за допомогою цифрового підпису, а також аналізу вразливостей криптосистеми RSA;
- розроблена і написана програма практичної реалізації системи захисту інформації та автентифікації даних на основі RSA-шифрування;
- досліджено загальну класифікацію атак через ПКВІ;
- досліджено заходи для протидії атакам через аналіз енергоспоживання;
- досліджено універсальні засоби для аналізу та проведення атак через ПКВІ;
- впроваджено застосування розробленого програмного засобу на практичних заняттях з курсів “Криптологія” і “Сучасні методи захисту інформації”.

Отримані результати дають підстави зробити такі висновки:

- 1) актуальність небезпеки ПКВІ підтверджує поява на ринку універсальних пристроїв для дослідження і проведення атак, що робить їх загальнодоступними як для розробників надійних пристроїв так і для зловмисників;
- 2) відкритими залишаються проблеми пошуку вразливостей ПКВІ в реалізаціях державних криптоалгоритмів, в першу чергу ГОСТ 28147-89 та ДСТУ 4145-2002, а також розроблення універсальних та ефективних методів для протидії їх використання.

Список використаних джерел:

1. Zhou Y., Feng D. Side-Channel Attacks: Ten Years After Its Publication and the Impacts on Cryptographic Module Security Testing [Електронний ресурс] // Proc. of National Institute of Standardization: Physical Security Testing Workshop, Hawaii, September 26-29, 2005. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до публ. <http://eprint.iacr.org/2005/388>.
2. Kelsey J., Schneier B., Wagner D., Hall C. Side Channel Cryptanalysis of Product Ciphers // LNCS: Computer Security – ESORICS 98. – Berlin: Springer, 1998. – Vol. 1485. – P. 97-110.
3. Biham E., Shamir A. Differential Fault Analysis of Secret Key Cryptosystems // LNCS: Proc. of International Conf. Advances in Cryptology — CRYPTO’97. – Berlin: Springer, 1997. – Vol. 1294. – P. 513-525.
4. Boneh D., DeMillo R., Lipton R. On the Importance of Checking Cryptographic Protocols for Faults // LNCS: Proc. of International Conf. Advances in Cryptology – EUROCRYPT’97. – Berlin: Springer, 1997. – Vol. 1233. – P. 37-51.
5. Kocher P., Jaffe J., Jun B. Differential Power Analysis // LNCS: Proc. of International Conf. Advances in Cryptology – CRYPTO’99. – Berlin: Springer, 1999. – Vol. 1666. – P. 388-397.
6. Lin L., Kasper M., Guneyasu T., Paar C., Burleson W. Trojan Side-Channels: Lightweight Hardware Trojans through Side-Channel Engineering // LNCS: Cryptographic Hardware and Embedded Systems – CHES 2009. – Berlin: Springer, 2009. – Vol. 5747. – P. 382- 395. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.riscure.com/inspector.html>.

МЕТОДИКА РОБОТИ З МАТЕМАТИЧНО ОБДАРОВАНИМИ ДІТЬМИ

Ольга Шестерніна

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Ю.В.Яременко

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати ефективні форми, методи, засоби роботи з математично обдарованими дітьми та визначити шляхи оптимізації педагогічної діяльності по організації роботи з обдарованими учнями.

Завдання: Проаналізувати психолого-педагогічну літературу з проблеми визначення та розвитку обдарованості учнівської молоді; теоретично обґрунтувати фактори, що впливають на формування обдарованості в дітей; визначити навчально-методичного забезпечення роботи з обдарованими дітьми в педагогічному процесі ЗНЗ України; теоретично обґрунтувати педагогічні умови ефективності організації навчального-виховного процесу в ЗНЗ.

Об'єкт дослідження: навчально-виховний процес у ЗНЗ України.

Предмет дослідження: організаційно-педагогічні умови ефективного розвитку обдарованості в учнівської молоді.

Методологічна основа дослідження спирається на філософські, психологічні та педагогічні положення про роль діяльності у розвитку особистості (Л.Виготський, О.Леонт'єв, С.Рубінштейн); про особистість як вищу цінність (І.Бех, І.Зязюн, В.Сухомлинський, О.Сухомлинська); ідеї про унікальність і самоцінність шкільного віку (Л.Артемова, О.Запорожець, Д.Ельконін, О.Кононко); закономірності психічного розвитку дітей шкільного віку (Л.Венгер, Г.Костюк, С.Кулачківська, Г.Люблінська, М.Поддяков); концепції екологічної освіти (І.Зверев, Н.Лисенко, М.Мойсеєв, С.Ніколаєва, З.Плохій, Г.Пустовіт).

Методи дослідження: конкретно-пошуковий, логіко-синтетичний, емпіричний, аналіз результатів діяльності дітей, вивчення і узагальнення найкращого досвіду роботи педагогів і батьків, експертні оцінки та самооцінки, методи математичної статистики обробки результатів дослідження.

Одним із завдань є діагностика та виявлення обдарованості дітей, яке є важливим чинником в педагогічній діяльності. Робота проводиться у таких напрямках:

- виокремлення певних характеристик обдарованості та виявлення інтелектуального й творчого потенціалу особистості на основі українських та зарубіжних концептуальних підходів;
- вивчення взаємодії творчого потенціалу та його структурних компонентів як складної моделі в життєдіяльності особи;
- окреслення змісту освіти посилаючись на здобутки класичної педагогічної думки, теорії й практики роботи з обдарованими дітьми останньої чверті ХХ століття;
- визначення низки педагогічних умов стимулювання обдарованості в різних видах діяльності учнів, налагодження тісної співпраці педагогів з їхніми батьками щодо забезпечення належних умов для розвитку обдарованості дітей у сім'ї [1,398].

Вирішуючи проблему навчання обдарованих дітей, необхідно насамперед визначити, в якій формі прояву ми сподіваємося побачити обдарованість у наших учнів, тому що обдарованість може виявлятися як обдарованість:

- явна (виявлена), “в усіх на очах”. Звичайно, у цьому випадку мають на увазі високу обдарованість. Фахівці стверджують, що число таких обдарованих дітей складає приблизно 1-3% від загального числа дітей ;
- вікова, тобто в одному віці дитина виявляє явну обдарованість а потім, через декілька років, ця обдарованість кудись зникає;
- прихована (потенціальна, невиявлена), тобто обдарованість, яка з якихось причин не виявила себе в навчальній або іншій діяльності дитини, але існує як потенціальна перспектива розвитку здібностей. Дітей з прихованою обдарованістю значно більше,

ніж з явною. Передбачено, що загальне число явно і неявно обдарованих дітей складає 20-25% від загального числа учнів [1,399].

Досвід роботи з обдарованими дітьми показує, що, на першому етапі їх необхідно відшукати серед безлічі учнів. Які ж їх ознаки? –

- Дуже допитливі, активно досліджують навколишній світ;
- У ранньому віці здатні простежувати причинно-наслідкові зв'язки, робити правильні висновки;
- Легко справляються з пізнавальною невизначеністю, із задоволенням сприймають складні довгострокові завдання;
- Не можуть терпіти, коли їм нав'язують готову відповідь;
- Можуть тривалий час концентрувати свою увагу на одній справі;
- Властиве надто розвинуте почуття справедливості;
- Добре розвинуте почуття гумору;
- Постійно намагаються вирішувати проблеми, які їм поки що „ не під силу“, й у вирішенні деяких із них домагаються успіху;
- Для них характерні перебільшені страхи, оскільки вони здатні уявити собі безліч небезпечних наслідків подій;
- Надзвичайно схильні до немовних проявів почуттів, емоцій інших людей;
- Часто володіють екстрасенсорними здібностями;
- Негативно оцінюють себе;
- Більшість із них спить менше від своїх однолітків, вони раніше відмовляються від денного сну [2,50].

Наступний етап – розробка особистісно орієнтованого підходу до навчання обдарованих школярів. Талановиті діти завжди хочуть чогось нового, більш складного, інакше вони втратять інтерес до предмету. Тому система їх навчання повинна відрізнятися від системи навчання інших дітей. Вони працюють з науковою, статистичною та енциклопедичною літературою, розвиваючими кросвордами, розв'язують нестандартні, складні завдання, проводять експерименти, відвідують спецкурси. Вчителі-наставники, які працюють з обдарованими дітьми, активно використовують індивідуальний підхід, що враховує в першу чергу здібності учнів. Така робота повинна бути систематичною, особливо на перших порах, коли необхідно закласти основи, фундамент знань. Подальший розвиток підлітка залежить від його самостійної роботи: адже, якщо в якийсь момент він не захоче сам розв'язувати завдання з родзинкою, зусилля наставника будуть марні.

Далі необхідно допомогти розвинути в обдарованій дитині задатки лідера. Важливо, щоб він не соромився показувати свої здібності, не боявся висловлювати свої думки. З цією метою проводяться рольові ігри, брейн-ринги, свята творчості, вікторини, інтелектуальні ярмарки, які очолюють сильні учні. Вони допомагають вчителю організовувати відкриті уроки і класні заходи.

Коли йдеться про зміст шкільного курсу математики, то, звичайно, мають на увазі засвоєння учнями певної системи математичних знань, умінь і навичок. Але не можна зводити все навчання математики в школі до передачі учням визначеної суми знань, умінь і навичок. Це обмежувало б роль математики в загальній освіті. Тому перед школою стоїть важливе завдання математичного розвитку учнів [2,78].

Одним із завдань якого, є розвиток математичних здібностей — здатності утворювати на математичному матеріалі узагальнені, згорнуті, гнучкі й обернені асоціації та їх системи. До складових математичних здібностей слід віднести:

- здатність до формалізації математичного матеріалу, відокремлення форми від змісту, абстрагування від реальних ситуацій і їх кількісних відношень та просторових форм; оперування структурами відношень і зв'язків;
- здатність до узагальнення матеріалу;
- здатність до оперування числовою і знаковою символікою;

- здатність до логічних міркувань, пов'язаних з потребою доводити, робити висновки; здатність до скорочення процесу міркувань;
- здатність до переходу від прямого до оберненого ходу думки;
- гнучкість мислення незалежно від впливу шаблонів [3,15].

Пропонується розробка комплексу задач і вправ для дистанційної роботи з математично обдарованими дітьми, для виявлення і розвитку математичних здібностей у учнів, для прикладу, приведено деяке завдання, яке орієнтоване на дітей 5-6 класів.

1. Є дві сковороди. На кожній з них можна підсмажити один млинець. Кожен бік млинця смажиться 1 хвилину. Треба підсмажити 3 млинці з двох боків. За який найменший час це можна зробити?
2. Заповніть порожні клітинки:

8		
1/16		
2	4	

3. В сім'ї четверо дітей, їм 5, 8, 13, 15 років. Дітей звуть Марійка, Борис, Віра і Галя. Скільки років кожній дитині, якщо одна дівчинка ходить у дитячий садок, Марійка старша Бориса, а сума років Марійки і Віри ділиться на 3?

Висновки: В умовах загальноосвітньої школи важливо правильно організувати роботу учителя з математично обдарованими дітьми, не тільки створюючи необхідні умови для їх розвитку, а й готуючи їх до наполегливої праці, самовиховання. Основною задачею для вчителя математики при роботі з обдарованими дітьми – є виявити, спрямувати, розвинути математичні здібності дитини. В роботі пропонується це виявлення через систему дистанційного навчання, в якій може прийняти участь кожна дитина, але дійсно здібні дійдуть до кінця програми, що дозволить виявити цих дітей серед класу, і продовжити з ними роботу у майбутньому. Дана робота має спрямованість не лише на виявлення здібних учнів, а також на покращення результатів інших учнів, можливе зацікавлення предметом через незвичний підхід до розв'язку завдання.

Список використаних джерел:

1. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. - М.: Просвещение, 1968.
2. Ковалёв А.Г., Мясцев В.Н. Психологические особенности человека. – Т.2. Способности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1970.
3. Теплов Б.М. Проблемы индивидуальных различий. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961.

ОКРЕМІ АСПЕКТИ СТАТИСТИКИ ДЕРЖАВНОГО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ

Володимир Штрмілов

Науковий керівник – кандидат педагогічних наук, В.О.Корецька

В умовах становлення і розвитку ринкової економіки роль і значення статистики фінансів, зокрема, статистики бюджету надзвичайно важливі. Статистика державного бюджету – це окремий розділ статистики фінансів і кредиту.

Основні завдання статистики Державного бюджету:

- визначення величини доходів і видатків Державного бюджету, розміру перевищення видатків над доходами (дефіциту) або доходів над видатками (профіциту);
- вивчення джерел фінансування бюджетного дефіциту;
- визначення ефективності проведення державної фіскальної політики;
- дослідження впливу фіскальної політики на економічне зростання та рівень життя населення.

Державний бюджет – це система грошових відносин, яка виникає між державою, з одного боку, і підприємствами, фірмами, організаціями та населенням, з іншого, з метою формування та використання централізованого фонду грошових ресурсів для задоволення суспільних потреб.

Доходи Державного бюджету – це частина централізованих фінансових ресурсів держави, які врегульовані відповідними нормативними актами і необхідні для виконання її функцій.

Видатки Державного бюджету – це сукупність грошових відносин, які складаються в процесі розподілу і використання централізованих і децентралізованих грошових ресурсів для фінансування основних витрат суспільства [3].

Структура доходної частини Державного бюджету:

- податкові надходження;
- неподаткові надходження;
- доходи від операцій з капіталом;
- офіційні трансфери.

Структура видаткової частини Державного бюджету:

- економічна діяльність суб'єктів;
- соціальна сфера та соціальний захист населення;
- національна оборона;
- державне управління;
- правоохоронна діяльність;
- зовнішньоекономічна діяльність;
- обслуговування державного боргу.

Доходи та видатки бюджету статистика вивчає за допомогою наступної системи показників:

1. Показники виконання плану – ступінь фактичного надходження доходів і фактичного використання коштів бюджету в порівнянні з їх плановими показниками.
2. Структура доходів (видатків) бюджету – доля (питома вага) окремих розділів, статей бюджетної класифікації, до загального обсягу доходів (витрат) бюджету.
3. Показники динаміки доходів і витрат бюджету – тенденції, закономірності, зміни у формуванні та використанні державного бюджету у часі.
4. Показники бюджетних заходів – стан мережі, чисельності працівників, фонду заробітної плати, контингенту бюджетних заходів, середніх розмірів бюджетних витрат на душу населення у звітному році та ін. [2].

Визначимо показники структури та динаміку доходів Державного бюджету України за 2004-2008 рр.

Таблиця 1

Показники доходів державного бюджету України за 2004-2008 рр.

Найменування доходів	2004	2005	2006	2007	2008
ВСЬОГО	87990	78223.2	94315.1	146537	207979
Податок на додану вартість	19843	33450	44585	65122	98628
Податок на прибуток підприємства	12606	22276	26044	28638	42148
Акцизний збір	5934	7483	9584	8999	11133
Збори на інші неподатковані доходи	4456	9068	7561	35637	47352
Плата за нафту	436	1187	2369	3705	3809
Державне мито	151	198	255	304	376
Надходження до позабюджетних фондів	1	1.2	1.1	1.3	1.6
Інші податки й неподатковані внески	4456	4565	3915	4131	4532

Ділення сум грошових засобів з усіх джерел надходження на загальну суму визначають структуру доходів Державного бюджету.

Структура доходів державного бюджету за 2004-2008 рр.

Найменування доходів	2004	2005	2006	2007	2008
ВСЬОГО	100	100	100	100	100
Податок на додану вартість	42.5	42.7	47.2	44.4	47.4
Податок на прибуток підприємства	14.3	28.4	27.6	19.5	20.2
Акцизний збір	8.7	9.6	10.1	6.4	5.3
Збори на інші неподатковані доходи	22.06	11.6	8	10.4	22.7
Плата за нафту	0.5	1.5	2.5	0.8	1.8
Державне мито	0.17	0.25	0.27	0.4	0.1
Надходження до позабюджетних фондів	5.064	1.0015	0.0011	0.4	0.007
Інші податки й неподатковані внески	5.6	5.8	4.15	2.8	2.17

Отже структура державного бюджету змінюється але не досить стрімко. Суттєвих змін зазнали податки на додану вартість з 22,5% до 47,2% (у 2006. р порівняно з 2004 р.)

Динаміку доходів Державного бюджету дослідимо за допомогою таких статистичних показників як абсолютні прирости, темпи зростання, темпи приросту (базисні та ланцюгові).

Таблиця 3

Динаміка доходів державного бюджету за 2004-2008 рр.

Рік	Дохід Держбюджету млн.грн.	Абсолютний приріст		Темп зростання		Темп приросту		Абсолютне значення приросту млн.грн. 1%
		базисний	ланцюговий	базисний	ланцюговий	базисний	ланцюговий	
2004	87990			1,000				
2005	78223.2	-9766,8	-9766,8	0,896	0,896	0,896	0,896	879,9
2006	94315.1	6325,1	-3441.7	1,205	1,07	0,205	0,07	782,2
2007	146537	58547	52221.9	1,55	1,66	0,55	0,66	943,1
2008	207979	119989	61442	1,419	2,36	0,419	1,36	1465,3

Дослідження показників статистики бюджету викликає живий інтерес серед економістів, оскільки, державний бюджет – це один з найважливіших структурних елементів державних фінансів. З розвитком ринкової економіки роль державного бюджету суттєво зростає. Засобами формування бюджету забезпечуються загальнодержавні та місцеві умови розвитку. Особливості співвідношення і структуризації окремих статей державного бюджету відіграють роль у створенні бюджетів наступних періодів.

Список використаних джерел:

1. Фінансово-банківська статистика. Практикум: навч. Посібник./ П.Г. Вашкін, П.І.Пастер, В.П. Сторожук, Є.І.Ткач; за ред. Є.І.Ткача. – К: Либідь.
2. Уманець Т.В. Економічна статистика: Навч. посіб. – К.: Знання, 2006. – 429 с.
3. Кудряшов В.П. Курс фінансів: Навч. посіб. – К.: Знання, 2008. – 431 с.

АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ БЕЗРОБІТТЯ В УКРАЇНІ

Тетяна Юрченко

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор О.В. Авраменко

Актуальність. Погіршення макроекономічної ситуації, зумовлене посиленням кризових явищ в економіці України, призвело до збільшення диспропорцій розвитку національного ринку праці. Головним індикатором стану ринку праці є рівень безробіття, який відображає ступінь відповідності між пропозицією робочої сили та попитом на неї і належить до переліку основних макроекономічних показників. Ліквідувати безробіття як явище в ринкових умовах неможливо, але запобігання поширенню його масових і довготривалих форм становить одне з головних завдань соціальної політики держави.

Аналіз публікацій. Дослідженню ринку праці, зайнятості і безробіття присвятили свої праці такі відомі вітчизняні та зарубіжні дослідники, як: А.Колот, С.Мочерний, Г.Волинський, І. Петрова, А. Чухно, Л.Шевченко, В. Адамчук, Н. Волгін, Р. Колосова, О. Ромашов та ряд інших.

Метою статті є аналіз і оцінка процесу безробіття в Україні та чинників, що сприяють його зростанню.

Виклад основного матеріалу. Найважливішим показником стану ринку робочої сили є рівень безробіття, який показує відношення (у відсотках) чисельності безробітних у віці 15-70 років до економічно активного населення (робочої сили) означеного віку або по відповідній віковій групі, статі, рівню освіти, професійній групі, географічним ознакам.

Безробіття – економічна категорія, яка показує економічні відхилення з приводу вимушеної незайнятості працездатного населення.

Аналіз безробіття в Україні за допомогою моделі Тейла-Вейджа

В практиці статистичного прогнозування однією з базових адаптивних моделей вважається модель *Тейла-Вейджа* [1, с. 97].

Модель з адитивною сезонністю і лінійним зростанням можна представити у вигляді

$$x_t = a_{1,t} + g_{v_1 k_1} + \varepsilon_t,$$

де x_t – середнє значення рівня часового ряду в момент часу t після виключення сезонних коливань; $a_{1,t}$ – адитивний коефіцієнт зростання від моменту $t-1$ до моменту t ; $g_{v_1 k_1}$ – адитивний коефіцієнт сезонності для v_1 -ї фази k_1 -го циклу; ε_t – білий шум.

Прогнозування проведемо за даними, наведеними в таблиці 1.

Таблиця 1. Дані для прогнозування за моделлю Тейла-Вейджа

Роки	2011				2012		
Квартал	1	2	3	4	1	2	3
Зареєстроване безробіття на кінець звітного періоду у % до населення працездатного віку	2,17	1,97	1,60	1,56	1,93	1,67	1,53

Розрахунки проведемо при параметрах адаптації $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,4$; $\alpha_3 = 0,3$ і періодом $\tau=1$.

При $t=1$ маємо: $\ddot{x}_1 = 2,084 + 0,0773 + 0,038 = 1,9686$;

$\hat{a}_{1,1} = 0,1(2,17 + 0,38) + (1 - 0,1) \cdot (2,084 - 0,0773) = 2,0264$;

$\hat{g}_{1,1} = 0,4(2,17 - 2,0264) + (1 - 0,4) \cdot (-0,038) = 0,0330$;

$\hat{a}_{2,1} = 0,3(2,026 - 2,084) + (1 - 0,3) \cdot (-0,0733) = -0,0714$.

Аналогічним методом проведемо обчислення до $t=7$ включно.

При розрахунку прогнозованого значення $\ddot{x}_8$ враховується, що момент $t=8$ належить до другого циклу: $\hat{g}_{4,1} = -0,15278$.

$$\ddot{x}_8 = 1,5899 - 0,06897 - 0,1528 = 0,13682.$$

Розраховані за моделлю Тейла-Вейджа значення часового ряду $\ddot{x}_t$ представлені в таблиці і на Рис.1, де вони зіставляються з вихідним часовим рядом x_t .

За результатами проведеного аналізу, можна сказати, що зареєстроване безробіття на кінець звітної періоду в 4-му кварталі 2012 року буде меншим по відношенню до 3-го кварталу 2012 року і буде становити 1,37%.

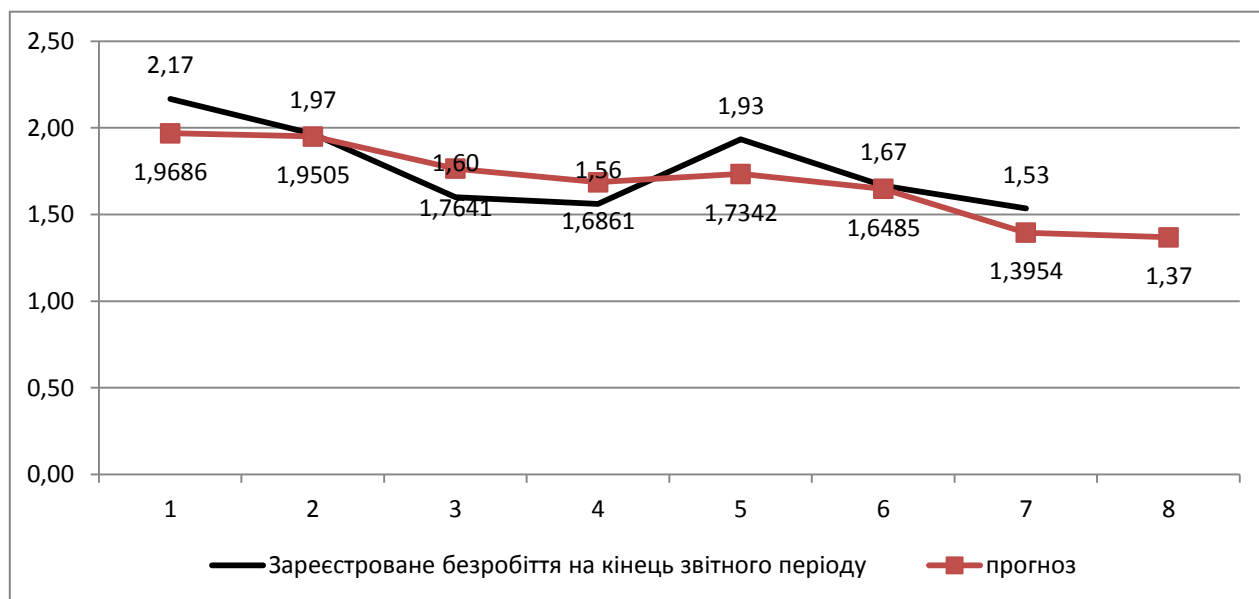


Рис.1.

Легко бачити, що за даними по зареєстрованому безробіттю, які опублікував Державний комітет статистики України за 4 квартал 2012 року безробіття становить 1,6%, а це не узгоджується з нашим прогнозом. Прогноз за моделлю Тейла-Вейджа склав 1,37%. Це може свідчити про існування факторів, які не включені у цю модель.

Аналіз безробіття в Україні в рамках теорії Марківських процесів

Аналіз безробіття за допомогою процесів Маркова відбувається у 3 етапи:

- відшукування матриці перехідних ймовірностей;
- перевірка моделі;
- прогноз [3, с. 121].

Для аналізу скористаємося даними по безробіттю за 2009-2011 рр. [2]:

	Зареєстроване безробіття у січні-грудні 2009 року											
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
всього	900,6	906,1	877,0	808,8	736,3	658,5	606,9	569,6	542,7	508,4	512,2	531,6
у % до населення працездатного віку	3,2	3,2	3,1	2,9	2,6	2,4	2,2	2,0	1,9	1,8	1,8	1,9
	Зареєстроване безробіття у січні-грудні 2010 року											
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
всього	526,7	530,3	505,2	455,0	419,4	398,7	396,8	396,4	408,1	400,7	449,7	544,9
у % до населення працездатного віку	1,9	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5	1,4	1,6	2,0

	Зареєстроване безробіття у січні-грудні 2011 року											
	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
всього	585,6	616,7	613,6	579,9	549,2	506,1	469,5	432,4	404,5	378,9	413,1	482,8
у % до населення працездатного віку	2,1	2,2	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,5	1,8

Розіб'ємо дані по безробіттю на 4 інтервали, $\min=1,4$, $\max=3,2$.

Стани		Інтервали
s1	низький	[1; 1,55]
s2	середній	(1,55; 2,1]
s3	достатній	(2,1; 2,65]
s4	високий	(2,65; 3,2]

Кроки переходу системи із одного стану в наступний:

	низький	середній	достатній	високий	сума
низький	7	2	0	0	9
середній	2	14	1	0	17
достатній	0	2	3	0	5
високий	0	0	1	3	4
					35

Матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

	s1	s2	s3	s4
s1	0,78	0,22	0	0
s2	0,12	0,82	0,06	0
s3	0	0,40	0,60	0
s4	0	0	0,25	0,75

Як ми бачимо, на крайніх точках матриці утворилися нулі, а це означає, що поки що неможливі переходи зі стану низький в достатній, низький в високий, середній в високий, достатній в високий, також зі станів достатній в низький і високий в середній. Так як на кінцях матриці знаходяться нулі, то можна говорити про циклічне випадкове блукання.

Найбільша ймовірність переходу з середнього стану в середній – 0,82, а найменша – з середнього в достатній – 0,06.

Оскільки у нас є дані по безробіттю за 2009-2011 роки, то можна зробити прогноз на січень 2012 року.

В грудні 2011 року безробіття становило – 1,8% до населення працездатного віку. В цьому місяці безробіття знаходиться в стані s2, який знаходиться в інтервалі (1,55; 2,1],

Матриця перехідних ймовірностей є такою:

$$\begin{pmatrix} 0,78 & 0,22 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0,82 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,78 & 0,22 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0,82 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,82 & 0,06 & 0 \end{pmatrix}.$$

За результатами проведеного аналізу, встановлено що в січні 2012 року безробіття буде знаходитися в стані s2 і в інтервалі (1,55; 2,1].

Таким чином за даними, які опублікував Державний комітет статистики України у січні 2013 року, зареєстроване безробіття на кінець звітного періоду у відсотках до населення працездатного віку буде становити 2%. Прогноз за допомогою процесів Маркова показав, що рівень безробіття в січні 2013 року буде входити в стан s2 (середній стан) і знаходитиметься в інтервалі (1,55; 2,1]. Отже, наш прогноз у рамках теорії харківських процесів підтверджується.

Список використаних джерел:

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. – Москва: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
2. <http://www.ukrstat.gov.ua> – Сайт Державного комітету статистики України.
3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2002. – 226 с.

ЗМІСТ

<i>Тетяна Берест</i>	
Розвиток пошуково-дослідницької діяльності студентів за допомогою математичного моделювання	3
<i>Юрій Брайко, КМК КНТУ</i>	
Розробка програми для проведення експериментів з імітаційними моделями та вдосконалення алгоритму пошуку сусідів, створення скриптової мови для опису поведінки моделей.....	7
<i>Ілона Гідулян, Вікторія Корецька</i>	
Тестування в системі педагогічного оцінювання: історія і сьогодення.....	10
<i>Наталія Головка</i>	
Приклади застосування методу резолюцій	12
<i>Анна Гринчишина, Микола Садовий</i>	
Співвідношення фізики й філософії на різних етапах розвитку науки.....	15
<i>Надія Дорофєєва, Юрій Гуртовий</i>	
Потік енергії хвиль в гідродинамічній системі “шар-шар”	18
<i>Наталя Драна, Інна Ключник</i>	
Розв’язування систем диференціальних рівнянь в околі регулярної особливої точки	20
<i>Маргарита Дроздова</i>	
Економіко-статистичний аналіз диференціації заробітної плати в Україні	23
<i>Юлія Завізіон</i>	
Визначення характеристик випадкового процесу та моделювання роботи систем масового обслуговування засобами Maple.....	27
<i>Олена Заворуєва</i>	
Встановлення граничного розподілу екстремальних значень найбільшої тривалості життя.....	31
<i>Дар’я Крупська</i>	
Основні види диференційовності функцій та мір	34
<i>Ірина Ланецька</i>	
Диференціальні рівняння та математичне моделювання	39
<i>Олександра Ломанюк</i>	
Нерівність Коші у шкільній математичній освіті.....	42
<i>Костянтин Мошніков</i>	
Організація оцінювання в системах управління навчанням	45
<i>Сергій Нагорний, Володимир Євладенко</i>	
Проблема синтаксичного налагодження програм.....	47
<i>Ірина Наточий</i>	
Поточне оцінювання навчальних досягнень студентів з історії держави і права України	50
<i>Світлана Новіцька, Наталія Шевченко</i>	
Моделі з панельними даними.....	54
<i>Мар’яна Овчаренко</i>	
Оцінка впливу прямих іноземних інвестицій на економіку України за допомогою моделі Харрода-Домара	56
<i>Артем Олійник, Ольга Авраменко</i>	
Стохастичне моделювання хвиль у гідродинамічних системах	59
<i>Віталій Паршенков</i>	
Оцінювання та відбір CASE-інструментів.....	62
<i>Анна Піддубна</i>	

Використання економетричної моделі Кобба-Дугласа при прогнозуванні показника ВВП на 2013 рік.....	65
<i>Артем Риндич, Володимир Євладенко</i>	
Окремі підкласи параметричних граматик	68
<i>Катерина Сальник</i>	
Розрахунок IBNR-резервів страхової компанії методом Борнхуеттера-Фергюсона	71
<i>Віталій Споран</i>	
Елементи нечіткої логіки в курсі математичної логіки	73
<i>Катерина Терещенко, Юрій Гуртовий</i>	
Елементи математичного моделювання в школі.....	76
<i>Альона Ткач</i>	
Методика навчання студентів методу геометричних перетворень з використанням інформаційно-комунікаційних технологій	79
<i>Олена Ткаченко</i>	
Місце теорії многочленів у фаховій підготовці вчителя математики	83
<i>Юлія Червінська</i>	
Мовленнєва компетентність школярів та її оцінювання у тестовій формі.....	85
<i>Станіслав Чігірьов</i>	
Аналіз вразливості криптосистеми RSA через побічні канали витоку інформації	90
<i>Ольга Шестерніна</i>	
Методика роботи з математично обдарованими дітьми.....	93
<i>Володимир Штромілов</i>	
Окремі аспекти статистики державного бюджету України	95
<i>Тетяна Юрченко</i>	
Аналіз сучасного стану безробіття в Україні	98

Студентські наукові записки
(випуск 6)

Збірник наукових статей студентів
фізико-математичного факультету

Підписано до друку 24.05.2013.

Формат 60x84/16. Папір офсет. Друк різнограф.

Ум. др. арк. 5,57. Наклад 300. Зам. № _____

Редакційно-видавничий центр
Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел. (0522) 24 59 84
Факс (0522) 24 85 44