МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк

Інноваційні методи навчання математики

Науково-методичний посібник

Кіровоград – 2008

ББК 22.1 р.

К 96

УДК 51(07)

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк

К-96

Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

Рецензенти: доктор педагогічних наук, завідувач кафедри фізики та методики її викладання, професор С.П.Величко,
доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков.

У посібнику аналізуються та досліджуються інноваційні методи навчання математики, які відображають найбільш складні й не повністю визначені навчальними програмами проблеми, що виникають при організації навчального процесу.

Наведені в посібнику методи навчання можуть застосовуватися вчителями у спеціалізованих математичних класах, на заняттях математичних факультативів, математичних гуртків, при формуванні індивідуальних завдань для учнів у вигляді наукового дослідження, при формуванні завдань для учнівських (індивідуальних чи колективних) проектів, при підготовці й проведенні математичних олімпіад різного рівня, індивідуальної роботи з обдарованими учнями. Частково наведені методи можуть використовуватися вчителями на заняттях з математики у звичайних загальноосвітніх школах при формуванні творчості в процесі розв'язування рівнянь і нерівностей, застосуванні геометричного підходу до розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, побудові графіків функцій методом перетворення графіків, використанні інформаційних технологій.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 2 грудня 2008 року (протокол № 6).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ББК 22.1 р.

УДК 51(07)

Загальні засади інноваційних методів навчання

Швидкозмінність сучасного суспільства відбувається під впливом багатьох факторів, серед яких чільне місце займають:

а) процеси глобалізації, що виявляються в економіці, міграційних процесах, розподілі світових трудових ресурсів, обміні інформації (зокрема, через Інтернет), створенні міжнародних проектів;

б) розвиток тенденції переважання ринкових стосунків у суспільстві, в якому знання людини стали товаром;

в) утворення інформаційного суспільства, зокрема, бурхливий розвиток інформаційно-комп'ютерних технологій та їх застосування у всіх життєвих сферах життя суспільства;

г) поступ науково-технічної революції;

д) розвиток демократії в суспільстві й зростання впливу особистості на суспільство, насамперед, через систему виборів;

е) поява в суспільстві все нових видів і форм діяльності та спілкування й необхідність оволодіння ними членами суспільства.

Всі наведені фактори впливають як на систему освіти загалом так і на педагогічну освіту зокрема.

Традиційні погляди в освіті на формування в учнів знань, умінь і навичок уже не задовольняють суспільство. Сучасному суспільству потрібні не просто добросовісні виконавці, що мають певні знання, уміння й навички, а особистості. Адже лише сформована особистість може успішно справитися з проблемами сьогодення. Однією з проблем освіти на сьогодні є її швидке реагування на зміни в суспільстві. Це вимагає відкритості системи освіти до змін, що відбуваються в суспільстві, постійного перегляду й адаптування нормативної бази в освіті, розробки й впровадження в педагогічний процес нових методів і форм навчання та виховання. Як наслідок − з'явилися поняття "традиційне навчання" та "інноваційне навчання".

Традиційність навчання пов'язана з нормами освіти, що розробляються різними органами освіти, науковцями, педагогами-новаторами. Саме досягнення норм освіти є основним завданням традиційного навчання. Традиційне навчання покликане сформувати в учнів певну базу знань, умінь і навичок, без яких формування особистості проблематичне. Тому традиційне навчання є важливим аспектом підготовки учнів до самостійного життя. Однак традиційне навчання як система володіє певною замкнутістю, консервативністю й часто "не встигає" за швидкозмінним розвитком суспільства. Саме тому в науці виникла інша стратегія навчання – інноваційне навчання.

"Інновація – нововведення, зміна, оновлення; новий підхід, створення якісно нового, використання відомого в інших цілях" – таке визначення наводить І.М.Дичківська [Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.]. Отже "інновація" пов'язана з нововведеннями, змінами й модифікаціями, створенні нового, а інноваційна діяльність – з критичним аналізом, творчістю, виходом за межі загальноприйнятих стандартів, введенням нових видів і форм діяльності та спілкування й вилученням старих, з готовністю до сприймання й відображення в педагогічному процесі нових тенденцій в суспільстві, культурі, науці. Та чи інша новація в навчанні математики повинна володіти інноваційним потенціалом – здатністю забезпечити протягом тривалого часу корисний результат від нововведення.

Інноваційне навчання загалом орієнтоване на розвиток особистості учня, на формування готовності учня до реального життя, до його швидких змін, до творчого мислення, критичного аналізу навколишнього світу й себе в ньому, до постійного оволодіння учнями новими видами діяльності й спілкування. Інноваційне навчання покликане передувати змінам системи норм освіти, яка володіє певною консервативністю, можна сказати, "обережністю" до введення інновацій в освіту в загальних масштабах. Нормативна система в освіті скоріше змінюється за принципом "не нашкодь", тоді як інноваційне навчання більш сміливо впроваджує в навчання нове, невідоме, неприйняте ще загалом. Інноваційне навчання може виходити за рамки навчальних програм, що відображають зміст традиційної освіти.

Традиційне навчання з огляду на свою "обережність", замкнутість, консерватизм відпрацьовує й "шліфує" систему навчання у вигляді досконалих структур, які й передбачають виконання стандартів освіти. Досконалість таких навчальних структур саме в досягненні певних вимог-стандартів. Така "досконалість" структур навчання виявляється в її стійкості, упорядкованості, рівнозваженості, прогнозованості й забезпечує виконання системою навчання певних функцій, а саме – досягнення стандартів освіти. Поміщений в таку систему навчання учень набуває властивостей операціоналіста, певною мірою, аналітика, добросовісного виконавця. Однак з часом "досконалість" такої системи навчання перетворюється у свою протилежність, а саме: формує в учнів стереотипи мислення, алгоритми дій (виконання операцій), що приведуть до розв'язання проблеми (стереотипи дій), обмежує формування в учнів бачення світу в його нескінченно-можливому різноманітті, тобто відчуття світу як нескінченно-можливої реальності, не дозволяє учневі розкривати нові аспекти власних сутнісних сил, розвивати власні інтуїції (*я хочу, можу, розв'яжу, знайду, вивчу, засвою* і т.п.), ізолює учня від життєвої реальності.

Однією з стратегій навчання є намагання якомога більше, глибше, ширше розкривати й задіювати сутнісні сили людини. Досконала у статичному розумінні схема навчання не дозволяє повною мірою розкривати ці сили, а отже – затримує розвиток особистості учня. В цьому полягає чи не головний недолік традиційного навчання.

Традиційно-консервативне навчання забезпечує активність, самовизначення, самореалізацію й відповідальність (головні характеристики розвитку особистості) учня у межах створеної й досконалої (в статичному розумінні) системи навчання, що не дає можливості відчути учневі реальне життя суспільства. Смислово-семантичний простір, що створює для учня традиційно-консервативна система навчання, формує тільки окремі властивості особистості й не надає належної свободи для розвитку особистості загалом, для її самовизначення й самореалізації.

Інноваційні методи передбачають порушення такої статичної досконалості системи навчання, введення в неї нових активаторів, що викличе порушення стійкості, звичності, прогнозованості, типовості ситуацій тощо. Тому інновації зв'язані з певним ризиком, непрогнозованістю результатів навчання, нетиповістю ситуацій, що й утруднює їхнє впровадження в навчальний процес.

Система навчання, що побудована на інноваційних засадах, синергетична система, тобто передбачає порушення стійкості навчального процесу з метою виникнення його нових дисипативних (більш відкритих для нововведень) структур. Так, розвиток інформаційно-комп'ютерних технологій призвів до їх проникнення (як активаторів) у педагогічний процес, що викликало його збурення, порушення традиційних структур і створенні нових дисипативних структур навчання з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій, що кардинально змінило педагогічний процес.

Традиційна система навчання не дозволяє повною мірою формувати в учнів інтегративні знання та уміння застосовувати знання одних розділів математики (чи предметів) в інших. Інноваційне навчання передбачає такі методи й форми навчання як ділова гра, дискусія, диспут, лекція-роздум, створення проектів тощо. Особливо потрібно відзначити важливість таких методів у навчанні математики як інтерактивні методи, методи проектів. Інтерактивність учнів – це активність учнів як суб'єктів діяльності, як реалізація власних інтуїцій, а не тільки активність "зовнішня", що виникає в учня завдяки створенню певної педагогічної ситуації вчителем. Відчутним знаряддям інтерактивного навчання стали інформаційні технології зі своїми можливостями, зокрема – графічними. Саме в системі «учень-комп'ютер» при розв'язуванні навчальних задач виникає внутрішній діалог учня, що формує його самостійність, самовизначення, самореалізацію.

Метод проектів дозволяє учневі самостійно проектувати власні дії для розв'язування певної проблеми та самостійно чи з іншими учнями здійснювати ці дії в процесі виконання проекту. Проекти можуть бути колективні й індивідуальні. Так, наприклад, можна перед учнями класу поставити завдання: знайти середню вагу цукрового буряка на плантації в п'ятдесят гектарів. Для розв'язання цієї проблеми учням потрібно розробити план створення вибірки, здійснити цю вибірку і порахувати середнє значення ваги одного буряка.

На наш погляд, інноваційність навчання математики повинна відображати найбільш складні й не повністю визначені навчальними програмами проблеми, до яких можна віднести:

- задачі з математики, що важко формалізуються;
- застосування знань з одного розділу математики в іншому як інтеграція знань;
- декомпозицію (розбиття на певні етапи) розв'язування складних задач;
- поєднання аналітичних і графічних методів розв'язування задач;

- створення евристичних алгоритмів навчання (послідовності приписів), які системою евристик структурують поле можливостей учнів для розв'язання певної задачі, зменшуючи невизначеність проблеми;
- створення моделей при розв'язуванні рівнянь та нерівностей;
- формалізацію й створення структурних моделей задачних ситуацій в текстових математичних задачах;
- використання можливостей інформаційно-комп'ютерних технологій для розв'язування різних математичних задач.

Розв'язування наведених проблем вимагає від учнів творчості, активності, елементів наукового дослідження, знань, що не завжди явним чином входять в програму з математики й відображені в шкільних підручниках, додаткового оволодіння такими засобами як інформаційно-комп'ютерні технології та їхніми можливостями щодо розв'язання математичних задач.

Саме наведені вище проблеми навчання математики важко формально й детально описати в навчальних програмах (передбачити певними нормами). Ці проблеми як у постановці, так і в розв'язанні носять творчий характер й тому їх зміст багато в чому визначається вчителем. В цьому й буде полягати стосовно наведених проблем інноваційна діяльність вчителя та учнів.

Наведені в посібнику методи навчання можуть вибірково (чи повністю) застосовуватися вчителями у спеціалізованих математичних класах, на заняттях математичних факультативів, математичних гуртків, при формуванні індивідуальних завдань для учнів у вигляді наукового дослідження, при формуванні завдань для учнівських (індивідуальних чи колективних) проектів, при підготовці й проведенні математичних олімпіад різного рівня, індивідуальної роботи з обдарованими учнями тощо. Частково наведені методи можуть використовуватися вчителями на заняттях з математики у звичайних загальноосвітніх школах при формуванні творчості в процесі розв'язування рівнянь і нерівностей, застосуванні геометричного підходу до розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, побудові графіків функцій методом перетворення графіків, використанні інформаційних технологій тощо.

Розроблені й висвітлені в посібнику деякі інноваційні методи навчання математики були опубліковані у відомих наукових виданнях України, неодноразово апробовані в ліцеях і школах, а також в Кіровоградському педагогічному університеті ім. Володимира Винниченка при вивченні курсу "Методика навчання математики" та на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики при Кіровоградському обласному інституті післядипломної педагогічної освіти ім. В.О.Сухомлинського. Посібник ніяк не може вирішити всі проблеми інноваційної діяльності учителів й учнів. Однак автори сподіваються, що він буде корисним для вчителів і учнів при розв'язанні певних проблем навчання математики, а також для студентів, магістрантів та викладачів вищих педагогічних навчальних закладів, науковцям, працівникам органів освіти.

Розділ 1. Формування творчого мислення учнів при розв'язуванні рівнянь та нерівностей

Вступ

Програми з математики в загальноосвітній середній школі та й у педагогічному ВНЗ побудовані так, що при розв'язуванні рівнянь і нерівностей основна увага звертається на конкретні прийоми, способи, алгоритми розв'язування. Тоді всі рівняння й нерівності розбиваються на певні класи, для яких відомі методи розв'язування, з наступним вивченням цих класів у лінійній послідовності. По суті здійснюється класифікація всіх рівнянь і нерівностей згідно типів, які визначаються певними конкретними методами, прийомами, алгоритмами розв'язування. Окрім того розглядаються рівняння й нерівності підвищеної складності, для кожного з яких потрібно відшукувати власний спосіб розв'язування. Такий підхід успішно формує в учнів операційні уміння й навички, деякі аналітичні здібності. Однак він занадто формалізований. Проблема в тому, що поле можливостей для діяльності учня практично досить широке (навіть нескінченно-можливе), а формалізація описує його скінченим числом правил та алгоритмів, чого зробити практично неможливо.

Тому потрібні інші підходи до організації розв'язування рівнянь чи нерівностей, зокрема, на основі певних евристик. Евристичні правила структурують-визначають поле можливостей дій учня (студента) при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей, зменшуючи його невизначеність і збільшуючи визначеність. Однак визначеність не може бути представлена у вигляді однозначного алгоритму, що залишає (і вимагає) досить простору для творчості. Наш підхід до вироблення евристик полягає у тлумаченні процесу розв'язування рівнянь чи нерівностей як процесу послідовних перетворень. Тоді основним елементом (одиницею) процесу розв'язування буде певне перетворення, яке й потрібно буде досліджувати.

Незважаючи на численні публікації з питань розв'язування рівнянь та нерівностей в різних підручниках і посібниках [1; 2; 3; 8; 11; 13], ми пропонуємо ще один аспект їх вивчення.

Метою цього розділу є дослідження *процесу розв'язування рівнянь і нерівностей* як процесу послідовних перетворень, кінцевим результатом яких є розв'язок. Отже всі рівняння й нерівності розглядатимуться з єдиної точки зору, єдиної позиції – процесу розв'язування рівнянь і нерівностей як процесу їх послідовних перетворень. Такий підхід інтегрує всі типи рівнянь і нерівностей в єдину сукупність, формує в учнів загальні (інтегровані) уявлення про проблему розв'язування рівнянь і нерівностей з єдиної позиції, відкриває ще один аспект вирішення названої проблеми, а в методичному плані спонукає вчителя до вироблення нових підходів, методик в організації вивчення відповідного матеріалу шкільного курсу математики.

Отже, під *процесом розв'язування систем рівнянь і нерівностей* також будемо розуміти процес їх послідовних перетворень, кінцевим підсумком яких буде розв’язок відповідної системи. Тому, говорячи про рівняння чи нерівності, ми тим самим передбачаємо й системи рівнянь та нерівностей.

На жаль в школах (та й у вищих педагогічних навчальних закладах) мало звертається уваги саме на *процес* розв’язування, що спрямовує мислення учнів (чи студентів) більше в алгоритмічний (репродуктивний), ніж у творчий аспект мислення, що, в свою чергу, сприяє формальному засвоєнню матеріалу, знижується сутнісне розуміння процесу розв’язування. Часто учні виконують певні перетворення над рівнянням чи нерівністю, не розуміючи суті та змісту цього перетворення, а, значить, і не розуміючи сутності всього процесу розв’язування. Ми пропонуємо вчителям та викладачам педагогічних навчальних закладів більше звертати уваги на сам процес розв’язування рівнянь і нерівностей. Тоді розв’язування буде мати два аспекти: зміст (і відповідні знання) конкретних методів, прийомів, алгоритмів розв’язування та власне процес розв’язування як процес послідовних перетворень. Вдала методична взаємна доповнюваність цих аспектів поглибить знання учнів, розширить їх кругозір, спонукатиме до творчості навіть при розв’язуванні стандартних (типових) прикладів.

Як приклад елементарного нерозуміння сутності процесу розв’язування рівнянь (змісту перетворень) є розв’язування рівняння:

$$x^2 = 4 \qquad (1.1)$$

Учні з певністю відповідають, що $x=\pm\ 2$. Однак пояснити процес отримання розв’язку рівняння (1.1) як послідовності певних перетворень не можуть. Конкретно – не можуть відповісти на запитання: звідки беруться два знаки у відповіді? Більшість відповідає, що оскільки ми добуваємо корінь квадратний із 4, то з’являється два знаки. Проте в школі розглядають тільки арифметичне значення кореня, тобто *невід’ємне значення з невід’ємного числа.* Дехто перевіркою доводить, що і +2, і –2 є коренями рівняння (1.1). Однак вірно відповісти на запитання також не можуть. З погляду *процесу розв’язування* потрібно виконати послідовність таких перетворень над рівнянням (1.1), щоб отримати розв’язок:
добування кореня квадратного із лівої і правої сторін рівняння (1.1);

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}\,.$$

Одержуємо:

$$|x| = 2.$$

Розкриваємо знак модуля, маємо $x=\pm\ 2$, що і є розв’язком рівняння (1.1).

Можна було б навести ще приклади типових помилок, що допускаються учнями й студентами, як нерозуміння сутності процесу розв’язування рівняння чи нерівності в цілому, чи окремого перетворення – елементарної ланки такого процесу. Однак завданням статті є дослідження процесу розв’язування як процесу послідовних перетворень рівнянь чи нерівностей. Отже, елементарною ланкою процесу розв’язування виступає перетворення. *Процес розв’язування рівняння чи нерівності – це виконання послідовних перетворень над рівнянням чи нерівністю за певним алгоритмом з метою отримання розв’язку*.

З процесуального погляду головною проблемою при певному перетворенні рівняння (нерівності) є проблема отримання рівносильної умови вихідному рівнянню (нерівності). Як відомо, два рівняння (нерівності) будуть рівносильними, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Виконуючи послідовність перетворень над рівнянням (нерівністю) далеко не завжди очевидним є момент втрати кореня чи, навпаки, виникнення зайвого. Тому учні часто «гублять» чи «придбають» зайві корені при розв'язуванні рівнянь (нерівностей), особливо зі складними перетвореннями. Щоб запобігти цьому ми й пропонуємо дослідити основні (типові) перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності. До основних типів перетворень рівняння:

$$f(x)= g(x) \tag{1.2}$$

або нерівності:

$$f(x)\leq g(x) \tag{1.3}$$

можна віднести такі:

- додавання (віднімання) виразу $y(x)$ до лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- множення лівої й правої частин (1.2) чи (1.3) на вираз $y(x)$;
- ділення лівої й правої частин (1.2) чи (1.3) на вираз $y(x)$;
- піднесення до степеня з натуральним показником лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- добування кореня з лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- логарифмування лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- потенціювання виразів (1.2) чи (1.3);
- тригонометричні перетворення над (1.2) чи (1.3);
- функціональні перетворення з (1.2) і (1.3).

Крім *типу* перетворення має ще і *зміст* вираз $y(x)$. Важливо зауважити, що:

1. Перетворення одного і того ж типу в одному прикладі може змінити множину розв'язків, а в іншому − ні.

2. В одному й тому ж прикладі два перетворення $y_1(x)$ та $y_2(x)$ одного і того ж типу в залежності від змісту по-різному можуть впливати на множину розв'язків.

Потрібно підкреслити, що не можна класифікувати якимось чином *всі* можливі перетворення над (1.2) чи (1.3). Спроба створити якусь «закінчену» типізацію всіх можливих перетворень над (1.2) чи (1.3), скоріше, ні до чого не приведе. Та ми й не ставимо такої цілі. Наша мета – при розв'язуванні конкретного прикладу за певним алгоритмом *аналізувати кожне перетворення з тим, щоб виявити, чи може воно змінити множину розв'язків і, якщо може, то вжити певних дій, щоб не втратити розв'язків рівняння (1.2) чи нерівності (1.3) і не отримати зайвих*. Однак ми все таки наводимо приклади найбільш часто вживаних перетворень, які зустрічаються при розв'язування багатьох прикладів, передбачених шкільною програмою, з метою вироблення певних умінь і навичок аналізу конкретно-здійснюваного перетворення на його еквівалентність, а також формування знань, умінь і навичок тих дій, які дозволили б запобігти виникненню зайвих коренів чи їх втрати.

Таким чином, в процесі навчання розв'язування рівнянь чи нерівностей ми вбачаємо принаймні три взаємозв'язаних методичних завдань:

- створення алгоритму розв'язування у вигляді послідовності перетворень, здійснення яких приведуть до дослідження кожного розв'язку;
- аналіз кожного перетворення з метою виявлення тих, що *можуть* змінити множину розв'язків;
- вживання додаткових заходів з метою недопущення зміни множини розв'язків використовуваним перетворенням.

Потрібно зазначити, що виявлення перетворення, котре може змінити множину розв'язків, при розв'язуванні рівняння чи нерівності *ще не означає, що це перетворення обов'язково приведе до зміни множини розв'язків*. Більше того, досить складно точно *встановити у моменті застосування конкретного перетворення факт зміни множини розв'язків*. І якщо зміна розв'язків відбулася, то яка саме − ми *отримали зайві розв'язки чи втратили необхідні*? Тому «запобіжні» заходи приймаються у відповідь на перетворення, виходячи зі *знання можливості зміни* множини розв'язків тим чи іншим таким перетворенням. Таким чином, при використанні перетворення потрібно розв'язати такі питання: *чи може змінити множину розв'язків конкретного рівняння чи нерівності використовуване в даний момент перетворення*? Якщо може змінити – то воно може призвести до *виникнення сторонніх розв'язків* чи, навпаки, – *втрати розв'язків*? Відповідно до того, чи може перетворення призвести до виникнення чи втрати коренів *потрібні різні за змістом і формою «запобіжні» заходи*.

Конкретних ситуацій і причин, коли перетворення може призвести в момент його застосування до зміни множини розв'язків, безліч. Тому якимось чином їх класифікувати дуже проблематично. Серед таких ситуацій-причин можна назвати: звуження чи розширення області допустимих значень змінної рівняння (нерівності), встановлення «вірних» висновків з хибних умов (наприклад, $2 \neq -2$, однак $2^2=(-2)^2$), з рівності $f(x_1)=g(x_2)$ ще не слідує, що $x_1=x_2$ та ін.

Перетворення 1-9 в різних ситуаціях можуть давати різні результати − в одних змінювати множину розв'язків, в інших – ні. Тому дослідження перетворень є *творчою*, а не *репродуктивною задачею*. З досвіду відомо, що саме *проблема використання та оцінки перетворень на предмет зміни ними множини розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем є однією з найскладніших і важко засвоюваних учнями (та й студентами)*. На вказану проблему мало звертається уваги в шкільних й університетських програмах і, відповідно, вчителями та викладачами.

В аналізі конкретних перетворень ми будемо вказувати на можливість виникнення сторонніх розв'язків чи втрати розв'язків. Це *не раз і назавжди задані правила*, а окремі рекомендації-приклади, що вкажуть тільки на *можливість* зміни множини розв'язків в тій чи іншій ситуації. Ще раз підкреслимо, що *про характер конкретного перетворення y(x) можна говорити тільки стосовно конкретної ситуації в конкретному прикладі*. В іншій ситуації цього самого прикладу чи в іншому прикладі те ж саме перетворення може набути іншої (навіть протилежної) характеристики стосовно зміни множини розв'язків. Тоді цілком зрозуміло, що задача дослідження алгоритму розв'язування рівняння чи нерівності в розумінні визначення характеру перетворень є творчо-продуктивною задачею.

Наведемо такі означення:

Означення 1

Рівняння (або нерівності), що мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються *рівносильними*.

Означення 2

Нехай дано два рівняння:

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{1.4}$$

$$f_2(x) = g_2(x) \tag{1.5}$$

Якщо кожен корінь рівняння (1.4) є коренем рівняння (1.5), то рівняння (1.5) називається *наслідком рівняння* (1.4).

У подальшому викладі будемо розрізняти такі типи перетворень, що здійснюються над рівняннями:

I. Перетворення, які не змінюють множину розв'язків рівняння, нерівності чи їх системи.

II. Перетворення, що можуть привести до появи зайвих коренів рівняння, нерівності чи їх системи.

III. Перетворення, що можуть привести до втрати коренів рівняння, нерівності чи їх системи.

Розглянемо особливості різних видів перетворень детальніше.

§1. Додавання до обох частин рівняння чи нерівності виразу h(x)

Нехай маємо деяке рівняння:

$$f(x) = g(x) \qquad (1.6)$$

Додамо до обох частин рівняння (1.6) вираз *h(x)*. Отримаємо рівняння:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \qquad (1.7)$$

Проаналізуємо та дослідимо з використанням конкретних прикладів, чи може перетворення, що проведене над рівнянням (1.6), призвести до втрати коренів чи появи зайвих коренів.

Прикладом 1.1. Нехай дано рівняння

$$-x = 1$$

Його область допустимих значень змінної – множина всіх дійсних чисел. Додамо до обох частин рівняння вираз h(x) = $\sqrt{x}$

Областю визначення цього виразу є проміжок [0 ; $+\infty$]. Одержимо таке рівняння:

$$-x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$$

Перше рівняння має корінь $x = -1$, друге рівняння дійсних коренів не має. Очевидно, що це відбулося внаслідок звуження області допустимих значень змінної першого рівняння, адже областю допустимих значень змінної другого рівняння є проміжок [0 ; $+\infty$]. Таким чином, в результаті звуження області допустимих значень змінної ми втратили корінь рівняння $x = -1$.

Приклад 1.2. Розглянемо обернений перехід − від другого рівняння до першого рівняння, що можна здійснити додаванням до обох частин рівняння виразу $h(x) = -\sqrt{x}$. Після виконання тотожних перетворень ми отримуємо перше рівняння, що має корінь $x = -1$. Таким чином, в результаті розширення області допустимих значень змінної ми отримали зайвий корінь рівняння $x = -1$.

Приклад 1.3. Розглянемо перетворення над рівнянням

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1},$$

що полягає у додаванні до обох його частин виразу $h(x) = -\frac{1}{x-1}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 = 4.$$

Область допустимих значень змінної першого рівняння:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty),$$

а область допустимих значень змінної другого рівняння − це множина всі дійсних чисел. Отже, при переході від першого рівняння до другого відбулося розширення області допустимих значень змінної, але «придбання» зайвого кореня не відбулося − обидва рівняння мають однакові корені:

$$x = -2 \text{ або } x = 2,$$

і тому згідно означення 1 є рівносильними. Це можна пояснити тим, що при переході від першого рівняння до другого область допустимих значень змінної розширюється числом 1, але цей факт не приводить до появи зайвих коренів. І навпаки, при переході від другого рівняння до першого (шляхом додавання до обох частин другого рівняння виразу $h(x) = \frac{1}{x-1}$) з області допустимих значень змінної другого рівняння виключається число 1, що не є його розв'язком (тому не маємо втрати кореня).

Приклад 1.4. Розглянемо рівняння:

$$x^2 = 1,$$

Яке має два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Додамо до обох частин рівняння вираз $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

яке має корінь $x = -1$. Отже, рівняння не є рівносильними (перше рівняння є наслідком другого). Внаслідок чого відбулася втрата розв'язку $x = 1$ першого рівняння? Проаналізуємо, як змінилася область допустимих значень змінної рівняння у процесі описаного перетворення. Область допустимих значень змінної першого рівняння − множина всіх дійсних чисел, а область допустимих значень змінної другого рівняння − така ж, але без числа 1. Тобто, в результаті перетворення, яке здійснене над першим рівнянням, область допустимих значень змінної цього рівняння звузилася на множину, що складається з одного елемента $x = 1$. Ми вже зустрічалися з аналогічною ситуацією у прикладі 1.3, але звуження області допустимих значень змінної там не привело до втрати коренів рівняння, так як вони не попали у область звуження. В нашій ситуації один з коренів першого рівняння ($x = 1$) якраз і попадає у звуження області допустимих значень змінної рівняння.

При дослідженні конкретних перетворень (у даному випадку − додавання до обох частин рівняння (нерівності) виразу $h(x)$) та їх застосуванні до конкретних прикладів необхідно дотримуватися таких евристик:

1. Проаналізувати, чи може конкретне перетворення змінити множину розв'язків рівняння (нерівності).

2. Якщо відповідь на перше питання позитивна, то які дії потрібно виконати, щоб запобігти зміні множини розв'язків.

Розглянемо умови прикладу 1.4, але у контексті оберненого перетворення (яке і зустрічається у реальних вправах). Нехай треба розв'язати рівняння:

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Віднімемо від обох частин цього рівняння вираз $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 = 1,$$

яке не буде рівносильним попередньому рівнянню (причини ми вже вказали вище, але причини розуміти мало − слід знати зміст дій, що можуть запобігти появі зайвого кореня $x = 1$ у процесі перетворення першого рівняння).

Розглянемо можливі варіанти дій, що могли б убезпечити від зміни множини розв'язків рівнянь (нерівностей):

1. Перевірка отриманих розв'язків рівняння завжди є ефективним засобом у тих випадках, коли ми з даного рівняння отримуємо його наслідок. Іншими словами ми лише ризикуємо отримати зайві корені рівняння, які легко можна виявити перевіркою. Цією рекомендацією і можна скористатися при

розв'язування рівняння $x^2+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ − елементарна перевірка показує, що розв'язок $x=1$ не є коренем цього рівняння. Але якщо ми рівняння отримуємо з його наслідку, то перевірка розв'язків ніяк не убезпечить від втрати коренів. Набагато складніше (взагалі неможливо у більшості випадків) виконувати перевірку розв'язків нерівності. Проілюструємо це на прикладі нерівності:

$$x^2+\frac{1}{x-1}\le 1+\frac{1}{x-1}.$$

Віднявши від обох частин нерівності вираз $h(x)=\frac{1}{x-1}$, отримаємо нерівність:

$$x^2\le 1,$$

яка розв'язком має проміжок $x\in[-1;1]$. Але $x=1$ не може бути розв'язком першої нерівності, так як при цьому значенні перша нерівність не має змісту. Але це очевидний факт. А як можна бути впевненим, що не буде інших змін у множині розв'язків першої нерівності, використовуючи лише перевірку? Це нереально. Тому у більшості випадків розв'язування рівнянь (нерівностей) слід використовувати інші способи.

2. Перехід до рівносильних тверджень (умов) є досить корисним та ефективним методичними та змістовним прийомом організації формування в учнів (студентів) узагальнених умінь розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Це той випадок, коли сама математика підказує можливі евристики для навчання та орієнтування. Проілюструємо це на прикладі згаданої нерівності:

$$x^2+\frac{1}{x-1}\le 1+\frac{1}{x-1}.$$

Проводячи згадане «небезпечне» перетворення ми маємо орієнтувати учнів на перехід не до другої нерівності, а до системи умов:

$$\begin{cases} x^2\le 1 \\ x\ne 1 \end{cases}$$

і, як наслідок, до свідомого отримання вірної відповіді до вправи:

$$x\in[-1;1).$$

Приклад 1.5. Розв'язати нерівність:

$$-x+\sqrt{x}>1+\sqrt{x}.$$

Звичайним віднімання від обох частин нерівності виразу $h(x)=\sqrt{x}$ ми прийдемо до нерівності

$$-x>1,$$

яка має розв'язком проміжок $x\in(-\infty;-1)$. Відповідь є хибною, так як при таких значеннях змінної перша нерівність не має змісту. Як убезпечитися від невірного розв'язування? Як пояснити, чому дане розв'язування не є вірним? Ці питання є досить важливими для забезпечення глибокого розуміння процесу перетворення, яке ми здійснюємо над нерівністю. Адже, взаємно знищуючи вирази $\sqrt{x}$ у обох частинах нерівності, ми розширюємо область допустимих значень змінної нерівності з проміжку $x\in[0;+\infty)$ до $x\in\Re$, а розв'язки нерівності-наслідку якраз і попали до області розширення. Правильно було б перейти від вихідної нерівності до системи умов:

$$\begin{cases} -x > 1 \\ x \in [0;+\infty) \end{cases},$$

за допомогою якої і можна пояснити вірну відповідь до нерівності $x \in \varnothing$. Більше того, вказана система умов дасть можливість запобігти зміні множини розв'язків вихідної нерівності.

§2. Множення обох частин рівняння чи нерівності на вираз h(x).

Розглянемо, як буде змінюватися множина розв'язків рівняння (1.6) якщо обидві його частини помножити на вираз $h(x)$. В результаті одержимо рівняння:

$$f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x) \qquad (1.8)$$

В залежності від характеру функції h(x) тут можуть бути різні випадки − рівняння можуть бути рівносильними, але цілком може мати місце як поява зайвих коренів, так і втрата необхідних коренів. Дослідимо такі випадки на конкретних прикладах з єдиною метою − визначити дії, пов'язані з розв'язування рівняння, нерівності чи їх системи, які гарантовано можуть дати вірний результат.

Проілюструємо ці випадки прикладами.

Приклад 2.1. Нехай дано рівняння:

$$x^2 = 9$$

Область допустимих значень його змінної складається з множини дійсних чисел, а його коренями є числа -3 та 3.. Помножимо обидві частини цього рівняння на вираз $1 + x^2$. Зазначимо, що рівняння $1+ x^2=0$ не має дійсних коренів, а область визначення функції $h(x) = 1 + x^2$ є також множина дійсних чисел, а числа -3 та 3 також є його коренями. Тому , рівняння

$$x^2 (x^2 +1) = 9(x^2 + 1)$$

є рівносильним даному.

Розглянемо, при яких умовах вказане перетворення може змінити множину розв'язків рівняння (1.6).

Приклад 2.2. Помножимо тепер ліву і праву частини рівняння $x^2 = 9$ на вираз $\frac{1}{x-3}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x-3} = 9 \cdot \left(\frac{1}{x-3}\right)$$

Зазначимо, що рівняння $\frac{1}{x-3} = 0$ не має коренів, а областю визначення функції $h(x) = \frac{1}{x-3}$ є множина всіх дійсних чисел за виключенням числа 3. Тому такою ж буде і область допустимих значень змінної отриманого рівняння. Як наслідок, це рівняння буде мати один корінь: $x = -3$. Отже, внаслідок множення обох частин вихідного рівняння на вираз $\frac{1}{x-3}$ ми втратили корінь $x = 3$ через те, що саме він попав до звуження області допустимих значень змінної вихідного рівняння.

Приклад 2.3. Помножимо обидві частини вихідного рівняння на вираз $\frac{1}{x-2}$. Рівняння $\frac{1}{x-2} = 0$ не має коренів, а область визначення функції $h(x) = \frac{1}{x-2}$ складається з множини всіх дійсних чисел за виключенням числа 2. Рівняння $x^2 = 9$ і отримане рівняння:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x-2} = 9 \cdot \frac{1}{x-2}$$

будуть рівносильними, так як при переході від вхідного рівняння до отриманого рівняння з області допустимих значень виключається число 2, яке не є розв'язком рівняння $x^2 = 9$.

Приклад 2.4. Помножимо ліву і праву частини рівняння $x^2 = 9$ на вираз $x - 2$. Зазначимо, що рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x=2$ і функція $h(x)= x - 2$ має область визначення, що складається з множини всіх дійсних чисел. Отримане рівняння:

$$x^2 (x - 2) = 9(x - 2)$$

буде мати окрім коренів вихідного рівняння $x=3$ *або* $x=-3$ і корінь $x=2$. Тому, в результаті виконання вказаного перетворення над вихідним рівнянням ми отримаємо один зайвий корінь, а отримане рівняння буде рівнянням-наслідком для вихідного рівняння.

Приклад 2.5 Помножимо обидві частини рівняння $x^2 = 9$ на вираз $\sqrt{x}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 \sqrt{x} = 9 \sqrt{x}.$$

Звертаємо увагу, що рівняння $\sqrt{x} = 0$ має корінь $x = 0$ і областю визначення функції $h(x)= \sqrt{x}$ є множина всіх дійсних чисел з проміжку $[0;+\infty)$. Такий же проміжок буде і областю допустимих значень змінної отриманого рівняння. Як наслідок таких змін, отримане рівняння буде мати два корені: $x = 3; x = 0$. Тобто, у результаті множення обох частин рівняння $x^2 = 9$ на вираз $\sqrt{x}$ ми отримали один зайвий корінь $x = 0$ і втратили корінь вихідного рівняння $x = -3$, так як він попав до звуження області допустимих значень змінної рівняння $x^2 = 9$.

Приклад 2.6. Помножимо тепер обидві частини рівняння *(1.9)* на вираз $\sqrt{x+4}$.Зауважимо, що рівняння $\sqrt{x+4} = 0$ має один корінь $x = -4$, а область визначення функції $h(x) = \sqrt{x+4}$ складається з множини всіх дійсних чисел у проміжку $[-4; +\infty)$. Отримане рівняння:

$$x^2 \cdot \sqrt{x+4} = 9 \cdot \sqrt{x+4}$$

буде мати область допустимих значень змінної проміжок $[-4; +\infty)$ і буде наслідком рівняння $x^2 = 9$, так як при переході від вихідного рівняння до отриманого з'являється сторонній корінь $x = -4$. Жодний корінь вихідного рівняння при цьому не втрачається, так як ці корені не входять до звуження області допустимих значень змінної рівняння $x^2 = 9$.

Отже, при множенні рівняння (1.6) на вираз $h(x)$ ми можемо отримати як рівносильне рівняння, так і нерівносильне. Якщо множник $h(x)$ (за умови, що область визначення функції $h(x)$ не вужча за область допустимих значень рівняння (1.6)) може перетворюватися в нуль при деяких допустимих значеннях змінної, то в загальному випадку рівняння (1.6) і (1.8) нерівносильні. Якщо ж область визначення функції $h(x)$ вужча за область допустимих значень рівняння (1.6), то в результаті множення обох частин рівняння (1.6) на $h(x)$ може відбутися втрата саме тих коренів рівняння (1.6), які не входять до області визначення функції $h(x)$.

Розглянемо на прикладах розв'язування рівнянь та нерівностей, які ж дії потрібно виконати, щоб запобігти зміні множини розв'язків при розв'язуванні рівнянь виду (1.8).

Приклад 2.7. Розв'яжемо рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-2} = 4 \cdot \frac{1}{x-2}$$

Перенесемо все до лівої частини, виконаємо дію віднімання дробів, отримаємо рівняння:

$$\frac{(x-1)^2-4}{x-2}=0.$$

Скориставшись умовою рівності дробу нулеві, отримаємо систему умов:

$$\begin{cases} (x-1)^2-4=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

Розв'язання цих умов дасть розв'язки: $x=3; x=-1$. Як бачимо, множник $\frac{1}{x-2}$ не зіграв ніякої ролі при розв'язуванні рівняння, тому, взагалі кажучи, ми просто могли розділити на нього обидві частини рівняння. Але у загальному випадку цього робити не слід. І це ми продемонструємо наступними прикладами.

Приклад 2.8. Розв'язати нерівність:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-2} < 4 \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Очевидно, що просте ділення на $\frac{1}{x-2}$ дасть невірний результат при розв'язуванні цієї вправи. Тому здійснимо над нерівністю вже описані вище перетворення − отримаємо нерівність:

$$\frac{(x-1)^2-4}{x-2}<0.$$

Розкладемо чисельник лівої частини на множники:

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)}<0.$$

Далі − або перейдемо до сукупності двох систем (дріб має знак мінус тоді, коли чисельник та знаменник різного знаку), або використаємо відомий метод інтервалів. Отримаємо розв'язок $x \in (-\infty;-1) \cup (2;3)$. Порівнюючи цей розв'язок із розв'язком нерівності $(x-1)^2<4$, констатуємо правильність висновку про недопустимість ділення обох частин вихідної нерівності на вираз $\frac{1}{x-2}$.

Приклад 2.9. Розв'яжемо тепер рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-3} = 4 \cdot \frac{1}{x-3}.$$

Шляхом аналогічних перетворень ми можемо звести це рівняння до системи умов:

$$\begin{cases}(x-1)^2-4=0\\ x-3\neq 0\end{cases}.$$

Очевидно, що ця система умов має розв’язок $x=-1$. Якби ж ми розділили обидві частини рівняння на вираз $\frac{1}{x-3}$, то ми б отримали такі корені рівняння $x=3; x=-1$. Тобто був би отриманий зайвий корінь $x=3$. А це відбулося через те, що число 3 попало до звуження області допустимих значень змінної рівняння.

Приклад 2.10. Розв’язати рівняння:

$$(x-1)^2\cdot(x-2)=4\cdot(x-2).$$

Розділивши обидві частини рівняння на вираз $(x-2)$, одержимо рівняння:

$$(x-1)^2=4.$$

Цей результат не є вірним, так як при цьому ми втратили один з розв’язків першого рівняння $x=2$.

Тому, виконавши описані у прикладі 2.7 перетворення, ми прийдемо до рівняння:

$$(x+1)(x-3)(x-2)=0,$$

розв’язування якого і дасть вірний результат: $x=-1; x=2; x=3$.

Приклад 2.11. Розв’язати рівняння:

$$(x-1)^2\cdot\sqrt{x-2}=4\cdot\sqrt{x-2}.$$

Провівши відповідні перетворення, ми отримаємо рівняння:

$$(x+1)(x-3)\sqrt{x-2}=0,$$

а з нього – систему умов:

$$\begin{cases}(x+1)(x-3)(x-2)=0\\ x-2\geq 0\end{cases}$$

Розв’язком цієї системи умов будуть числа 2 та 3. Очевидно, що якби ми поділили обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x-2}$, то в результаті ми б отримали два корені: –1 та 3, причому корінь –1 був би зайвим. Отже, перетворення вихідного рівняння, що полягає у діленні обох його частин на вираз $\sqrt{x-2}$, може привести до зміни множини розв’язків вихідного рівняння через те, що: а) рівняння $\sqrt{x-2}=0$ має власний розв’язок; б) ділення обох частин вихідного рівняння на вираз $\sqrt{x-2}$ приводить до розширення області допустимих значень змінної вихідного рівняння, куди і попадає корінь $x=-1$. А тому, для запобігання такій зміні множини розв’язків вихідного рівняння слід скористатися переходом до рівносильних тверджень, що і було продемонстровано на початку розв’язування цього прикладу.

Розглянемо особливості розв’язування нерівностей такого типу з точки зору використання при їх розв’язуванні переходу до рівносильних тверджень.

Приклад 2.12. Розв’язати нерівність:

$$(x-1)^2\ \sqrt{x-1}>4\cdot\sqrt{x-1}$$

Проведемо перетворення над нерівністю, які дадуть нам рівносильні умови. Перенесемо все до лівої частини, розкладемо на множники – отримаємо нерівність, рівносильну до вихідної:

$$(x+1)(x-3)\sqrt{x-1} > 0.$$

Дана нерівність буде рівносильною такій системі умов:

$$\begin{cases}(x+1)(x-3) > 0 \\ x-1 > 0\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде проміжок $x \in (3;+\infty)$.

Пояснимо причини, через які ми не могли поділити обидві частини вихідної нерівності на вираз $\sqrt{x-1}$, отримавши при цьому нерівність $(x-1)^2 > 4$. Перш за все, ми мали б врахувати, що вказаний вираз у точці 1 перетворюється в нуль, і цей випадок ми повинні розглядати окремо. Хоча, як показує подальше розв'язання, цей факт якраз і не вплине на кінцевий розв'язок. Тоді що ж саме так кардинально може змінити розв'язок вихідної нерівності (зазначимо, що розв'язок отриманої після ділення на вираз $\sqrt{x-1}$ нерівності такий: $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$)? Скорочення обох частин вихідної нерівності на вираз $\sqrt{x-1}$ розширює область допустимих значень вихідної нерівності на проміжок $x \in (-\infty;-1)$, куди й попадають «зайві» розв'язки отриманої нерівності $(x-1)^2 > 4$. Це і стало основною причиною допущеної помилки при такому розв'язуванні нерівності.

Отже, при розв'язуванні рівнянь та нерівностей виду (1.8) основними причинами зміни множини розв'язків можуть бути такі:

1. Множник *h(x)* може мати власні корені, які при певних умовах (слід перевірити факт входження цих коренів до області визначення функцій *f(x)* і *g(x))* будуть коренями рівняння (1.8).

2. Область визначення функції *h(x)* може бути вужчою визначення функцій *f(x)* і *g(x),* і у випадку попадання коренів рівняння (1.6) до області звуження, вони виявляться зайвими.

А тому, для запобігання такій зміні множини розв'язків вихідних рівняння чи нерівностей слід скористатися переходом до рівносильних тверджень, що і було продемонстровано на прикладах, описаних вище.

§3. Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до степеня.

Розглянемо рівняння (1.6). При піднесенні обох його частин до раціонального степеня можливі такі наслідки та такі причини зміни розв'язків рівняння (1.6):

1) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до будь-якого непарного натурального степеня одержимо рівняння:

$$f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x) \qquad (1.9)$$

яке буде рівносильним рівнянню (1.6), що доводиться в [Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В.,Мельников И. И.,Олехник С. Н., Пасиченко П. И., - М.: Наука, 1987. – 240с.];

2) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до любого парного натурального степеня одержимо рівняння:

$$f^{2n}(x) = g^{2n}(x) \qquad (1.10)$$

яке буде наслідком рівняння (1.6), так як його розв'язками будуть як розв'язки рівняння (1.6), так і розв'язки рівняння:

$$f(x) = -\, g(x) \qquad (1.11)$$

Тому таке перетворення може привести до появи зайвих коренів.

3) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до степеня −1 одержимо рівняння:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} \qquad (1.12)$$

Область допустимих значень цього рівняння може бути вужчою, ніж область допустимих значень рівняння (1.6) (в область допустимих значень рівняння (1.12) не входять ті значення змінної, при яких $f(x) = 0$ або $g(x) = 0$) . Тому таке перетворення може привести до втрати саме тих коренів рівняння (1.6), при яких $f(x) = 0$ або $g(x)= 0$; Але в тому випадку, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ мають вигляд відповідно $1/\psi_1(x)$ і $1/\psi_2(x)$, то, навпаки, в результаті проведення такого перетворення ми розширюємо область допустимих значень рівняння (1.6) і, як наслідок, ми можемо отримати зайві корені, що задовольняють одному з рівняння: $\psi_1(x) = 0$ або $\psi_2(x) = 0$.

4) при добуванні від обох частин рівняння (1.6) кореня непарного степеня, отримаємо рівняння:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \qquad (1.13)$$

яке буде рівносильним рівнянню (1.6), що також доводиться в [Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В.,Мельников И. И.,Олехник С. Н., Пасиченко П. И., - М.: Наука, 1987. – 240с.];

5) при добуванні з обох частин рівняння (1.6) кореня парного степеня, одержимо рівняння:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \qquad (1.14)$$

В результаті такого перетворення ми можемо втратити ті розв'язки рівняння (1.6), які задовольняють умові:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -\sqrt[2n]{g(x)} \qquad (1.15)$$

Піднесення обох частин рівняння (1.6) до любого іншого степеня вигляду $\frac{m}{n}$ можна розглядати як послідовність піднесення до вказаних у п.1) – 5) варіантах степенів з обов'язковим врахуванням зміни множини розв'язків рівнянь.

Розглянемо приклади розв'язування рівнянь та нерівностей, у яких би використовувалися такі перетворення.

Приклад 3.1. Розглянемо таке рівняння:

$$\sqrt[5]{x-2}=2$$

Піднісши обидві частини рівняння до п'ятого степеня, маємо

$$x - 2 = 32$$

Ці два рівняння рівносильні, тому відповідь x = 34 можна записати без перевірки.

Приклад 3.2. Розв'яжемо рівняння:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$$

При піднесенні обох частин даного рівняння до квадрату ми отримаємо рівняння-наслідок. Тому можемо сміливо це зробити, врахувавши, що випадок одержання зайвих коренів ми виявимо, зробивши перевірку. Тому, після піднесення до другого степеня обох частин рівняння, маємо (друге рівняння):

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2x+6)}+2x+6=36\,.$$

Або:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}=-3x+31$$

Піднесемо до квадрату обидві частини отриманого рівняння. Маємо (третє рівняння):

$$4(2x^2+4x-6)=(-3x+31)^2,$$

або:

$$x^2 - 202x + 985 = 0.$$

Це рівняння має корені: $x = 5$, $x = 197$. Зробимо перевірку: при $x = 5$ маємо $\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6$ – тому $x = 5$ є коренем заданого рівняння; при $x = 197$ маємо $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$ – тому $x = 197$ – зайвий корінь. Отже , рівняння має один корінь $x = 5$.

Виясними причину появи зайвого кореня. Бачимо, що число 197 не є коренем ні вихідного, ні другого рівнянь (це легко побачити, виконавши перевірку). Зайвий корінь 197 з'являється під час наступного піднесення до другого степеня. Справді, третє рівняння містить як корені другого рівняння, так і корені рівняння:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}=3x-31\,.$$

А число 197 якраз і є коренем цього рівняння.

Приклад 3.3. Розв'яжемо нерівність:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}\geq -3x+31\,.$$

Для запобігання зміні множини розв'язків цієї нерівності скористаємося переходом до рівносильних тверджень. Логіка тут може бути такою. Якщо вираз $-3x+31$ є невід'ємним, то обидві частини нерівності можна підносити до квадрату, зберігши при цьому знак нерівності. Якщо ж вираз $-3x+31$ буде приймати від'ємні значення, то для виконання умови нерівності достатньо, щоб підкореневий вираз лівої частини нерівності був невід'ємним. Запишемо висловлені умови у вигляді сукупності двох систем умов:

$$\begin{cases} -3x+31 \ge 0 \\ 4(2x^2+4x-6) \ge (-3x+31)^2 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} -3x+31 < 0 \\ 2x^2+4x-6 \ge 0 \end{cases}$$

В результаті елементарних перетворень ми отримаємо розв'язки: $x \in [5;+\infty)$.

Приклад 3.3. Розв'яжемо іншу нерівність:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6} \le -3x+31.$$

Для запобігання зміні множини розв'язків цієї нерівності також скористаємося переходом до рівносильних тверджень. Якщо вираз $-3x+31$ є невід'ємним, то обидві частини нерівності можна підносити до квадрату, зберігши при цьому знак нерівності. При цьому ми маємо врахувати область допустимих значень змінної нерівності − підкореневий вираз має бути невід'ємним. Якщо ж вираз $-3x+31$ буде приймати від'ємні значення, то нерівність не матиме змісту. Запишемо висловлені умови у вигляді системи вимог:

$$\begin{cases} -3x+31 \ge 0 \\ 4(2x^2+4x-6) \le (-3x+31)^2 \\ 2x^2+4x-6 \ge 0 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи буде проміжок: $x \in (-\infty;-3] \cup [1;5]$.

Підсумуємо, які ж основні ризики, що могли привести до зміни множини розв'язків, були при розв'язуванні прикладів 3.2 та 3.3.

1. Неврахування зміни послідовності розв'язування у залежності від зміни знаку правої частини нерівностей, що задані у вказаних прикладах.

2. Неврахування області допустимих значень змінної нерівностей.

3. Порушення внутрішньої логіки розв'язування нерівностей.

Використання переходу до рівносильних тверджень дало можливість запобігти випадкам зміни множини розв'язків.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x^2-4}{x-1} = \frac{x-2}{x^2-1}.$$

Область допустимих значень змінної цього рівняння складається з множини дійсних чисел, за винятком чисел 1 та −1. Коренями його будуть числа: 2; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Піднесемо дане рівняння до степеня −1. Отримаємо:

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x^2-1}{x-2}.$$

В результаті цього перетворення область допустимих значень рівняння змінилася. Вона складатиметься з множини дійсних чисел за винятком чисел 2 і −2. Відповідно і змінилася множина розв'язків рівняння: одночасно втрачається розв'язок *x = 2* і з'являється корінь *x = 1*. Розглянемо розв'язування нерівностей.

Приклад 3.5. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2-4}{x-1} > \frac{x-2}{x^2-1}.$$

Скористаємося переходом до рівносильних тверджень у процесі розв'язування. Перенесемо все до лівої частини, зведемо до спільного знаменника, винесемо у чисельнику за дужки $x-2$, а вираз у дужках розкладемо за коренями квадратного тричлена. Отримаємо:

$$\frac{(x-2)(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2})}{(x-1)(x+1)} > 0$$

Далі, врахувавши, що $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}38; \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2{,}6$ та використавши для розв'язування метод інтервалів, маємо кінцевий розв'язок: $x \in (\frac{-3-\sqrt{5}}{2};-1) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2};1) \cup (2;+\infty)$.

Дослідимо, як вплине на розв'язок вихідної нерівності піднесення обох її частин до степеня −1. Отримаємо нерівність:

$$\frac{x-1}{x^2-4} > \frac{x^2-1}{x-2}.$$

Виконавши над цією нерівністю аналогічні до попередніх перетворення та використавши метод інтервалів, ми отримаємо розв'язок: $x \in (-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (-2;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) \cup (1;2)$.

Порівнюючи два розв'язки, можна лише стверджувати, що вибрані нерівності є абсолютно різними (дарма, що відрізняються на степінь −1), тому говорити про використання вказаного перетворення при їх розв'язанні не може бути і мови. Слід однозначно використовувати перехід до рівносильних умов.

Приклад 3.6. Розв'яжемо рівняння:

$$(x-3)^3 = 8.$$

Добудемо від обох частин рівняння 3-го степеня, одержимо:

$$x-3 = 2.$$

Це рівняння є рівносильним даному.

Приклад 3.7. Розв'яжемо таке рівняння:

$$(x+4)^2 = 9.$$

Добудемо з обох частин рівняння арифметичний корінь 2-го степеня:

$$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{9} \quad \text{або} \quad |x+4| = 3.$$

Останнє рівняння має 2 корені: $x=-7$ *і* $x=-1$.

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+11} = x-1.$$

Область допустимих значень змінної цього рівняння задається умовою $x+11 \geq 0$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, виконаємо перетворення, та запишемо відповідь:

$$(x + 11 = x^2 + 1 - 2x) \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 11 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Отже, розв’язки рівняння знаходяться серед чисел 5; −2. Досить часто учні роблять помилку: знаходять корені, перевіряють їх належність області допустимих значень змінної рівняння і, відкинувши ті корені, які не входять в ОДЗ, записують відповідь. Але практика показує, що не можна обмежуватися лише перевіркою належності коренів ОДЗ рівняння. Треба перевірити, чи належать корені наслідків початковому рівнянню. Це підтверджується нашим прикладом.

Обидва корені задовольняють ОДЗ рівняння, але безпосередня перевірка вказує, що корінь $x = 5$ задовольняє вихідному рівнянню, а $x = 2$ ні. Таким чином, рівняння має єдиний корінь $x = 5$.

Крім відмічених, звернемо увагу на випадки втрати чи отримання зайвих коренів рівняння в результаті формального застосування деяких формул, без врахування умов їх застосування. Розглянемо рівняння виду:

$$\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$$

Областю допустимих значень змінної цього рівняння є множина всіх тих значень x , при яких виконуються умови:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Використавши формулу:

$$\sqrt{f(x)g(x)} = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)},$$

одержимо рівняння:

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = h(x),$$

область допустимих значень якого звузилась, так як складається з усіх значень x, для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

Отже в результаті такого перетворення ми можемо втратити корені. І, навпаки, при використанні оберненого перетворення ми можемо отримати зайві корені. Проілюструємо це на прикладі розв’язування рівняння та нерівності:

Приклад 3.9. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x-2} = \sqrt{7}$$

Використаємо при розв’язуванні цього рівняння перехід до рівносильних умов (використавши формулу $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|} (a \cdot b \geq 0)$ та врахувавши вказані умови):

$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)(x-2)} = \sqrt{7} \\ x+4 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши ці умови, ми отримуємо розв'язок $x = 3$. Якби друга та третя умови системи були не враховані, то ми б отримали крім розв'язку $x = 3$ ще і зайвий корінь рівняння $x = -5$. Отже формальне застосування формули:

$$\sqrt{x+4}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+4)(x-2)}$$

привело б до розширення області допустимих значень змінної рівняння (з проміжку $x \in [2;+\infty)$ до проміжку $x \in (-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$), а тому і до отримання зайвого розв'язку, який і входить до розширення ОДЗ. Але якщо при розв'язуванні рівнянь цей факт встановлюється шляхом проведення перевірки, то при розв'язуванні нерівностей такий спосіб є неможливим. Проілюструємо цей факт на прикладі.

Приклад 3.10. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x-2} < \sqrt{7}.$$

Використавши подібні до попередньої вправи перетворення, матимемо систему умов:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)(x-2)} < \sqrt{7} \\ x+4 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases},$$

розв'язання якої дає відповідь: $x \in [2;3)$. Якби формула $\sqrt{x+4}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+4)(x-2)}$ була використана нами формально, то відповідь була б іншою: $x \in (-5;-4] \cup [2;3)$. Ніякою перевіркою розв'язків цей факт встановити неможливо.

§4. Логарифмування та потенціювання рівнянь та нерівностей.

Розглянемо рівняння (або нерівність такого ж виду) (1.6). Прослідкуємо можливі ризики зміни множини розв'язків рівнянь та нерівностей внаслідок логарифмування (а також оберненої операції – потенціювання) та формального використання в процесі розв'язування рівнянь деяких властивостей логарифмів.

1) при логарифмуванні рівняння (1.6) ми одержимо:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (1.16)$$

де $a > 0$, $a \neq 1$. Область допустимих значень змінної рівняння (1.16) складається з усіх значень x , для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Тобто, ОДЗ рівняння (1.6) внаслідок такого перетворення звузилася і це може привести до втрати тих розв'язків рівняння (1.6), які не входять до ОДЗ рівняння (1.16). І, навпаки, при переході від рівняння (1.16) до рівняння (1.6) (операція потенціювання) внаслідок розширення області допустимих значень рівняння (1.16) ми можемо отримати зайві корені.

2) при формальному використанні в процесі розв'язування рівнянь формул:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (1.17)$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \qquad (1.18)$$

можливі випадки втрати або одержання зайвих коренів.

Пояснимо цю думку. Нехай дано рівняння виду:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x) \qquad (1.19)$$

ОДЗ цього рівняння складається з усіх тих значень x , для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Використавши формулу (1.17), одержимо рівняння:

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = h(x) \qquad \mathit{(1.20)}$$

ОДЗ даного рівняння взагалі кажучи є ширшою, так як задовольняє такій умові:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тому, при переході від рівняння (1.19) до рівняння (1.20) ми можемо одержати в якості зайвих саме ті корені, для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \qquad (1.21)$$

І, навпаки, при переході від рівняння (1.20) до рівняння (1.19) може відбутися втрата тих коренів, що задовольняють умові (1.21).

Можна навести аналогічні міркування для випадку використання при розв'язуванні рівнянь формули (1.18).

3) при формальному використанні в процесі розв'язування рівнянь (чи нерівностей) формули:

$$\log x^n = n * \log x \qquad (1.22)$$

Розглянемо це на прикладі розв'язування рівняння:

$$q \cdot log_a f(x) = g(x) \qquad (1.23)$$

(де q є N). Формально скориставшись формулою (1.22) ми отримаємо рівняння:

$$log_a (f(x))^q = g(x) \qquad (1.24)$$

При цьому можуть виникнути такі ризики зміни множини розв'язків рівняння (1.23):

а) якщо $q = 2n + 1$, де $n \in N$, то рівняння (1.23) і (1.24) будуть рівносильними точно так само, як при непарному показнику степеня будуть рівносильними рівняння (1.6) та (1.9);

б) якщо $q = 2n$, де $n \in N$, то з'являється ризик отримання зайвих коренів. Це пов'язано з розширенням ОДЗ рівняння (1.23), котра задовольняє умові $f(x) > 0$. ОДЗ рівняння (1.24) на функцію $f(x)$ накладає слабшу умову: $f(x) \neq 0$. Якраз ті корені рівняння (1.24), що задовольняють умові $f(x) < 0$ і можуть стати зайвими при такому розв'язуванні рівняння (1.23).

Навпаки, при переході від рівняння (1.24) до рівняння (1.23) при $q = 2n$ може відбутися втрата коренів.

Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння:

$$lg(x^2 - 30) = lg(-3x + 10).$$

Проведемо над рівнянням операцію потенціювання. В результаті одержимо рівняння:

$$x^2 - 30 = -3x + 10,$$

коренями якого будуть числа 5 та −8. Але коренем першого рівняння є лише число −8, а корінь 5 є зайвим коренем. Яка природа його появи?

Ясно, що при використанні переходу до рівносильних умов ми б мали операцію потенціювання виконати, врахувавши область допустимих значень змінної вихідного рівняння. А тому, матимемо таку систему умов:

$$\begin{cases} x^2 - 30 = -3x + 10 \\ x^2 - 30 > 0 \\ -3x + 10 > 0 \end{cases},$$

розв'язавши яку і отримаємо вірну відповідь $x = -8$.

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння:

$$log_2 (x + 2) + log_2 (x - 4) = log_2 7.$$

Використавши формулу (1.17) та наклавши рівносильні умови, одержимо:

$$\begin{cases} \log_2 (x+2)(x-4) = \log_2 7 \\ x + 2 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

Розв'язання системи умов дасть розв'язок $x = 5$. Якби умови були не враховані і формула (1.17) використана формально, то при такому перетворенні ми б одержали зайвий корінь −3, так як розширили б ОДЗ проміжком (− ∞; −2).

Приклад 4.3. Розв'язати нерівність:

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-1) > \frac{2}{3}.$$

Для розв'язування цієї нерівності використаємо формули (1.18) та (1.22) і накладемо відповідні умови, при яких використання цих формул не буде формальним:

$$\begin{cases} \log_8 \dfrac{(x-2)^2}{x-1} > \dfrac{2}{3} \\ x-2>0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи умов дає результат: $x \in (4;+\infty)$. Якби формули були використані без накладання відповідних умов, то нерівність в якості зайвих розв'язків мала б ще розв'язок $x \in (1;2)$. Використання переходу до рівносильних умов дало можливість уникнути невірної відповіді.

§5. Тригонометричні перетворення рівнянь та нерівностей.

В процесі розв'язування тригонометричних рівнянь також можуть виникати випадки втрати та появи зайвих коренів. Не претендуючи на повноту класифікацій, розглянемо основні ситуації, які зустрічаються досить часто.

1) при переході від рівняння (1.6) до рівняння

$$tg(f(x)) = tg(g(x))$$

можуть бути як втрачені, так і одержані зайві корені. Нехай $f(x) = arcsin(x)$, $g(x) = 2arcsin\ \frac{x}{\sqrt{2}}$.Так як число 1 є коренем рівняння

$$arcsin\ x = 2arcsin\ \frac{x}{\sqrt{2}},$$

але не є коренем рівняння

$$tg(arcsin\ x) = tg\ (2\ arcsin\ \frac{x}{\sqrt{2}})$$

то при переході від першого рівняння до другого було втрачено корінь x = 1 (причиною втрати цього кореня є звуження області допустимих значень змінної рівняння).

Нехай тепер $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. Так, як число π є коренем рівняння $tg\ x = tg\ 2x$, але не є коренем рівняння $x = 2x$, то при переході від другого до першого рівняння було одержано зайвий корінь $x = \pi$ (причиною появи цього кореня є періодичність функції $tg(x)$). Аналогічні висновки можна зробити і про перехід від рівняння (1.6) до рівняння

$$ctg(f(x)) = ctg(g(x))$$

2) при переході від рівняння (1.6) до рівняння

$$sin\ f(x) = cos\ g(x)$$

з'являються зайві корені. Нехай $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. Так як число 2π є коренем рівняння

$$sin\ x = sin\ 2x$$

але не є коренем рівняння $x = 2x$, то при переході від рівняння $x = 2x$ до рівняння $sin\ x = sin\ 2x$ з'явився новий корінь (причиною появи цього кореня є періодичність функції $sin\ x$). Аналогічні зауваження можна зробити про перехід від рівняння (1.6) до рівняння

$$cos\ f(x) = cos\ g(x)$$

3) поява зайвих коренів може відбутися в результаті використання в процесі розв'язування рівнянь тригонометричних перетворень.

Розглянемо декілька вправ.

Приклад 5.1. Розв'язати рівняння:

$$sin\ x - sin\ 2x = 0$$

Використавши формулу різниці синусів, маємо:

$$\cdot(2\cos\frac{x+2x}{2}\cdot\sin\frac{x-2x}{2}=0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{3}{2}-x=0\\ \sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi\kappa}{3},\kappa\in Z\\ x=2\pi n, n\in Z\end{array}\right.$$

А якби ми від вихідного рівняння перейшли до рівняння *x = 2x*, то мали б лише один розв'язок *x = 0*.

Приклад 5.2. Розв'язати рівняння:

$$tg\,2x - ctg\,x = 0$$

Множина всіх розв'язків рівняння (41) складається з об'єднання трьох множин:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z\,.$$

Використаємо відомі тригонометричні формули для перетворення вихідного рівняння. Отримаємо рівняння:

$$\frac{2tgx}{1 - tg^2 x} - \frac{1}{tgx} = 0$$

Серія розв'язків вихідного рівняння − $x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$ не є розв'язком другого рівняння. Це відбулося внаслідок звуження області допустимих значень рівняння після застосування формул:

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x} \text{ та } ctgx = \frac{1}{tgx}\,.$$

§6. Система вправ для попередження помилок учнів, пов'язаних з втратою та появою зайвих коренів рівнянь та нерівностей.

З переліченими вправами виконати такі завдання:

1. Виявити, яке перетворення переводить перше рівняння у друге.
2. Дати відповідь на питання, чи будуть рівносильними ці пари рівнянь? Якщо ні, то яке з двох рівнянь є наслідком другого?
3. Яким чином розв'язати кожне з рівнянь, щоб уникнути появи зайвих коренів, або втрати коренів?
4. Поставте замість знака рівності любий із знаків: $>, <, \geq, \leq$. Виконайте завдання 1-3 з нерівностями.

Перша група вправ.

а) $\frac{1}{x(x+1)} + x^4 = x^2 + \frac{1}{x(x+1)}$ і $x^2 = x^4$;

б) $4x + 1 - \frac{1}{x-3} = 11 - x - \frac{1}{x-3}$ і $4x + 1 = 11 - x$;

в) $x^2 - \frac{4}{x+3} + 3x = \frac{4}{x+3}$ і $x^2 + 3x = 0$;

г) $2x - 5 + \frac{1}{x-4} = 4 - x + \frac{1}{x-4}$ і $2x - 5 = 4 - x$;

д) $x + 12 + \sqrt{x} = 18 - x + \sqrt{x}$ і $x + 12 = 18 - x$;

Друга група вправ.

а) $7x - 1 = 2x + 1$ і $(7x-1)\sqrt{2x^2+11} = (2x+1)\sqrt{2x^2+11}$

б) $\frac{1}{2}x + 6 = 3x - 4$ і $\left(\frac{1}{2}x + 6\right)\cdot\left(x^2+7\right) = (3x-4)(x^2+7)$

в) $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ і $x^2 = 4$;

г) $(x + 2)(x + 1)^2 = 3\,(x + 1)^2$ і $x + 2 = 3$;

г) $(x + 9)(x + 6)^2 = 3(x + 6)^2$ і $x + 9 = 3$;

д) $x^2 - 7x = 8$ і $\sqrt{4-x^2}\,(x^2 - 7x) = 8\sqrt{4-x^2}$

е) $x^2 = x^3$ і $x = 1$;

є) $x + 2 = 0$ і $(x + 2)(x^2 + 1) = 0$;

ж) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1$ і $\sqrt{x^2} = 1$

з) $\frac{x-2}{x^2-5x+6} = 1$ і $x - 2 = x^2 - 5x + 6$;

и) $(2x+1)\sqrt{2x^3+5} = (3x-1)\sqrt{2x^2+5}$ і $2x + 1 = 3x - 1$;

і) $(3x-2)\sqrt{1-x} = (6-x)\sqrt{1-x}$ і $3x - 2 = 6 - x$;

ї) $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$ і $x^2 - 1 = 0$;

й) $(x^2 - 4)(x - 2) = 0$ і $x^2 - 4 = 0$;

к) $\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}$ і $x^2 + 3 = 4x$;

л) $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{5-2x}{x-1}$ і $2x-3=5-2x$;

м) $(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$ і $3-x=x+2$;

н) $3-\frac{4-x}{x-2}=\frac{18}{2-x}$ і $3(x-2)-(4-x)=-18$;

о) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$ і $x^2-9=x^2-1$;

п) $\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-2}{x-2}$ і $x^2-4=(x-1)(x-2)$;

р) $\frac{x-1}{x}=\frac{x-2}{x-1}$ і $(x-1)^2=x(x-2)$;

Третя група вправ.

а) $(5x-1)^2=(3x+5)^2$ і $5x-1=3x+5$;

б) $\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x^2+2x-4}$ і $(x+2)^2=x^2+2x-4$;

в) $\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{10}$ і $x+2=\sqrt{10}$

г) $\sqrt{x^2-5x+6}=4$ і $x^2-5x+6=16$;

д) $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ і $(x+1)=2$;

е) $\sqrt{x}=1$ і $x^2=1$;

є) $x^2+2x+1=0$ і $(x+1)=0$;

ж) $\sqrt{x}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$ і $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{2}$

з) $x-1=5-2x$ і $(x-1)^2=(5-2x)^2$;

і) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3}=3$ і $\sqrt{2x^2-x-6}=3$

ї) $\sqrt{(x-1)^2(x-3)}=x-1$ і $|x-1|\sqrt{x-3}=x-1$

й) $\sqrt{x+2}=x+1$ і $x+2=(x+1)^2$;

Четверта група вправ.

а) $\log_{(x+8)^2}(2x-1)^2=0$ і $\log_{x+8}(2x-1)=0$;

б) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=1$ і $\log_2(x+2)(x+3)=1$;

в) $\log_4(x+1)^2=0$ і $2\log_4(x+1)=0$;

г) $\log_{0,5}(x-1)(x+3)=0$ і $\log_{0,5}(-x+1)+\log_{0,5}(-x-3)=0$

д) $3^{\log_3 x}=x^2$ і $x^2=x$;

е) $\log_2 x(x+1)=1$ і $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$;

є) $\log_{x^2}(x-4)^2=1$ і $\log_x(x-4)=1$;

ж) $\log_2 x^2=1$ і $2\log_2 x=1$;

з) $\log_2 x^3=0$ і $3\log_2 x=0$;

и) $\log_2(x^2-6)=\log_2(4x-9)$ і $x^2-6=4x-9$;

і) $\log_2(x^2-x)=\frac{1}{2}\log_2 4$ і $x^2-x=2$;

ї) $\log_2(x^2+2x+3)=1$ і $x^2+2x+3=2$;

й) $\log_2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$ і $\log_2(x-\sqrt{3})+\log_2(x+\sqrt{3})=0$

k) $\log_2(x^3-3)=0$ і $\log_2|x+\sqrt{3}|+\log_2|x-\sqrt{3}|=0$

л) $\log_3 x^2=2$ і $2\log_3 x=2$;

м) $log_2 x^3 = 3$ і $3log_2 x = 3$;

н) $log_3 x^4 = 4$ і $4log_3 x = 4$;

о) $3log_2(-x) = log_2(x^2)$ і $-x^3 = x^2$;

п) $\log_2(x(x+9)) + \log_2 \frac{x+9}{x} = 0$ і $2log_2|x+9| = 0$;

П'ята група вправ.

а) $\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x$ і $\sqrt{3}tgx = 1$;

б) $sin\, x = cos\, x$ і $sin^2 x = cos^2 x$;

в) $|sin\, x| = |cos\, x|$ і $sin^2 x = cos^2 x$;

г) $\frac{tg 2x}{\cos 2x} = 0$ і $tg\, 2x = 0$;

д) $\sqrt{\cos^2 x} = 1$ і $|\cos x| = 1$;

е) $\sqrt{\sin^2 x} = 1$ і $sin\, x = 1$;

є) $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos 5x} = 0$ і $sin\, 2x = 0$

Наведемо конкретні приклади, які, безперечно, допоможуть проаналізувати наведену систему вправ.

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння

$$x - \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} = 0$$

Помножимо обидві частини рівняння на $x+1$. Маємо:

$$x^2 + x - x^2 - 3x - 2 = 0,$$

звідки $x = -1$. Оскільки $x = -1$ не входить в ОДЗ вихідного рівняння, то воно не є його коренем. Наше перетворення розширило ОДЗ, що привело до появи стороннього кореня. Множити обидві частини рівняння можна тільки на вираз $y(x) \neq 0$. В супротивному разі можуть бути проблеми з отриманням рівносильної умови. З погляду перетворень потрібно було б записати рівносильну вихідному рівнянню систему:

$$\begin{cases} x^2 + x - x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}.$$

Розв'язком першого рівняння буде $x = -1$, а це суперечить другій умові системи. Отже, вихідне рівняння розв'язків не має.

Приклад 6.2. Розв'язати рівняння:

$$x - 4 = \frac{(x-4)(x+2)}{x^2 - 3x}.$$

Наші рекомендації з розв'язування цього рівняння такі: перенести все до лівої частини, звести до спільного знаменника, в чисельнику винести спільний множник за дужки. При цьому отримаємо таке рівняння:

$$\frac{(x-4)(x^2 - 4x - 2)}{x(x-3)} = 0.$$

Розв'язування цього рівняння дасть розв'язки: $x = 4; x = 2 + \sqrt{6}; x = 2 - \sqrt{6}$.

Можна поступити інакше, врахувавши, що при діленні обох частин вихідного рівняння на x-4 ми втратимо розв'язок $x=4$. Щоб не записувати відповідно до названого перетворенню рівносильну систему потрібно рівняння записати так:

$$x-4-\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-3x}=0$$

Винесемо *x-4* за дужки:

$$(x-4)(1-\frac{x+2}{x^2-3x})=0$$

Звідси одержимо сукупність двох рівнянь, рівносильних вихідному:

$$\left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ 1-\dfrac{x-2}{x^2-3x}=0 \end{array}\right.$$

Із першого рівняння сукупності маємо розв’язок $x_1 = 4$. Друге рівняння сукупності дасть такі розв’язки:

$$x_2 = 2+\sqrt{6}\,,\ x_3 = 2-\sqrt{6}\,.$$

Отже, ми показали два різних підходи до розв’язування вихідного рівняння, але обидва підходи ґрунтувалися на переході до рівносильних тверджень.

Приклад 6.3. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-2}=x-8\,.$$

Враховуючи, що ми розглядаємо тільки арифметичне значення кореня, переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2 \\ \quad x-8\ge 0 \end{cases}$$

Розв’язками першого рівняння будуть числа $x_1=11$, $x_2=6$. Другу нерівність системи задовольняє тільки $x_1=11$, що й буде розв’язком вихідного рівняння.

Зауважимо, що є принципово два «крайні» шляхи розв’язування рівнянь за допомогою перетворень, які можуть призвести до сторонніх коренів: 1) переходити до рівносильних систем (чи сукупностей систем) з метою відшукання розв’язку системи; 2) шляхом формального розв’язування рівняння з наступною перевіркою отриманої множини значень невідомої безпосередньою підстановкою у вихідне рівняння (шлях «повної» перевірки). Всі останні шляхи знаходяться «між» цими двома «крайніми» (шляхи «частково-проміжної» перевірки). А саме: перехід до рівносильної системи; формальне розв’язування вихідного рівняння; перевірка останніх (крім рівняння) умов («частково-проміжна» перевірка), що входять в рівносильну систему, що й було зроблено нами в прикладі з ірраціональним рівнянням.

Приклад 6.4. Розв’язати рівняння

$$\lg(2x+3)=\lg(x+1)$$

При потенціювання можуть виникнути сторонні розв’язки. Запишемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} 2x+3 = x+1 \\ 2x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Розв'язком першого рівняння системи буде *x*= *–2.* Однак він не задовольняє останні дві умови-нерівності системи. Отже рівняння не має розв'язку.

Поширеними є помилки, що допускають учні (студенти) при розв'язування рівнянь вигляду:

$$f_1(g_1(x)) = f_2(g_2(x)).$$

Часто робиться хибний висновок про те, що рівняння рівносильне рівнянню

$$g_1(x) = g_2(x).$$

При таких перетвореннях потрібно враховувати особливості функцій $f_1(x)$, $g_1(x)$, $f_2(x)$, $g_2(x)$ що входять до рівняння: області визначення, області значень, періодичність та ін.

Приклад 6.5. Розв'язати рівняння

$$\sin(2x-4) = \sin(4x-5).$$

Помилково вважати, що рівняння

$$2x-4 = 4x-5$$

рівносильне вихідному рівнянню. Тут не врахована періодичність функції *sin(x).*

Друге рівняння має розв'язок $x=0,5$. Розв'язок же вихідного рівняння матиме набагато складніший вигляд. Для відшукання цього розв'язку потрібно перенести в одну частину доданки й перетворити суму синусів в добуток. Отримаємо

$$2\sin(x-0,5)\cos(3x-4,5) = 0,$$

або:

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x-0,5) = 0 \\ \cos(3x-4,5) = 0 \end{array}\right.$$

Розв'язки кожного з рівнянь сукупності матимуть вигляд:

$$x_1 = n\pi + 0,5;\quad x_2 = \frac{m\pi + 4,5}{3},$$ де *n, m* – цілі числа.

Розв'язком вихідного рівняння буде об'єднання цих двох множин $\{x_1\}$ і $\{x_2\}$. Легко переконатися, що їх перетином буде порожня множина.

Ще більші складнощі виникають при розв'язуванні нерівностей. Фактично до проблем перетворення рівнянь додаються ще додаткові проблеми. Так при множенні чи діленні нерівності на вираз *y(x)* потрібно щоб він був одного й того ж знаку при всіх допустимих значеннях *x*. В супротивному разі незрозуміло як змінювати знак нерівності. При розв'язанні нерівностей (наприклад, ірраціональних) шлях «повної» чи «частково-проміжкової» перевірки взагалі неможливий, бо кількість розв'язків нерівності нескінченна (наприклад, $x>3$). При розв'язуванні логарифмічних, показникових та інших типів нерівностей потрібно враховувати характер монотонності показникової чи логарифмічної функції. Можна назвати й інші проблеми, що виникають в моментах перетворень нерівностей під час реалізації алгоритму розв'язку. Все це створює суттєві труднощі, вимагає при розв’язуванні нерівностей творчості, а не репродуктивної діяльності, інтеграції знань, умінь і навичок, в цілому – інтегративної діяльності, інтегративного мислення.

§7. Висновки та рекомендації.

Підхід «з погляду перетворень» є інтегративно-диференційовним підходом. Саме проблеми окремого перетворення та алгоритм розв'язування в цілому як послідовність перетворень вимагають інтеграції знань з різних розділів математики. Тут потрібні знання прийомів та способів розв'язування рівнянь та нерівностей, властивостей функцій (області визначення та значень, монотонність, періодичність, обмеженість, неперервність), дій (множення, ділення, піднесення до степеня, логарифмування, потенціювання) над різними алгебраїчними виразами. По суті підхід «з погляду перетворень» до розв'язування рівнянь і нерівностей інтегрує увесь курс алгебри за середню школу.

Проведемо деякі узагальнення.

1. Перетворення, що проводяться над рівняннями, можуть бути поділеними на 3 класи: перетворення, які приводять до рівносильних умов; перетворення, які приводять до появи зайвих коренів; перетворення, які приводять до втрати коренів. Основними причинами появи зайвих та втрати коренів при цьому можуть бути такі:

а) розширення або звуження області допустимих значень змінної вихідного рівняння чи нерівності;

б) проведення перетворень над рівняннями чи нерівностями, в основі яких лежить формальне застосування формул;

в) періодичність функцій, що входять до однієї з частин рівняння чи нерівності (для тригонометричних рівнянь та нерівностей).

2. В процесі розв'язування рівнянь допустимим є використання перетворень, що приводять до рівносильних умов та перетворень, які приводять до появи зайвих коренів. Це зв'язано з тим, що перетворення, після яких з'являються зайві корені, приводять до рівняння-наслідку, яке містить всі корені даного рівняння.

3. Евристичні правила розв'язування рівнянь чи нерівностей можуть бути такими:

а) перетворення рівняння чи нерівності шляхом переходу до рівносильних умов;

б) якщо використовується перетворення, яке може привести до втрати коренів, то виконуються дії, які повинні завадити цьому;

в) якщо перетворення може призвести до появи зайвих коренів, то отриману множину чисел потрібно почергово підставити у вихідне рівняння і вилучити сторонні корені. При цьому перевірка отриманої множини чисел (серед яких можуть бути ті, що не є розв'язками рівняння) тільки на належність ОДЗ рівняння є недостатньою, так як сторонній корінь може входити до ОДЗ.

г) у випадку з нерівностями, коли перетворення над ними може призвести до появи сторонніх розв'язків, перевірку за допомогою підстановки здійснити не можна, так як, зазвичай, розв'язків нерівності є безліч. Тому тут слід скористатися переходом до рівносильних умов.

4. Роботу по попередженню в учнів помилок, пов’язаних з появою зайвих або втратою коренів, слід організувати на уроці паралельно з розв’язуванням рівнянь та нерівностей, пропонуючи учням вправи, аналогічні до наведених у параграфі 6.

5. Вчителям та студентам рекомендуємо таку додаткову літературу: [3], [8], [14] – [18].

Підводячи підсумок наших роздумів щодо перетворень як елементарних ланок процесу розв’язування, зазначимо, що підхід «з погляду перетворень» формує в учнів чи студентів значно ширший кругозір у порівнянні з чисто алгоритмічним, репродуктивним підходом. Зокрема, особливістю підходу «з погляду перетворень» є те, що ставиться проблема якісного аналізу процесу розв’язування рівнянь чи нерівностей. З цього погляду учень відразу вводиться в смислово-семантичний простір «можливостей», а не «необхідностей», в якому є тільки «можливості» створення алгоритмів розв’язування на основі знань та дослідження в кожному конкретному випадку особливостей тих чи інших перетворень рівнянь чи нерівностей. Такий підхід є протилежним до підходу, при якому домінують намагання створити «набір алгоритмів та прийомів», який дозволив би вірно розв’язати той чи інший приклад.

По суті підхід «з погляду перетворень» до розв’язування рівнянь і нерівностей формує знання як «складні здібності» [6], «недиз’юнктивні знання» [5], «живі знання» [12], «особистісні знання» [7]. Йдеться про формування загальної предметно-методичної здібності учня чи майбутнього вчителя до розв’язування рівнянь та нерівностей. З іншого боку – підхід «з погляду перетворень» є диференційовним. Адже відбувається декомпозиція алгоритму розв’язування на окремі конкретні перетворення. Більше того, конкретне перетворення «видозмінює» рівняння чи нерівність до еквівалентної системи, тобто перетворює-матеріалізує-«декомпозує» (розкладає) зміст певного перетворення в матеріальну знакову модель – систему, як правило, незалежних рівнянь та нерівностей. Творчість тут в тому, щоб, виходячи з визначеного рівняння чи нерівності, визначеного алгоритму розв’язування як послідовності перетворень, конкретного перетворення, визначеного місця перетворення в структурі алгоритму (в цілому, виходячи з ситуативності) учень (студент) «перетворив» свої інтегровні (не матеріальні) знання як «можливі» в актуальну дійсність у вигляді матеріальних знакових систем. Інакше, щоб на основі своїх знань як «поля можливостей» учень (студент) створив знакову модель моменту застосування певного перетворення в певному місці алгоритму розв’язування для певного прикладу як реальну дійсність [5]. Підхід «з погляду перетворень» формує «інше» по відношенню до алгоритмічного мислення, яке характеризується відкритістю, нечіткістю, незакінченістю, неоднозначністю, тобто формує, згідно з [4], «гуманітарне мислення».

Підхід «з погляду перетворень» в запропонованому нами вигляді є ще одним баченням складної методичної проблеми навчання розв’язування рівнянь і нерівностей в середніх навчальних закладах, а також у вищих педагогічних навчальних закладах. У сукупності з іншими підходами він допоможе створити більш цілісну уяву про процес навчання розв’язування рівнянь і нерівностей.

Список рекомендованої літератури.

1. Бевз Г.П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. –К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
3. Жлуктенко В.І., Бєгун А.В., Клименко Р.М. Конкурсні задачі з математики. – Ірпінь: Перун, 1994. – 240 с.
4. Кушнір В.А. Гуманітарне мислення вчителя // Соціальна психологія. – № 4(6). – 2004. – С. 81 – 95.
5. Кушнір В.А.Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
6. Платонов К.К. Проблемы способностей. – М.: Наука, 1972. – 312 с.
7. Полани М. Личностное знание. – М.: Прогресс, 1985. – 344 с.
8. Практикум розв’язування задач з математики / Михайловський В.І., Тарасюк В.Є., Чеканал Є.О. та ін. – К.: Вища школа, 1989. – 423 с.
9. Проблеми інтеграції у сучасній професійній освіті: методологія, теорія, практика / За ред. І.Козловської та Я.Кміта. – Львів: Сполом, 2004. – 244 с.
10. Рівносильні та нерівносильні перетворення при розв’язуванні рівнянь (методичні рекомендації) / Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. та ін. – Кіровоград: КДПУ, 1992. – 30 с.
11. Слепкань З.І. Методика навчання математики. Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.
12. Франк С.Л. Предмет знания. Душа человека. . – Мн,: Харверст, М.: АСТ, 2000. – 992 с.
13. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубенчук О.С. Алгебра і початки аналізу. – К.: Зодіак Е.К.О., 1996. – 608 с.
14. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В.,Мельников И. И.,Олехник С. Н., Пасиченко П. И., - М.: Наука, 1987. – 240с.
15. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. И., Пасиченко П. И. – М.: Наука, 1987 – 432с.
16. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа.: Учебное пособие для подготовительного отделения вузов. – четвертое издание, переработанное и дополненное. – М.: Высшая школа, 1987 – 416с.
17. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. Учебник для педагогических вузов. – М.: Высшая школа, 1965. – 548с.
18. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
19. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Петюренко А. Формування творчого мислення учнів при розв’язуванні рівнянь та нерівностей // Математика в школі, 2005, № 5 (с. 35-40).

Розділ II. Дослідження властивостей функцій.

§1. Побудова графіків функцій методом перетворень.

Розглянемо перетворення функцій та результати дії цих перетворень на загальний вигляд графіка функції. Очевидно, що, знаючи, як поводить себе графік функції при таких перетвореннях, можна створити учню чи студенту ситуацію "повного усвідомлення" розв'язання задачі на побудову графіків функцій методом перетворень. При цьому учень (студент) матиме змогу свідомо на основі своїх знань як «поля можливостей» створити матеріальну знакову модель моменту застосування певного перетворення в певному місці алгоритму побудови графіка функції як реальну дійсність і транслювати створену графічну ілюстрацію у аналітичному чи чисельному вигляді, цим самим забезпечивши розуміння виконання навчального завдання.

Види перетворень, що використовуються для побудови графіків функцій, такі:

1. Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ по горизонталі (або вздовж осі *Ox*). Очевидно, що при цьому кожній точці *A* графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x+a;f(x))$, яка утворена паралельним перенесення точки *A* на a одиниць праворуч вздовж осі *Ox*, якщо $a>0$, або на $|a|$ одиниць ліворуч вздовж осі *Ox*, якщо $a<0$. Множина точок A_1 утворить графік функції $y=f(x-a)$. Отже, для того, щоб побудувати графік функції $y=f(x-a)$ за відомим графіком функції $y=f(x)$, треба останній паралельно перенести на вектор (a;0).

2. Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ по вертикалі (або вздовж осі *Oy*). Очевидно, що при цьому кожній точці *A* графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x;f(x)+b)$, яка утворена паралельним перенесення точки *A* на a одиниць вгору вздовж осі *Oy*, якщо $b>0$, або на $|b|$ одиниць вниз вздовж осі *Oy*, якщо $b<0$. Множина точок A_1 утворить графік функції $y=f(x)+b$. Отже, щоб побудувати графік функції $y=f(x)+b$ за відомим графіком функції $y=f(x)$,треба останній паралельно перенести на вектор (0;b).

3. Симетрія графіка функції $y=f(x)$ відносно прямої *y=l* (при *l=0* отримаємо частковий випадок симетрії відносно осі *Ox*). Очевидно, що при цьому кожній точці *A* графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x;2\cdot l-f(x))$, яка буде симетричною точці *A* відносно прямої *y=l*, Множина точок A_1 при *l=0* утворить графік функції $y=-f(x)$, або частину графіка функції $y=|f(x)|$, де $f(x)<0$. Отже, прийнявши *l=0,* маємо, що графік функції $y=-f(x)$ отримується шляхом відображення графіка функції $y=f(x)$ симетрично осі *Ox,* а при побудові графіка функції $y=|f(x)|$, треба залишити без змін усі частини графіка $y=f(x)$, які лежать вище

осі Ox , а ті фрагменти графіка, які лежать нижче осі Ox, відобразити симетрично відносно цієї осі.

4. Симетрія графіка функції $y=f(x)$ відносно прямої $x=l$ (при $l=0$ отримаємо частковий випадок симетрії відносно осі Oy). Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(2\cdot l-x;f(x))$, яка буде симетричною точці A відносно прямої $x=l$. Множина точок A_1 при $l=0$ утворить графік функції $y=f(-x)$, або частину графіка функції $y=f(|x|)$, де $x<0$. Отже, прийнявши $l=0$, маємо, щоб побудувати графік функції $y=f(-x)$ за відомим графіком функції $y=f(x)$, треба відобразити останній симетрично осі Oy, а при побудові графіка функції $y=f(|x|)$, треба побудувати графік функції $y=f(x)$ для $x\geq 0$, а потім відобразити цю криву симетрично відносно осі Oy. Ці дві частини утворять шуканий графік функції $y=f(|x|)$. Крім того, аналогічно останньому прикладу перетворення симетрії відносно прямої $x=0$ при побудові графіка функції може бути використане і у випадку встановлення парності функції $y=f(x)$.

5. Стиск або розтяг графіка функції $y=f(x)$ від прямої $y=l$ вздовж осі Oy (при $l=0$ отримаємо частковий випадок стиску або розтягу від осі Ox вздовж осі Oy). Це перетворення можна розглядати як гомотетію відносно прямої $y=l$. Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x;m\cdot(f(x)-l)+l)$, яка утворена перетворенням гомотетії точки A відносно прямої $y=l$ з коефіцієнтом m. Множина точок A_1 при $l=0$ утворить графік функції $y=m\cdot f(x)$. Отже, графік функції $y=m\cdot f(x)$ (покладемо, що $m>0$) отримується з графіка функції $y=f(x)$ розтягом останнього в m раз від осі Ox, якщо $m>1$, та стисненням графіка функції $y=f(x)$ в $\frac{1}{m}$ раз до осі Ox, якщо $0<m<1$).

6. Стиск-розтяг графіка функції $y=f(x)$ відносно прямої $x=l$ вздовж осі Ox (при $l=0$ отримаємо частковий випадок стиску-розтягу відносно осі Oy вздовж осі Ox). Це перетворення можна розглядати як гомотетію відносно прямої $x=l$. Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y=f(x)$ з координатами $(x;f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(k\cdot(x-l)+l;f(x))$, яка утворена перетворенням гомотетії точки A відносно прямої $x=l$ з коефіцієнтом k. Множина точок A_1 при $l=0$ утворить графік функції $y=f(k\cdot x)$. Отже, графік функції $y=f(kx)$ (покладемо, що $k>0$) отримується з графіка функції $y=f(x)$ стисненням останнього в k раз до осі Oy, якщо $k>1$, та розтягом графіка функції $y=f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз від осі Oy, якщо $0<k<1$.

Загальну задачу сформулюємо так:

Побудувати графік функції $y=m\cdot f(kx-a)+b$, використовуючи графік функції $y=f(x)$.

Одним з можливих алгоритмів розв'язування задачі може бути така послідовність побудови графіків функцій:

1. $y = f(x)$.
2. $y = f(kx)$.
3. $y = f(kx - a)$.
4. $y = m \cdot f(kx - a)$.
5. $y = m \cdot f(kx - a) + b$.

Відзначимо що порядок використання перетворень не грає особливої ролі. Розглянемо одну з можливих послідовностей перетворень, поклавши при цьому для спрощення міркувань, що *m>0*, *k>0*:

1) будуємо графік функції $y = f(kx)$,"стиснувши" графік функції $y = f(x)$ в *k* раз вздовж осі *Ox* до осі *Oy* , якщо *k>1*, "розтягнувши" графік функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз вздовж осі *Ox* від осі *Oy* , якщо *k<1*.

2) будуємо графік функції $y = f(kx - a)$, попередньо записавши функцію у вигляді $y = f(k(x - \frac{a}{k}))$, паралельно перенісши графік функції $y = f(kx)$ на вектор $(\frac{a}{k};0)$.

Зауваження 1. Ці два перетворення можна здійснити і в зворотньому порядку, спочатку перенісши графік функції $y = f(x)$ на вектор $(\frac{a}{k};0)$, а потім отримати графік функції $y = f(kx - a)$, провівши операцію "стиску-розтягу", але вже не відносно осі *Oy* , а відносно прямої $x = \frac{a}{k}$. Або побудуємо графік функції $y = f(x - a)$, паралельно перенісши графік функції $y = f(x)$ на вектор *(a ;0)*, а потім проведемо операцію "стиску-розтягу" відносно осі *Oy*.

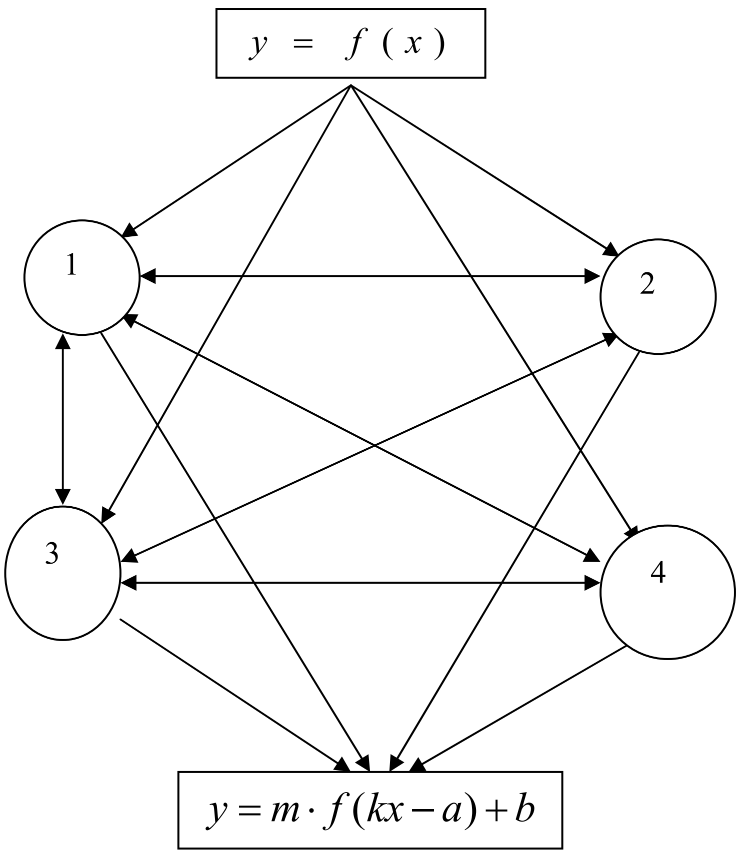


Схема 1. Граф можливих шляхів при використанні геометричних перетворень для побудови графіків функцій.

3) будуємо графік функції $y = m \cdot f(kx - a)$, провівши перетворення стиску-розтягу відносно осі *Ox* вздовж осі *Oy* над графіком функції $y = f(kx - a)$;

4) будуємо шуканий графік, перенісши графік функції $y = m \cdot f(kx - a)$ на вектор *(0;b)*.

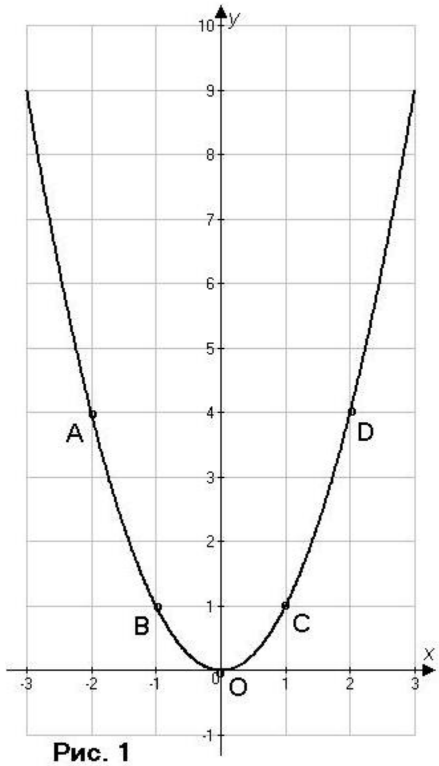


Рис. 1

Зауваження 2. Пункти (3) і (4) можна виконати і у зворотному порядку, спочатку перенісши графік функції $y = f(kx - a)$ на вектор $(0;\frac{b}{m})$, а потім над отриманим графіком функції виконати стиск-розтяг відносно осі Ox.

Усі зазначені в п.(1) − (3) перетворення можна виконувати у довільному порядку, але треба мати на увазі , що величини, на які графіки переносяться вздовж осей координат, залежать від порядку виконання перетворень. Зобразимо "поле можливостей" виконання геометричних перетворень над графіком функції $y = f(x)$ у вигляді графа (схема 1). Вузол "1" позначає перетворення гомотетії відносно прямої *x=l,* вузол "2" – паралельне перенесення на вектор $(\frac{a}{k};0)$, "3" – перетворення гомотетії відносно прямої *y=l,* "4" – паралельне перенесення на вектор *(0;b).* Не важливо, з якого вузла має починати роботу учень (студент) після побудови графіка функції $y = f(x)$, більше того, не є важливою послідовність продовження цієї роботи. Головним є правильне завершення повного циклу побудови графіка шуканої функції та правильне виконання окремих перетворень. Неважко порахувати, що за таких умов учень має 4!=24 можливості вибрати один з вірних варіантів виконання завдання. А якщо врахувати зміст зауважень 1 та 2, розкритих вище, змінивши зміст відповідних вузлів схеми 1, то "поле можливостей" буде ще ширшим.

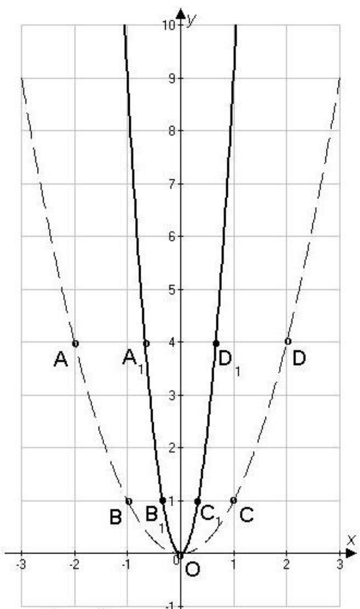


Рис. 2

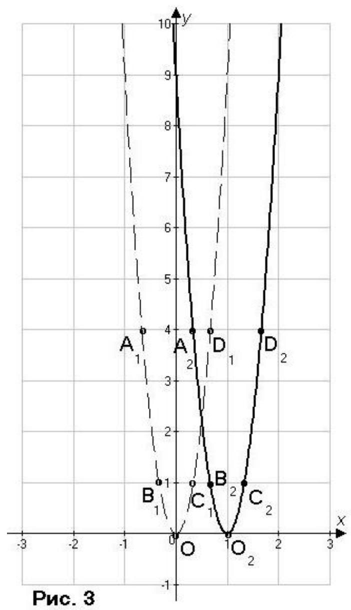


Рис. 3

Реалізація такого підходу до навчання учнів, як показала практика, дає можливість сформувати у старшокласників (та й у студентів спеціальних факультетів) узагальнені уміння використання перетворень до побудови графіків функцій. Використання різних маршрутів (згідно схеми) побудови графіків функцій методом перетворень розширює поле можливостей для діяльності учня (студента), а отже зростають можливості для творчості [36].

Проілюструємо викладені вище думки на прикладі.

Вправа. Побудувати графік функції:

$$y = 2(3x - 3)^2 - 4.$$

Початковий графік функції $y = x^2$. Побудуємо його по точках *A(-2;4), B(-1;1), O(0;0), C(1;1), Д(2;4)* (рис. 1).

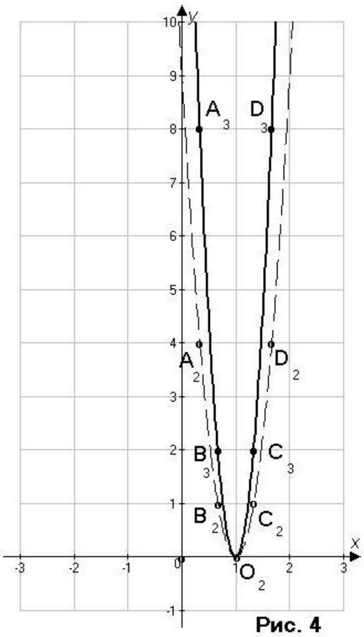


Рис. 4

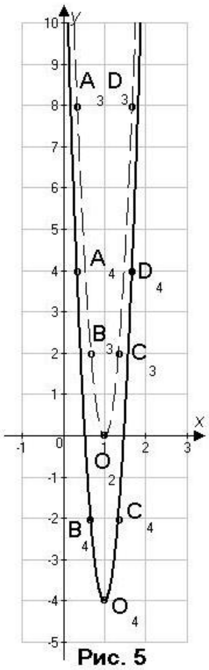


Рис. 5

Для зручності розуміння процесу реалізації відповідних перетворень на кожному малюнку будуємо два графіки – попередній та той, що утворився після перетворення.

Розв'яжемо задачу за таким планом:

1) використавши гомотетію відносно прямої *x=0,* побудуємо графік функції $y = (3x)^2$ *(k=3).* Спочатку виконаємо перетворення над точками *A, B, C, Д, O*. Очевидно, що точка *O* залишиться на місці, а відстані від точок *A, B, C, Д* до осі *Oy* у 3 рази зменшаться. Отримуємо відповідні точки A_1, B_1, C_1, $Д_1$. Враховуємо точку *O* і з'єднуємо плавною лінією усі 5 точок. Графік функції $y = (3x)^2$ готовий (рис. 2).

2) використовуючи паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y = (3x-3)^2$ *(a=3)*, записавши формулу функції у вигляді $y = (3(x-1))^2$. Це означає, що кожну з точок A_1, B_1, C_1, $Д_1$, *O* треба паралельно перенести на вектор *(1;0)*. Отримаємо відповідні точки A_2, B_2, C_2, $Д_2$, O_2. З'єднавши ці точки плавною кривою маємо графік функції $y = (3x-3)^2$ (рис. 3).

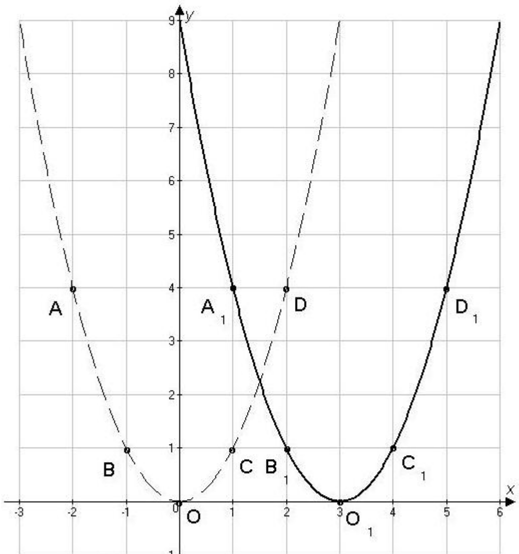


Рис. 6

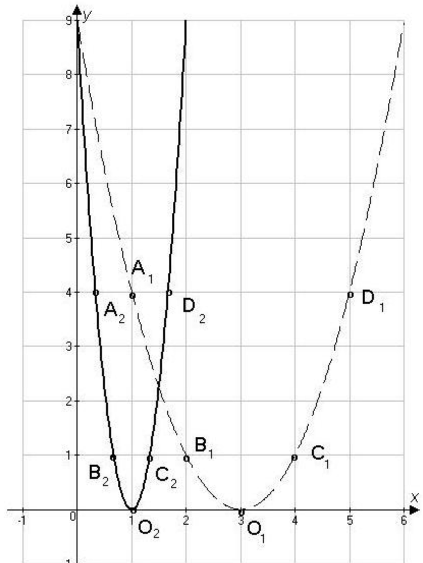


Рис. 7

3) використовуючи гомотетію відносно прямої *y=0*, побудуємо графік функції $y = 2(3x-3)^2$ *(m=2)*. Точки A_2, B_2, C_2, $Д_2$, перейдуть відповідно у точки A_3, B_3, C_3, $Д_3$, так, що відстані від останньої групи точок до осі *Ox* порівняно з відстанями від точок A_2, B_2, C_2, $Д_2$, до *Ox* збільшаться вдвічі. Точка O_2 залишиться на місці, так як лежить на осі *Ox* (рис. 4).

4) використовуючи паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y = 2(3x-3)^2 - 4$. При цьому точки A_3, B_3, C_3, $Д_3$, O_2 перейдуть відповідно

у точки A_4, B_4, C_4, $Д_4$, O_4 в результаті паралельного перенесення на вектор *(0;-4)* (рис. 5).

Зауваження 3. Корисно було б змінити план розв'язування цієї задачі у частині п.(1) і (2). А саме, спочатку, побудувати графік функції $y=(x-1)^2$, перенісши графік функції $y=x^2$ вправо на одну одиницю, а потім стиснути його у 3 рази до лінії x=1, отримавши таким чином графік функції $y=(3(x-1))^2$.

Оберемо інший план розв'язування цієї задачі.

1) використавши паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y=(x-3)^2$. Перенесемо точки *A, B, C, Д ,O* на вектор *(3;0)*. Отримаємо точки A_1, B_1, C_1, $Д_1$, O_1, з'єднавши які плавною кривою отримає-мо графік функції $y=(x-3)^2$ (рис. 6).

2) викорис-тавши перство-рення гомотетії відносно прямої *x=0*, побудуємо графік функції $y=(3x-3)^2$. При цьому точки A_1, B_1, C_1, $Д_1$, O_1 перейдуть у точки A_2, B_2, C_2, $Д_2$, O_2, відстані від яких до осі *Oy* будуть у 3 рази меншими від відповідних відстаней до цієї осі від точок A_1, B_1, C_1, $Д_1$, O_1(стиск у 3 рази до осі *Oy*) (рис. 7).

3) записавши загальну функцію у вигляді $y=2((3x-3)^2-2)$ і використавши паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y=(3x-3)^2-2$. При цьому точки A_2, B_2, C_2, $Д_2$, O_2 перенесуться на вектор *(0;-2)*. Отримаємо точки A_3, B_3, C_3, $Д_3$, O_3, з'єднання яких плавною кривою дасть графік функції $y=(3x-3)^2-2$ (рис. 8).

4) скориставшись перетворенням гомотетії відносно прямої *y=0*, побудуємо графік функції $y=2((3x-3)^2-2)$. На рис. 9 зображений графік шуканої функції.

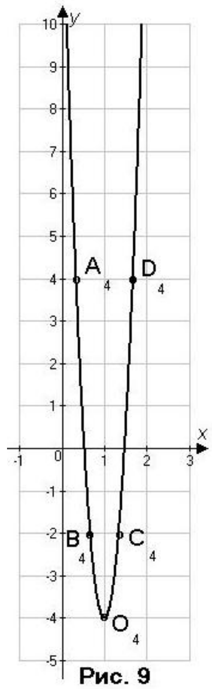


Рис. 9

Підсумовуючи викладене вище, зауважимо, що схема 1 у широкому плані відображає "мережеве", а не алгоритмічно-лінійне навчання, яке все більше згадується у науковій літературі. Метод "мережевого" навчання створює для учня поле можливостей як напрям діяльності. Поле можливостей розв'язання тієї чи іншої задачі уможливлює і спонукає до створення "свого" алгоритму розв'язку, що вимагає значних творчих зусиль. Рівень засвоєння навчального матеріалу значно вищий, ніж при алгоритмічно-лінійному підході до навчання. Зокрема при побудові графіків функцій способом перетворення, наведеним у даній роботі, зусилля зосереджуються на сутності і змісті кожного перетворення. На основі наведеного підходу можна створювати навчальні програми вивчення теми "Побудова графіків функцій способом перетворень" з використанням комп'ютера і елементами гри, а також використовувати для цього різні інформаційно-комп'ютерні технології.

§ 2. Інтегративний підхід до вивчення поняття функції.

Психологи давно помітили, що розвиток більш успішно проходить тоді, коли учень засвоює знання не у готовому вигляді, а коли він зіштовхується з протиріччями, проблемами, коли він дивується власним успіхам, самостійно шукає шляхи розв'язання проблем. Навчальна діяльність школярів та студентів, розвиваючись, стає дослідницькою і часто приводить їх до власної творчості. Саме так, узявши за основу роботи П.Я.Гальперіна, С.Л.Рубінштейна, А.Н.Леонтьєва, П.М.Ерднієва, ми уявляємо процес поетапного формування знань. Існують підходи, що ґрунтуються на ототожненні навчання з історичним шляхом розвитку пізнання даної науки. Хоча результати пізнання часто відкривають нові прийоми навчання, не завжди є доцільним повторення всіх етапів дослідження в тому вигляді і послідовності, що здійснювалися в історії науки. Крім того, з огляду на вікові особливості дитини, ми готуємо матеріал, що викладається, у вигляді спеціальних дидактичних конструкцій. Але надмірна дидактоцентрованість процесу навчання теж містить свої крайнощі, що викликають негативні наслідки. На перший погляд, "дидактогенний" підхід покликаний підготувати такі технології, що допоможуть учням легко засвоїти навіть складний матеріал. Ця точка зору спирається на розбіжності дидактики з теорією пізнання, ґрунтуючись значною мірою на особистому досвіді й особливостях мислення осіб, що навчаються. Таким чином, виявляється протиріччя, що виникає в проектуванні навчання, пов'язане з необхідністю сполучити логіку наукового пізнання і дидактичні закономірності, що не завжди узгоджуються з цією логікою. Хоча, трапляються вдалі способи пояснення матеріалу, засновані на нестрогій аналогії, інтуїції, образних порівняннях і т.д. Напевно, повної незалежності і чіткого поділу шляхів навчання і процесів пізнання бути не може, тому необхідним є їх органічне поєднання. Виходячи з припущення: якщо взяти за елементарну дидактичну одиницю навчальну дію, спрямована на поставлену навчальну мету, то із сукупності таких одиниць можна сконструювати навчальний модуль.

Інтегративний підхід до вивчення предмета є особливо важливим – дає можливість розглядати предмет саме у стані взаємодії з іншими. Специфіка навчального (а не наукового) пізнання вимагає особливої уваги до інтегративних процесів, які є основою формування систем знань (загальноосвітніх, професійних тощо). Тотожність, відмінність і протилежність елементів, які інтегруються, відіграють суттєву роль як під час інтеграції, так і суттєво впливають на властивості інтегрованого об'єкта чи системи. Єдність світу як цілісної системи не виключає, а передбачає якісну різноманітність явищ. Звідси випливають дві тенденції: прагнення відобразити єдину картину світу, подати його як єдине ціле (процес синтезу, інтеграція), друга – глибше і конкретніше пізнати закономірності та якісну різноманітність структурних систем (процес аналізу, диференціація).

Інтегративна лінія в програмних знаннях з математики поступово знаходить більш детальну реалізацію в теорії укрупнення дидактичних одиниць (УДО) знань [31]. Укрупнення дидактичних одиниць – це специфічне відображення в дидактиці об'єктивної тенденції всієї сучасної науки до інтеграції знань, що веде до поглиблення узагальнення у пізнавальних процесах і сприяє засвоєнню учнями збільшеного обсягу інформації за менший, порівняно з традиційними методами, час. Укрупнена дидактична одиниця – це клітинка навчального процесу, яка складається з логічно різних, але інформаційно та структурно споріднених елементів, що сприяє кращому засвоєнню та збереженню знань у пам'яті та швидкому їх відтворенню у навчальній діяльності. Показниками УДО є розгляд взаємно-обернених дій і взагалі групи споріднених понять та речень, які утворюють єдину систему знань. Володіючи інформаційною спільністю, такі знання використовують для спільного та одночасного вивчення на одних і тих же уроках. При цьому проведення уроку, свідомо побудоване на необхідності укрупнення знань, забезпечує вивчення необхідних зв'язків основного поняття, нарощення знань навколо логічного ядра уроку, повторення матеріалу через його розвиток та перетворення.

Для успішного усвідомлення та практичного використання складних взаємозв'язків між компонентами програмного математичного матеріалу або впевненого орієнтування у інтерфейсі прикладного програмного забезпечення необхідно оволодіти тезаурусом різних фактів з теорії, а також мати дослідницьку інтуїцію. Кожна навчальна дія, як правило, становить множину міркувань, операцій, формул і контролюючих заходів. А це є складовою методики УДО. Саме тому виникла необхідність проектування системно-діяльнісного навчання, що через форми і методи навчальної роботи приводить школярів і студентів до узагальнень і систематизації математичних знань та користувацьких навичок. Викладачі зіштовхуються з труднощами формування природничо-наукового мислення школярів, що є основною проблемою як для більшості учнів, так і для вчителів. Дійсно, механізм перекладу знань (і не тільки природничо-наукових) із загально-комунікативної мови на мову навчальної дисципліни досить складний. Наукове мислення стає культурним надбанням дитини, проходячи три стадії. При переході розумової функції усередину, відбувається складна трансформація всієї її структури. А саме: 1) заміщення вже наявних функцій; 2) зміна елементарних процесів, що входять до складу вищої розумової функції; 3) виникнення нових системних функцій, що приймають на себе ті призначення в загальній структурі поводження, а також мислення, що раніше виконувалися тільки частково [30].

Педагогічні технології формування узагальнених прийомів аналізу та розв'язання проблемних ситуацій теоретичного та прикладного характеру у шкільному курсі математики (при розв'язуванні текстових математичних задач, або при проведенні узагальнень теоретичного матеріалу) недостатньо використовуються педагогами-практиками. Ми пропонуємо технологію розв'язання таких проблемних ситуацій саме з позицій системно-діяльнісного навчання. Більше того, продемонструвавши результативність такої технології при викладанні математики, ми покажемо, що технологія на основі системно-діяльнісного навчання має загально-педагогічні ознаки. За основу візьмемо модель укрупнення дидактичних одиниць. Теоретичні основи УДО мають певну завершеність та інваріантність для різних вікових груп суб'єктів навчальної діяльності.

Теорія УДО підрозділяється на декілька самостійних дидактичних напрямків.

По-перше, укрупнення дидактичних одиниць розглядається в контексті узагальнення і систематизації знань. С.Л.Рубінштейн, приділивши особливу увагу формуванню цілісного представлення про досліджуваний об'єкт, як елементарну одиницю розумової діяльності виділив дію. Інші дослідники приймають за таку одиницю інші структури: "пізнавальна дія" (Т.І.Шамова), "дидактичний прийом" (М.І.Махмутов), перелік навчальних завдань і вправ (Д.Брунер).

По-друге, виділяються одиниці предметного змісту: поняття, фундаментальні закони і закономірності, систему завдань і вправ.

По-третє, УДО трактується як процес дослідження наукової проблеми дедуктивним способом. Тут укрупнення означає спосіб дослідження, а не просте збільшення обсягу навчального матеріалу (П.М.Ерднієв). Ґрунтуючись на цій позиції, ми проектували системно-діяльнісне навчання.

Відомо, що узагальнені прийоми розумової діяльності діляться на дві великі групи – алгоритмічного типу та евристичного типу. У дослідженнях В.В.Давидова, З.І.Калмикової, Я.А.Пономарьова встановлено, що формування прийомів розумової діяльності алгоритмічного типу – необхідна, але не достатня умова розвитку мислення. Розв'язування предметних задач на основі алгоритмів формують "установку" на дію за зразком, обмежують пошук рамками уже відомих прийомів. Евристичні прийоми стимулюють пошук розв'язання нових проблем, відкриття нових для учня знань, включають до процесу міркування наочно-образне мислення. До евристичних прийомів відносяться: *виділення головного, істотного у змісті матеріалу, узагальнення, порівняння, конкретизація, абстрагування, різні види аналізу, аналогія, прийоми кодування, використання структурних моделей або схем*.

У методиці навчання визначення взаємозв'язків між компонентами програмного математичного матеріалу, розв'язування текстових математичних задач та проблемних ситуацій, пов'язаних з використанням прикладного програмного забезпечення, ми користувалися такими принципами теорії поетапного формування розумових дій [32]: розчленування розумової діяльності на розумові дії, що входять до її складу, повідомлення учням (студентам) орієнтирів у формі алгоритмів, схем, порад, що визначають тип задач та способи їх розв'язання.

У роботах [33], [34] нами були висвітлені основні форми та методи використання елементів технології системно-діяльнісного навчання учнів 5-6 класів розв'язування текстових математичних задач на ситуації вимірювання. У даній роботі ми маємо намір продемонструвати з позицій системно-діяльнісного навчання процес змістовного узагальнення під час вивчення розділу "Квадратична функція" (Алгебра, 9 клас).

Розглянемо хід уроку з алгебри у 9 класі, мета якого – провести змістовне узагальнення знань учнів на предмет визначення властивостей квадратичної функції.

<u>Задача 1</u> (подається для актуалізації опорних знань учнів): Визначити властивості функції $y=2x^2-8x+5$ та побудувати її графік.

Практика показує, що досить ефективним є використання при вивченні властивостей функцій відомостей про геометричні перетворення. Отже, виділяємо повний квадрат і приводимо формулу функції до вигляду:

$$y=2(x-2)^2-3, \qquad (2.1)$$

визначаємо, що графіком функції (2.1) буде парабола, що за формою повністю співпадає з параболою $y=2x^2$. Отже, отримати графік функції (2.1) можна з графіка функції $y=2x^2$, паралельно перенісши його на вектор $(2;-3)$. Далі визначаємо інші властивості функції у порядку, який вказаний у загальній схемі дослідження функцій: область визначення та множина значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості, координати вершини параболи, проміжки зростання та спадання, будуємо графік функції. Ця вправа дає можливість актуалізувати компоненти загального уміння учнів визначати властивості квадратичної функції: виділення у формулі функції повного квадрату, визначення вихідного графіка функції та його вигляду, знаходження вектора паралельного перенесення (координат вершини параболи), відшукання розв'язків відповідного квадратного рівняння та квадратних нерівностей, використання означення спадної (зростаючої) функції для визначення проміжків монотонності функції. Узагальнення такого уміння подається у вигляді Схеми 2.

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$$

$$\downarrow$$

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$\downarrow$$

$$y=a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})$$

$$\downarrow$$

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\downarrow$$

Будуємо $y=ax^2$

$$\downarrow$$

Переносимо графік на вектор $(\overline{m;n})$, де $m=-\dfrac{b}{2a}$, $n=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

Схема 2. Побудова графіка квадратичної функції методом перетворень

<u>Задача 2</u> (подається як матеріал для створення проблемної ситуації): Визначити властивості функції $y=ax^2+bx+c$ та проаналізувати залежність зміни властивостей функції та положення її графіка від коефіцієнтів *a, b* та *c*.

Опишемо тезисно тактику розв'язання цієї задачі.

Розв'язання задачі розіб'ємо на елементарні етапи. Перш за все з'ясуємо, як змінюються властивості та розміщення графіка функції у залежності від коефіцієнта a та дискримінанта $D=b^2-4ac$. Вплив знака коефіцієнта при старшому члені позначається на монотонності функції, проміжках її знакосталості; знак дискримінанта визначає кількість точок перетину графіка функції з віссю абсцис. Комплексний вплив цих параметрів зображено на Схемі 3.

Проаналізуємо тепер, які коефіцієнти впливають на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі ординат і як вони впливають на зміну властивостей функції. Відомо, що положення графіка функції відносно осі ординат задається першою координатою вершини параболи, а отже, для розв'язання цієї задачі слід аналізувати вплив коефіцієнтів a та b. Розв'язок задачі на цьому етапі зображено на Схемі 4.

Розв'язання таких вужчих задач дає можливість зробити ряд висновків, що будуть використані у процесі створення повної картини залежності властивостей квадратичної функції від коефіцієнтів у записі її формули:

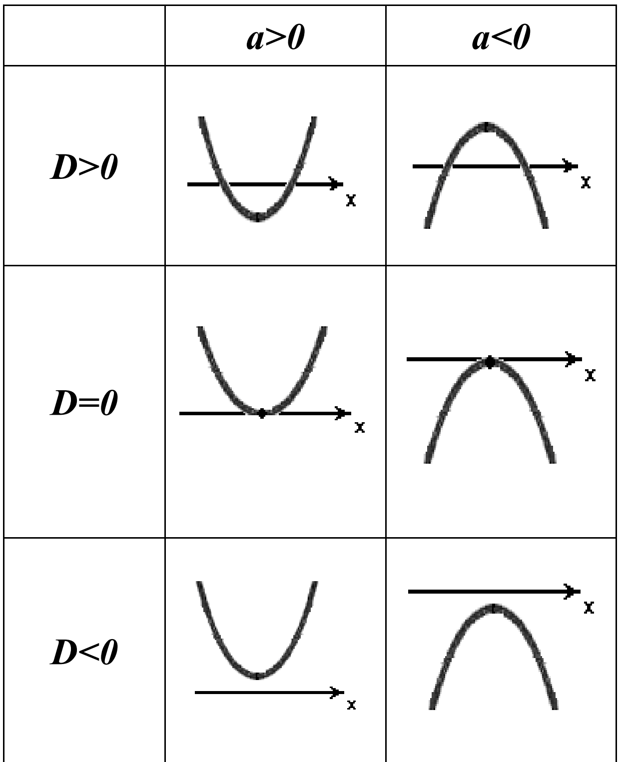


Схема 3. Вплив знаків коефіцієнта ***a*** та дискримінанта ***D*** на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі ***Ox***

* Примітка: $y=ax^2+bx+c$; $D=b^2-4ac$

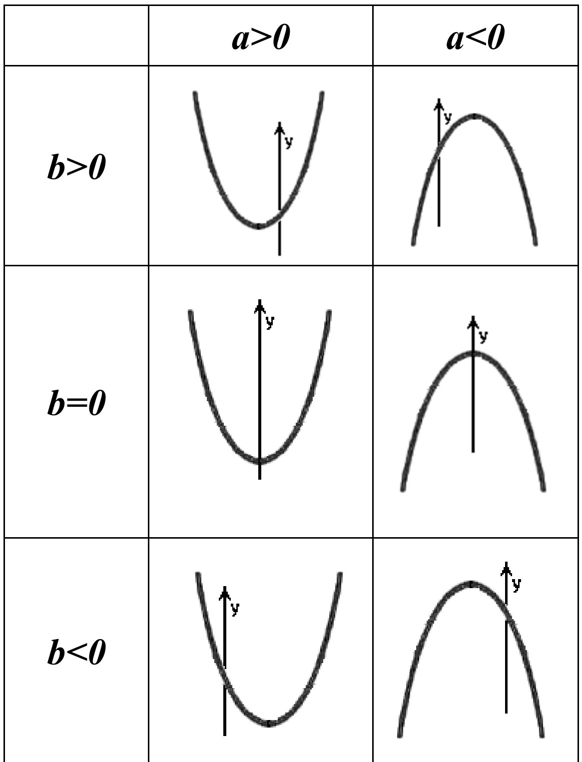


Схема 4. Вплив знаків коефіцієнтів ***a*** та ***b*** на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі ***Oy***

- Якщо коефіцієнт при старшому члені додатній, то вітки параболи направлені вгору, отже, функція є спадною на проміжку, лівіше від $x=-b/2a$, і зростаючою на проміжку, правіше від $x=-b/2a$.
- Якщо коефіцієнт при старшому члені додатній, то знакосталість функції буде залежати від дискримінанта квадратного тричлена: якщо $D>0$, то функція буде набувати додатних значень при $x \in (-\infty;x_1) \cup (x_2;+$

$\infty)$, та від'ємних значень при $x \in (x_1;x_2)$, де x_1 та x_2 – корені квадратного тричлена, якщо $D<0$, то функція всюди буде додатною, а якщо $D=0$, то функція також буде додатною всюди, крім точки $-b/2a$ (відповідні висновки робимо і для випадку $a<0$).

- Якщо коефіцієнт b рівний нулю, то вершина параболи знаходиться на осі ординат.
- Якщо коефіцієнти a та b мають однакові знаки, то вершина параболи знаходиться лівіше від осі ординат, в іншому випадку вершина параболи знаходиться правіше від осі ординат.

Але очевидним є факт, що лише вибраними параметрами визначити властивості функції неможливо. Вільний член у записі формули квадратичної функції, хоча прямо і впливає лише на визначення точки перетину параболи і осі ординат, але за своєю суттю є "синтезуючим засобом" впливу коефіцієнтів на властивості квадратичної функції. Накладаємо Схеми 3 та 4, "вмикаємо на повну потужність можливості синтезуючого засобу" – вільного члена у записі формули квадратичної функції, і у результаті отримуємо схему 5 (заштрихованими клітинками позначені випадки, що не існують).

У процесі створення цієї схеми в учнів формується узагальнений підхід до визначення властивостей квадратичної функції та розміщення її графіку в системі координат. Проілюструємо це на прикладі функції $y=2x^2-8x+5$.

1. Коефіцієнт при старшому члені дорівнює 2, отже вітки параболи направлені вгору, а функція є спадною зліва від x_0, і зростаючою справа від x_0, де x_0 – перша координата вершини параболи.
2. Дискримінант дорівнює 24, отже графік функції перетинає вісь абсцис у двох точках (позначимо їх x_1, x_2).
3. Вільний член дорівнює 5, отже графік функції перетинає вісь ординат в додатній півосі; як наслідок з цього твердження – значення x_1, x_2 одного знаку.
4. Коефіцієнт при старшому члені і коефіцієнт b різного знаку – отже перша координата вершини параболи є число додатне; як наслідок – друга координата вершини параболи y_0 є числом від'ємним, а x_1, x_2 – додатні.
5. Далі формулюються властивості функції $y=2x^2-8x+5$ згідно порядку, визначеному загальною схемою дослідження, і будується графік функції.

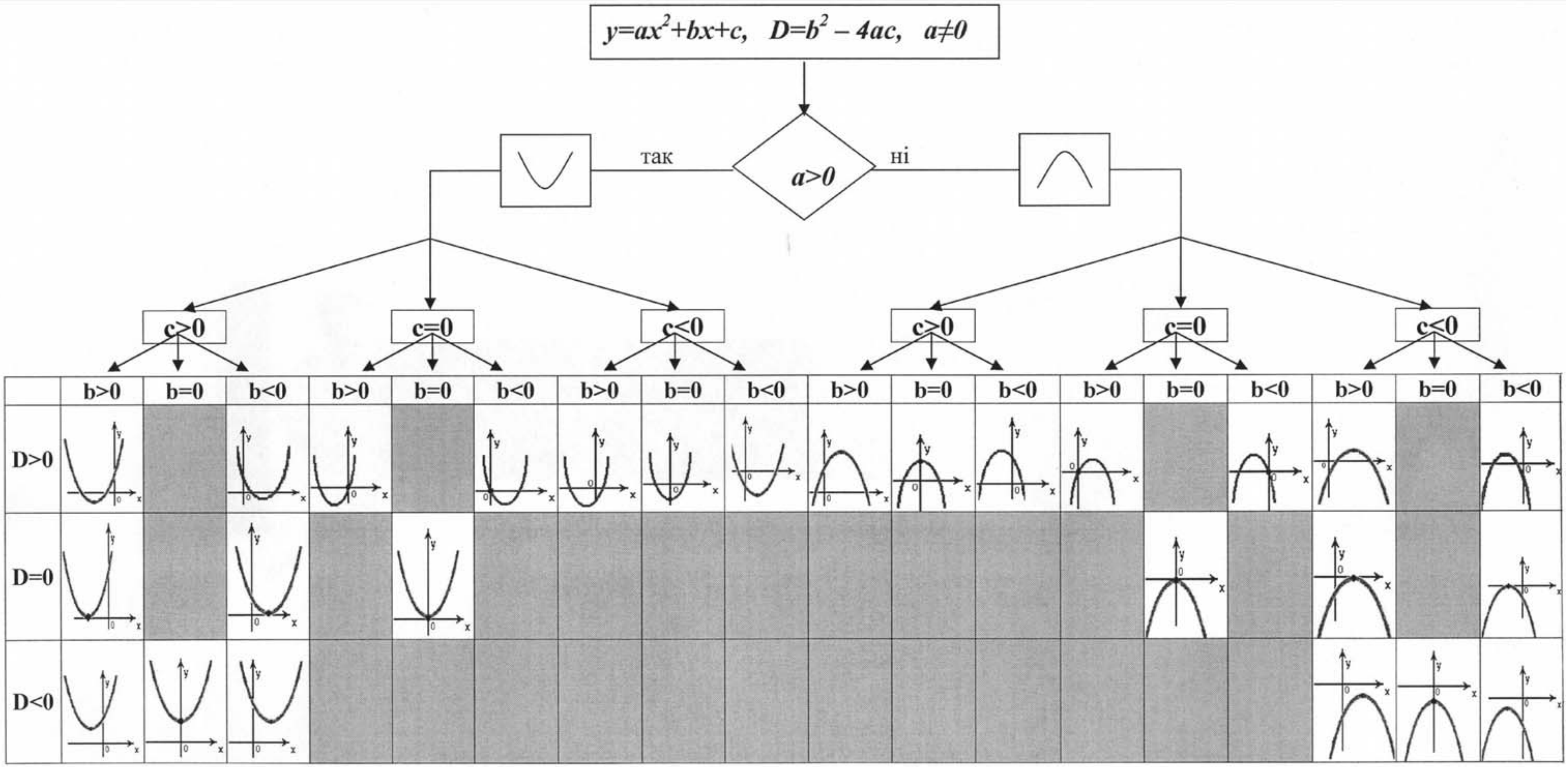


Схема 4. Вплив коефіцієнтів *a*, *b* та *c* на розміщення графіка квадратичної функції у системі координат

Обговоримо тепер результати такого аналізу задачі 2. Укрупнення дидактичних одиниць ми застосували не тільки в плані розширення обсягу досліджуваної проблеми, але і як спосіб дослідження математичної задачі в більш широкому аспекті. Виділимо основні характеристики УДО, найбільш прийнятні для проведення змістовних узагальнень у курсі математики загальноосвітньої школи.

1. Спільне й одночасне вивчення взаємозалежних навчальних дій, операцій, теорем, законів і т.д. (у нашому прикладі це вдале об'єднання фундаментальних математичних закономірностей і конкретних прийомів аналізу властивостей функцій).
2. Єдність як процесів виділення проблемних ситуацій, так і способів розв’язання навчальних задач.
3. Комплексний, узагальнений розгляд часткових проміжних завдань, що виникають у ході розв’язання задачі.
4. Виявлення специфіки математичних знань і досягнення їхньої системності.
5. Реалізація принципу доповнюваності в навчанні (у нашій задачі – це тренувальні вправи для різної інтерпретації досліджуваної проблеми, а саме, опис властивостей квадратичної функції, знаходження числових характеристик функціональної залежності, використання структурних схем для узагальнення властивостей, розрахунок функціональної залежності в цілому, використання графічних методів).

Таким чином, об'єднання декількох навчальних завдань у групи (у рамках однієї великої дослідницької проблеми) дозволяє перетворити в цілісну сукупність розрізнені і не завжди системні знання тих, хто навчається. Особливо хотілося б відзначити ефективність конструювання зворотних задач, чи задач-проблем.

Найважливішим системоутворюючим фактором навчальної діяльності є здатність учня самостійно ставити перед собою мету навчання. У системно-діяльнісному навчанні частково знімається суперечність між роллю учня як рівноправного учасника навчального процесу та його пасивністю при визначенні мети навчання. Одержавши конкретну задачу, учень пробує самостійно зрозуміти, до яких результатів він повинен прийти і як їх перевірити. Дослідження складних задач інтегративного типу допомагають учню розуміти неоднозначність явищ і розвивають комплексне мислення [39]. А це є необхідним умінням для самостійного ефективного розвитку у відкритому освітньому просторі.

Відзначимо, що організація освітнього процесу, заснована на системно-діяльнісних технологіях, відіграє світоглядну роль. По-перше, викладач перевіряє свої знання, тому що при такій організації навчання висновки і результати учнів можуть бути самими несподіваними і тут уже не обійтися тільки обсягом шкільного підручника. По-друге, коли вчитель шукає способи мотивації узагальнюючої діяльності учнів, йому часто спадають на думку нові ідеї й оригінальні способи міркувань. А це суттєво допомагає власній творчості.

Широке впровадження у навчальний процес сучасних засобів збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання інформації відкриває широкі перспективи щодо гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності та, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу учнів та студентів.

Разом з тим виникає цілий ряд проблем, що стосуються змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання, обов'язкових рівнів знань різних навчальних предметів, яких має досягти кожний молода особа, що навчається.

Зрозуміло, що неможливо і немає потреби однаково навчати і навчити всіх, сформувати в кожного одні й ті самі знання, вміння та навички в різних предметних галузях, домагатися від учнів обов'язкового досягнення одного й того самого рівня розвитку логічного та творчого мислення, однакового сприймання різних проявів оточуючої дійсності. Це стосується і навчання математики, методів розв'язування різноманітних задач, побудови й аналізу математичних моделей різноманітних процесів і явищ, інтерпретації та узагальнення результатів такого аналізу.

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програми як «Системи лінійних рівнянь», GRAN1, GRAN2, GRAN3, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія), MathCad, Maple, тощо. Причому одні з цих програм розраховані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вузів, які лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики.

Найбільш придатними для підтримки вивчення курсу математики видаються програми GRAN2, GRAN3, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія). Для їх використання не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. Названі програми прості у користуванні, оснащені досить зручним інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), контекстно-чутливою допомогою. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів загальноосвітніх шкіл.

Використання подібних програм дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Усі технічні операції щодо опрацювання побудованої математичної моделі, реалізації методу відшукання розв'язку, оформлення та подання результатів опрацювання вхідної інформації покладаються на комп'ютер.

Очевидно, що зміст і структура навчальної діяльності учнів можуть змінюватись (причому в досить широкому діапазоні) залежно від специфіки обраної ними предметної галузі, спрямованості навчання, індивідуальних нахилів і здібностей. При цьому комп'ютерна підтримка вивчення шкільного курсу математики з використанням програмних засобів зазначеного типу дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи і поглиблюючи вивчення і розуміння методів математики на відповідних рівнях у вищих навчальних закладах.

Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, мають проходити у відповідно оснащеному досить досконалими технічними і програмними засобами аудиторіях. У таких аудиторіях мають вивчатися всі навчальні дисципліни без винятку, а не лише дисципліни блоку «Інформатика». Це зі свого боку сприятиме розширенню і поглибленню міжпредметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їх взаємопроникненню і взаємодії, що, зрештою, дасть можливість оволодівати елементами нових інформаційних технологій при вивченні різних навчальних дисциплін.

Розглянемо можливість використання програми "Advanced Grafer" (версія 2.11 випуск 1998-2006р., автор Michael Serpik) при вивченні курсу математики. Даний продукт у випадку некомерційного використання може бути отриманий безкоштовно (http://www.serpik.com/agrafer/). Це розширює можливість застосування учнями цієї програми. Зазначимо, що активну участь у дослідженні та апробації даної проблематики брав магістрант кафедри математики КДПУ ім. В.Винниченка Сергій Лойтра.

Програма "Advanced Grafer" має широкі можливості. З її допомогою можна побудувати графік за наявною функціональною залежністю, провести його аналіз:

- визначити максимуми й мінімуми функції;
- точки перетину з осями координат та іншими графіками;
- побудувати дотичну й перпендикуляр у будь-якій точці графіка;
- визначити похідну функції й побудувати її графік.

Програма також дозволяє працювати з параметричним заданням змінних. Можна працювати, як в звичайних декартових координатах, так і в полярних.

Можливості програми по оформленню графіків такі:

- зміна масштабу;
- використання логарифмічної та тригонометричної шкали значень;
- наведення «легенди» графіків − їх назви;
- можливе формування пояснень у будь-якій точці графіка в режимі вставки "кадру" й ін.;
- будь-яку частину графіка можна переглянути з довільною деталізацією.

Програма містить великий набір типових графіків, придатних для демонстрації на уроках.

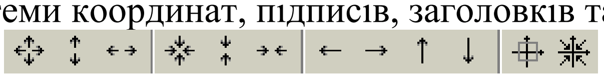
Зрозуміло, отримані графіки можна зберегти у файлі, завантажити їх з файлу для використання. Робоче поле можна також зберегти як точковий малюнок bmp або у форматі EMF.

Ця програма може бути використана викладачем на уроках при поясненні нового матеріалу, при демонстрації графічних залежностей, а також для порівняння результатів аналізу й побудови деяких графіків при звичайному підході з використанням сучасних комп'ютерних методів аналізу.

Коротко розглянемо інструменти програми. Окрім знайомих елементів на панелі інструментів, які присутні в багатьох програмах, маємо такі:

 - список графіків. Показує вікно зі списком побудованих графіків, що дає можливість зручної навігації для редагування графіків.

 - властивості документа. Відкриває діалогове вікно для настройки системи координат, підписів, заголовків та ін.

 - інструменти для форматування області побудови графіків.

 - дозволяє вставити текстові елементи .

 - обчислення функцій. Відкриває вікно, в якому можна обчислити функцію для вказаного значення аргументу.

 - добавити таблицю. Відкриває діалогове вікно для вводу та редагування таблиць.

 - дослідження функції. Дозволяє знайти екстремуми функції та точки перетину з осями.

 - дозволяє знайти координати точок перетину двох графіків.

 - похідна – знаходить аналітичний вираз похідної та будує її графік.

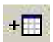
 - для вказаної точки видає рівняння дотичної та нормалі та будує їх графіки.

 - інтегрування. Обчислює визначений інтеграл для вказаної функції та границь інтегрування.

 - регресійний аналіз. Дає можливість побудувати різні види рівнянь регресії, обчислити коефіцієнти кореляції, знайти найкращу апроксимаційну залежність.

 - властивості графіка. Встановлення та редагування властивостей графіка.

 - добавити графік. Відкриває вікно для вводу функцій.

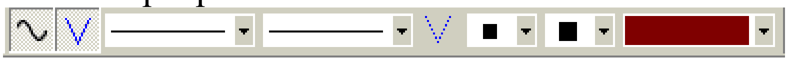
 - добавити таблицю. Відкриває вікно для вводу та редагування таблиць.

 - видаляє активний графік.

 - дозволяє побудову декількох графіків в одній системі координат.

 - інтерполяція вздовж графіка функції.

На панелі інструментів присутні також можливості для форматування ліній графіка та маркерів:



При вивченні програми "Advanced Grapher" варто звернути увагу на форму запису функціональних залежностей. Розглянемо це на прикладі побудови графіків квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$:

$$y = 3x^2-4x-5\ (3*x\text{^}2-4*x-5);$$

У дужках функція записані у формі, що "зрозуміла" для даної програми. На це необхідно звернути особливу увагу, тому що дуже велика кількість помилок пов'язана саме з неправильною формою запису формул функцій. Наведемо скорочення при записі деяких функцій:

sin – синус;

cos – косинус;

tan – тангенс;

cot – котангенс;

atan − зворотний тангенс;

asin − зворотний синус;

acos − зворотний косинус;

abs − абсолютне значення (модуль);

sqrt − квадратний корінь;

ln − натуральний логарифм;

lg − десятковий логарифм (для побудови графіка логарифмічної функції з основою відмінною від 10 або ***e*** використовуємо співвідношення $\boldsymbol{log_bN=lg(N)/lg(b)}$ або $\boldsymbol{log_bN=ln(N)/ln(b)}$);

exp − експонента (***exp(x); ex***).

Математичні операції

(+, −) − додавання, віднімання;

(*, ⁄) − множення, ділення;

(^) – піднесення до степеня.

Число ***π***= 3,14... може бути, природно, представлено або числом, або символом (***Pi***), але не звичним (***π***). Послідовність виконання операцій, виділення аргументів задається круглими дужками. Наприклад: ln(ln(1/x)). Інші види дужок програма не сприймає.

Не зупиняючись на особливостях інтерфейсу програми (це можна детально переглянути в [35]), перейдемо до опису можливостей її використання. Починаючи роботу із програмою, треба вибрати готовий шаблон із системою координат або створити новий, використовуючи меню "Графики| Свойства документа". Змінити систему координат та її налаштування можна в будь-який момент роботи з даним кресленням. Одночасно на кресленні можна зобразити до 100 геометричних об'єктів (це можуть бути графіки функцій, заданих явно або неявно в декартових координатах, параметрично, у полярних координатах, так названі графіки таблиць, а також заштриховані області, що лежать між двома графіками функцій або які є нескінченною областю розв'язків системи нерівностей). Побудовані об'єкти фіксуються в "Списке графиков" у лівій частині вікна програми. Якщо зняти галочку в "Списке графиков" проти деяких об'єктів, то ці об'єкти зникнуть (тимчасово) із площини креслення (це зручно для пояснення навчального матеріалу).

Приклад 1. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$f(x) = \left(x^2 - 2x\right)e^x$$

Спосіб 1. Використаємо загальноприйняту схему дослідження.

1). Зрозуміло, що $D(f) = R$, оскільки обидва множники в $f(x)$ визначені при любому *x*. Область значень $E(f)$ знайдемо після того, як відшукаємо локальні екстремуми функції.

2). Функція є ні непарною ні парною; не періодична.

3). Область визначення не має розривів, отже, немає і вертикальних асимптот графіка.

4). Відшукаємо похилі асимптоти вигляду $y = kx + b$. Коефіцієнт *k* знайдемо за формулою:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},$$

при $x \to +\infty$ маємо

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x)e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x = +\infty,$$

тобто при $x \to +\infty$ асимптоти немає, причому функція $f(x)$ прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ маємо:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x)e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0,$$

(для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ застосуємо правило Лопіталя). Тепер знайдемо значення *b* за формулою $b = \lim\limits_{x\to\pm}\left[f(x) - kx\right]$. Маємо:

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - 0x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$$

(тут ми застосували правило Лопіталя два рази). Таким чином, $k = 0$ і $b = 0$, отже при $x \to -\infty$ асимптота має вигляд $y = 0$, тобто співпадає з віссю Ox.

5). Точка перетину з віссю Oy рівна $f(0) = 0$. Ця точка буде автоматично і точкою перетину віссю Ox. Щоб знайти всі точки перетину графіка с віссю Ox, розв'яжемо рівняння $(x^2 - 2x)e^x = 0$. Оскільки $e^x \neq 0$, Ox, розв'язуємо рівняння $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, і отримуємо два корені: $x = 0$ і $x = 2$. Так як точок розриву немає, то маємо три проміжки знакосталості функції: $(-\infty;0), (0;2)$ и $(2;+\infty)$. Знак функції визначається множником $x^2 - 2x$, оскільки $e^x > 0$ при всіх *x*. Значить $f(x) > 0$, при $x \in (-\infty;0)$ і при $x \in (2;+\infty)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (0;2)$.

6). Знайдемо похідну:

$$f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x-2)e^x = (x^2 - 2)e^x$$

Проміжки зростання задаються нерівністю $f'(x) > 0$, тобто враховуючи, що $e^x > 0$, то нерівністю $x^2 - 2 > 0$. Розв'язком цієї нерівності буде множина

$(-\infty;-\sqrt{2})\bigcup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. На двох проміжках функція зростає. Очевидно, що на проміжку $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ виконується нерівність $f'(x)<0$, отже це інтервал спадання функції. В точці $-\sqrt{2}$ зростання змінюється на спадання, а це означає, що точка $-\sqrt{2}$ - точка локального максимуму. Значення функції в цій точці дорівнює $f_{\max}=f(-\sqrt{2})=\left(2+2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}\approx 1.17$

В точці $\sqrt{2}$ спадання змінюється зростанням, а отже, точка $\sqrt{2}$ - точка локального мінімуму функції. Значення функції в точці мінімуму:

$$f_{\min}=f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\approx -3.41$$

Очевидно, що область значень функції:

$$\varepsilon(f)=\left[f_{\min};+\infty\right)\approx\left[-3.41;+\infty\right).$$

7). Для дослідження функції на опуклість і увігнутість (наявність точок перегину) знайдемо другу похідну:

$$f''(x)=\left(x^2-2\right)e^x+2xe^x=(x^2+2x-2)e^x$$

Розв'яжемо нерівність $f''(x)>0$, еквівалентну нерівності $x^2+2x-2>0$. Розв'язком цієї нерівності буде об'єднання проміжків $(-\infty;-1-\sqrt{3})\approx\left(-\infty;-2.7\right)$ і $\left(-1+\sqrt{3};+\infty\right)\approx\left(0.7;+\infty\right)$. На цих проміжках функція випукла. Зрозуміло, що на проміжку $(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3})\approx\left(-2.7;0.7\right)$ функція буде увігнутою. Тим самим точки $x_1=-1-\sqrt{3}\approx -2.7$ і $x_2=-1+\sqrt{3}\approx 0.7$ -- це точки перегину. Значення функції в точках перегину такі:

$$f(x_1)=(6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}}\approx 0.84$$

$$f(x_1)=(6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}}\approx -1.93$$

8). Залишилося побудувати графік (рис. 10):

Спосіб 2. Застосуємо до дослідження функції пакет "Advanced Grafer".

В AG вибираємо "Добавить график" і в полі, справа від "Y(x)=" записуємо праву частину нашої функції (згідно синтаксису AG). В результаті маємо аналогічний до вже побудованого нами графік даної функції (рис.10).

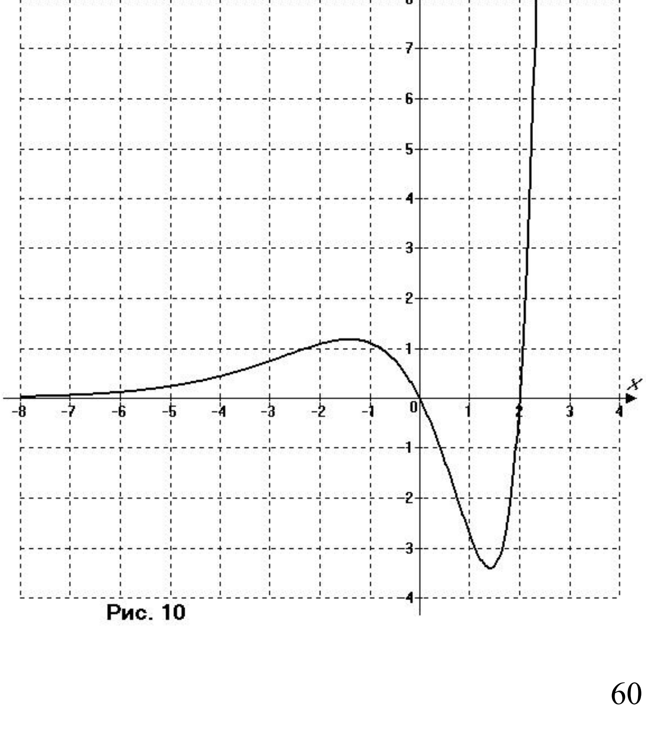


Рис. 10

1. Розглянувши побудований графік функції та звернувши увагу на множники можемо визначити, що $D(f)=R$. Область значень $E(f)$ знайдемо після того, як відшукаємо локальні екстремуми функції.

2. З побудованого графіка та запису функції робимо висновок що функція ні парна ні непарна і не періодична.

3. З побудованого графіка та запису функції робимо висновок що графік немає розривів, а отже і вертикальних асимптот.

4. Відшукаємо похилі

асимптоти вигляду $y = kx + b$. Коефіцієнт k знайдемо за формулою: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, при $x \to +\infty$ маємо

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x-2)e^x = +\infty,$$

тобто при $x \to +\infty$ асимптоти немає, причому функція $f(x)$ прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ маємо:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0,$$

(для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ застосуємо правило Лопіталя). Тепер знайдемо значення b за формулою $b = \lim\limits_{x \to \pm}[f(x) - kx]$. Маємо:

$$b = \lim_{x \to -\infty}[f(x) - 0x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 2}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Таким чином, $k = 0$ і $b = 0$, отже при $x \to -\infty$ асимптота має вигляд $y = 0$, тобто співпадає з віссю Ox.

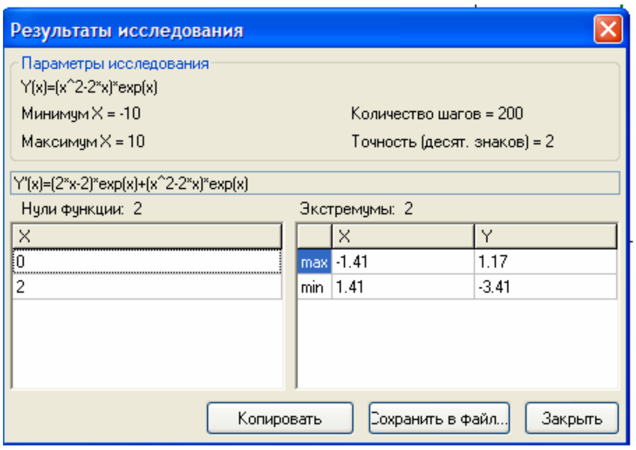


Рис. 11

5. Точки перетину графіка з осями та екстремуми знаходимо слідуючим чином "Вычисления/Исследование функции/" в параметрах обов'язково вказуємо "Использовать производную". В результаті матимемо два корені: $x = 0$ і $x = 2$ (рис.11).

Отже тепер ми знаємо кількість точок перетину та можемо вказати проміжки знакосталості $f(x) > 0$, при $x \in (-\infty;0)$ і при $x \in (2;+\infty)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (0;2)$.

6. Знаходимо екстремуми функції і можемо визначити проміжки зростання та спадання: Функція зростає при:

$f'(x) > 0 \quad x \in (-\infty;-1.41) \cup (1.41;+\infty)$;

Функція спадає при:

$$f'(x) < 0 \quad x \in (-1.41;1.41)$$

Відповідно значення функцій в точках мінімуму і максимуму:

$$f_{\max} \approx 1.17$$

$$f_{\min} \approx -3.41$$

Очевидно, що область значень функції:

$$E(f) = [f_{\min};+\infty) \approx [-3.41;+\infty).$$

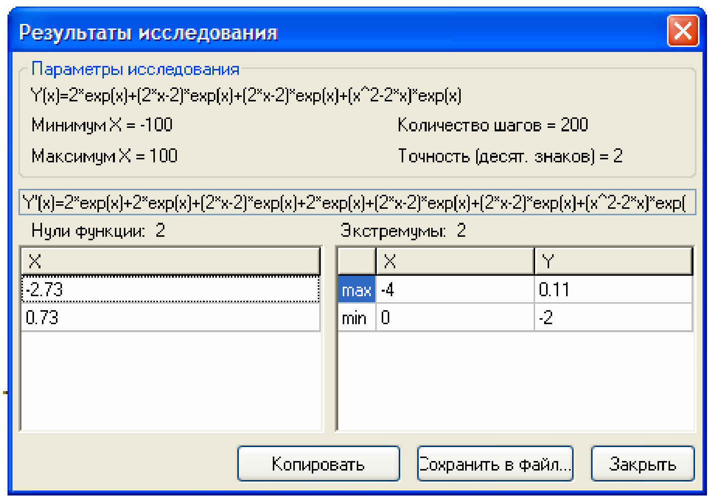


Рис. 12

7. Для знаходження проміжків, на яких функція випукла і опукла потрібно побудувати графік похідної другого порядку для даної функції. Для цього потрібно спочатку побудувати графік першої похідної.

Це можна зробити за допомогою кнопки "Производная" на панелі інструментів або меню "Вычисления/Производная" (див. рис. 12). Тепер таким же чином знову шукаємо похідну, але вже від попередньої функції – маємо графік (рис. 13) похідної 2 порядку від функції $f(x)=\left(x^2-2x\right)e^x$. Дослідивши дану функцію отримаємо, що $f''(x)=0$, при $x_1=-2.73, x_2=0.73$ (рис. 12).

Розглянувши графік 2 похідної (рис. 13) дійдемо до такого висновку, що

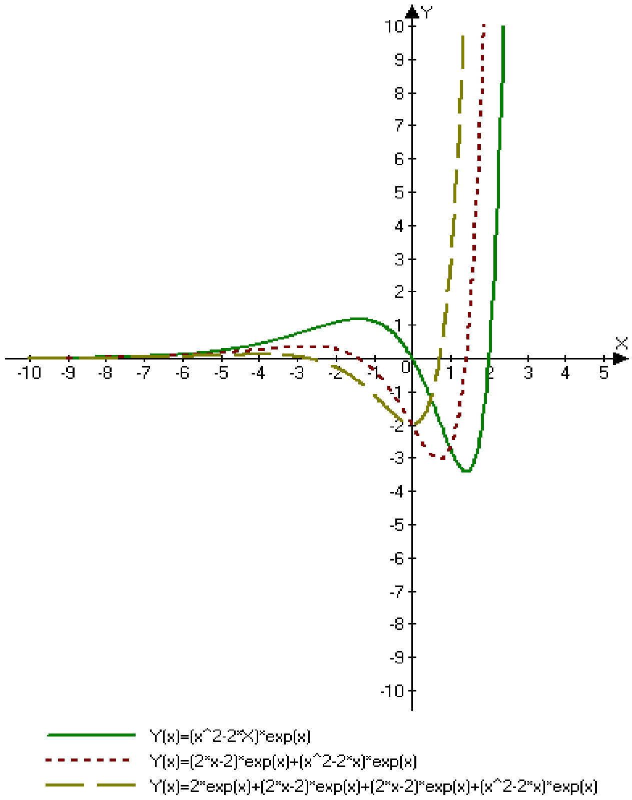


Рис. 13

$f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-2.73)\cup(0.73;+\infty)$. На цих проміжках функція випукла. Зрозуміло, що на проміжку $x\in(-2.73;0.73)$ функція буде вгнутою.

Тим самим точки $x_1\approx-2.73$ і $x_2\approx0.73$ – це точки перегину. Значення функції в точках перегину можна визначити за допомогою «Калькулятора» в Advanced Grapher:

$$f(x_1)\approx0.84,\ f(x_1)\approx-1.93$$

Приклад 2. Дослідити функцію і побудувати її графік.

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}$$

Спосіб 1.

1). Знаменник має корені 1 і 2 , тобто функцію можна представити в вигляді

$$f(x)=\frac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}$$

Тепер легко побачити, що області визначення функції не належать тільки точки 1 і 2:

$$D(f)=R\setminus\{1;2\}=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$$

Область значень $E(f)$ знайти без обчислень ми не можемо, тому знайдемо їх трохи пізніше.

2). Оскільки область визначення $D(f)$ не симетрична відносно точки 0, функція не може бути ні парною, ні непарною. Очевидно також, що вона не періодична.

3). Область визначення цієї функції має два розриви: 1 і 2.

При $x\to1$ значення чисельника наближається до 1+1=2, а знаменника до 0, тому $f(x)\to\infty$ при $x\to1$. Тобто, вертикальна пряма $x=1$ – це вертикальна асимптота графіка $y = f(x)$. При $x \to 1^-$ (тобто лежить в околі точки 1) чисельник додатній, а знаменник складається з двох від'ємних співмножників, отже $f(x) \to +\infty$ при $x \to 1^-$. При $x \to 1^+$ чисельник теж додатній, а в знаменнику множник $x-1$ додатній, а $x-2$ від'ємний. Отримаємо, що $f(x) \to -\infty$ при $x \to 1^+$.

При $x \to 2$ границя чисельника дорівнює 4+2=6, а знаменника -- нулю, тому $f(x) \to \infty$ при $x \to 2$. Тим самим, вертикальна пряма $x = 2$ є другою вертикальною асимптотою графіка $y = f(x)$. При $x \to 2^-$ чисельник додатній, а знаменник від'ємний, оскільки $x - 1 > 0$, а $x - 2 < 0$. Отже $f(x) \to -\infty$ при $x \to 2^-$. При $x \to 2^+$ чисельник знову додатній, а в знаменнику обидва множника додатні. Отримаємо, що $f(x) \to +\infty$ при $x \to 2^+$.

4). Оскільки чисельник і знаменник − многочлени одного і того ж (другого) степеня, то $f(x)$ має границю при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0+0} = 1$$

Звідси слідує, що горизонтальна пряма $y = 1$ буде горизонтальною асимптотою графіка як при $x \to -\infty$, так і при $x \to +\infty$. (Шукати похилу асимптоту вигляду $y = kx + b$ і знаходити *k* і *b* за загальними формулам нам тепер непотрібно).

5). Знайдемо точки перетину графіка з осями координат. Оскільки $f(0) = 0$, то графік перетинає вісь Oy (і, одночасно, вісь Ox) в початку координат. Прирівнявши чисельник до нуля, отримаємо рівняння $x^2 + x = 0$, яке має два корені: $x = 0$ і $x = -1$. Тобто, графік перетинає вісь Ox в цих двох точках (одну з них ми вже знайшли раніше). Скориставшись методом інтервалів, знайдемо знак функції на інтервалах між коренями і точками розриву. Таких проміжків буде п'ять:

$$(-\infty;-1);(-1;0);(0;1);(1;2);(2;+\infty),$$

причому, функція буде набувати додатних значень на множині:

$$x \in (-\infty;-1) \cup (0;1) \cup (2;+\infty)$$

6). Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2 (x-2)^2}$$

Для знаходження інтервалів зростання розв'яжемо нерівність $f'(x) > 0$, $-4x^2 + 4x + 2 > 0$ (при $x \neq 1, x \neq 2$), оскільки знаменник приймає додатні значення. Розв'язком даної квадратної нерівності буде проміжок $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; але точка $x = 1$, яка не входить в $D(f)$, належить цьому проміжку. Отже, проміжків зростання функції $f(x)$ два:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \text{ і } \left(1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для знаходження проміжків спадання потрібно розв'язати нерівність $-4x^2+4x+2<0$ (при $x\neq 1, x\neq 2$). Розв'язком даної квадратної нерівності буде об'єднання двох проміжків $\left(-\infty;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$; точка $x=2$ ділить другий із них на дві частини. Тому функція $f(x)$ спадає на трьох проміжках:
$\left(-\infty;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$ і $(2;+\infty)$.

В точці $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ функція із спадної змінюється на зростаючу. При цьому $f(x)$ неперервна в точці x_1, як будь-яка елементарна функція в будь-яка точці області визначення. Отже x_1 − точка локального мінімуму. Значення функції в цій точці мінімуму дорівнює:

$$f_{\min}=f(x_1)=\frac{3-2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-7\approx -0.07\,.$$

В точці $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ функція із зростаючої змінюється на спадну. При цьому функція $f(x)$ неперервна в точці $x_2\in D(f)$. Отже x_2 − точка локального максимуму. Значення функції в точці максимуму дорівнює:

$$f_{\max}=f(x_2)=\frac{3+2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}-7\approx -13.9$$

Тепер ми можемо записати область значення функції:

$$E(f)=(-\infty;f_{\min}]\cup[f_{\min};+\infty)\approx(-\infty;-13.9]\cup[-0.07;+\infty).$$

7). Знайдемо другу похідну:

$$f''(x)=4\frac{2x^3-3x^2+x+5}{(x-1)^3(x-2)^3}\,.$$

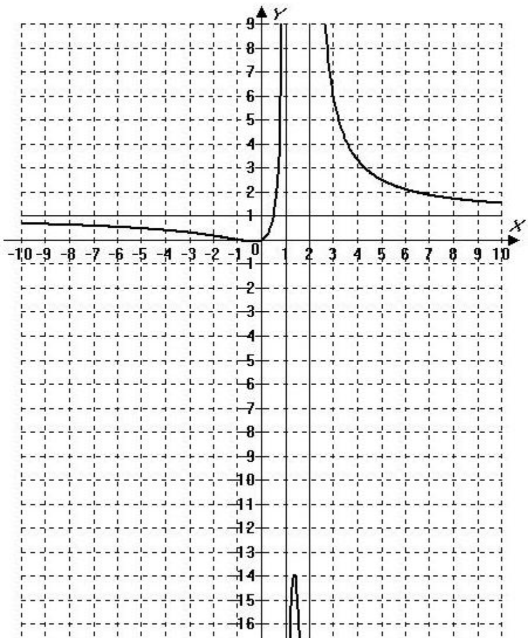


Рис. 14

Для знаходження проміжків опуклості потрібно розв'язати нерівність $f''(x)>0$. При дослідженні, отримаємо, що $f''(x)$ міняє знак при переході через три точки: x_0, 1 і 2. Із цих трьох точок функція $f(x)$ неперервна лише в точці x_0, отже це єдина точка перегину. Методом інтервалів легко знаходимо, що на проміжках $(-\infty;x_0)$ і $(1;2)$ функція ввігнута, а на проміжках $(x_0;1)$ і $(2;+\infty)$ − опукла.

8). Враховуючи попередні пункти дослідження, можемо побудувати графік функції $y=f(x)$ (рис. 14).

Для повного дослідження доцільно знайти ту точку, де графік перетинається з горизонтальною асимптотою $y=1$. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x)=1$, тобто:

$$\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}=1.$$

Його розв'язком буде $x=\frac{1}{2}$. Відмітимо цю точку на осі O_x.

Спосіб 2.

В AG вибираємо "Добавить график" і в полі, справа від "Y(x)=" записуємо праву частину нашої функції (згідно синтаксису AG). В результаті маємо графік даної функції (див. рис. 14).

1. Розглянувши побудований графік функції та звернувши увагу на її знаменник можемо визначити, що $D(f)=R\setminus\{1;2\}=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$

2. З побудованого графіка та аналізу області визначення функції робимо висновок що функція ні парна ні непарна і не є періодичною.

3. З побудованого графіка функції робимо висновок що область визначення цієї функції має дві граничні точки: *x=1 і x=2*.

4. Щодо похилих та горизонтальних асимптот потрібно провести аналітичне дослідження (як вказано в 1 способі).

5-6. Точки перетину графіка з осями та екстремуми знаходимо таким чином "Вычисления/Исследование функции/" в параметрах обов'язково вказуємо "Использовать производную". Результати показані на рис. 15.

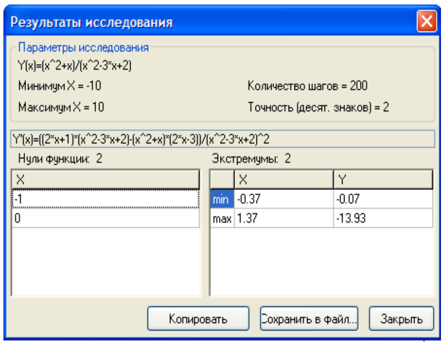


Рис. 15

Отже тепер ми знаємо кількість точок перетину з осями координат та можемо вказати проміжки зростання та спадання функції.

Так само, як і в 1 способі $E(f)$ остаточно ми можемо визначити тільки на цьому кроці:

$$E(f)=(-\infty;f_{\min}]\cup[f_{\min};+\infty)\approx(-\infty;-13.93]\cup[-0.07;+\infty)$$

7. Проміжки, на яких функція вгнута і опукла, теж можемо знайти виходячи з побудованого графіка функції та проведених вище (в першому способі) досліджень, навіть не використовуючи другу похідну.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$|x-1|+|x+1|-\frac{|x-3|}{x-3}=5$$

Спосіб 1.

Розв'язування цього рівняння складатиметься з декількох етапів у залежності від знаків виразів, що знаходяться під знаком модуля. Тому, знайшовши значення змінної, при яких відбувається зміна знаків виразів під знаком модуля, розв'яжемо нашу вправу на кожному їх сукупності проміжків:

$$\left[\begin{array}{c} x\in(-\infty;-1) \\ x\in[-1;1] \\ x\in(1;3) \\ x\in(3;\infty) \end{array}\right.$$

1. $x\in(-\infty;-1)$. Після розкриття модуля у рівнянні маємо:

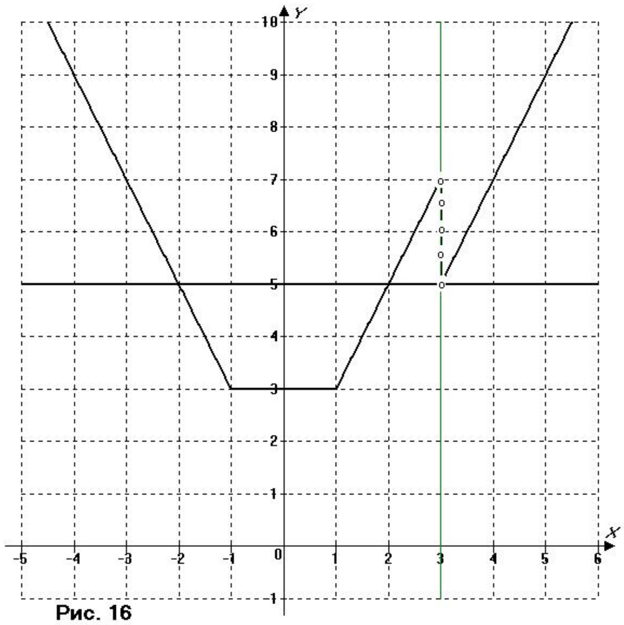


Рис. 16

$$-x+1-x-1+1=5$$
$$-2x+1=5$$
$$x=-2$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x=-2$.

2. $x\in[-1;1]$, тоді після розкриття модуля:

$$-x+1+x+1+1=5,\ 3=5.$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x\in\varnothing$.

3. $x\in(1;3)$, тоді:

$$x-1+x+1+1=5$$
$$x=2$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x=2$.

4. Якщо $x\in(3;\infty)$, то:

$$x-1+x+1-1=5,\ x=3.$$

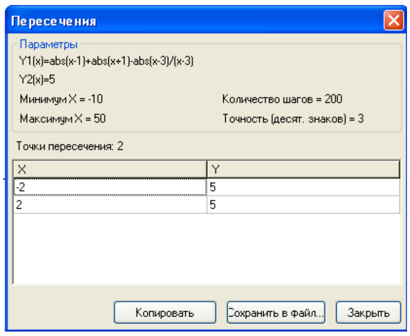


Рис. 17

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x\in\varnothing$.

Отже розв'язок нашого рівняння матиме вигляд:

$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

Спосіб 2.

В AG вибираємо "Добавить график" і в полі, справа від *"Y(x)="* записуємо праву частину нашого рівняння (згідно синтаксису AG). Знову вибираємо вибираємо "Добавить график" і в полі, справа від "*Y(x)=*" записуємо ліву частину нашого рівняння (згідно синтаксису AG). Отримаємо 2 графіки (рис. 16):

$$y(x)=5 \text{ і } y(x)=|x-1|+|x+1|-\frac{|x-3|}{x-3}.$$

Знайдемо координати точок перетину цих графіків (рис. 17). Маємо відповідь $x_1=-2$, $x_2=2$

Спосіб 3.

В AG вибираємо "Добавить график", але вибираємо не "*Y(x)=*", а варіант «*f(x,y)>|=|<0*» – рівняння чи нерівність. В полі «формула» записуємо наше рівняння, попередньо перенісши 5 в ліву його частину і нижче вибираємо *=f(x,y)=0.* Натиснувши ОК, отримаємо таке зображення (рис. 18). Перетин осі *Ox* дає нам 2 розв'язки. Маємо відповідь:

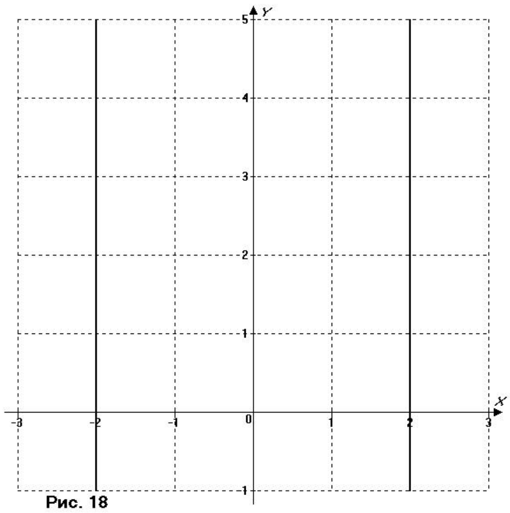


Рис. 18

$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

Доцільно використовувати Advanced Grapher при розв'язуванні рівнянь вищих степенів, особливо, коли цього не можна зробити, використовуючи схему Горнера.

Приклад 4. Розв’язати рівняння:

$$5x^8+3x^6-x^5+7x^4-x^2-3=0.$$

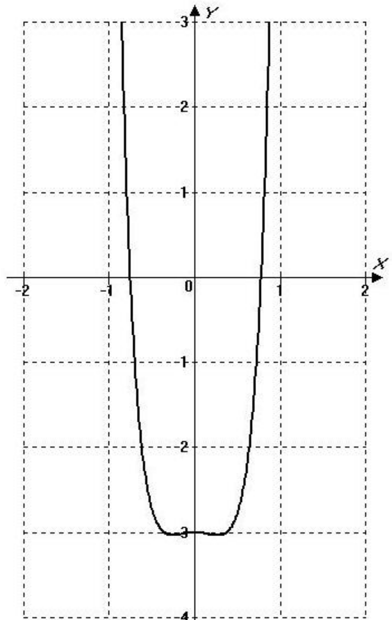


Рис. 19

Побудуємо в Advanced Grapher графік функції $y=5x^8+3x^6-x^5+7x^4-x^2-3$. Бачимо, що графік функції перетинає вісь O_X в 2-х точках, а отже рівняння $5x^8+3x^6-x^5+7x^4-x^2-3=0$ має два розв'язки (рис. 19).

Наступним кроком знайдемо їх. Для цього звернемося в меню "Вычисления" і виберемо "Исследование функции". Після вибору з'явиться вікно "Исследование функции", в якому потрібно буде вибрати функцію яку ми будемо досліджувати та що ми хочемо отримати після дослідження (в даному випадку вибираємо "Нули функции").

Вибравши і натиснувши "ОК" побачимо вікно "Результаты исследования" в нижній лівій частині якого бачимо "Нули функции: 2", а нижче бачимо розв'язки нашого рівняння x_1 =-0,75, x_2 =0,78. При чому, в правому верхньому куті вікна (рис. 20) бачимо, що дані розв’язки наведені наближено з точністю до 2-х десяткових знаків (кількість десяткових знаків при обрахунку задається в одному з підпунктів "Исследование функции"). Результат досліджень можна відразу помістити в текстовий файл.

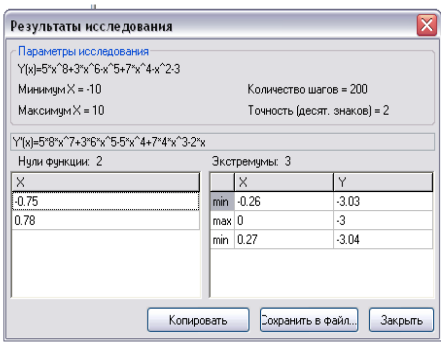


Рис. 20

Приклад 5. Розв’язати нерівність:

$$|x-6|\le|x^2-5x+2|.$$

Спосіб 1.

Так як x^2-5x+2=0, $x-6=0$, тоді $x_1=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}, x_2=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, x=6$. Отже можемо розв’язати дану нерівність на кожному проміжку з сукупності проміжків:

$$\left[\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right) \\ x\in\left[\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \\ x\in\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};6\right) \\ x\in[6;\infty) \end{array}\right.$$

1. $x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$. Маємо: $-x+6\le x^2-5x+2$;

$$x^2 - 4x - 4 \geq 0;$$
$$x \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; \infty\right).$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right]$

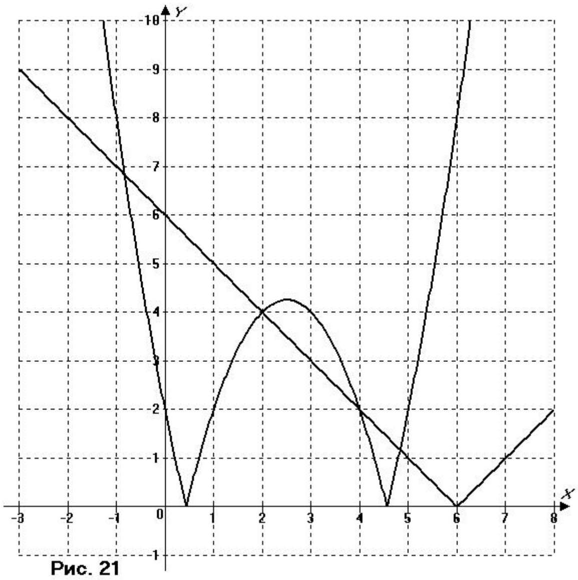


Рис. 21

2. $x \in \left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$, тоді маємо:

$$-x + 6 \leq -x^2 + 5x - 2;$$
$$x^2 - 6x + 8 \leq 0;$$
$$x \in [2;6].$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in [2;4]$.

3. $x \in \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; 6\right)$, тоді:

$$-x + 6 \leq x^2 - 5x + 2;$$
$$x^2 - 4x - 4 \geq 0;$$
$$x \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; \infty\right).$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in \left[2 + 2\sqrt{2}; 6\right)$

4. Якщо $x \in [6; \infty)$, то:

$$x - 6 \leq x^2 - 5x + 2;$$
$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty).$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in [6; \infty)$

Отже розв'язок нашої нерівності матиме вигляд:

$$x \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup [2;4] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; \infty\right).$$

Спосіб 2.

В AG вибираємо "Добавить график", вибираємо "Y(x)=" і вписуємо в поле ліву частину нашої нерівності. Потім знову вибираємо "Добавить график", і вибравши "Y(x)=" вписуємо праву частину. Отримуємо два графіки функцій (рис. 21).

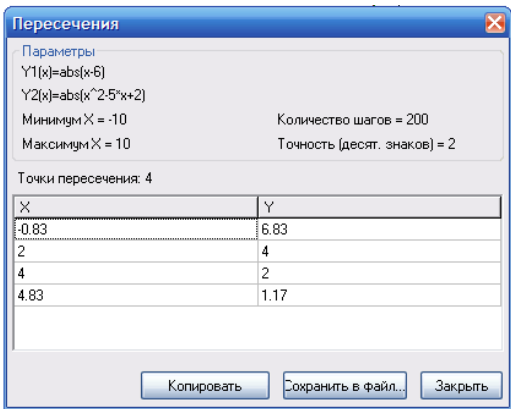


Рис. 22

Використовуючи аналогічні дії, знайдемо координати точок перетину побудованих графіків (рис. 22). Досліджуючи побудовані графіки приходимо до висновку, що розв'язком нашої нерівності будуть проміжки, де значення функції *y1<y2*. А це буде на проміжках:

$$x \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup [2;4] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; \infty\right)$$

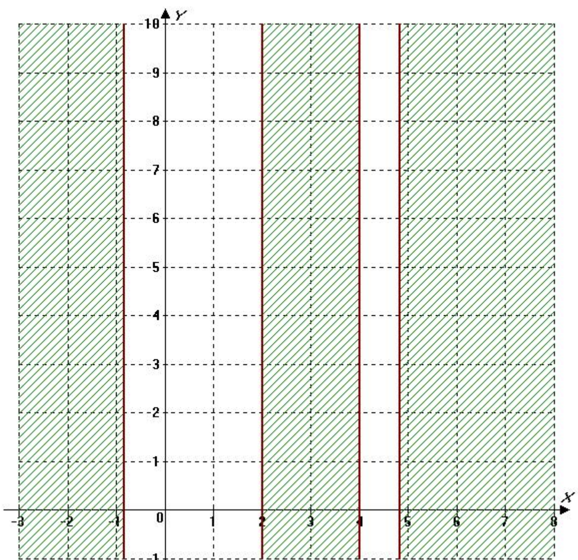


Рис. 23

(на жаль значення $2-2\sqrt{2}$ і $2+2\sqrt{2}$ в AG подані наближено, відповідно -0,83 і 4,83).

Спосіб 3.

В AG вибираємо "Добавить график", але вибираємо не "Y(x)=", а варіант f(x,y)>|=|<0 – уравнение или неравенство. В полі формула записуємо наше рівняння, попередньо перенісши праву частину нерівності в ліву його частину, тобто нерівність матиме вигляд $|x-6|-|x^2-5x+2|\le 0$ і нижче вибираємо =f(x,y)<0. Натиснувши ОК, отримаємо таке зображення (рис. 23). Будуємо графік нерівності $|x-6|-|x^2-5x+2|\le 0$ і після проведення вказаного вище дослідження отримуємо розв'язок:

$$x\in\left(-\infty;2-2\sqrt{2}\right]\cup[2;4]\cup\left[2+2\sqrt{2};\infty\right)$$

Приклад 6. Розв'язати нерівність:

$$|x-2|+|x-3|\ge|x-4|$$

Спосіб 1.

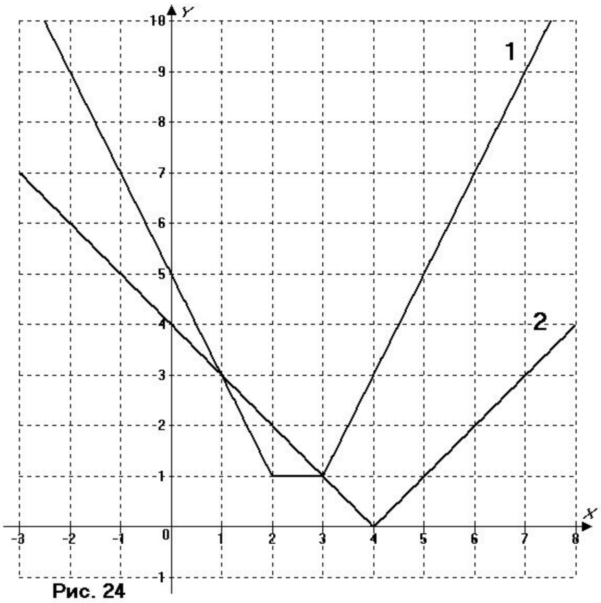


Рис. 24

Розв'яжемо нерівність на кожному з проміжків їх сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;2) \\ x\in[2;3] \\ x\in(3;4) \\ x\in[4;\infty) \end{array}\right.$$

1. $x\in(-\infty;2)$. Маємо:

$$-x+2-x+3\le -x+4;$$
$$x\le 1.$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x\in(-\infty;1]$.

2. $x\in[2;3]$, тоді:

$$x-2-x+3\ge -x+4;$$
$$x\ge 3.$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x=3$.

3. Якщо $x\in(3;4)$, то:

$$x-2+x-3\ge -x+4;$$
$$x\ge 3.$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x\in(3;4)$.

4. Якщо $x\in[4;\infty)$, то:

$$x-2+x-3\ge x-4;$$
$$x\ge 1.$$

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x\in[4;\infty)$.

Отже розв'язок нашої нерівності матиме вигляд: $x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$.

Спосіб 2.

В AG вибираємо "Добавить график", вибираємо "Y(x)=" і вписуємо в поле ліву частину нашої нерівності. Потім знову вибираємо "Добавить график", і вибравши "Y(x)=" вписуємо праву частину. Отримуємо два графіка функцій (рис. 24). Знайдемо координати точок перетину (рис. 25). Досліджуючи побудовані графіки приходимо до висновку, що розв'язком нашої нерівності будуть проміжки, де значення функції, графік якої позначений 1, більші, ніж значення функції, графік якої позначений 2. А це буде на проміжках $x \in (-\infty;1] \cup [3;\infty)$.

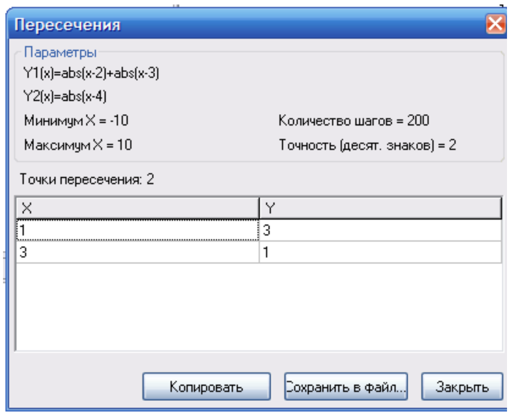


Рис. 25

Спосіб 3.

В AG вибираємо "Добавить график", але вибираємо не "Y(x)=", а варіант f(x,y)>|=|<0 – уравнение или неравенство. В полі формула записуємо нашу нерівність, попередньо перенісши праву частину нерівності в ліву його частину, тобто нерівність матиме вигляд $|x-2|+|x-3|-|x-4| \ge 0$ і нижче вибираємо =f(x,y)>0. Натиснувши ОК, отримаємо таке зображення (рис. 26). Будуємо графік $|x-2|-|x-3|-|x-4| \ge 0$ і маємо розв'язок $x \in (-\infty;1] \cup [3;\infty)$.

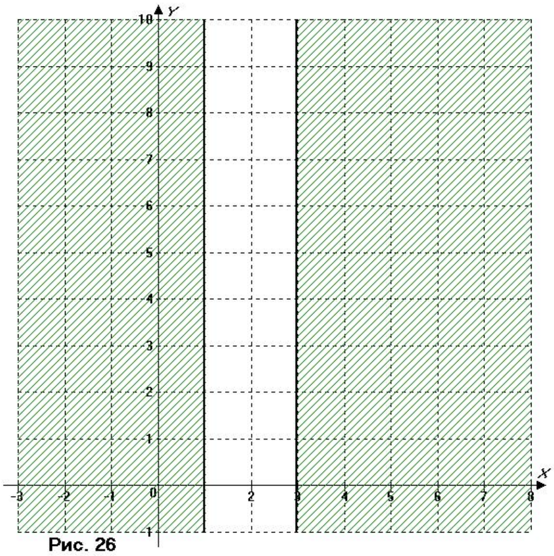


Рис. 26

Приклад 7. Розв'язати нерівність:

$$\frac{2x^2+15x-10|2x+3|+32}{2x^2+3x+2}<0.$$

Спосіб 1.

Оскільки, $2x^2+3x+2>0$ то можемо виділити такі кроки при розв'язанні даної нерівності:

$$\left[\begin{array}{l}2x+3<0\\2x+3\ge 0\end{array}\right., \text{ або: } \left[\begin{array}{l}x<-\frac{3}{2}\\x\ge -\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

1. $x<-\frac{3}{2}$. Маємо:

$$2x^2+15x+20x+30+32<0;$$
$$2x^2+35x+62<0;$$
$$x \in (-15{,}5;-2).$$

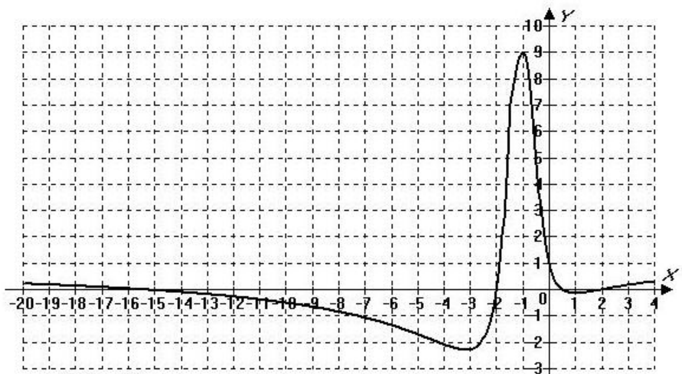


Рис. 27

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in (-15{,}5;-2)$.

2. Нехай $x \geq -\frac{3}{2}$, тоді:

$$2x^2 + 15x - 20x - 30 + 32 < 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 < 0$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

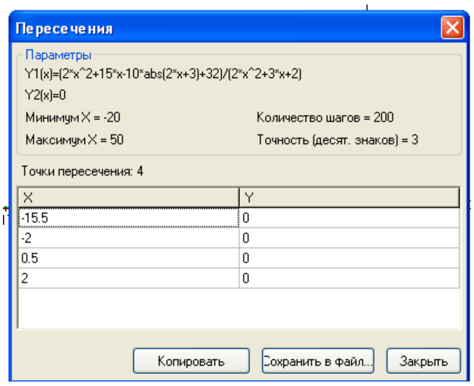


Рис. 28

Враховуючи умову, маємо відповідь на даному проміжку: $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Отже, $x \in (-15{,}5; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Спосіб 2.

В AG вибираємо "Добавить график", вибираємо "Y(x)=" і вписуємо в поле ліву частину нашої нерівності (див. рис. 27). Знайдемо координати точок перетину з віссю O_x (рис. 28). Маємо відповідь:

$$x \in (-15{,}5; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

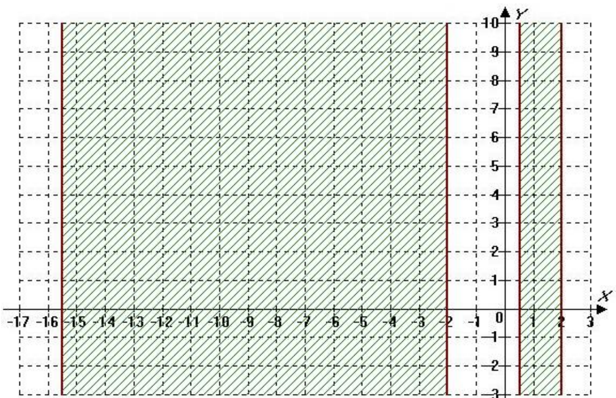


Рис. 29

Спосіб 3.

В AG вибираємо "Добавить график", далі варіант «f(x,y)>|=|<0 – уравнение или неравенство». В полі формула записуємо нашу нерівність, нижче вибираємо =f(x,y)<0. Натиснувши ОК, отримаємо таке зображення (рис. 29). Маємо відповідь $x \in (-15{,}5; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Звертаючи увагу читача на унікальність запропонованої технології використання пакету в навчальних цілях сформулюємо основні висновки.

1. Використання засобів інформаційних технологій (математичного пакету Advanced Grapher) у навчанні математики учнів загальноосвітніх шкіл є перспективним напрямком подальших науково-педагогічних досліджень у контексті творчого розвитку суб’єктів навчання.

2. Діяльність вчителя та учня в системі шкільної освіти, опосередкована комп’ютером, сприяє розв’язанню проблеми формування у здібних учнів творчих математичних умінь, поглибленню професійної спрямованості викладання математичних дисциплін.

3. Практика показала, що програма Advanced Grapher є досить зручним засобом при вивчення курсу математики в школі. Для його використання не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. Названа програма проста у користуванні, оснащена досить зручним інтерфейсом. Користувачу не потрібно мати якихось особливих знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування

тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів та студентів.

Звичайно, в розглянутому програмному засобі, як і в інших подібних, є як свої переваги, так і свої недоліки. В одних побудовані графіки функцій не можна дослідити або якимось чином скопіювати їх і використовувати в подальшому, інші ж можна використовувати лише при розв’язанні якихось окремих задач. Кожен з них не є універсальним при використанні в розв’язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем.

4. Використання інформаційних технологій у широкому плані відображає “мережеве”, а не алгоритмічно-лінійне навчання, яке все більше згадується у науковій літературі. Метод “мережевого” навчання створює для студента поле можливостей як напрям діяльності. Поле можливостей розв’язання тієї чи іншої задачі уможливлює і спонукає до створення “свого” алгоритму розв’язку, що вимагає значних творчих зусиль. Рівень засвоєння навчального матеріалу значно вищий, ніж при алгоритмічно-лінійному підході до навчання. Зокрема при побудові графіків функцій способом перетворення, наведеним у даній роботі, зусилля зосереджуються на сутності і змісті кожного перетворення.

5. Використання програм розглянутого типу дає змогу вчителеві значно інтенсифікувати спілкування з учнями та учнів між собою, приділити більше уваги постановці задач, побудові їхніх математичних моделей, розробці і дослідженню методів розв'язування задач, дослідженню розв'язків, логічному аналізу умов задач, пошуку нестандартних підходів до розв'язування задач, виявленню закономірностей, яким підкоряються досліджувані процеси і явища, перекласти на комп'ютер технічні та нецікаві операції.

§4. Вправи на вивчення властивостей функцій.

1. Побудувати графіки функцій, заданих формулами.

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
$y=3^x+3^{-x}$ $y=2^{-\lvert x\rvert}$ $y=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\lvert x\rvert}$ $y=2^{\log_2 x}$ $y=\lg(1-x^2)$ $y=\lg(\lvert x\rvert+1)$ $y=3^{\lvert\lvert x\rvert-1\rvert}$	$y=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$ $y=2^{\frac{1}{x}}$ $y=\lg\left(x^2-3x+2\right)$ $y=2^{2\log_2 x}$ $y=\log_{\frac{1}{2}}\lvert 1-x^2\rvert$ $y=\lg\lvert x\rvert+1$ $y=3^{\lvert x-1\rvert}$	$y=2^{-\frac{\lvert x\rvert-x}{2}}$ $y=\lg\left(1-x^2\right)$ $y=2^{\log_2 x^2}$ $y=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}$ $y=\log_2\left(2-\lvert x\rvert\right)$ $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\lvert x\rvert-1}$	$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{x-\lvert x\rvert}{2}}$ $y=\log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ $y=2^{\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ $y=\log_2\dfrac{1-\lvert x\rvert}{1+\lvert x\rvert}$ $y=\log_2\lvert x\rvert-2$ $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\lvert\lvert x\rvert-1\rvert}$

2. Розв’язати рівняння та нерівності, використовуючи властивості графіків функцій.

a) $\log_2(2^x-7)=3-x$

b) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$

c) $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$

d) $\left|\log_{\sqrt{3}}x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2$

e) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$

f) $\sqrt{4x^2-11x+6}\,\log_{\cos\pi x}(\lvert 3x-7\rvert+1)=0$

g) $(x^2-2x-3)^{(x+3)\log_{(-x-1)}(x^2-x-5)}=1$

h) $5^{x^2+x-4}\sqrt[x+10]{2^{x^2+2x+4}}>50$

i) $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}}<8^{\frac{x-3}{3x-7}}$

j) $(0{,}04)^{5x-x^2-8}<625$

k) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$

l) $\dfrac{1}{(),5)^x-1}-\dfrac{1}{1-(0{,}5)^{x+1}}\geq 0$

m) $5^{\sqrt{x}+1}-5^{2\sqrt{x}-1}-20>0$

n) $8^x+18^x-2\cdot 27^x>0$

o) $(x^2+x+1)^x<1$

p) $\dfrac{9^x - 3^x - 6}{10 - 3x - x^2} > 0$

q) $\lg\dfrac{x+1}{2x-3} \ge 0$

r) $\log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < 1$

s) $\sqrt{\log_9\left(3x^2 - 4x + 2\right)} + 1 > \log_3\left(3x^2 - 4x + 2\right)$

t) $\log_5 \log_3 \dfrac{x^2 - x - 18}{x - 2} \ge 0$

u) $9^{\log_2(x-2)-1} - 8 \cdot 5^{\log_2(x-1)-2} > 9^{\log_2(x-1)} - 16 \cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$

v) $\log_{10}\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| < 0$

3. Розв’язати системи рівнянь та нерівностей, використовуючи властивості функцій та інформаційні технології.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 - 1 = 4x^2 + 4x \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2 y + xy^2 = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y + \dfrac{x}{y} = 3 \\ (x - y)\cdot\dfrac{x}{y} = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ x + y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$

h) $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y - 5 = |x-1| \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{2x-2y} = 1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12 \\ \sqrt{3x-2y} = \sqrt{5+x-3y} \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2^{x^2+y^2} = 16^{x+y} \\ 2^{x^2} + 8\cdot 2^{y^2} = 8\cdot 16^x + 16^y \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5 \\ x^{y^2+2} = 125 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot 5^{\frac{1}{x-1}} = \sqrt[6]{675} \\ 2^{\frac{1}{3x}} \cdot 25^{\frac{2}{y}} = 15 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4} \\ \log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \sqrt{2^{x-y}} - \sqrt{2^{y-x}} = 1{,}5 \\ \log_2(2x-y) + \log_2(2x+y) = 2 + \log_2 15 \end{cases}$

r) $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0 \\ \log_4\left(\dfrac{x}{y}\right) - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8 \end{cases}$

t) $\begin{cases} (4y^2 - y + 6)2^x = 20y \\ x + \log_2 y = 2 \end{cases}$

u) $\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2\sqrt{y-1}}{3}\right) = 2 \\ \log_{27} x \log_3 (y-1)^2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

v) $\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$

Список рекомендованої літератури.

1. Вища освіта в Україні: Навч. посіб. / В.Г.Кремень, С.М.Ніколаєнко, М.Ф.Степко та ін.; За ред. В.Г.Кременя, С.М.Ніколаєнка. – К.: Знання, 2005. – 327 с.

2. Вітвицька С.С. Основи педагогіки вищої школи: Методичний посібник для студентів магістратури. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 316 с.

3. Жалдак М.І. «Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики» // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб.наук.праць — К.:НПУ ім..М.П.Драгоманова.— Випуск 7.—2003.— 263с.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

5. Ершов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование. //Информатика и образование. – 1992. – №5-6. – с.3-12.

6. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.

7. Коджаспирова Г.М., Петров К.В. Технические средства обучения и методика их использования: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Академия, 2001. – 256 с.

8. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: Учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е.С.Полат, М.Ю.Бухаркина, М.В.Моисеева, А.Е.Петров; Под ред. Е.С.Полат. — М.: Издательский центр «Академия», 2001. — 272 с.

9. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997.-303 с.: іл.

10. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром: Навчально-методичний посібник.- Кіровоград: РВВ КДПУ ім.В.Винниченка, 2005.-32 с.

11. Ріжняк Р.Я., Левшин М.М., Прохур Ю.З., Фурсикова Т.В. Системно-діяльнісне навчання як засіб реалізації інтегративного підходу (на прикладі вивчення курсів математики та інформатики) // Нові технології навчання: Наук. метод. зб. – Київ, Науково-методичний центр вищої освіти, 2004. – Випуск 39 (с. 33-48)

12. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход: Метод. пособие. – М.: Высш. шк., 1991. – 207 с.

13. Жалдак М.И. Система подготовки учителей к использованию информационной технологии в учебном процессе: Дис. в форме науч. доклада… докт. пед. наук: 13.00.02 / АПН СССР. НИИ содержания и методов обучения. – М., 1989. – 48 с.

14. Збірник задач з математики для вступників до втузів / За редакцією М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.

15. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис…докт. пед. наук: 13.00.02 / Вінницький державний технічний ун-т. – Вінниця, 1998. – 396 с.

16. Лотюк Ю.Г. Застосування математичних пакетів у викладанні математики у вищому навчальному закладі // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2001. – №3. – С. 21-24.

17. Вища освіта в Україні і Болонський процес: Навч. посіб. / За ред. В.Г.Кременя. Авторський колектив: М.Ф.Степко, Я.Я.Болюбаш, В.Д.Шинкарук, В.В.Грубіянко, І.І.Бабич. – К.: Освіта, 2004. – 384 с.

18. Співаковський О.В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики вчителів математики з використанням інформаційних технологій: Дис…докт. пед. наук: 13.00.02 / О.В.Співаковський; НПУ ім. М.П.Драгоманова. – К., 2004. – 534 с.

19. Львов М.С., Сінько Ю.І.. Про один підхід до побудови систем підтримки розв’язання математичних задач, конструйованих за умовою // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2001. – Вип. 4.– С. 75–82.

20. Сіденко, Л. М. Побудова графіків функцій за допомогою програми ADVANCED GRAPHER: застосування алгоритмів програми до нестандартних та автоматичних обчислень математичних завдань [Текст] / Л. М. Сіденко, О. М. Сіденко // Математика в школах України (Основа) : Науково-методичний журнал. - 2007. - N 13/14. - С. 68-73.

21. Жалдак М.И., Горошко Ю.В., Винниченко Е.Ф. Математика с компьютером: Пособие для учителей. К.: РУНЦ „ДИНИТ”, 2004. – 251 с.

22. Горчакова І.А. Переваги евристичного підходу до розв’язання задач// Дидактика математики: проблеми дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 13. – Донецьк: ТЕАН, 2000. – С. 78-85.

23. Горчакова І.А. Евристики з позицій кібернетики, винахідництва та дидактики // Наука і сучасність: Збірник наукових робіт НПУ ім. Драгоманова. Том XXVII. – К: Логос, 2001. – С. 3–11.

24. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навчальний посібник.-3-тє вид., перероб. і допов.-К.: Вища школа, 1989.-367с.:іл.

25. Кравчук О. Рівняння з параметрами // Математика.-2006. №13(361)-С.17-24.

26. Бойко С., Куля Д. Графічний спосіб розв’язування рівнянь з параметрами, 9 кл. // Математика.-2006. №10(358)- С.17-23.

27. Репета В.К. Рівняння, нерівності та системи рівнянь, що містять знак абсолютної величини // Математична газета.-2006. №5- С.27-32.

28. Горох О. Комп'ютер на уроці математики// Математика.-2007. №2(398)-С.9-18.

29. Жук Ю. О. Особливості використання засобів нових інформаційних технологій у навчально-виховному процесі професійно-технічного закладу освіти // Нові технології навчання: Наук.- метод. зб. - К.:ІЗМН, 1998. - N24.-С. 72-78.

30. Выготский Л.С. Психология. – М.: Изд-во ЭКСМО-Пресс, 2000. – 1008 с.

31. Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности / Под ред. П.Я.Гальперина и Н.Ф.Талызиной.–М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1968. – 238 с.

32. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под редакцией Н.Л.Коломинского. – К.: Радянська школа, 1989. – 208 с.

33. Ріжняк Р.Я.. Моделі задач на рух у 4-5 класах// Радянська школа.-1989.- №10.

34. Левшин Н.Н., Рижняк Р.Я.. "Математический задачник" для 5-6 классов// Информатика и образование.- 1991.- №5.

35. http://www.serpik.com/agrafer/.

36. Кушнір В.А.Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.

37. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Методичні особливості формування умінь побудови графіків функцій методом перетворень // Математика в школі, 2007, № 3 (с. 41-44).

38. Ріжняк Р.Я. Використання задач інтегративного змісту при проведенні узагальнення та систематизації знань учнів з математики // Наукові записки. – Випуск 66. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2006. Частина 2.

Розділ III. Використання властивостей функцій при розв'язуванні математичних задач.

Вступ.

Розв'язання математичної задачі можливе за відомими алгоритмами. Тоді процес розв'язання такої задачі буде полягати в створенні її математичної моделі та перетворенні цієї моделі за скінчену кількість визначених кроків (скінчену кількість визначених перетворень чи операцій), що й приведе до розв'язку вихідної задачі. В основі поняття математичного алгоритму лежать ідеї визначення алгоритму А.Маркова, машини А.М.Тюрінга тощо. Зауважимо, що важливими характеристиками алгоритмічного процесу, як процесу скінченого числа визначених перетворень моделі вихідної задачі з метою отримання розв'язків цієї задачі, є такі: 1) визначеність перетворень; 2) скінчене число перетворень; 3) однозначність послідовності перетворень.

Математичні задачі, які розв'язуються за відомими алгоритмами відносно прості задачі. Такі задачі формують з учнів операціоналістів, аналітиків. Поле можливостей для діяльності учнів є досить структурованим, тому процес перетворень математичної моделі задачі згідно вибраного (чи створеного) алгоритму вимагає певних знань, умінь і навичок, а не значної творчості. Значні творчі зусилля тут потрібно прикласти тільки при побудові математичної моделі вихідної задачі.

Однак, у багатьох випадках математичні задачі не розв'язуються за алгоритмами у наведеному вище змісті. Зокрема, до таких задач відносяться системи декількох нелінійних рівнянь з таким же чи іншим числом невідомих, рівняння й нерівності з параметрами, якісні дослідження розв'язків рівнянь та нерівностей і т.п. Кожна конкретна задача наведених типів вимагає "власного" розв'язання. Такі задачі називають нестандартними, творчими, неалгоритмічними, такими, що слабко формалізуються тощо. Поле можливостей при розв'язуванні таких задач слабко структуроване, перетворення, які необхідно вести над моделлю вихідної задачі, невизначені, невизначене й число та послідовність таких перетворень. Тоді розробляється послідовність приписів, яка має певні властивості алгоритмів, але не є алгоритмом у математичному розумінні. Послідовність таких приписів називають "алгоритмічними приписами" (Л. Ланда), "евристичними алгоритмами (Д. Пойя)" розв'язання вихідної математичної задачі. Головним завданням такої послідовності приписів чи евристик є зменшення невизначеності поля можливостей розв'язання вихідної математичної задачі за рахунок його часткового структурування й упорядкування (але ще не до алгоритмічного виду!). Інакше кажучи, такі правила уже певним чином окреслюють (але не до алгоритмічної однозначності) види перетворень чи операцій (та їх послідовності) над моделлю вихідної задачі з метою отримання розв'язку останньої.

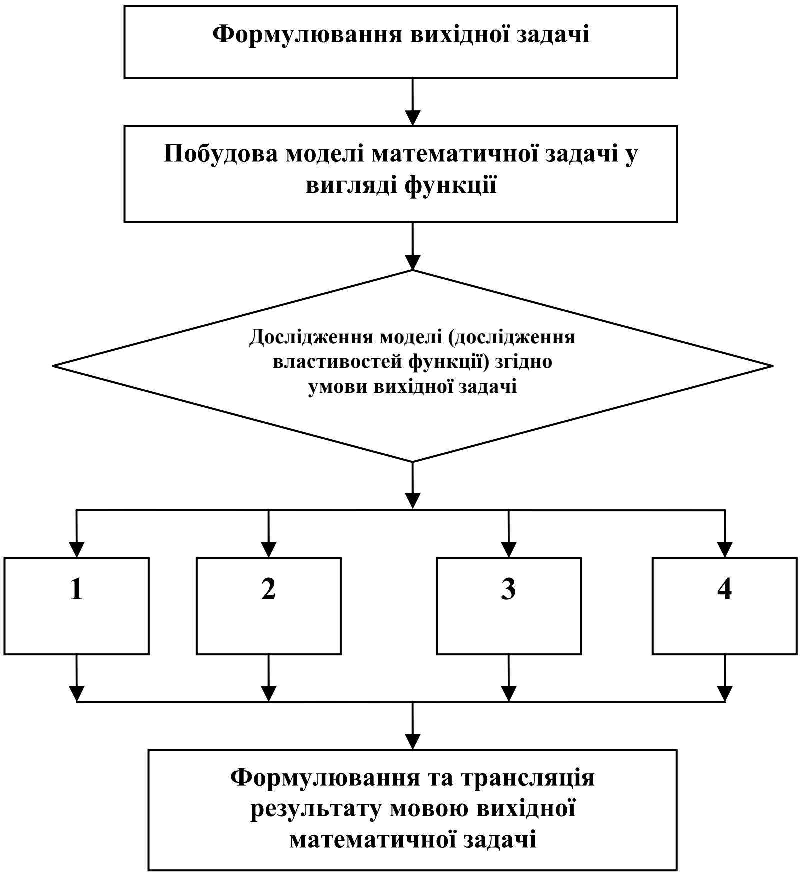


Схема 1. Евристичний алгоритм розв'язання рівнянь і нерівностей з використанням знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей.

Важливими моментами творчості при розв'язуванні таких математичних задач є: *формування вихідної задачі; створення її математичної моделі; вибір "апарату" дослідження математичної моделі; застосування вибраного "апарату" до дослідження й перетворення моделі; трансляція отриманих при дослідженні й перетворенні моделі результатів на вихідну задачу*.

Наведені моменти та їх послідовність можуть слугувати загальним евристичним алгоритмом математизації задач творчого плану (нестандартних, неалгоритмічних, слабо структурованих задач.

Реалізація підходу до навчання розв'язування рівнянь та нерівностей через процес інтеграції знань та умінь вимагає актуалізації знань з різних розділів елементарної математики. Тут потрібні знання прийомів та способів розв'язування рівнянь та нерівностей, властивостей функцій (області визначення та значень, монотонність, періодичність, обмеженість, неперервність та ін.), способів їх дослідження, дій (множення, ділення, піднесення до степеня, логарифмування, потенціювання та ін.) над різними алгебраїчними виразами та інше. По суті такий підхід до навчання розв'язування рівнянь і нерівностей інтегрує увесь курс алгебри за середню школу. Йдеться про формування загальної предметно-методичної здібності учня чи майбутнього вчителя до розв'язування рівнянь та нерівностей шляхом використання аналітичного розв'язання або графічного представлення умов, які задані рівнянням чи нерівністю. З іншого боку – графічне розв'язування рівнянь чи нерівностей потребує зворотного процесу – а саме трансляції знайденого і представленого у графічному вигляді розв'язку в аналітичний або чисельний вигляд. Творчість тут в тому, щоб, виходячи з графічного розв'язку конкретного рівняння чи нерівності, конкретного способу розв'язування як графічної ілюстрації умов рівняння чи нерівності учень (студент) «перетворив» свої інтегровані знання як «можливі» в актуальну дійсність у вигляді матеріальних знакових систем.

З цього погляду учень (студент) відразу вводиться в смислово-семантичний простір «можливостей», а не «необхідностей», в якому є тільки «можливості» створення алгоритмів розв’язування на основі знань та дослідження в кожному конкретному випадку особливостей тих чи інших перетворень рівнянь чи нерівностей. Такий підхід є протилежним до підходу, при якому домінують намагання створити «набір алгоритмів та прийомів», який дозволив би вірно розв’язати той чи інший приклад.

Метою нашого дослідження є створення приписів алгоритмічного типу (чи евристичних алгоритмів) розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та дослідження коренів нелінійних рівнянь. Об'єктом дослідження є рівняння й нерівності з параметрами та нелінійні рівняння, предметом дослідження є евристичні правила, послідовність яких може привести до розв'язання задач наведеного вище типу. Завданнями дослідження є: створення евристичних алгоритмів для розв'язання задач наведеного вище типу; створення та дослідження евристичного алгоритму та моделей вихідних задач; створення математичних алгоритмів процесу розв'язання математичних моделей на кожному кроці евристичного алгоритму; трансляція результатів дослідження на вихідну задачу.

У багатьох збірниках та посібниках з математики, що призначені для школярів, абітурієнтів, студентів педагогічних спеціальностей університетів (відомі збірники задач за авторства та редакцією М.І.Сканаві, В.В.Ясінського, В.Н.Литвиненка, А.Г.Мордковича), є чимала частина задач творчого характеру, які не розв’язуються за допомогою відомих алгоритмів.

У даному розділі ми висвітлимо аспект застосування уже сформованих в учнів умінь дослідження властивостей функцій при розв’язуванні рівнянь та нерівностей. Загальний вигляд евристичного алгоритму використання таких знань і умінь учнів зображений на рисунку 1.

Розглянемо детальніше 3-й пункт алгоритму. Очевидно, що дослідження властивостей заданої функції може здійснюватися різними способами в залежності від змісту та вибраного способу розв’язання вихідної математичної задачі. Тобто, використовуватиметься один із способів або їх комбінація:

1. Повне дослідження заданої функції.
2. Визначення властивостей функції за побудованим графіком (графік побудований, наприклад, методом перетворень, або з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, або схематично).
3. Визначення властивостей функції з використанням таких пакетів математичних програм, як ’’Advanced Grafer’’, ’’GRAN’’ та інші.
4. Дослідження окремих властивостей заданої функції – монотонності, екстремумів, тощо (схема 1).

Розглянемо детальніше висловлені ідеї на прикладах.

§1. Розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять під знаком модуля змінну та параметр.

Очевидно, що раціональне використання зручної наочності при навчанні математики відіграє значну роль у процесі засвоєння учнями математичних знань. Більше того, формування у школярів умінь використовувати наочність при розв'язуванні математичних задач є необхідною умовою перетворення таких знань у переконання. В цьому параграфі пропонуємо увазі читачів методику розв'язування рівнянь та нерівностей, які містять під знаком модуля невідому величину та параметр. Основна особливість даної методики полягає в узагальненні та поширенні на цей клас рівнянь та нерівностей відомого з курсу середньої школи методу інтервалів.

Такі рівняння і нерівності розглядаються в класах з поглибленим вивченням математики, часто зустрічаються в матеріалах незалежного тестування з математики. Запропонований спосіб їх розв'язування може бути корисним для вчителів шкіл, абітурієнтів, викладачів та студентів, слухачів підготовчих відділень.

Нагадаємо алгоритм розв'язування рівнянь(нерівностей) з модулем:

прирівняємо до нуля вирази, які стоять під знаком модуля і знаходимо відповідні значення невідомих;

зображаємо одержані точки на числовій прямій і будуємо систему інтервалів;

розв'язуємо рівняння (нерівність) на кожному інтервалі;

знаходимо остаточний розв'язок рівняння (нерівності) як об'єднання множини на кожному інтервалі.

В даній роботі ми розглянемо розв'язування та нерівностей, які містять під знаком модуля невідому і параметр, таких видів:

$$|a_1x^2+a_2x+a_3a+a_4|+|b_1x^2+b_2x+b_3a+b_4|=c_1x^2+c_2x+c_3a+c_4 \qquad \text{(I)}$$

$$|a_1x^2+a_2x+a_3a+a_4|+|b_1x^2+b_2x+b_3a+b_4|<(>)c_1x^2+c_2x+c_3a+c_4 \qquad \text{(II)}$$

де a_i , b_i , c_i $(i=1\text{-}4)$ - числові коефіцієнти, a − параметр, x − невідома величина.

Запропонований нами алгоритм розв'язування рівнянь і нерівностей типів(I) і (II) базується на алгоритмі розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем і має такий вигляд:

1) прирівняємо до нуля вирази, які стоять під знаком модуля, і будуємо множину точок (графіки) на координатній площині xOa, які задовольняють цим рівнянням;

2) визначаємо систему областей, на якій координатна площина виявилася розбитою побудованими графіками;

3) розв'язуємо рівняння (нерівності) в кожній з областей;

4) знаходимо остаточний розв'язок рівняння (нерівності) як об'єднання множини розв'язків кожної області.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$$|x-a| + |x + a + 1|=3 \qquad (1.1)$$

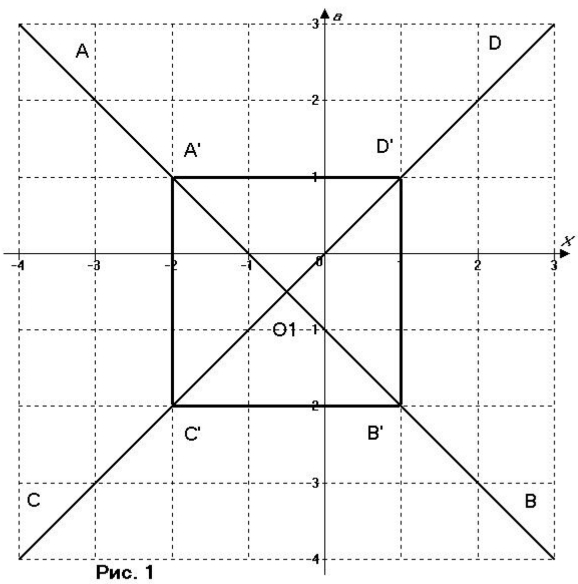


Рис. 1

Згідно з наведеною вище схемою:

1) $x - a = 0, \quad x + a + 1 = 0.$

2)зобразимо множину точок, які задовольняють ці рівняння на координатній площині xOa (див. рис. 1). Це будуть дві прямі лінії AB та CD (зображені пунктиром). Очевидно, що вся координатна площина виявилася розбитою на чотири області: D_1, D_2 ,D_3 ,D_4 (відповідно кути AO_1D, DO_1B, BO_1C, CO_1A). Приймемо домовленість, що границі областей (промені) $OA є D_1$,$O_1D є D_2$, ,$O_1B є D_3$, $O_1 C є D_4$

3) Розв’яжемо рівняння (1.1) в кожній області:

а) Розглянемо область D_1 . Очевидно, що координати кожної точки цієї області задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a < 0 \\ x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Це легко перевірити шляхом підстановки координат любої точки області у вирази, що містяться під знаком модуля. Наприклад, продемонструємо це з точкою (0,1) :

$$0 - 1 < 0$$
$$0 + 1 + 1 > 0$$

Врахуємо, що промінь O_1A ми домовилися вважати належним області D_1. Тоді в даній області рівняння (1.1) матиме вигляд:

$$(-x + a + x + a + 1 = 3) \Leftrightarrow (a = 1)$$

Тоді в області D_1 розв’язком рівняння (1.1) буде множина точок відрізка $A`D`$ без його правого кінця (рис. 1). Точки $A`$ і $D`$ мають координати, відповідно, *(2;1) і (1;1).*

б) Розглянемо тепер область D_2 . Координати всіх точок цієї області задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a \geq 0 \\ x + a + 1 > 0 \end{cases}$$

Тому в області D_2 рівняння (1.1) має такий вигляд:

$$(x - a + x + a + 1 = 3) \Leftrightarrow (x = 1).$$

Таким чином, в даній області розв’язком рівняння (1.1) будуть координати всіх точок відрізка $D`B`$ ($D`(1;1)$, $B`(1;-2)$) без його правого кінця. Зобразимо це на рисунку 1.

в) Координати всіх точок області D_3 задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a > 0 \\ x + a + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Тому тут рівняння (1.1) набуває вигляду:

$$(x-a-x-a-1=3) \Leftrightarrow (a=-2)$$

Тобто, в області D_3 рівняння (1.1) задовольняють всі точки відрізка $C'B'$, де $C'(-2;-2)$, без його лівого кінця. Зобразимо це на рис. 1.

г)Розглянемо, нарешті, розв'язки рівняння (1.1) в області D_4, координати всіх точок якої задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x-a\le 0 \\ x+a+1<0 \end{cases}$$

Рівняння (1.1) набуває при цьому такого вигляду:

$$(-x+a-x-a-1=3) \Leftrightarrow (x=-2)$$

Тому його розв'язками будуть координати точок відрізка $C'D'$ без його правого кінця(див. рис. 1).

4)Загальний розв'язок рівняння (1.1) є об'єднання всіх його розв'язків в кожній області і являє собою множину точок площини xOa, що належать сторонам квадрата $ADBC$ (рис. 1).

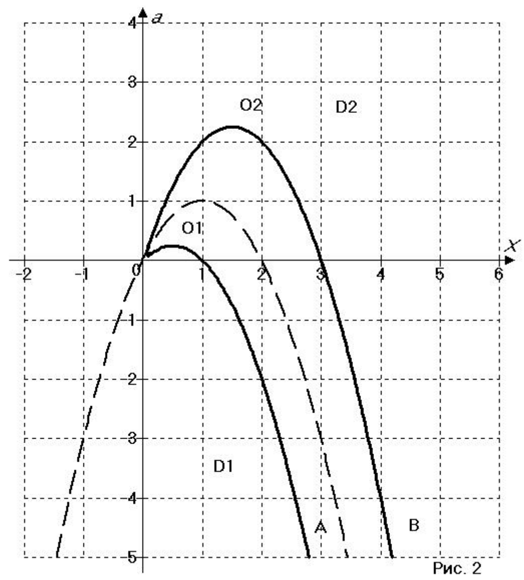
Запишемо відповідь аналітично. З рис. 1 видно, що:

при $a=1$ або $a=-2$ рівняння (1.1) має безліч розв'язків: $x\in[-2;1]$,

при $-2<a<1$ $\quad x_1=-2$ або $x_2=1$,

при $a<-2$ або $a>1$ рівняння (1.1) не має розв'язків.

Розглянемо тепер розв'язування рівняння типу (I) при умові, що деякі з чисел a_1, b_1, c_1 не дорівнюють нулеві. При цьому ми отримуємо рівняння другої степені, в якому змінна і параметр знаходяться під знаком модуля. Проілюструємо хід розв'язування спочатку на простому прикладі.



Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$|x^2-2x+a|=x \qquad (1.2)$$

1) прирівнявши до нуля вираз, що стоїть під знаком модуля, одержимо:

$$x^2-2x+a=0$$

2) з попереднього рівняння маємо:

$$a=-x^2+2x=-(x-1)^2+1.$$

Це рівняння параболи з вершиною в точці (1;1) (див. рис. 2). Парабола розбиває координатну площину на дві області D_1 і D_2. Домовимося, що сама парабола належить області D_2 (рис. 2).

3) розв'яжемо рівняння (1.2) в кожній області.

а) розглянемо область D_1. Координати всіх точок цієї області задовольняють такій нерівності:

$$x^2-2x+a<0$$

Тому рівняння (1.2) набуває вигляду:

$$(-x^2+2x-a=x) \Leftrightarrow (x^2-x+a=0)$$

Його розв'язком будуть координати всіх точок кривої OO_1A без точки O (рис. 2). Щоб перевірити це, досить побудувати параболу $a=-x^2+x$ і відкинути ту її частину, яка належить області D_2 (вершина параболи знаходиться в точці $O_1(0,5;0,25)$).

б)Розглянемо тепер область D_2. Координати всіх її точок задовольняють нерівності:

$$x^2-2x+a\geq 0$$

Тоді рівняння (1.2) набуває вигляду:

$$(x^2-2x+a=x)\Leftrightarrow(x^2-3x+a=0)$$

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, встановлюємо, що розв'язком рівняння (1.2) в області D_2 будуть координати всіх точок кривої OO_2B (рис. 2) ($O_2(1,5;2,25)$).

4)Загальним розв'язком рівняння (1.2) буде об'єднання його розв'язків на кожній з областей D_1 і D_2. Запишемо даний розв'язок аналітично, користуючись рис. 2. Для цього знаходимо значення аргументу x при деяких фіксованих значеннях a. Це можна зробити шляхом проектування множини розв'язків рівняння (1.2) на вісь Ox. Проектування здійснюється рухом деякої уявної прямої, паралельної осі Ox знизу вгору вздовж осі Oa.

Наприклад, проводимо уявну пряму $x=-3$. Вона перетинає криві, що зображають множину розв'язків рівняння (1.2) у двох місцях. Так як криві задані формулами:

$$a=-x^2+x$$

$$a=-x^2+3x$$

то з рис. 6 видно,що розв'язками рівняння будуть числа:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1-4(-3)}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

Аналогічно шукаємо розв'язки рівняння (1.2) для інших значень параметра a , рухаючи уявну пряму знизу вгору і звертаючи увагу лише на вид кривої, яка є зображенням розв'язків, і на кількість цих розв'язків. Так легко виявити наступні групи розв'язків:

при $a<0$ рівняння (1.2) має два розв'язки: $x_1=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{9-4a}}{2}$

при $a=0$ рівняння має три розв'язки: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$,

при $0<a<0,25$ рівняння (1.2) має чотири розв'язки:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$$

$$x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$$

при $a=0,25$ – три розв'язки: $x_1=0,5$, $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$

при $0,25<a<2,25$ – два розв'язки: $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$

при $a=2,25$ – один розв'язок – $x=1,5$,

при $a > 2,25$ рівняння (1.2) розв'язків не має.

Розглянемо тепер дещо складніше рівняння типу (I). Легко пересвідчитись, що метод областей дає можливість значно спростити розв'язування досить складного на перший погляд рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$|2x+a-4|+|x^2 - 2x - a|=x^2 - 2 \qquad (1.3)$$

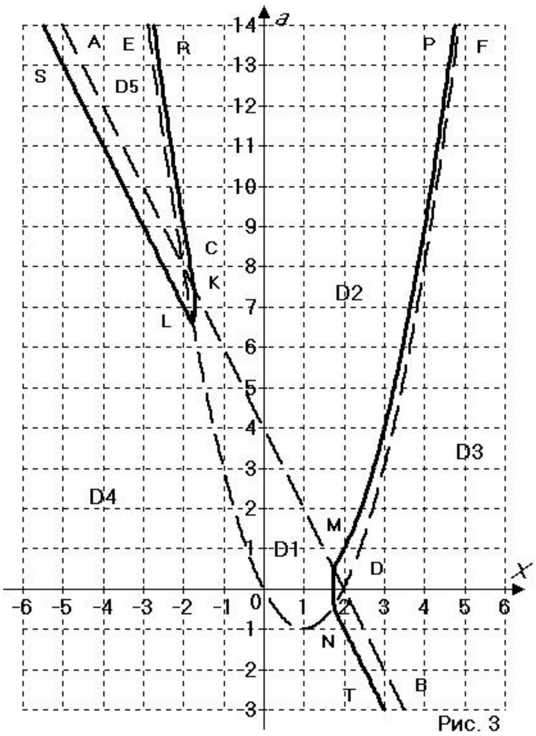


Рис. 3

1) прирівняємо до нуля вирази, які знаходяться під знаком модуля:

$$2x + a - 4 = 0,$$
$$x^2 - 2x - a = 0.$$

2) зобразимо множину точок, які задовольняють цим рівняння, на координатній площині xOa. З першого рівняння маємо:

$$a = -2x + 4$$

Це пряма лінія *AB* (див. рис. 3). З другого рівняння маємо:

$$a = x^2 - 2x.$$

Це парабола з вершиною в т.(1;1). Координатна площина виявилась розбитою цими лініями на 5 областей: D_1(обмежена лініями *COD* і *CD*), D_2(*EC, CD, DF*), D_3 (*FD, DB*), D_4 (*AC, COD, DB*), D_5(*AC,EC*). Домовимось, що відрізок $EC \in D_2$, $FD \in D_2$, $AC \in D_4$.

3) розв'яжемо рівняння (1.3) в кожній з областей (див. рис. 3):

а) розглянемо область D_1. Координати всіх точок цієї області задовольняють такій системі нерівностей :

$$\begin{cases} 2x + a - 4 \le 0 \\ x^2 - 2x - a \le 0 \end{cases}.$$

Тоді рівняння (1.3) в області набуває вигляду:

$$(-2x-a+4-x^2+2x+a=x^2-2) \Leftrightarrow (x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}).$$

Тому розв'язком рівняння (1.3) тут будуть координати точок відрізків *KL* і *MN*, де $K(-\sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 4)$, $L(-\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3})$, $M(\sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 4)$, $N(\sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3})$.

б) розглянемо область D_2. Так як координати всіх її точок задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + a - 4 > 0 \\ x^2 - 2x - a \le 0 \end{cases},$$

то рівняння (1.3) набуває вигляду:

$$(2x+a-4-x^2+2x+a=x^2-2) \Leftrightarrow (a=(x-1)^2).$$

Тобто, розв'язком рівняння (1.3) в області D_2 будуть координати точок, які належать дугам *MP* і *KR*, крім точок *M* і *K* (див. рис. 3).

в) розглянемо області D_3 і D_5 . Координати точок обох областей задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + a - 4 > 0 \\ x^2 - 2x - a > 0 \end{cases}.$$

Тому в даних областях рівняння (1.3) приймає вигляд:

$$(2x+a-4+x^2-2x-a=x^2-2) \Leftrightarrow (-4=-2).$$

А так як остання рівність невірна, то можна стверджувати, що рівняння (1.3) в областях D_3 і D_5 не має розв'язків.

г) так як координати всіх точок області D_4 задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + a - 4 \le 0 \\ x^2 - 2x - a > 0 \end{cases},$$

то рівняння (1.3) приймає вигляд:

$$(-2x-a+4+x^2-2x+a=x^2-2) \Leftrightarrow (a=-2x+3).$$

Таким чином, розв'язком рівняння (1.3) в області D_4 будуть координати точок променів LS і NT без точок L і N (див. рис. 3).

4) загальним розв'язком рівняння (1.3) є об'єднання всіх його розв'язків у кожній області. Запишемо цей розв'язок у загальноприйнятому вигляді:

при $a<3-2\sqrt{3}$ $x=\frac{3-a}{2}$,

при $3-2\sqrt{3} \le a \le 2\sqrt{3}+4$ $x=\sqrt{3}$,

при $2\sqrt{3} + 4< a <3 + 2\sqrt{3}$ $x=1 +\sqrt{3}$,

при $a= 3+ 2\sqrt{3}$ $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=1 + \sqrt{a}$,

при $3 + 2\sqrt{3}< a <2\sqrt{3} + 4$ $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\frac{3-a}{2}$, $x_3=1 + \sqrt{a}$,

при $a \ge 2\sqrt{3} + 4$ $x_1= \frac{3-a}{2}$, $x_2=1- \sqrt{a}$, $x_3=1 + \sqrt{a}$.

Розглянемо приклад розв'язування нерівностей типу (II):

Приклад 4. Розв'язати нерівність:

$$|x-a|+|x+a+1| \ge 3 \qquad (1.4)$$

Згідно з наведеною у вступній частині розділу схемою маємо:

1) $x - a =0$, $x+a+1=0$;

2) множина точок, які задовольняють рівнянням пункту 1, представляє собою пару прямих, що перетинаються. Зобразимо їх в координатній площині xOa (див. рис. 4) прямими CD і AB. Вся координатна площина розбилася цими прямими на області D_1 , D_2 , D_3 , D_4 (відповідно, кути AO_1D, DO_1B, BO_1C, CO_1A. Домовимось, що границі областей (промені) $O_1A \in D_1$, $O_1D \in D_2$, $O_1B \in D_3$, $O_1C \in D_4$.

3) розв'яжемо нерівність (1.4) в кожній області

а) розглянемо область D_1. Очевидно, що координати всіх точок цієї області задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a < 0 \\ x + a + 1 \ge 0 \end{cases}.$$

Перевірити цей факт можна аналогічно тому, як ми це робили раніше. Тому маємо, що в області D_1 нерівність (1.4) набуде вигляду:

$$(-x + a + x + a + 1 \geq 3) \Leftrightarrow (a \geq 1).$$

Тобто розв'язком нерівності (1.4) буде множина всіх точок області D_1, обмежена лініями AA_1 , A_1D_1 і D_1D не включаючи лінію D_1D .

б) розглянемо область D_2. Координати всіх її точок задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a \geq 0 \\ x + a + 1 > 0 \end{cases}.$$

Тому в цій області нерівність (1.4) набуде вигляду:

$$|x - a + x + a + 1 \geq 0) \Leftrightarrow (a = x).$$

Тобто розв'язками нерівності (1.4) будуть координати точок області D_2 ,обмежені лініями D_1D , D_1B_1, B_1B , причому точки лінії B_1B не є розв'язками.

в) розглянемо тепер область D_3 . Координати всіх її точок задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a > 0 \\ x + a + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Тому нерівність (1.4) набуває вигляду:

$$(x - a - x - a - 1 \geq 3) \Leftrightarrow (a \geq -2).$$

Звідси розв'язками нерівності (1.4) будуть координати точок області D_3 ,обмежені лініями C_1C, C_1B_1, B_1B , не включаючи лінії C_1C .

г) так як всі точки області D_4 задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - a \leq 0 \\ x + a + 1 < 0 \end{cases},$$

то нерівність (1.4) тут приймає вигляд:

$$(- x + a - x - a - 1 \geq 3) \Leftrightarrow (x \leq -2).$$

Тобто її розв'язками будуть координати точок області D_4, обмежені лініями C_1C, C_1A_1, A_1A , не включаючи останню лінію.

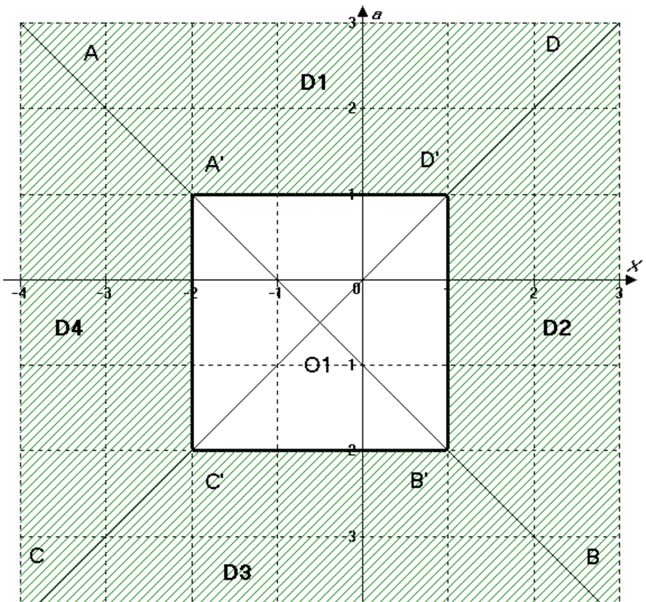


Рис. 4

4) загальним розв'язком нерівності (1.4) є об'єднання всіх його розв'язків в кожній області (рис. 4) і представляє собою множину всіх точок координатної площини без внутрішньої частини квадрата $A_1D_1B_1C_1$.

Запишемо розв'язок у загальноприйнятому вигляді:

при $a \geq 1$ або $a \leq -2$ нерівність справджується для всіх $x \in R$

при $-2 < a < 1$ $x \in \,]-\infty; -2[\cup] 1; +\infty[$.

Розглянемо тепер приклади розв'язування нерівностей типу (II), у яких деякі з чисел a_1, b_1 або c_1 є ненульовими, або всі a_2, b_2, c_2 не дорівнюють 0.

Приклад 5. Розв'язати нерівність:

$$|x - 2a| + |3x + a + 1| < 2x - a + 9 \qquad (1.5)$$

Згідно наведеної у вступі схеми маємо:

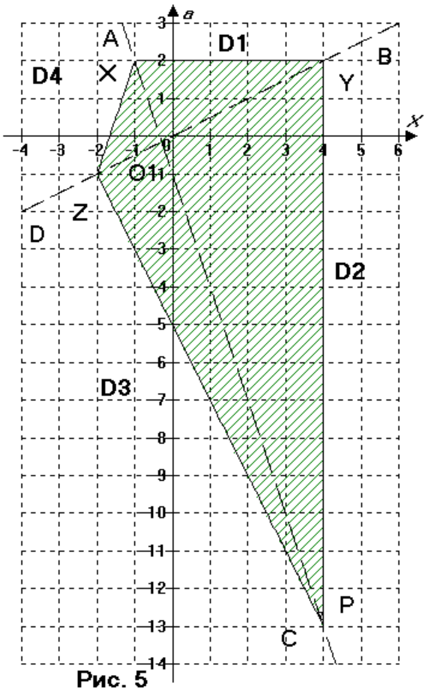


Рис. 5

1) $x - 2a = 0$, $3x + a + 1 = 0$;

2) зобразимо множину точок, координати яких задовольняють вказаним рівнянням, на координатній площині xOa (див. рис. 5). Це будуть прямі лінії DB та AC, які розбивають координатну площину на 4 області D_1 ,D_2 ,D_3 ,D_4 (відповідно, кути AO_1B, BO_1C ,CO_1D, DO_1A). Умовимося,що границі областей (промені) $O_1A \in D_1$ $O_1B \in D_2$,$O_1C \in D_3$,$O_1D \in D_4$.

3) розв'яжемо нерівність (1.5) в кожній області.

а) розглянемо область D_1. Очевидно, що координати точок цієї області задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2a < 0 \\ 3x + a + 1 \geq 0 \end{cases}.$$

Тому в цій області нерівність (1.5) буде мати вигляд:

$$(-x + 2a + 3x + a + 1 < 2x - a + 9) <=> (a < 2).$$

Звідси в D_1 розв'язком нерівності (1.5) буде множина точок, обмежена сторонами трикутника XO_1Y, причому без точок, що належать сторонам трикутника XY і O_1Y (рис. 5)

б) координати всіх точок області D_2 задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2a \geq 0 \\ 3x + a + 1 > 0 \end{cases}.$$

Тут нерівність (1.5) набуде вигляду:

$$(x - 2a + 3x + a + 1 < 2x - a + 9) \Leftrightarrow (x < 4).$$

Тобто в області D_2 розв'язком нерівності (1.5) буде внутрішня область трикутника YO_1P з його стороною O_1Y.

в) так як координати всіх точок області D_3 задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2a > 0 \\ 3x + a + 1 \leq 0 \end{cases},$$

то в ній нерівність (1.5) приймає вигляд:

$$(x - 2a - 3x - a - 1 < 2x - a + 9) \Leftrightarrow (a > -2x - 5).$$

Тому розв'язком нерівності (1.5) в даній області буде внутрішня область трикутника PO_1Z з його стороною O_1P.

г) Розглянемо область D_4. Координати всіх її точок задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2a \le 0 \\ 3x + a + 1 < 0 \end{cases}.$$

Так як нерівність (1.5) при цьому набуває вигляду:

$$(-x+2a - 3x - a - 1 < 2x - a + 9) \Leftrightarrow (a<3x+5),$$

то розв'язком її в даній області буде множина всіх внутрішніх точок фігури, обмеженої трикутником XO_1Z в об'єднанні з стороною ZO_1.

4) таким чином, розв'язок (1.5) представляє собою об'єднання всіх розв'язків нерівності на кожній області і має вигляд внутрішньої області чотирикутника $XYPZ$ без його сторін.

Щоб записати загальний розв'язок нерівності (1.5), скористаємося способом, описаним нами при розв'язуванні рівняння (1.2). Шляхом руху уявної прямої, паралельної осі Ox (див. рис. 5), знизу вгору вздовж осі Oa знаходимо залежність зміни множини розв'язків нерівності (заштрихованої частини координатної площини) від конкретного значення параметра a.

Наприклад, проводимо уявну пряму $a=-10$. Вона перетинає область, що зображає множину розв'язків нерівності (1.5), по деякому відрізку. Щоб знайти лівий і правий кінці цього відрізку, треба визначити, якими лініями обмежена в цьому місці множина розв'язків. Це лінії ZP і YP ,що мають формули:

$$a=-2x - 5, \qquad x=4.$$

Отже, при $a=-10$ розв'язком нерівності (1.5) будуть точки відрізка $[\frac{5}{2}\ ;\ 4]$.Так само знаходимо розв'язки цієї нерівності для інших значень параметра a, звертаючи увагу на лінії, які обмежують множину розв'язків, і кількість цих розв'язків.

Запишемо відповідь у загальноприйнятому вигляді:

при $-13< a \le -1$ $\qquad \frac{a+5}{-2} < x < 4$,

при $-1< a < 2$ $\qquad \frac{a-5}{3} < x < 4$,

при $a \ge -2$ або $a \le -13$ нерівність (1.5) не має розв'язків.

Розглянемо тепер приклад розв'язування нерівності другого степеня, в якій параметр знаходиться під знаком модуля.

Приклад 6. Розв'язати нерівність:

$$|x^2-x+a|+|x+a-3| \le x^2-2a \qquad (1.6)$$

1) прирівнюючи до нуля вирази, що стоять під знаком модуля,одержуємо рівняння:

$$x^2-x+a=0, \qquad x + a - 3 = 0.$$

2) з першого рівняння маємо $a=-x^2+x$. Це парабола, т. $O_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ − її вершина, а вітки параболи направлені у від'ємному напрямку осі Oa. З другого

рівняння маємо $x+a-3=0$ – пряма лінія. Параболу і пряму лінію зображено пунктиром на рис. 6.

Координатна площина розбита прямою AA_1 і параболою CO_1E на 3 області: D_1, D_2, D_3. Умовимося віднести до області D_1 пряму, а параболу – до D_2.

2) розв’яжемо нерівність (1.6) в кожній області.

а) розглянемо область D_1. Координати всіх її точок задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-x+a>0 \\ x+a-3\geq 0 \end{cases}.$$

Розкривши модулі і зробивши елементарні перетворення, одержимо розв’язок нерівності (1.6) в області D_1:

$$a\leq \frac{3}{4}.$$

Тобто розв’язком нерівності (1.6) в області D_1 є координати точок, що лежать всередині кута AMB причому $N\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{-3+\sqrt{6}}{2}\right)$, $M\left(\frac{9}{4};\frac{3}{4}\right)$, $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

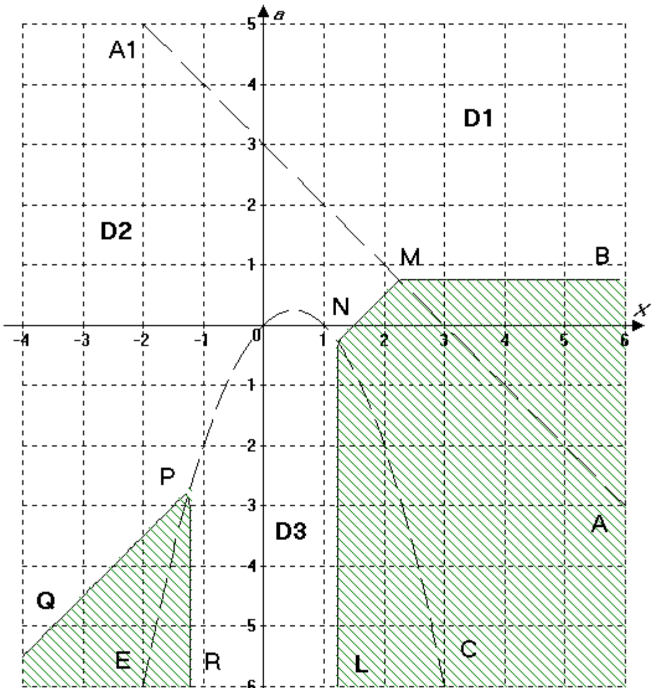


Рис. 6

б) враховуючи, що в області D_2 координати всіх точок задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-x+a\geq 0 \\ x+a-3<0 \end{cases},$$

отримаємо такий розв’язок нерівності (1.6):

$$a\leq x-\frac{3}{2}.$$

На рис. 6 це такі дві множини точок: множина, обмежена лініями QP і PE; множина, обмежена лініями CN, NM та MA (точки останньої лінії не є розв’язками нерівності (1.6) в області D_2).

в) так як координати всіх точок області D_3 задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-x+a<0 \\ x+a-3<0 \end{cases},$$

то, розкривши модулі та здійснивши перетворення нерівності (1.6), одержимо:

$$|x|\geq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Цей розв’язок на рис. 6 зображується такими множинами точок: множина, обмежена лініями PR та EP (сама лінія EP не входить до розв’язку); множина, обмежена лініями LN та NC (сама лінія NC не входить до розв’язку);

4) таким чином, розв'язком нерівності (1.6) буде об'єднання всіх її розв'язків на кожній області D_1, D_2, D_3. Запишемо відповідь до прикладу:

при $a \le -\frac{3+\sqrt{6}}{2}$ $\quad x \in \left[a+\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right[$,

при $-\frac{3+\sqrt{6}}{2} < a \le \frac{-3+\sqrt{6}}{2}$ $\quad x \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right[$

при $\frac{-3+\sqrt{6}}{2} < a \le \frac{3}{4}$ $\quad x \in \left[a+\frac{3}{2};+\infty\right[$

при $a > \frac{3}{4}$ нерівність (1.6) не має розв'язків.

Розглянемо розв'язування рівнянь та нерівностей, у яких вирази під знаком модуля не є многочленами:

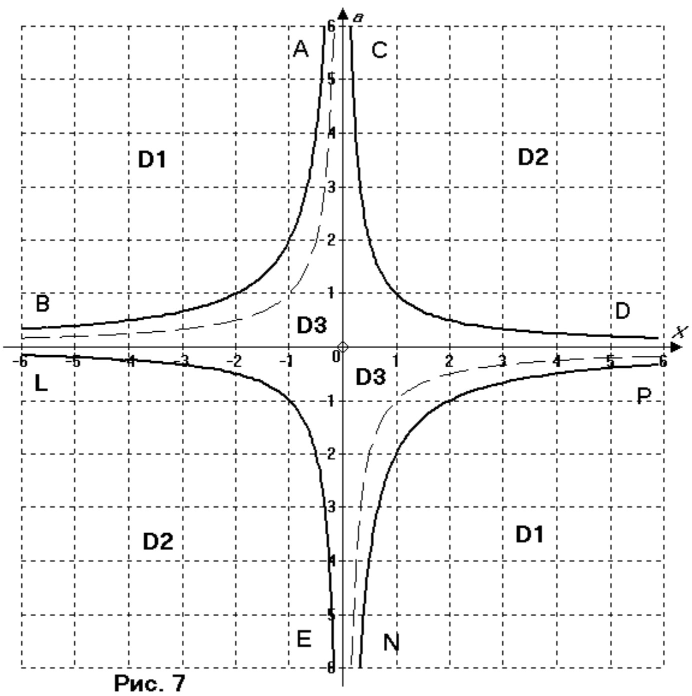


Рис. 7

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$2^{|ax|} + 2^{|ax+1|} = 6$ (1.7)

1) прирівняємо до нуля вирази, які містяться під знаком модуля:

$ax=0,\ ax+1=0$

2) Побудуємо множину точок, які задовольняють ці рівняння. Це будуть : осі координат Ox, Oa та гіпербола $a=\frac{1}{x}$ (рис. 7).

Вся координатна площина виявилася розбитою на три знакосталі області D_1, D_2, D_3. Взагалі кажучи, всього областей буде 6, але, врахувавши, що в 3 парах з них вирази під знаком модуля мають однакові знаки, то виділимо лише *три різні області* (див. рис. 7). Домовимося, що вітки гіперболи належать області D_1**,** а осі координат – області D_2**.**

3) розв'язуємо рівняння (1.7) в кожній області:

а) розглянемо область D_1**.** Очевидно, що координати всіх точок області задовольняють системі рівностей:

$$\begin{cases} ax < 0 \\ ax+1 \le 0 \end{cases}.$$

Тому рівняння (1.7) набуде вигляду:

$$(2^{-ax}+2^{-ax-1}=6) \Leftrightarrow (a=-\frac{2}{x}).$$

Тобто, розв'язком рівняння (1.7) в області D_1 будуть координати точок гіперболи $a=-\frac{2}{x}$ (дуги AB та PN на рис. 7).

б) Так як всі очки області D_2 задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} ax \geq 0 \\ ax+1>0 \end{cases},$$

то рівняння (1.7) набуде вигляду:

$$(2^{ax}+2^{ax+1}=6) \Leftrightarrow (a=\frac{1}{x}).$$

Тобто розв'язком рівняння (1.7) в області D_2 будуть координати точок гіперболи $a=\frac{1}{x}$ (дуги *CD* та *LE* на рис. 7).

в) оскільки координати всіх точок області D_3 задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} ax<0 \\ ax+1>0 \end{cases},$$

то рівняння (1.7) не має розв'язків в області D_3 (так як $|ax|>1$).

4) Загальний розв'язок рівняння (1.7) є об'єднанням всіх його розв'язків на кожній з областей і має такий вигляд (див. рис. 7).

при $a=0$ рівняння немає розв'язків,

при всіх інших a рівняння має два розв'язки: $x=-\frac{2}{a}, x=\frac{1}{a}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

$$|a\text{-}sinx|=a \qquad (1.8)$$

1) $a-sin=0$

2) побудуємо множину точок, які задовольняють цьому рівнянню. Це синусоїда (зображена пунктиром), яка розбила площину на дві області D_1 і D_2 (див. рис. 8)

3) розв'язуємо рівняння (1.8) в кожній області.

а) в області D_1 координати всіх точок задовольняють умові:

$$a-\sin x \geq 0,$$

тому рівняння (1.8) набуде вигляду:

$$(\sin x = 0) \Leftrightarrow (x=\pi\kappa, \quad \kappa \in Z);$$

б) так як в області D_2 координати всіх точок задовольняють нерівності:

$$a-\sin x<0,$$

то рівняння (1.8) набуде вигляду:

$$(\sin x - a = a) \Leftrightarrow (a=\frac{1}{2}\sin x).$$

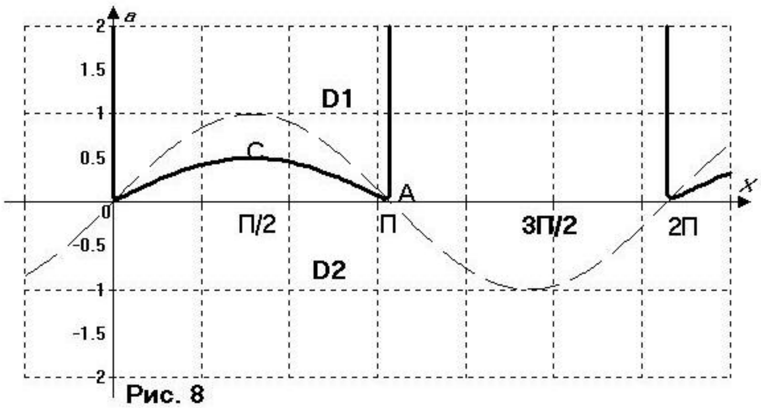


Рис. 8

На рис. 8 це зображено дугою *OCA*, що буде повторюватися через період 2π.

4) загальним розв'язком рівняння (1.8) є об'єднання його розв'язків на обох областях і має такий вигляд (див. рис. 8)

при $a<0$ рівняння (1.8) не має розв'язків, при $a=0$ $x=\pi\kappa, \quad \kappa \in Z,$

при $0 \le a \le 0,5$ $x = (-1)^k \arcsin(2a) + \pi\kappa, \ \kappa \in Z$ або $x=\pi\kappa, \quad \kappa \in Z,$

при $a=0,5$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\kappa, \ \kappa \in Z$ або $x=\pi\kappa, \quad \kappa \in Z,$

при $a>0$ $x=\pi\kappa, \quad \kappa \in Z.$

Розглянемо тепер приклади розв'язування трансцендентних нерівностей: Приклад 9. Розв'язати нерівність:

$$3^{|ax+1|} + 3^{|ax-2|} \ge 12 \qquad (1.9)$$

1) згідно запропонованої схеми розв'язування маємо: $ax+1=0, \ ax-2=0.$

2) побудуємо множину точок, які задовольняють цим рівнянням (рис. 9). Це гіперболи, які розбивають координатну площину на три знакосталі області: D_1, D_2, D_3. Домовимось, що вітки першої гіперболи належать області D_3, а вітки другої – області D_2.

3) розв'яжемо нерівність (1.9) в кожній області:

а) Розглянемо область D_1: координати всіх її точок задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} ax+1>0 \\ ax-2<0 \end{cases}.$$

Тому нерівність (1.9) в області D_1 набуде вигляду:

$$(3^{ax+1} + 3^{2-ax} \ge 12) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax \ge 1 \\ ax \le 0 \end{array}\right..$$

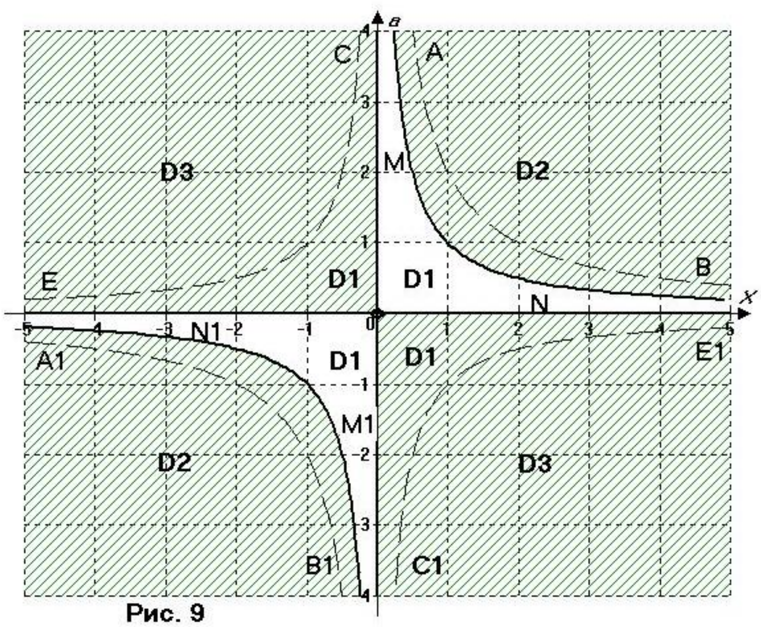


Рис. 9

Тобто розв'язками нерівності (1.9) є множина точок, обмежена гіперболою $a=\dfrac{1}{x}$ (включаючи точки самої гіперболи) і гіперболою $a=\dfrac{2}{x}$, а також гіперболою $a=-\dfrac{1}{x}$ та осями координат, включаючи останні.

б) так як всі точки області D_2 задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} ax+1>0 \\ ax-2\ge 0 \end{cases},$$

то нерівність (1.9) на множині точок області набуває вигляду:

$$(3^{ax+1} + 3^{ax-2} \ge 12) \Leftrightarrow (ax \ge \log_3 \frac{27}{7}).$$

Тобто в області D_2 нерівність (1.9) має розв'язками усі точки області, крім точок,що містяться між гіперболами $a = \frac{2}{x}$ та $a = \frac{\log_3 \frac{27}{7}}{x}$ (див. рис. 9).

в) розглянемо тепер область D_3. Координати всіх її точок задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} ax + 1 \le 0 \\ ax - 1 < 0 \end{cases},$$

тому нерівність (1.9) в множині точок цієї області матиме вигляд:

$$(3^{-ax-1} + 3^{1-ax} \ge 30) \Leftrightarrow (ax \le \log_3 \frac{7}{27}).$$

Тобто розв'язком нерівності (1.9) буде вся множина точок області D_3.

5) аналогічно попереднім випадкам шукаємо загальний розв'язок, який буде об'єднанням розв'язків нерівності (1.9) на кожній області і запишеться так: (див. рис. 9):

при $a = 0$ нерівність має розв'язки $x \in \Re$;

при $a < 0$ $\quad x \in \left(-\infty; \frac{\log_3 \frac{27}{7}}{a}\right] \cup [0; +\infty)$;

при $a > 0$ $\quad x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{\log_3 \frac{27}{7}}{a}; +\infty\right)$.

Розглянемо можливості застосування запропонованого способу до розв'язування логарифмічних нерівностей, що містять під знаком модуля змінну і параметр:

Приклад 10. Розв'язати нерівність:

$$|a - \log_2 x| > 2 \qquad (1.10)$$

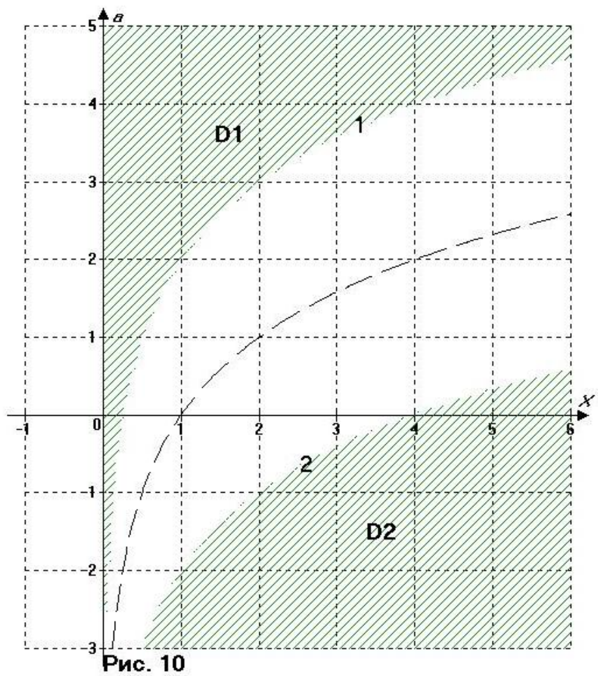


Рис. 10

1) згідно наведеного вище способу розв'язування: $a - \log_2 x = 0$.

2) зобразимо в системі координат xOa множину точок які задовольняють цьому рівнянню. Це відомий графік логарифмічної функції, який розділить координатну площину на дві області: D_1 і D_2 (рис. 10).Зауважимо, що область D_1 не може включати ті точки, координата x яких від'ємна або рівна нулю, так як треба врахувати область допустимих значень нерівності (1.10):

$$x > 0.$$

Домовимося, що сам графік функції $a = \log_2 x$ належить області D_2.

3) розв'яжемо нерівність (1.10) на кожній з областей.

а) так як в області D_1 для всіх точок справджується нерівність:

$$a - log_2 > 0,$$

то нерівність (1.10) в області набуде вигляду:

$$(-log_2 x + a > 2) \Leftrightarrow (a > 2 + log_2 x).$$

Тобто розв'язком будуть координати точок області D_1, обмежених віссю Oa і графіком 1 (див. рис. 10), не включаючи обидві лінії.

б) оскільки для всіх точок області D_2 справджується нерівність:

$$a - log_2 x \le 0,$$

то нерівність (1.10) набуде вигляду:

$$(log_2 x - a > 2) \Leftrightarrow (a < log_2 x - 2).$$

Тому розв'язком її будуть координати точок області D_2, що лежать нижче графіка 2, не включаючи його.

5) знайдемо загальний розв'язок, об'єднавши розв'язки нерівності (1.10) на кожній області. Він може бути записаний в такому вигляді:

$$\forall\, a \in R, \quad x \in \left[0;2^{a-2}\right] \cup \left[2^{a+2};+\infty\right].$$

Узагальнимо наші міркування щодо можливостей використання способу розв'язування рівнянь та нерівностей, які містять під знаком модуля невідому і параметр.

Спосіб розв'язування таких рівнянь і нерівностей, описаний нами у вступній частині, є універсальним у використанні для розв'язування рівнянь виду (I) і нерівностей виду (II). Тобто, всі рівняння і нерівності таких видів можна розв'язувати запропонованим способом.

Розглянемо тепер рівняння і нерівності такого виду:

$$|\,\varphi_1(x,a)| + |\,\varphi_2(x,a)| + \varphi_3(x,a) = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$|\,\varphi_1(x,a)| + |\,\varphi_2(x,a)| + \varphi_3(x,a) \ge 0\ (\le 0), \qquad \text{(IV)}$$

де $\varphi_1(x,a)$, $\varphi_2(x,a)$, $\varphi_3(x,a)$ – деякі вирази, які містять невідому величину і параметр а.

Зробимо узагальнення щодо можливостей використання запропонованого методу для розв'язування рівнянь типу (III) і нерівностей типу (IV):

Якщо лінії:

$$\varphi_1(x,a)=0,\ \ \varphi_2(x,a)=0,\ \varphi_3(x,a)=0,$$
$$\varphi_1(x,a) + \varphi_2(x,a) + \varphi_3(x,a)=0,$$
$$--\varphi_1(x,a) + \varphi_2(x,a) + \varphi_3(x,a)=0,$$
$$\varphi_1(x,a) -- \varphi_2(x,a) + \varphi_3(x,a)=0,$$
$$--\varphi_1(x,a) -- \varphi_2(x,a) + \varphi_3(x,a)=0$$

відносно легко побудувати (хоча б схематично), то для розв'язування рівнянь типу (III) або нерівностей типу (IV) можна застосувати наведений у вступній частині алгоритм. Якщо хоча б одну з перелічених ліній побудувати складно, то наведений спосіб для рівнянь та нерівностей застосувати важко.

§2. Використання властивостей функцій у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей.

Реалізація підходу до навчання розв'язування рівнянь та нерівностей через процес інтеграції знань та умінь вимагає актуалізації знань з різних розділів елементарної математики. Тут потрібні знання прийомів та способів розв'язування рівнянь та нерівностей, властивостей функцій (області визначення та значень, монотонність, періодичність, обмеженість, неперервність та ін.), способів їх дослідження, дій (множення, ділення, піднесення до степеня, логарифмування, потенціювання та ін.) над різними алгебраїчними виразами та інше. По суті такий підхід до навчання розв'язування рівнянь і нерівностей інтегрує увесь курс алгебри за середню школу. Йдеться про формування загальної предметно-методичної здібності учня чи майбутнього вчителя до розв'язування рівнянь та нерівностей шляхом використання аналітичного розв'язання або графічного представлення умов, які задані рівнянням чи нерівністю. З іншого боку – графічне розв'язування рівнянь чи нерівностей потребує зворотного процесу – а саме трансляції знайденого і представленого у графічному вигляді розв'язку в аналітичний або чисельний вигляд. Творчість тут в тому, щоб, виходячи з графічного розв'язку конкретного рівняння чи нерівності, конкретного способу розв'язування як графічної ілюстрації умов рівняння чи нерівності учень (студент) «перетворив» свої інтегровані знання як «можливі» в актуальну дійсність у вигляді матеріальних знакових систем.

З цього погляду учень (студент) відразу вводиться в смислово-семантичний простір «можливостей», а не «необхідностей», в якому є тільки «можливості» створення алгоритмів розв'язування на основі знань та дослідження в кожному конкретному випадку особливостей тих чи інших перетворень рівнянь чи нерівностей. Такий підхід є протилежним до підходу, при якому домінують намагання створити «набір алгоритмів та прийомів», який дозволив би вірно розв'язати той чи інший приклад.

Проілюструємо викладені вище думки на прикладі розв'язування нерівностей з параметром такого вигляду:

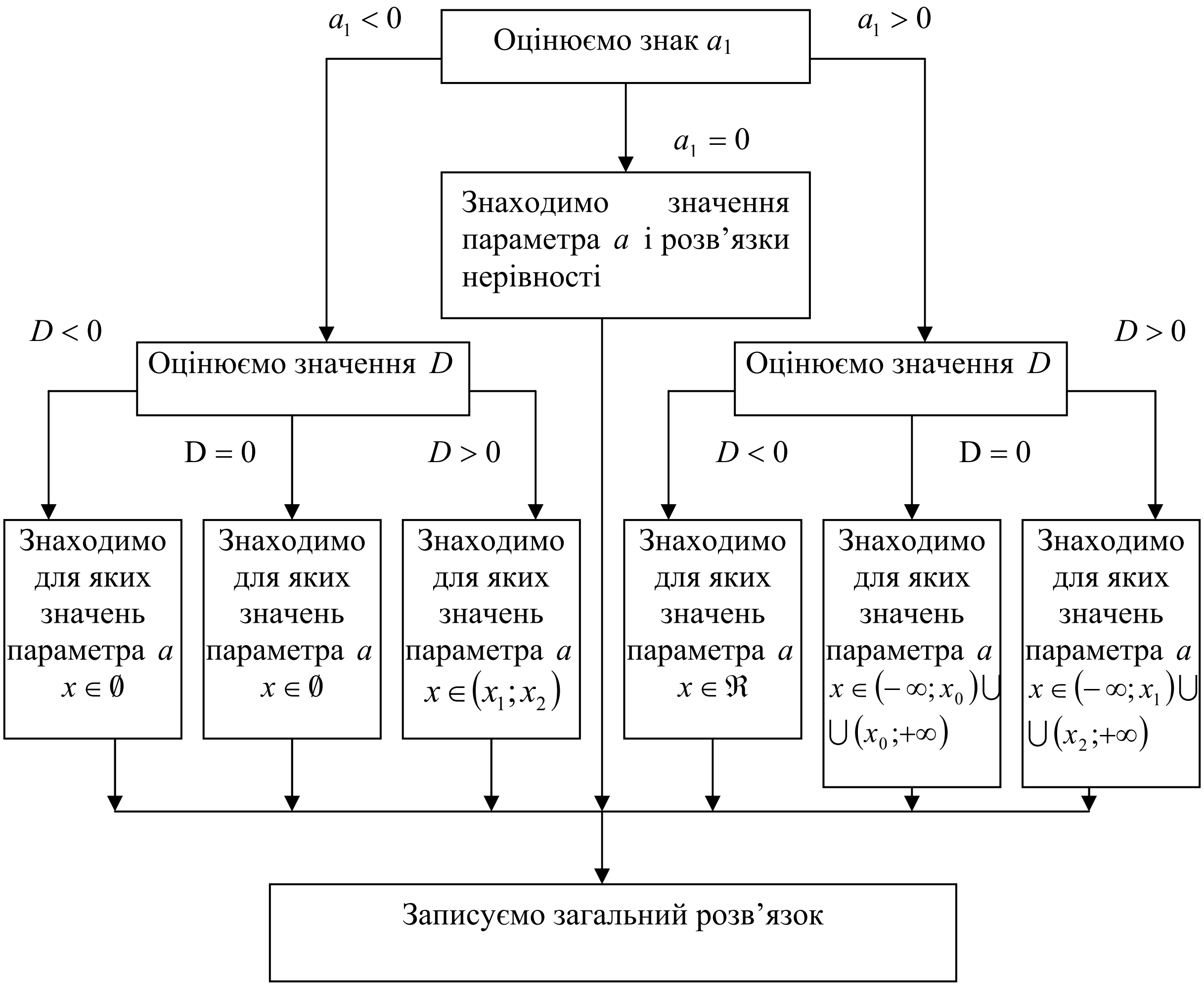
$$(k_1a+b_1)x^2+(k_2a+b_2)x+(k_3a+b_3)\geq 0 \qquad (I)$$

де x – змінна, a – параметр, k_i, та b_i – дійсні числа.

Представимо загальний вигляд аналітичного розв'язання. Очевидно, що ліва частина нерівності представляє собою квадратний тричлен. Тоді нерівність (I) можна записати у вигляді:

$$a_1x^2+a_2x+a_3\geq 0, \text{ де } a_1=k_1a+b_1\neq 0,\ a_2=k_2a+b_2,\ a_3=k_3a+b_3.$$

Загальний вигляд алгоритму розв'язування отриманої нерівності представимо у вигляді блок-схеми, поклавши, що $D=a_2^2-4a_1a_3$, а $x_1(a)$ та $x_2(a)$ – корені тричлена (покладемо, що $x_1<x_2$) у випадку $D\succ 0$, $x_0(a)$ – корінь тричлена у випадку $D=0$.



Проілюструємо викладені вище думки на прикладі розв'язування конкретної нерівності з параметром.

Приклад 1. Розв'язати нерівність (x – невідома, a –параметр):

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a \succ 0 \qquad (2.1)$$

I. Аналітичний спосіб.

Очевидно, що ліва частина нерівності представляє собою квадратний тричлен. Тоді нерівність (2.1) можна записати у вигляді:

$a_1x^2 + a_2x + a_3 > 0$, де $a_1 = a-2$; $a_2 = -2(a+3)$; $a_3 = 4a$.

Згідно наведеної блок-схеми розв'яжемо приклад:

1) $a_1 = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$. Тоді $x < 0{,}8$.

2) $a_1 = a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2$.

Знайдемо $D = 4(a+3)^2 - 16a(a-2) = -12a^2 + 56a + 36 = -4(3a^2 - 14a - 9)$.

Розглянемо випадки (згідно блок-схеми):

a. $D < 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a - 9 > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{7-2\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{7+2\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$.

Враховуючи умову $a > 2$, маємо, що при $a \in (\frac{7+2\sqrt{19}}{3}; +\infty)$ $x \in \Re$.

b. $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3} \\ a=\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3} \end{array}\right.$. Отже при $a=\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}$ $\quad x\in\Re\setminus\left\{\dfrac{a+3}{a-2}\right\}$.

c. $D>0 \Leftrightarrow a\in\left(\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3};\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)$. Отже при $a\in\left(2;\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)$

$$x\in\left(-\infty;\frac{a+3-\sqrt{-3a^2+4a+9}}{a-2}\right)\bigcup\left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+4a+9}}{a-2};+\infty\right)$$

3) $a_1=a-2<0\Rightarrow a<2$. Аналогічно до випадку 2 маємо:

a. $D<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3};+\infty\right)$. Тому при $a\in\left(-\infty;\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}\right)$ (враховуючи умову $a<2$) $x\in\emptyset$.

b. $D=0$ Очевидно, що при $a=\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}$ $\quad x\in\emptyset$

c. Якщо $D>0$, то при $a\in\left(\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3};2\right)$

$$x\in\left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};\frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right)$$

Об'єднаємо випадки 1-3 для запису загальної відповіді:

$$(2.2)\left[\begin{array}{l} при\cdot a\le\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}\cdot x\in\emptyset \\ при\cdot a\in\left(\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3};2\right)\cdot x\in\left(\dfrac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};\dfrac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right) \\ при\cdot a=2\cdot x\in(-\infty;0{,}8) \\ при\cdot a\in\left(2;\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)\cdot x\in\left(-\infty;\dfrac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right)\bigcup\left(\dfrac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};+\infty\right) \\ при\cdot a\ge\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\cdot x\in\Re \end{array}\right.$$

Представимо загальний вигляд графічного способу розв'язання. Запишемо нерівність (I) як рівняння та побудуємо у системі координат *xOa* або *aOx* його графік. Зазначимо, що досить часто цю задачу зручно звести до побудови у системі координат *xOa* графіка функції *a(x)*. Графік розіб'є координатну площину на декілька областей, кожну з яких перевіримо на предмет виконання умови (I), підставивши в цю умову координати довільної точки з кожної області. Нехай крива, що зображує графік функції *a(x),* ділить усю площину на два види областей: D_i і D_j. Координати всіх точок областей D_i задовольняють нерівність (I), а координати всіх точок областей D_j не задовольняють нерівність

(I). Тому для запису розв’язків нерівності (I) достатньо аналітично описати області D_i Для цього знаходимо значення аргументу x при деяких фіксованих значеннях a. Це можна зробити шляхом проектування областей D_i на вісь Ox у залежності від зміни параметра a. Проектування здійснюється рухом деякої прямої, паралельної осі Ox знизу вгору вздовж осі Оa. Відповіддю і буде аналітичний опис тих областей, де умова (I) виконується. Проілюструємо реалізацію цієї ідеї на розв’язуванні нерівності (2.1).

Запишемо приклад у вигляді рівняння $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ і виразимо звідси a:

$$a=\frac{2x^2+6x}{x^2-2x+4} \tag{2.3}$$

Побудуємо у системі координат xOa графік функції, представленої аналітичним записом (2.3). Потім визначимо на площині область, всі точки якої задовольняють умову (2.1), і аналітично опишемо цю область. Для цього виконаємо дослідження:

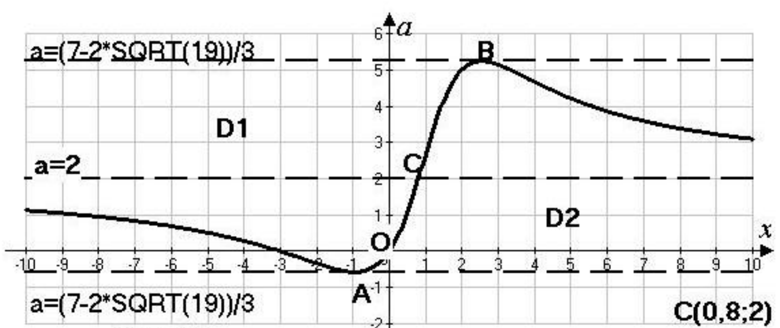


Рис. 11

1) $X=R$

2) Знайдемо точки перетину графіку функції (2.3) з осями координат:

$$x=0 \Rightarrow a=0$$

$$a=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

3) функція має горизонтальну асимптоту $a=2:\lim\limits_{x\to\infty}a(x)=2,$ причому при $a=2 \quad x=0{,}8.$

4) знайдемо точки екстремуму функції $a(x)$:

$$a'(x)=\frac{-10x^2+16x+24}{\left(x^2-2x+4\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4-\sqrt{76}}{-5} \\ x=\dfrac{-4+\sqrt{76}}{-5} \end{array}\right.$$

Очевидно, що при $x\in\left(-\infty;\frac{-4+\sqrt{76}}{-5}\right)\cup\left(\frac{-4-\sqrt{76}}{-5};+\infty\right)$ $a'(x)\prec 0,$ отже, функція $a(x)$ спадна, а при $x\in\left(\frac{-4+\sqrt{76}}{-5};\frac{-4-\sqrt{76}}{-5}\right)$ $a'(x)\succ 0$, а тому функція зростаюча.

Тому, точка $A\left(\frac{-4+\sqrt{76}}{-5};\frac{7-2\sqrt{19}}{3}\right)$ - точка мінімуму функції $a(x)$, а точка $B\left(\frac{-4-\sqrt{76}}{-5};\frac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)$ - точка максимуму функції.

Графік функції *a(x)* зображено на рис. 11. Крива, що зображує графік функції *a(x),* ділить усю площину на дві області: D_1 і D_2. Координати всіх точок області D_1 задовольняють нерівність (2.1). Тому для запису розв'язків нерівності (2.1) достатньо аналітично описати область D_1. Для цього знаходимо значення аргументу *x* при деяких фіксованих значеннях *a*. Це можна зробити шляхом проектування області D_1 на вісь Ох у залежності від зміни параметра *a,* а саме здійснити рух деякої прямої, паралельної осі Ох знизу вгору вздовж осі О*a*. З рис. 11 видно, що описувати треба 5 груп розв'язків: знизу до горизонталі $a=\frac{7-2\sqrt{19}}{3}$ включно (тут розв'язків немає), між горизонталями $a=\frac{7-2\sqrt{19}}{3}$ та $a=2$ (розв'язки нерівності лежать між дугами *QA* та *AC*), горизонталь $a=2$ ($x<0{,}8$), між горизонталлю $a=2$ та горизонталлю $a=\frac{7+2\sqrt{19}}{3}$ включно (частини області D_1 до дуги *CB* та від дуги *BM*), вище горизонталі $a=\frac{7+2\sqrt{19}}{3}$ ($x\in\Re$). При цьому врахуємо, що, розв'язавши рівняння $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2} \\ x_2=\dfrac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2} \end{array}\right.$$

і $x_1<x_2$ при $\frac{7-2\sqrt{19}}{3}<a<2$ і $x_1>x_2$ при $2<a<\frac{7+2\sqrt{19}}{3}$.

Отже, загальну відповідь можна записати у вигляді (2.2).

<u>Примітка.</u> Подамо декілька зауважень щодо розв'язування рівняння

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0.$$

Аналітичне розв'язування цього рівняння, виходячи із блок-схеми (або просто враховуючи властивості квадратичної функції), детально описане у літературі. Графічний спосіб розв'язування такого рівняння зводиться лише до аналітичного опису кривої, зображеної на рис. 11 шляхом проектування точок кривої на вісь *Ox* у залежності від зміни параметра:

$$(2.4)\left[\begin{array}{l} при\cdot a<\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}\cdot або\cdot a>\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\cdot x\in\emptyset \\ при\cdot a\in\left(\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3};2\right)\cup\left(2;\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)\cdot x=\dfrac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\cdot або\cdot \\ x=\dfrac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2} \\ при\cdot a=2\cdot x=0{,}8 \\ при\cdot a=\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}\cdot x=\dfrac{-4+\sqrt{76}}{-5} \\ при\cdot a=\dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\cdot x=\dfrac{-4-\sqrt{76}}{-5} \end{array}\right.$$

Зазначимо, що складність аналітичного способу розв'язування рівнянь та нерівностей типу (І) полягає в детальному аналізі "ієрархії" дослідження рівняння чи нерівності, у можливих "перетинах" віток "ієрархії", у потенційних можливостях "недогледіти" певний принциповий випадок, у побудові кінцевої відповіді. Очевидно, що непростим є і геометричний підхід, так як він пов'язаний із дослідженням та побудовою графіку функції *a=a(x)* та з аналітичним тлумаченням розв'язку. Більше того, графічний спосіб можна використовувати лише у випадку можливості побудови графіка функції *a=a(x)* або графіку рівняння *F(a,x)=0*. Але безперечними перевагами геометричного підходу є наочне зображення множини точок *(x;a),* що є розв'язком нерівності (І), значно менша імовірність втрати певного компоненту розв'язку, ілюстрація динаміки (через рух) одержання розв'язку.

З дидактичної точки зору, графічне дослідження рівнянь та нерівностей вимагає:

1. Актуалізації знань з різних тем і навіть розділів шкільного курсу математики.
2. Інтеграції різних знань та умінь навколо проблеми дослідження рівняння чи нерівності з параметром.
3. Створення та актуалізації певного "поля можливостей", знань та умінь, які учневі (студентові) потрібно "перетворити" в актуальну дійсність у вигляді матеріальних знакових систем.

Підхід через інтеграцію знань та умінь в запропонованому нами вигляді є ще одним баченням складної методичної проблеми навчання розв'язування рівнянь і нерівностей в середніх навчальних закладах, а також у вищих педагогічних навчальних закладах. У сукупності з іншими підходами він допоможе створити більш цілісну уяву про процес навчання розв'язування рівнянь і нерівностей.

Приклад 2. *Розв'язати нерівність:*

$$x^2-(3m+1)x-3m-2<0 \tag{2.5}$$

Нерівність (2.5) є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб встановити залежність між розв'язками нерівності (2.5) та параметром *m*. Задачу можна розв'язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

Спосіб 1. Створимо *математичну модель задачі*. Ліва частина нашої нерівності – це квадратний тричлен, у якому x - змінна, а m - параметр. Тому, ліву частину можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв'язання якої приведе до знаходження розв'язків нерівності (2.5). Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданої квадратичної функції:*

$$y=x^2-(3m+1)x-3m-2,$$

які впливають на визначення знаку значень функції.

Скористаємося відомим алгоритмом дослідження властивостей квадратичної функції. Нехай D − дискримінант квадратного тричлена, x_1 та x_2 – його корені (покладемо: $x_1<x_2$). Враховуючи, що коефіцієнт при старшому

члені $1>0$, то маємо, що $y<0$ лише у випадку $D>0$ на проміжку $(x_1;x_2)$. Реалізуємо це в нашій вправі:

$$D=(3m+1)^2+4(3m+2)=9(m+1)^2.$$

Бачимо, що умова $D>0$ виконуватиметься для всіх $m\neq -1$. Знайдемо корені квадратного тричлена:

$$x_{1,2}=\frac{3m+1\pm 3(m+1)}{2}$$

Тому $x_1=-1,\ x_2=3m+2.$ Врахувавши, що при $m>-1$ $x_2>x_1$, а при $m<-1$ $x_2<x_1$, *сформулюємо відповідь*:

$$\left[\begin{array}{l} \textit{при}\quad m\in(-\infty;-1)\quad x\in(3m+2;-1) \\ \textit{при}\quad m\in(-1;+\infty)\quad x\in(-1;3m+2) \\ \textit{при}\quad m=-1\quad x\in\emptyset \end{array}\right. \tag{2.6}$$

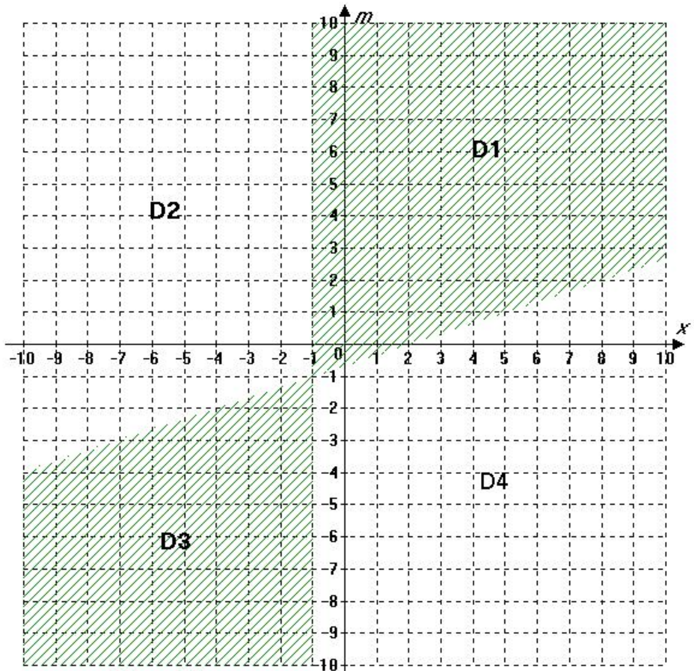


Рис. 12

Спосіб 2. Змінимо *вигляд математичної моделі задачі. Побудуємо графік рівняння*, ліва частина якого співпадає з лівою частиною нерівності (2.5):

$$x^2-(3m+1)x-3m-2=0.$$

Дане рівняння – це *модель вихідної задачі* (2.5). Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо:

$$(x^2-x-2)-(3mx+3m)=0.$$

$$(x+1)(x-2-3m)=0 \tag{2.7}$$

Будуємо графік останнього рівняння у системі координат $x0m$. В результаті побудови ми отримаємо пару прямих: $x=-1;\ \ m=\frac{1}{3}(x-2)$, які розбили (див. рис. 12) всю числову площину на 4 області: D_1,D_2,D_3,D_4.

Визначимо знаки лівої частини нерівності (2.5) в кожній з областей. Прийдемо до висновку, що умовам нерівності задовольняють (див. рис. 12) лише області D_1 і D_3 без їх границі (так як нерівність строга). На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично області D_1 і D_3 так само, як ми показували це в [2], Очевидно, що ми прийдемо до тієї ж відповіді (2.6).

Приклад 3. *Розв'язати рівняння:*

$$2\lg(x+3)=\lg(ax). \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) є вихідною задачею. Відмітимо, що дана задача є вправою з більш розширеною вимогою, ніж вправа № 7.307 із збірника задач [1]. Там вимога така: при яких значеннях a дане рівняння має єдиний корінь. Ми ж поставимо за мету знайти всі розв'язки рівняння (2.8).

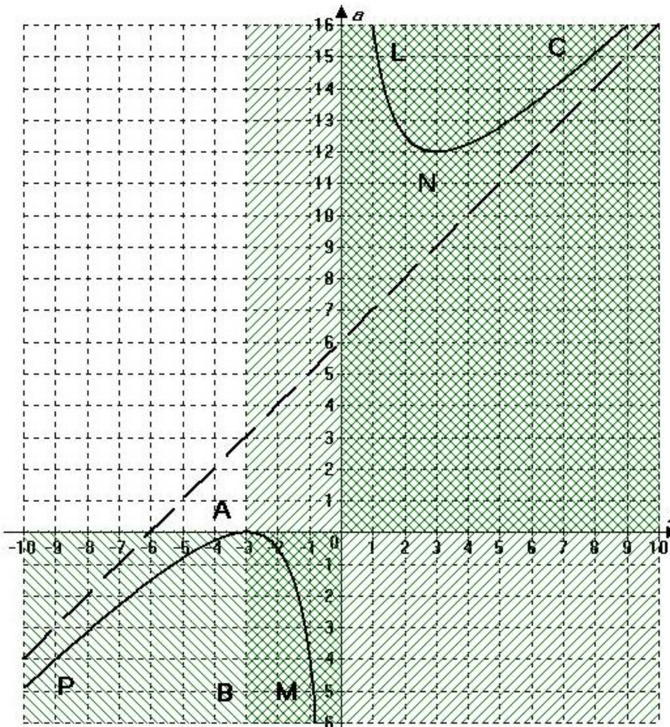


Рис. 13

Побудуємо модель задачі. Для розв'язування даного рівняння використаємо графічний спосіб, зобразивши для цього в координатній площині $x0a$ всі умови, які входять до системи, рівносильної рівнянню (2.8). Ця *рівносильна система умов буде моделлю вихідної задачі:*

$$\begin{cases} x+3>0 \\ ax>0 \\ (x+3)^2=ax \end{cases} \qquad (2.9)$$

Перші дві умови вказують, що рівняння (2.8) матиме розв'язки в частині координатної площини (далі у тексті – область D_1), що є перерізом сукупності першого та третього координатних кутів з півплощиною $x>-3$. На рис. 13 це внутрішня частина прямого кута між додатними півосями $0x$ і $0a$ та частина площини, обмежена від'ємною частиною осі $0a$, відрізком $0A$ та півпрямою AB. Зазначимо, що самі вказані межі не входять до області D_1.

Для одержання розв'язків рівняння (2.8) *проведемо дослідження та побудуємо графік функції,* формулу якої можна отримати з третьої умови системи (2.9):

$$a(x)=\frac{(x+3)^2}{x}. \qquad (2.10)$$

Зауважимо, що тут можна було б обмежитися і побудовою графіка рівняння, заданого в третій умові системи (2.9). Результати будуть ідентичні. Врахуємо той факт, що термін «графік рівняння» не є розповсюдженим у шкільному курсі математики і використовується лише під час вивчення лінійних рівнянь з двома змінними та при проведенні узагальнення і систематизації знань та умінь випускників. Однак ми вважаємо доцільним використовувати це поняття і до нелінійних рівнянь.

1. Область визначення функції $a(x)$ є множина всіх дійсних чисел за виключенням числа 0. Визначивши з формули функції x, маємо, що множина значень функції буде такою:

$$E(a(x))=R\setminus(0;12).$$

2. З'ясуємо точки перетину графіка функцій $a(x)$ з осями координат. Так як $x\neq 0$, то вісь $0a$ графік не перетинає. Легко пересвідчитися, що пряма $x=0$ є асимптотою графіка функцій $a(x)$, причому:

$$\lim_{x\to 0^+} a(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} a(x) = -\infty$$

З віссю *0x* графік має єдину спільну точку *A(−3;0)* (рис. 13).

3. Дослідимо функцію *a(x)* на зростання/спадання:

$$a'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Отже, точки *x =−3* та *x=3* – стаціонарні точки. Перевіривши їх на екстремум, бачимо, що точка *A(−3;0)* є точкою максимуму функції, а точка *C(3;12)* є точкою мінімуму функції *a(x)*.

4. Перевіримо графік функції *a(x)* на наявність похилих асимптот. Як відомо, похила асимптота функції *a=a(x)* задається формулою: $a = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} |a(x) - kx|$.

Провівши елементарні перетворення та обчислення, маємо: *k=1*, *b=6*. Тому лінія, задана формулою $a = x + 6$, є похилою асимптотою функції *a(x)*.

За результатами дослідження побудуємо графік функції (2.10) (рис. 13). Координати точок побудованого графіку і є з врахуванням перших двох умов системи (2.9) розв'язками рівняння (2.8).

Зробимо декілька зауважень:

а) крива *PA* разом з точкою *A* не є розв'язком рівняння (2.8), так як не задовольняє першій умові системи (2.9);

б) області D_1 будуть належати такі ділянки графіка функції *a(x)*: крива *AM* (без точки *A*), та крива *LCN*.

Отже, для *формулювання і трансляції розв'язків рівняння* (2.8) скористаємося алгоритмом, описаним в [2]. Транслюємо отриману графічну відповідь в аналітичний запис:

при $a \in (-\infty;0) \cup \{12\}$ $\quad x = \frac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$;

при $a \in [0;12)$ $\quad x \in \emptyset$;

при $a \in (12;+\infty)$ $\quad x = \frac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$ або $x = \frac{a - 6 - \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$.

Відмітимо, що рис. 13 може бути використаний як для розв'язування вже згаданої задачі із збірника [1] (відповідь до задачі є очевидною – рівняння (2.8) має один корінь при $a \in (-\infty;0) \cup \{12\}$), так і для подальшої роботи над вправою. Змінимо умову задачі, вказавши вимогу розв'язувати не рівняння, а нерівність:

$$2\lg(x+3) > \lg(ax) \qquad (2.11)$$

Очевидно, що розв'язки нерівності (2.11) мають лежати в області D_1. Крім того, неважко визначити, які координати точок, що належать області D_1 задовольняють умові (2.11). Для цього підставимо координати довільних точок, що належать різним частинам області D_1 : частина, що лежить вище кривої *LCN*, позначимо її Z_1, частина між кривою *LCN* та додатними півосями координат (Z_2); частина, обмежена відрізком *A0*, від'ємною частиною осі *0a* та кривою AM (Z_3); частина, що міститься між пів прямою AB та кривою AM (Z_4). Виберемо відповідні точки:

– з області Z_1 – точку з координатами (3; 13): $2\lg(3+3) < \lg(3\cdot 13)$;
– з області Z_2 – точку з координатами (3; 11): $2\lg(3+3) > \lg(3\cdot 11)$;
– з області Z_3 – точку з координатами (-1; -1): $2\lg(-1+3) > \lg((-1)\cdot(-1))$;
– з області Z_4 – точку з координатами (-1; -5): $2\lg(-1+3) < \lg((-1)\cdot(-5))$.

Бачимо, що умову (2.11) задовольняють точки площини, що належать об'єднанню частин Z_2 і Z_3 . Залишається *транслювати і сформулювати відповідь*:

при $a \in (-\infty; 0)$ $\quad x \in \left(\frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2};\, 0 \right)$;

при $a = 0$ $\quad x \in \emptyset$;

при $a \in (0;12)$ $\quad x \in (0;+\infty)$;

при $a = 12$ $\quad x \in (0;3) \cup (3;+\infty)$;

при $a \in (12;+\infty)$ $\quad x \in \left(0; \frac{a-6-\sqrt{a^2-12a}}{2} \right) \cup \left(\frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2} \right)$.

Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, використовуючи рис. 13, правильність відповіді для нерівності:

$$2\lg(x+3) < \lg(ax) \qquad (2.12)$$

Відповідь:

при $a \in (-\infty; 0)$ $\quad x \in \left(-3;\, \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2} \right)$;

при $a \in [0;12]$ $\quad x \in \emptyset$;

при $a \in (12;+\infty)$ $\quad x \in \left(\frac{a-6-\sqrt{a^2-12a}}{2};\, \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2} \right)$.

Важливим моментом використання геометричної картини розв'язку задачі (рис. 13) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв'язування з новими умовами:

- розв'язати нестрогі нерівності (2.11) та (2.12);
- змінити питання до прикладу 3 на таке: при яких значення параметра розв'язки рівняння (2.8) (або нерівностей (2.11) чи (2.12)) є додатними (від'ємними);
- змінити питання до прикладу 3 на таке: при яких значеннях параметра розв'язки рівняння (2.8) лежать у заданому проміжку.

Очевидно, що такий спосіб розв'язування дає можливість посилити вплив функціональної лінії шкільного курсу математики на вдосконалення математичної підготовки учнів. Такий підхід доповнює традиційний. Запропонований нами підхід використання знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами при розв'язуванні математичних задач на основі евристичних алгоритмів має бути одним із різноманітних підходів, що в системі утворюють для суб'єкта навчання поле можливостей, необхідне для свідомого прийняття рішень у процесі вирішення математичних проблемних ситуацій. Наявність геометричної картини (рис. 13) дозволяє вчителю видозмінювати та трансформувати умову задачі та формувати в учнів елементи творчого та критичного мислення.

Наведемо ще один спосіб розв'язування прикладу 3. Пропонуємо скористатися прикладним комп'ютерним пакетом «Advanced Grafer», за допомогою якого будуватимемо графік рівняння (2.8). Зауважимо, що, на нашу думку, це можна робити лише після того, як основні знання і уміння про властивості функцій та основні способи їх використання до розв'язування математичних задач певною мірою в учнів уже сформовані.

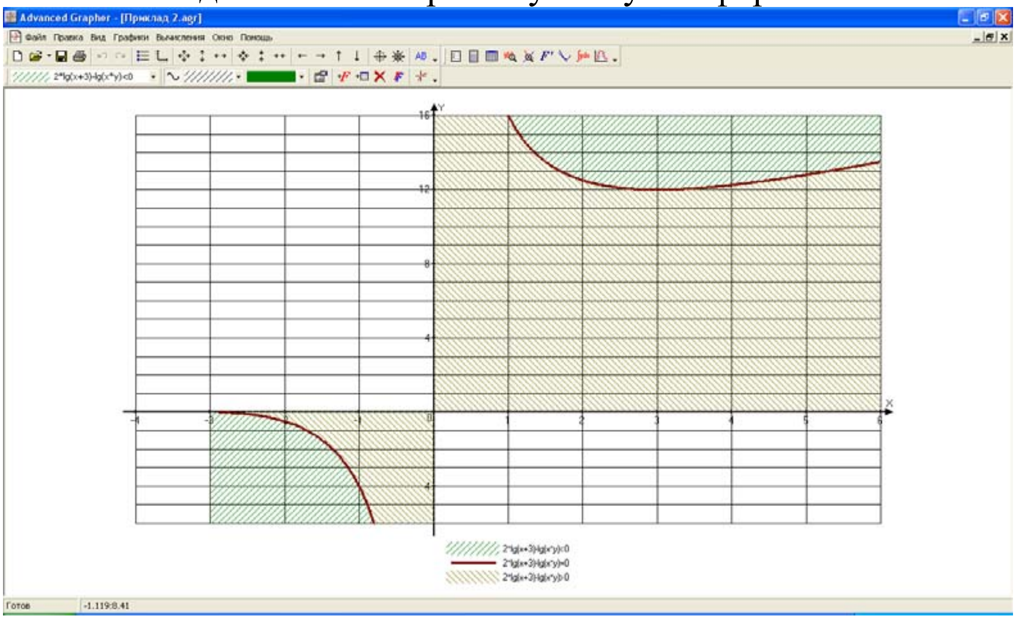


Рис. 14. Розв'язки рівняння (2.8) та нерівностей (2.11) та (2.12).

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію «Додати графік» та вводимо формулу рівняння у вигляді: $2*\lg(x+3)-\lg(x*y)=0$.

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж x та y, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так – змінимо параметр рівняння з a на y.

На робочій області будується *модель рівняння (2.8)* – графік рівняння (див. рис. 14). Залишається лише оформити пропорції міток на осях *0x* та *0y* як *1:4*, задати для більш точного відображення графіка в меню «Параметри побудови» максимальну кількість кроків по горизонталі та вертикалі – 200 та максимальний розрив, рівний 10. Крім того, враховуючи «вікно розміщення» графіка рівняння в системі координат, ми задали його таким: по осі *0x* від -4 до 6, по осі *0y* від -6 до 16.

Очевидно, що побудований графік рівняння ще потребує аналітичної обробки, а саме: визначення «поведінки» рівняння в точці *(-3; 0)*, вираження змінної x з рівняння для запису розв'язків, підтвердження гіпотези про те, що точка *(3; 12)* є точкою екстремуму функції *a(x)* (див. аналітичні викладки вище), з'ясування поведінки графіка біля осі *0y*. Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для рівняння (2.8).

Цей пакет також дозволяє з'ясувати і розв'язування нерівностей (2.11) та (2.12). Графічний їх розв'язок показаний на рис. 14. Після аналітичної обробки цього розв'язку можна прийти до отриманих вище відповідей.

Приклад 4. *Розв'язати систему нерівностей:*

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0 \\ x^2+(a+3)x+3a<0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Система (2.13) є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб встановити залежність між розв'язками системи (2.13) та параметром *а*. Задачу можна розв'язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

Спосіб 1. Створимо *математичну модель задачі*. Ліва частина кожної з нерівностей – це квадратний тричлен, у якому *х* - змінна, *а* - параметр. Тому, ліву частину нерівностей можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв'язання якої приведе до знаходження розв'язків системи (2.13). Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданих квадратичних функцій:*

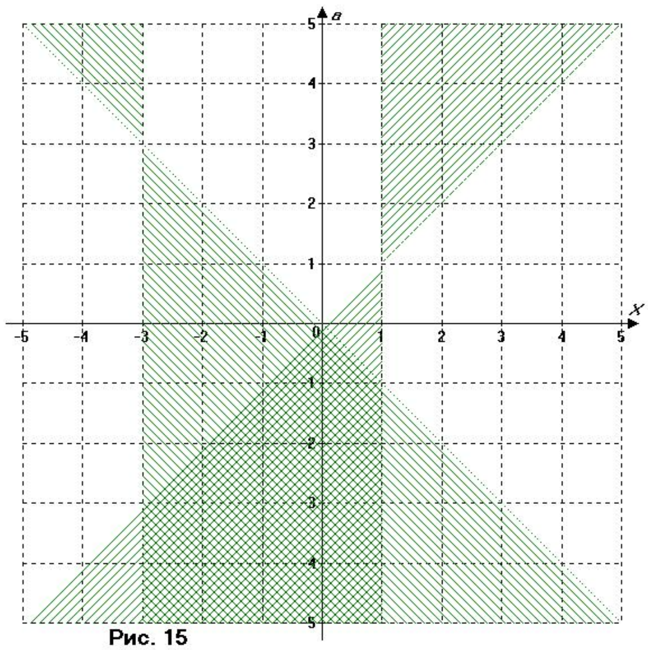


Рис. 15

$$y=x^2-(a+1)x+a\,,$$

$$y=x^2+(a+3)x+3a$$

які впливають на визначення знаку значень функцій.

1) $x^2-(a+1)x+a<0$.

Дискримінант квадратного тричлена відносно *х*, що знаходиться у лівій частині нерівності $D=(a-1)^2\geq 0$. Розглянемо такі випадки:

a) $D=0 \Leftrightarrow a=1$. Очевидно, враховуючи властивості квадратичної функції, можна стверджувати, що при $a=1$ $x\in\emptyset$

b) $D>0 \Leftrightarrow a\in\Re\setminus\{1\}$. При цьому квадратний тричлен буде мати корені $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+1+|a-1|}{2} \\ x=\dfrac{a+1-|a-1|}{2} \end{array}\right.$.

Отже, для першої нерівності системи − при $a<1$ $x\in(1;a)$, при $a>1$ $x\in(a;1)$

2) $x^2+(a+3)x+3a\prec 0$ $D=(a+3)^2-4\cdot 3a=(a-3)^2\geq 0$. Маємо такі випадки:

a) $D=0\Leftrightarrow a=3$. Тому, при $a=3$ $x\in\emptyset$

b) $D\succ 0\Leftrightarrow a\in\Re\setminus\{3\}$. При цьому квадратичний тричлен лівої частини нерівності матиме корені:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-(a+3)+|a-3|}{2} \\ x = \dfrac{-(a+3)-|a-3|}{2} \end{array}\right.$$

Отже, сформулюємо відповідь для другої нерівності − при $a \prec 3 \quad x \in (-3;-a)$, при $a > 3 \quad x \in (-a;-3)$.

Очевидно, що для знаходження розв'язків системи (2.13) треба знайти переріз множин розв'язків кожної нерівності. Для наочності проілюструємо це графічно. Зобразимо в системі координат *xOa* графіки функцій $a = x$ і $a = -x$, та ліній $x = -3$ і $x = 1$, позначимо розв'язки першої нерівності штриховою з нахилом вліво, а розв'язки другої нерівності штриховкою з нахилом вправо. В результаті буде легко побачити спільний розв'язок цієї системи нерівностей як переріз заштрихованих множин (рис. 15).

На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично переріз заштрихованих областей так само, як ми показували це в [2]:

$$\left[\begin{array}{l} при \cdot a \in (-\infty;-3) \cdot x \in (-3;1) \\ при \cdot a \in [-3;-1] \cdot x \in (a;1) \\ при \cdot a \in (-1;0) \cdot x \in (a;-a) \\ при \cdot a \in [0;+\infty) \cdot x \in \emptyset \end{array}\right. .$$

<u>Спосіб 2.</u> Змінимо *вигляд математичної моделі задачі.* Представимо кожну нерівність системи рівнянням і побудуємо його графік. Графіки рівнянь розіб'ють координатну площину на декілька областей, кожну з яких перевіримо на предмет виконання умови системи нерівностей. Відповіддю буде аналітичний опис тих областей, де умова системи нерівностей (2.13) виконується. Отже:

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \text{ та } x^2 + (a+3)x + 3a = 0$$

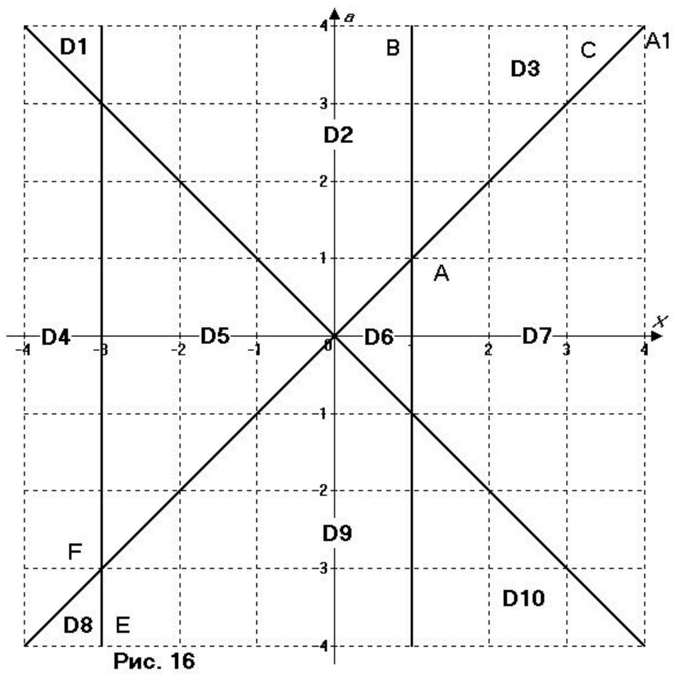


Рис. 16

Дані рівняння – це *модель вихідної задачі* (2.13). Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо:

$(x-1)(x-a) = 0$ для першої нерівності та $(x+3)(x+a) = 0$ для другої.

Побудуємо графіки рівнянь у системі координат *xOa* (рис. 16). Побудовані лінії ділять усю площину на десять областей $D_1, \ldots D_{10}$. Визначивши знаки виразів, що стоять у лівій частині кожної з нерівностей системи, бачимо, що єдина область, яка задовольняє умови системи – це область D_9. Скориставшись для аналітичного опису області D_9 способом, описаним в [2], прийдемо до вказаної вище відповіді.

Очевидно, що рис.16 може бути використаний для подальшої роботи над вправою. Наприклад, даємо учням (студентам) завдання: за результатами графічного способу розв'язування прикладу 4 скласти нові завдання. Очевидно, що коли взяти об'єднання областей D_2, D_4, D_7, то бачимо, що ця множина є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \succ 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a \succ 0 \end{cases}$$

Можлива також робота і з нестрогими нерівностями системи. Наприклад, розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \le 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a \succ 0 \end{cases}$$

буде об'єднання областей D_3, D_8 та ліній *AB, AC* та *EF*.

Важливим моментом використання геометричної картини розв'язку задачі (рис. 16) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв'язування з новими умовами:

- розв'язати системи нестрогих нерівностей;
- змінити питання до прикладу 4 на таке: при яких значення параметра розв'язки системи (2.13) (або інших систем, похідних від даної, є додатними (від'ємними);
- змінити питання до прикладу 4 на таке: при яких значеннях параметра розв'язки системи (2.13) лежать у заданому проміжку.

Наведемо ще один спосіб розв'язування прикладу 4. Пропонуємо скористатися прикладним комп'ютерним пакетом «Advanced Grafer», за допомогою якого будуватимемо графік системи (2.13). Ще раз зауважимо, що це можна робити лише після того, як основні знання і уміння про властивості функцій та основні способи їх використання до розв'язування математичних задач певною мірою в учнів уже сформовані.

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію «Додати графік» та вводимо формули нерівностей системи.

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж x та y, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так – змінимо параметр рівняння з a на y.

На робочій області будується *модель системи (2.13)* – графік системи (див. рис. 17). Залишається лише оформити пропорції міток на осях *0x* та *0y* як *1:4*, задати для більш точного відображення графіка в меню «Параметри побудови» максимальну кількість кроків по горизонталі та вертикалі – 200 та максимальний розрив, рівний 10.

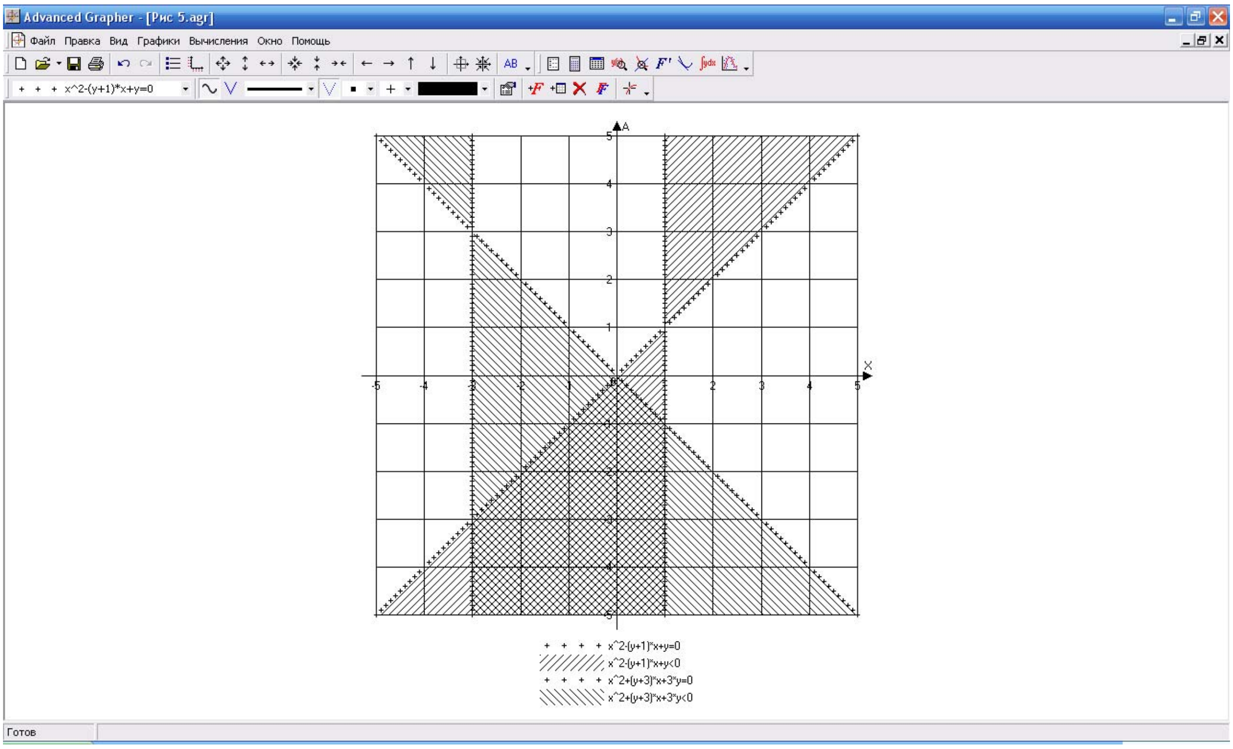


Рис. 17. Розв’язки системи (2.13).

Очевидно, що побудований графік системи ще потребує аналітичного дослідження (див. аналітичні викладки вище). Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для системи (2.13).

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про властивості функцій та уміння вести дослідження цих властивостей різними способами досить часто знаходять своє використання у процесі розв’язування математичних навчальних задач творчого типу. Запропонований нами евристичний алгоритм дозволяє використати знання учнів про властивості функцій та уміння вести їх дослідження для розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для нелінійних рівнянь.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв’язування моделі задачі.

Разом з тим вкажемо, що даний підхід (а саме використання на основі наведеного евристичного алгоритму знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами для розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для відшукання наближених розв’язків нелінійних рівнянь) має обмеження. Зокрема, його використання є проблематичним у тому випадку, коли побудова графіка функції (моделі) та дослідження її властивостей є досить складною задачею.

Приклад 5. *Розв'язати рівняння:*

$$\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0. \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.14) є вихідною задачею. Відмітимо, що дана задача є вправою з більш розширеною вимогою, ніж вправа № 7.306 із збірника задач [1]. Поставимо за мету знайти всі розв'язки рівняння (2.14).

Побудуємо модель задачі. Для розв'язування даного рівняння використаємо графічний спосіб, зобразивши для цього в координатній площині *x0a* всі умови, які входять до системи, рівносильної рівнянню (2.14). Ця *рівносильна система умов буде моделлю вихідної задачі:*

$$\begin{cases} x^2 + 2ax > 0 \\ 8x - 6a - 3 > 0 \\ \dfrac{x^2 + 2ax}{8x - 6a - 3} = 1 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Засобом дослідження моделі буде графічна інтерпретація системи (2.15), яка буде виконуватися в міру проведення аналізу та дослідження кожного з компонентів моделі. Перші дві умови системи реалізуються шляхом побудови таких графіків рівнянь та функцій:

$$x = 0,\ a = -\frac{x}{2} \text{ та } a = \frac{8x - 3}{6}.$$

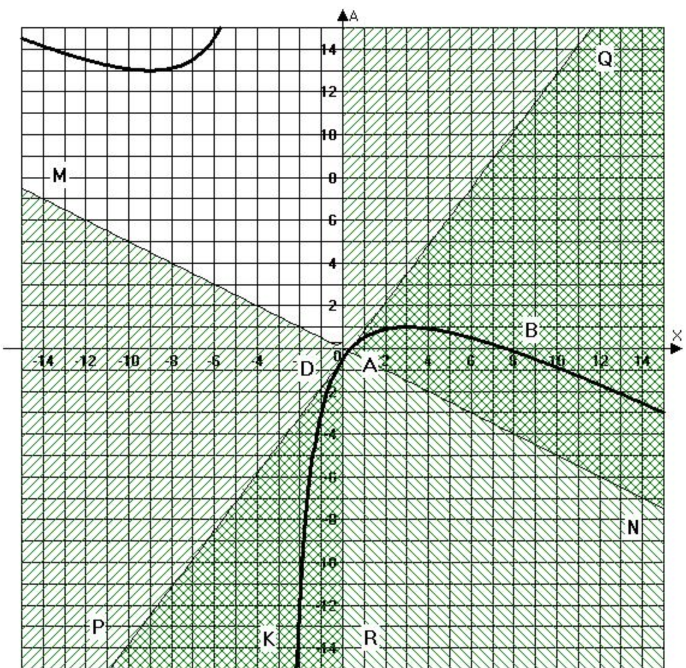


Рис. 18

На рис. 18 це відповідно вісь *0a*, прямі *MN* та *PQ*. Враховуючи перші дві вимоги системи (2.15), очевидним буде висновок, що розв'язки рівняння (2.14) слід шукати в областях, які визначаються кутом *PDR* (т.$D\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ – точка перетину прямої *PQ* та осі *0a*, т. *R* – довільна точка числової осі *0a*, розміщена на її від'ємній частині) та кутом *QAN* (т. $A\left(\frac{3}{11}; -\frac{3}{22}\right)$ – точка перетину прямих *PQ* та *MN*). Надалі у тексті об'єднання цих областей позначимо область D_1 . Для одержання розв'язків рівняння (2.14) проведемо дослідження та побудуємо графік функції *a=a(x)*, формула якої вказана у третій умові системи (2.15):

$$a = \frac{x^2 - 8x + 3}{-2x - 6}, \qquad (2.16)$$

Зауважимо, що тут можна було б обмежитися і побудовою графіка рівняння, заданого в третій умові системи (2.15). Результати будуть ідентичні. Врахуємо той факт, що термін «графік рівняння» не є розповсюдженим у шкільному курсі математики і використовується лише під час вивчення лінійних рівнянь з двома змінними та при проведенні узагальнення і систематизації знань та умінь випускників. Однак ми вважаємо доцільним використовувати це поняття і до нелінійних рівнянь.

1. Область визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел за виключенням числа -3. Відразу з'ясуємо наступні факти:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-8x+3}{-2x-6}=-\infty$$

.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-8x+3}{-2x-6}=+\infty$$

Отже, $x=-3$ – вертикальна асимптота.

2. З'ясуємо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю $0a$ – точка $D\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, з віссю $0x$ – точки $B\left(4+\sqrt{13};\,0\right)$ та $C\left(4-\sqrt{13};\,0\right)$.

3. Дослідимо функцію на зростання/спадання.

$$a'(x)=\frac{-2x^2-12x+54}{(-2x-6)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-9\\ x=3\end{array}\right.$$

При цьому $a(-9)=13$, $a(3)=1$. Визначивши знак похідної на проміжках, маємо:

- функція (2.16) зростає при $x\in(-9;-3)\cup(-3;3)$
- функція (2.16) спадає при $x\in(-\infty;-9)\cup(3;+\infty)$.

4. Перевіримо функцію (2.16) на наявність похилих асимптот. Нехай така асимптота має формулу $a=kx+b$, де:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{x}=-\frac{1}{2};\quad b=\lim_{x\to\infty}\left|\,a(x)-kx\,\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\,a(x)+\frac{x}{2}\right|=\frac{11}{2};$$

Отже, похила асимптота є і задана формулою:

$$a=-\frac{x}{2}+\frac{11}{2}\qquad(2.17)$$

5. За результатами дослідження побудуємо графік функцій (2.16) (рис. 18). Зробимо декілька зауважень:

а) в контексті розв'язування рівняння (2.14) можна знехтувати ділянкою графіка, що лежить лівіше асимптоти $x=-3$, так як ця ділянка не належить області D_1;

б) точка A належить графіку функції;

в) області D_1 будуть належати дві ділянки графіка функцій (2.16): дуга від точки K до точки D (не включаючи останню) та дуга від точки A (не включаючи її) через точки C, B до асимптоти (2.17).

г) графік функції (2.16) не перетне при $x \to \infty$ пряму MN, так як при $x \to \infty$ графік функції наближається до асимптоти (2.17), яка має такий самий коефіцієнт, як і пряма $a = -\frac{x}{2}(MN)$.

Отже, для *формулювання і трансляції розв'язків рівняння* (2.14) скористаємося алгоритмом, описаним в [2]. Транслюємо отриману графічну відповідь в аналітичний запис:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$ $\qquad x_1 = 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}$,

$x_2 = 4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}$;

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$ $\qquad x = 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}$;

при $a \in (1; +\infty)$ $\qquad x \in \emptyset$.

Відмітимо, що рис. 18 може бути використаний як для розв'язування вже згаданої задачі із збірника [1] (відповідь до задачі є очевидною – рівняння (2.14) має один корінь при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$), так і для подальшої роботи над вправою.

Змінимо умову задачі, вказавши вимогу розв'язувати не рівняння, а нерівність:

$$\lg\left(x^2 + 2ax\right) - \lg(8x - 6a - 3) < 0 \qquad (2.18)$$

Нагадаємо про зауваження (а) і не будемо розглядати частину графіка функцій *a=a(x)*, що лежить зліва від асимптоти *x=−3*. Отже, розв'язки нерівності мають лежати в області D_1. Неважко визначити знак лівої частини нерівності (2.18) в різних частинах області D_1. Для цього підставимо координати довільних точок області D_1 так, щоб одна з них була вище графіка функції *a=a(x)*, а друга – нижче графіка. Нехай це будуть точки *X (3; 2)* та *Y(3; 0)*.

Позначивши ліву частину нерівності (2.18) через *F(x; a)*, маємо:

$$F(3;2) = \lg\frac{21}{8} > 0$$

$$F(3;0) = \lg\frac{9}{21} < 0$$

Отже, для розв'язування нерівності (2.18) нам слід описати такі частини області D_1 (див. рис. 18): від дуги *KD* до півпрямої *DR* та від півпрямої *AN* до дуги, що проходить через точки *A*,*C* та *B*. Аналітично це буде виглядати так:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $\qquad x \in \left(4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13};\, 0\right) \cup \left(-2a;\, 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right)$

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$ $\qquad x \in \left(-2a;\, 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right)$

при $a \in \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$ $\qquad x \in \left(4-a-\sqrt{a^2-14a+13};\ 4-a+\sqrt{a^2-14a+13}\right)$

при $a \in [1; +\infty)$ $\qquad x \in \emptyset$

Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, використовуючи рис. 18, правильність відповіді для нерівності:

$$\lg\left(x^2+2ax\right)-\lg\left(8x-6a-3\right)>0 \qquad (2.19)$$

яка виглядає так:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $\quad x \in \left(\frac{6a+3}{8}; 4-a-\sqrt{a^2-14a+13}\right) \cup \left(4-a+\sqrt{a^2-14a+13}; +\infty\right)$

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$ $\qquad x \in \left(4-a+\sqrt{a^2-14a+13}; +\infty\right)$

при $a \in \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$ $\quad x \in \left(\frac{6a+3}{8}; 4-a-\sqrt{a^2-14a+13}\right) \cup \left(4-a+\sqrt{a^2-14a+13}; +\infty\right)$

при $a \in [1; +\infty)$ $\qquad x \in \left(\frac{6a+3}{8}; +\infty\right)$

Важливим моментом використання геометричної картини розв’язку задачі (рис. 22) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв’язування з новими умовами:

- розв’язати нестрогі нерівності (2.18) та (2.19);
- змінити питання до прикладу 5 на таке: при яких значення параметра розв’язки рівняння (2.14) (або нерівностей (2.18) чи (2.19)) є додатними (від’ємними);
- змінити питання до прикладу 5 на таке: при яких значеннях параметра розв’язки рівняння (2.14) лежать у заданому проміжку, або більший від заданого числа.

Очевидно, що такий спосіб розв’язування дає можливість вдосконалення математичної підготовки учнів. Такий підхід доповнює традиційний. Запропонований нами підхід до розв’язування математичних задач має бути одним із різноманітних підходів, що в системі утворюють для суб’єкта навчання поле можливостей, необхідне для свідомого прийняття рішень у процесі розв’язання математичних проблемних ситуацій. Наявність геометричної картини (рис. 18) дозволяє вчителю видозмінювати та трансформувати умову задачі та формувати в учнів елементи творчого та критичного мислення.

Наведемо ще один спосіб розв’язування прикладу 5. Скористаємося прикладним комп’ютерним пакетом «Advanced Grafer», за допомогою якого будуватимемо графік рівняння (2.14).

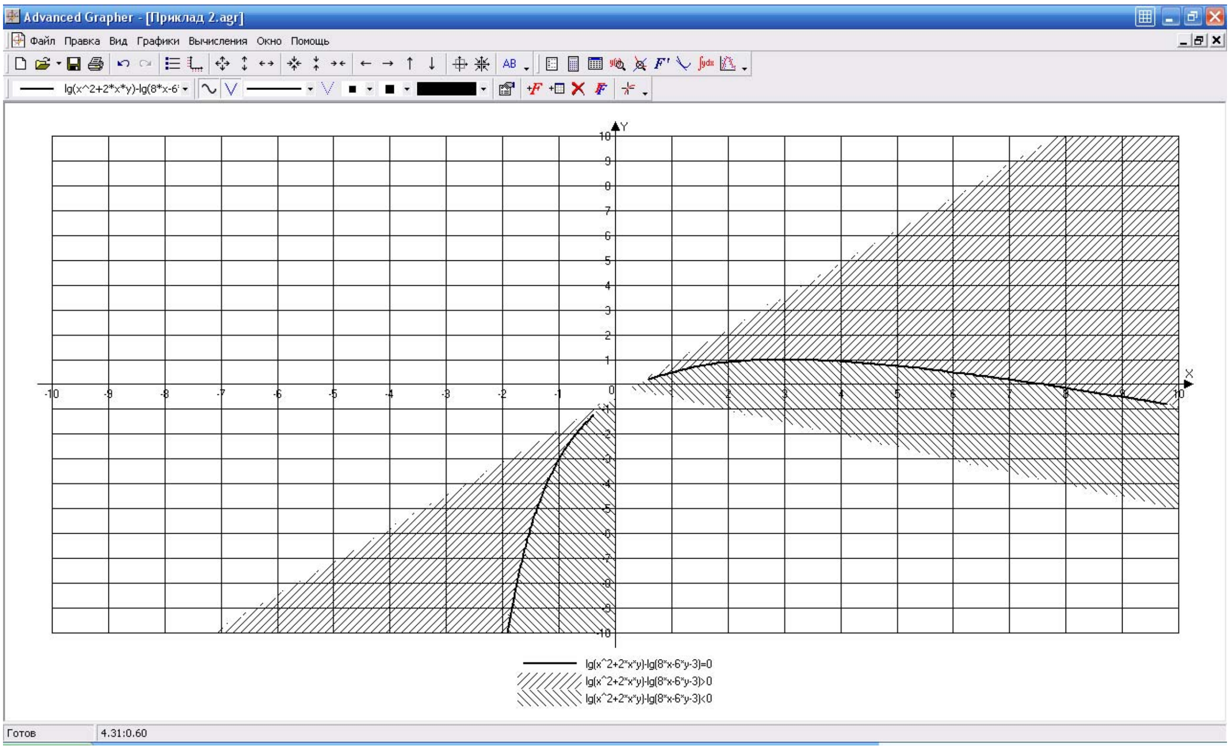


Рис. 19. Розв'язки рівняння (2.14) та нерівностей (2.18) та (2.19).

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію «Додати графік» та вводимо формулу рівняння у вигляді: $\lg(x\verb|^|2+2*x*y)-\lg(8*x-6*y-3)=0$.

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж x та y, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так – змінимо параметр рівняння з a на y.

На робочій області будується *модель рівняння (2.14)* – графік рівняння (див. рис. 23). Залишається лише оформити пропорції міток на осях *0x* та *0y* як *1:4*, задати для більш точного відображення графіка в меню «Параметри побудови» максимальну кількість кроків по горизонталі та вертикалі – 200 та максимальний розрив, рівний 10.

Очевидно, що побудований графік рівняння ще потребує аналітичної обробки, а саме: визначення «поведінки» рівняння в особливих точках (дивіться викладки, що коментують рисунок 18), вираження змінної x з рівняння для запису розв'язків, підтвердження гіпотези про те, що точка *(3; 1)* є точкою екстремуму функції *a(x)* (див. аналітичні викладки вище), з'ясування поведінки графіка біля осі *0y*. Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для рівняння (2.14).

Цей пакет також дозволяє з'ясувати і розв'язування нерівностей (2.18) та (2.19). Графічний їх розв'язок показаний на рис. 19. Після аналітичної обробки цього розв'язку можна прийти до отриманих вище відповідей.

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про моделі задачі та уміння вести дослідження моделей різними засобами досить часто знаходять своє використання у процесі розв'язування математичних навчальних задач творчого типу.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв'язування моделі задачі.

Приклад 6. *Знайти всі розв'язки рівняння з точністю до* α (зазначимо, що при пред'явленні задачі учням значення α має задаватися конкретним числом – ми ж проілюструємо розв'язання задачі у загальному варіанті):

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad (2.19)$$

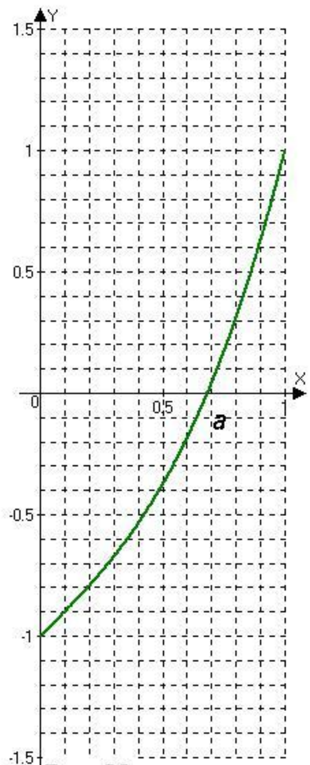


Рис 20

Побудуємо математичну модель задачі у вигляді функції, формула якої співпадає з лівою частиною рівняння (2.19). *Дослідимо лише деякі з властивостей функції* $y = x^3 + x - 1$:

а) функція не має точок екстремуму, так як похідна функції $y = 3x^2 + 1$ є завжди додатною, а тому функція є всюди ростучою.

б) якщо шуканий розв'язок рівняння (2.19) – a, то при $x \in (-\infty; a)$ $y(x) < 0$, а при $x \in (a; +\infty)$ $y(x) > 0$.

в) так як $y(0) = -1$ а $y(1) = 1$, то шуканий розв'язок $x = a$ належить відрізку $[-1;1]$ (рис. 20).

Далі для розв'язування задачі можемо використати відомий метод поділу відрізка пополам. Нехай $x_1 = 0{,}5$, $y(0{,}5) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 < 0$, отже, $x = a$ належить відрізку $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Так будемо робити до тих пір, поки довжина «нового» відрізка не стане меншою від α. Останнє значення середини відрізку і буде наближеним розв'язком рівняння (2.19) з точністю до α.

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про властивості функцій та уміння вести дослідження цих властивостей різними способами досить часто знаходять своє використання у процесі розв'язування математичних навчальних задач творчого типу. Запропонований нами евристичний алгоритм дозволяє використати знання учнів про властивості функцій та уміння вести їх дослідження для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для нелінійних рівнянь.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв'язування моделі задачі.

Разом з тим вкажемо, що даний підхід (а саме використання на основі наведеного евристичного алгоритму знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для відшукання наближених розв'язків нелінійних рівнянь) має обмеження. Зокрема, його використання є проблематичним у тому випадку, коли побудова графіка функції (моделі) та дослідження її властивостей є досить складною задачею.

Запропонований підхід до використання властивостей функцій у процесі розв'язування математичних задач на основі запропонованого евристичного алгоритму був успішно апробований на уроках з математики у природничо-математичному класі педагогічного ліцею при КДПУ ім. В.Винниченка та на практичних заняттях з елементарної математики та методики викладання математики фізико-математичного факультету названого університету.

§3. Вправи для розв'язування.

Задача 1. Для всіх значень параметра a *розв'язати рівність:*

1. $16^x + (a+3)4^x - 2a^2 + 3a + 2 > 0$
2. $\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a)$
3. $4^{x+1}a^2 - 33 \cdot 2^x \cdot a + 8 > 0$
4. $\log_a x + \log_a(x-2) > 1$

Задача 2. При яких значеннях параметра a *рівняння має два дійсних різних розв'язки?*

А) $4^x - 4a \cdot 2^x + 2a + 2 = 0$

Б) $36^x + (a-1) + a - 2a^2 = 0$

Задача 3. Для конкретного значення параметра a *розв'язати рівняння:*

А) $\log_\pi(x^2 - ax) = \log_\pi(2x - 4a + 8)$

Б) $\log_2(x^2 - ax) = \log_2(2x - 3a + 3)$

Задача 4. *Знайти всі значення параметра* a, *при кожному з яких рівняння має розв'язки. Знайти ці розв'язки.*

$$(a-4)\cos^2 x + (2a+3)\cos x + a + 1 = 0$$

Задача 5. *Знайти всі значення параметра* a, *при яких задані рівняння рівносильні*: $\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0$

$$(a+3)\sin^2 2x - \sin 2x \cos 4x - (a+4)\sin 2x = 0$$

Задача 6. *Знайти всі значення параметра* a, *при кожному з яких для всіх* $x \in R$ *виконується нерівність*:

А) $(3a-1)\sin^2 x + 2a\sin x + 4 - a \succ 0$

Б) $4^{\cos x} - 2(a-3)2^{\cos x} + a + 3 \succ 0$

Задача 7. Розв'язати систему рівнянь для всіх а

1. $\begin{cases} -4x + ay = 1 + a \\ (6+a)x + 2y = 3 + a \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = a^2 + 2a + 1 \\ y = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \\ x + y = a^2 + 4 \end{cases}$

Задача 8. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь має один розв'язок

А) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = a^2 + 2a + 1 \\ y = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y - (a+2)x = 3 \\ y + (2a-1)x = 4 \end{cases}$

В) $\begin{cases} |y| = |-x| \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$

Рекомендована література.

1. Збірник задач з математики для вступників до втузів / За редакцією М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.

2. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Формування умінь розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром з використанням інтеграції знань з математики // Математика в школі. – 2006. - № 6. - с. 47-50.

3. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А. Г., Пинский А. И., под ред. В.И. Благодатских. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983 – 410 с.

4. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы: Учебное пособие. В.К. Егерев, Б.А. Кордемський, В.В. Зайцев и др. ; под ред. М.И. Сканави. – 6-е изд. стер. – М. : Высшая школа, 1992. – 528 с.

5. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач: Алгебра, тригонометрия. Учебное пособие для студентов пед институтов по математике. Спец.– М.: Просвещение, 1984. – 288 с.

6. В.Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М.И. Шабунин. Задачи по елементарной математике. – 6-е изд. стер. – М.: Нука. Главная редакция физико-математической литературы. –1969.– 416 с.

7. Шахно К.У. Сборник задач по елементарной математике повышенной трудности. – Минск. “ Высшая школа” – 1966.– 473 с.

8. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы: Учебное пособие. Кутасов А.Д., Пиголкина Г.С., Чехлов В.И.; Яковлева Т.Х. под ред. Г.Н. Яковлева 2-е изд.–М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 480 с.

9. Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Избранные вопросы елементарной математики. Изд. 3-е, переработанное. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1972.– 528 с.

10. Шувалова Э. З. , Агофонов Б. Г. , Богатырьов Г.И. Повторим математику. М.: “Высшая школа”. – 1968.– 464 с.

11. Клюева Л.А., Тальський Д. А., Практикум по математике для заочных техникумов. Учебное пособие.– М.: Высшая школа, 1970.— 446 с.

12. Новосёлов С. И. Специальный курс тригонометрии.–М.: Высшая школа.–1967.–536 с.

13. Шахно К. У. сборник конкурсных задач по математике с решением. Изд. 3-е.–Л.: изд. Ленинградского университета.–1954.–238с.

14. Система тренировочных задач и упражнений по математике. / А. Я. Симонов , Д.С. Бокаев, А. Г. Эпельман и др. –М.: Просвещение 1991.–208с.

15. Бородуля И. Т. Тригонометрические уравнения и неравенства.: книга для учителя.–М.: Просвещение. 1989.–239с.

16. Практикум з розв'язування задач з математики. Михайлівський В. І., Гарасюк В. Є., Ченакал Є. О., Шунда Н. М., Савіч Є. Ф. –Київ: Вища школа.–1975.–424с.

17. Вишенський В. А., та ін. Збірник задач з математики.: навчальний посібник / В. А. Вишенський, М .О. Перестюк, А. М. Самійленко.–2-е, вид., доп.–К.: Либідь, 1993.–344с.

18. Яремчик Ф. П., Руденко П. А. Алгебра і елементарні функції.–К.: Наукова думка.–1987.–6648с.

19. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., СанкинА. И. Сборник задач по элементарной математике.–М.: Физмат изд. 1963–528с.

20. Алексеев В. М. Элементарная математика. Решение задач. –К.: Высшая школа. –1984–351с.

21. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы:/учебное пособие/Кутасов А. Д., Пиголкина Т. С., Чехлов В. И., Яковлева Т. Х.-Под ред. Г. М. Яковлева.– 3-е изд. перераб.–М.: Наука, 1988.–720с.

22. Кречман В. А. Задачник по алгебре. Изд. 6-е.–М.: Наука.–1968–416с.

23. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий(9–10 классы).–М.:Просвещение–1968–311с.

24. Суконник Я. Н. Математические задачи повышенной трудности. Пособие для учителей.–К.: Радянская школа.–1985.–177с.

25. Моденов П. С., Новоселов С. И. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Издание 3-е (переработаное).–М.:изд. Московского университета.–1966.–432с.

26. Вибрані питання елементарної математики. За рец. Скорохода А. В.–К.: Вища школа.–1982.–4456с.

27. Калнин Р. А. Алгебра и элементарные функции.–М.: Наука.–1964.–480с.

28. Гарделадзе Ш. Г., Кухарччук М. М., Яремчук Ф. П. Збірник конкурсних задач з математики. Посібник для вступників до вузів.–К.: Вища школа.–1973.–324с.

29. Залогін М. С. Конкурсні задачі з математики.–К.: Державне видавництво технічної літератури УРСР.–1959.–414с

30. Каплан Я. Л. Розв’язуваня нерівностей. Посібник для вчителів.–К.: Радянська школа.–1967.–124с.

31. Гурський И. П. Фцнкции и построение графиков. Пособие для учителей изд. 2-е исправленное.–М.: Просвещение.–1964.–216с.

32. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике повышенной трудности.–М.: Наука.–496с.

33. Вишенский В.А., Перестюк М.О., Самійленко А.М. Конкурсні задачі з математики. Посібник для вчителів.–К.: Вища школа.–1978.–158с.

34. Шкіль М.І., Коменський Т. В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу для учнів 10-го класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти.–К.: Освіта.–2000.–318с.

35. Горчитейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами.–К.: РНА «Текст»; МП «ОКО»,1992.–290с.

36. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10–11 класів.–Хаків: ББН.2000.–164с.

37. Збірник завдань для державної атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. За редакцією З.І. Слєпкань.–Харків, «Гімназія», 2002.– 160с.

38. Ясінський та ін. Вибрані конкурсні задачі з математики. Т.І. Арифметика. Алгебра: Навчальний посібник для вступників до вищих навчальних закладів. − Київ, КПІ, 2005 р.

39. В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк. Використання алгоритмів евристичного типу у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей // Наукові записки. – Випуск 77. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2008. Частина 1.

40. В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк. Математичне моделювання у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей із параметром // ПостМетодика, 2008, № 4 (81), с. 46-50.

41. В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк. Методичні особливості використання властивостей функцій у процесі розв'язування математичних задач // Математика в школі, 2008, № 6 (с. 37-42).

Розділ 4. Системне моделювання розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід.

Проблема формування в учнів умінь, необхідних для розв'язування текстових задач, завжди була однією із найскладніших. Особливо це стало помітним в умовах «інформаційного буму» наукових відкриттів і необхідністю якимось чином відображати тенденції розвитку суспільства й відповідні новітні досягнення науки в шкільних навчальних програмах з математики. Це, в свою чергу, вимагає скорочення навчальних годин традиційного змісту математичної освіти і їх збільшення на нову навчальну інформацію. Так, з виникненням інформаційного суспільства потрібно було збільшити навчальні години на інформатику. Тому виникла необхідність зменшення кількості годин на розв'язання текстових задач у школі, що й було зроблено. Виходячи з цього, нагальною стала потреба у розробці інноваційних підходів до навчання учнів розв'язування текстових задач. Одним із таких підходів може бути запропонована нами технологія розв'язання текстових задач за допомогою загальних евристичних алгоритмів стосовно певного класу текстових математичних задач.

Метою статті є створення евристичних алгоритмів розв'язування текстових задач, що спростить пошук відповідей суб'єктами розв'язання цих задач. Об'єктом дослідження є задачі на процеси, що характеризуються трьома величинами [3]: перша величина − M (наприклад, шлях, робота), друга величина − m (швидкість, продуктивність), третя величина − n (час), а предметом – створення евристичних алгоритмів розв'язання вказаного типу текстових задач. У кожному процесі між основними елементами предметної області задачі завжди буде виконуватися співвідношення:

$$M = m * n$$

Однак тип задач на процеси не обмежується лише задачами на рух та роботу. В цьому дослідженні у якості об'єкту ми використаємо задачу на відсотки, у якій основний компонент задачної ситуації характеризується співвідношенням $a = b * \frac{n}{100}$, де a – частина цілого, b – ціле, n – відсоток частини в цілому.

Умову текстової задачі можна розбити на вихідні дані задачі й сформоване запитання (проблему), на яке потрібно знайти відповідь.

Вихідну задачну ситуацію можна тлумачити як систему, яка складається з вихідних даних та запитання, на котре потрібно знайти відповідь.

При цьому поле можливостей (поле можливих дій) для суб'єкта розв'язування задачі (окремого учня чи разом з учителем класу в цілому) буде слабко структурованим і тому визначення напрямку дій викликає в суб'єкта розв'язування задачі значні труднощі.

Процес розв'язування задачі будемо тлумачити як подолання (розв'язування) задачної ситуації.

Розв’язуванням задачної ситуації будемо називати процес перетворення її моделей аж до отримання розв’язку текстової задачі. Тоді все про задачну ситуацію стає відомим і задачна ситуація у контексті її розуміння як проблемної ситуації зникає.

Перетворення моделей задачної ситуації полягає в доповненні вихідної системної моделі задачної ситуації новими елементами, які будуть зменшувати невизначеність задачної ситуації й збільшувати її визначеність аж до повної відповіді на запитання в задачі.

На мові інформації такий процес означатиме поповнення інформації про задачну ситуацію до моменту, коли інформації про задачну ситуацію буде достатньо для отримання кінцевої відповіді на запитання, що стояло в умові задачі.

Поле можливих дій суб’єкта розв’язання задачної ситуації в процесі перетворення її моделі ставатиме більш структурованим і в кінцевому підсумку перетвориться в однозначний алгоритм (у розумінні Ф.Неймана чи В.Глушкова) розв’язування задачної ситуації, за яким і будуть отриманні потрібні відповіді.

Доповнюючи (перетворюючи) попередню модель задачної ситуації ми отримуємо нову модель на кожному кроці такого перетворення. По суті мова йде про системне моделювання процесу розв’язування задачі у вигляді створення послідовності системних моделей задачної ситуації, що й приведе до отримання розв’язку задачі.

Послідовність і правила побудови відповідних моделей задачної ситуації ми визначимо у вигляді «приписів алгоритмічного типу» (Л.Ланда), або в у вигляді «евристичного алгоритму» (Д.Пойя).

Евристики будуть створювати для суб’єкта розв’язування задачі більш структуроване поле можливостей у вигляді визначальних моментів перетворення моделі задачної ситуації, а саме в моменти створення наступних моделей. Водночас самі такі моменти можна вважати за часткові задачні ситуації.

Отже евристичний алгоритм процесу розв’язання задачної ситуації буде складатися з основних евристик (приписів), що визначатимуть моменти створення чергової моделі задачної ситуації, та «часткових» евристик, котрі визначатимуть процес створення відповідної чергової моделі задачної ситуації.

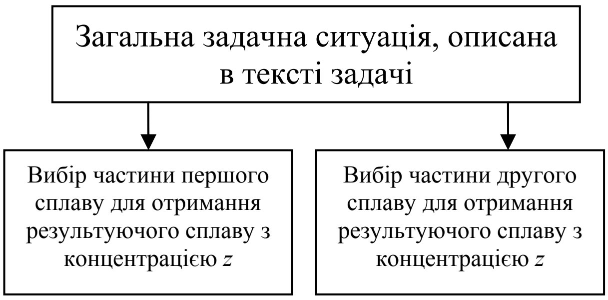


Рис. 1. Ієрархічна модель задачної ситуації задачі 1

Розглянемо детальніше висловлені ідеї на прикладі двох задач, взятих з [4] та [1].

Задача 1. Маємо два сплави (розчини і таке подібне) з концентрацією речовини P відповідно x та y відсотків. У якому співвідношенні слід взяти ці сплави (розчини і таке подібне), щоб отримати сплав з концентрацією

речовини Р рівною z?

Дана задача лежить в основі розв'язування більш складних задач на відсотки та частини. Зобразимо ієрархію задачної ситуації у вигляді графа, а потім від неї перейдемо до структурної моделі у вигляді матриці інформації.

Не втрачаючи загальності, покладемо, що $y<z<x$. Ми пропонуватимемо такий метод розв'язування задачі, який відображатиме структуру задачної ситуації. Нехай результуючий сплав (розчин і таке подібне) отримано у кількості $a+b$. Врахуємо, що ми візьмемо для цього першого сплаву у кількості a, а другого сплаву − у кількості b. Надалі потрібно заповнити клітини матриці інформації, виходячи з умови задачі та позначень невідомих величин. Пояснимо основні особливості створення структурної моделі задачної ситуації (рис. 2), яка містить опис обох ситуацій, зображених ієрархічною моделлю (рис. 1). По горизонталі задачна ситуація характеризується трьома параметрами − вагою речовини Р у сплаві, вагою сплаву та частиною речовини Р у сплаві. Вертикальні стовпчики описують кількісні характеристики першого та другого сплавів та кількісні характеристики сплаву, що отримався. Так як за умовою задачі x − відсотковий вміст речовини Р у першому сплаві, y − відсотковий вміст речовини Р у другому сплаві, z − відсотковий вміст речовини Р у сплаві, що отримався, то частина речовини Р у першому сплаві − $\frac{x}{100}$, у другому сплаві − $\frac{y}{100}$, у сплаві, що отримався − $\frac{z}{100}$, а вага речовини Р у першому сплаві – $a*\frac{x}{100}$, у другому сплаві – $b*\frac{y}{100}$, а в результуючому сплаві – $(a+b)*\frac{z}{100}$.

Ідея створення матриці інформації задачної ситуації полягає в тому, що:

1) після введення невідомих величин *x, y, z* заповнюємо клітини матриці інформації;

2) у матриці інформації зображуємо зв'язки між її елементами (клітинами) у вигляді рівностей у стовпчика та рядках.

3) Серед цих рівностей знаходимо рівняння чи систему рівнянь і, цим самим, побудуємо модель задачної ситуації у вигляді рівнянь, із яких і знайдемо відповідь.

Вага речовини Р в сплаві	$a*\frac{x}{100}$	+	$b*\frac{y}{100}$	=	$(a+b)*\frac{z}{100}$
	‖		‖		‖
Вага сплаву	*a*	+	*b*	=	*a+b*
	*		*		*
Частина речовини Р в сплаві	$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	1-й сплав (розчин і т.п.)		*2-й сплав (розчин і т.п.)*		*Сплав (розчин і т.п.), що отримався*

Рис. 2. Структурна модель задачної ситуації задачі 1.

Модель задачної ситуації у вигляді рівняння є розв’язуючою (з якої отримуємо розв’язок) і позначається на структурній моделі (рис. 2) зафарбованими клітинками. В результаті отримаємо рівняння (1).

$$a*\frac{x}{100}+b*\frac{y}{100}=(a+b)*\frac{z}{100} \qquad (1)$$

Здійснивши елементарні перетворення: помножимо рівність на 100, зведемо подібні доданки при *a* та *b,* розділимо отриману рівність на добуток *b*(x-z)*, отримаємо співвідношення (або пропорцію) (2).

$$\frac{a}{b}=\frac{z-y}{x-z} \qquad (2)$$

Аналогічний результат розв’язування задачі отриманий в [4], однак наш метод тісно пов’язаний із наочними (у вигляді ієрархії та матриці інформації) моделями задачної ситуації, що відображає структуру самої задачі та процес її розв’язування, чого немає в [4]. При цьому суб’єкт розв’язування задачі здійснює аналіз і синтез у вигляді системного підходу до створення системних моделей задачної ситуації у вигляді системи, що дозволяє наочно відображати як цілісність (у вигляді матриці), так і структуру задачної ситуації (у вигляді клітин матриці та зв’язків між нами). Використаємо роздуми щодо розв’язування цієї задачі для подальшого аналізу та розв’язування досить складної задачі 2 (вправа 13.378 з [1]).

<u>Задача 2</u>. Два шматки сплаву масами 6 і 8 кг мають різний відсотковий вміст міді. Від першого шматка відтяли деяку частину, а від другого − частину, у два рази більшу за масою, ніж від першого. Кожну з відтятих частин сплавили з рештою іншого шматка, після чого дістали два нових сплави з однаковим відсотковим вмістом міді. Яка маса кожної з частин, відтятих від кожного з шматків початкових сплавів?

Умова задачі у вигляді тексту є *вербальною моделлю* певної проблемної ситуації і, по суті, задає задачну ситуацію як систему даних і запитання задачі.

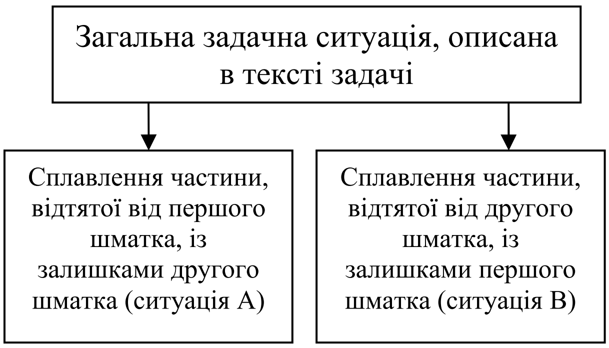


Рис. 3. Ієрархічна модель задачної ситуації

Першою евристикою процесу розв’язання задачної ситуації буде створення *моделі задачної ситуації у вигляді ієрархії її складових* (рис 3). Така модель створюється на основі даних задачі і відображатиме порядок складових (субординацію) у системі «задачна ситуація». Однак створена ієрархічна модель задачної ситуації не відображає проблему задачної ситуації (запитання задачі) та зв’язки між складовими системи «задачна ситуація».

Другою основною евристикою процесу розв’язання задачної ситуації буде створення її *моделі у вигляді матриці (таблиці) інформації*. Ця модель створюється на основі умови задачі й попередньої ієрархічної моделі.

«Частковими» евристиками створення моделі задачної ситуації на цьому етапі будуть такі :

1. Матриця інформації матиме три основні рядки, які характеризуватимуть кількісні показники частини цілого, цілого та відсотку частини в цілому, а також дві групи стовпців, які відображають дві складові ієрархічної моделі (ситуації А та Б). Елементарними складовими такої системної моделі задачної ситуації будуть клітини матриці інформації.

Окрім цього потрібно між основними рядками і стовпцями виділити ще вільні рядки і стовпці для відображення зв’язків між елементами системи «матриця інформації».

2. Вводимо невідомі величини і заповнюємо клітини матриці інформації у відповідності з даними вербальної та ієрархічної моделей задачі.

3. Зображуємо зв’язки між основними компонентами (клітинами) матриці інформації:

3.1. Вертикальні зв’язки визначаються співвідношенням $a = b * \frac{n}{100}$, де a – частина цілого, b – ціле, n – відсоток частини в цілому.

3.2. Горизонтальні зв’язки визначаються із умов задачі та з аналізу задачної ситуації на основі її попередніх моделей.

4. Серед можливих рівностей у матриці інформації визначаємо рівняння, з яких буде визначена невідома величина (чи невідомі величини).

Реалізуємо вказані евристики на прикладі згаданої задачі. Визначимо такі компоненти ієрархічної моделі задачної ситуації: − сплавлення частини, відтятої від першого шматка, із залишками другого шматка (ситуація А); сплавлення частини, відтятої від другого шматка, із залишками першого шматка (ситуація В) (див. рис. 3). Введемо позначення невідомих величин: x − відсотковий вміст міді у першому шматку сплаву, y − відсотковий вміст міді у другому шматку сплаву, z − відсотковий вміст міді у шматках сплавів, що отрималися, m − маса частини, відтятої від першого шматка.

Вага міді в сплаві	?	=	?	+	?		?	+	?	=	?
	‖		‖		‖		‖		‖		‖
Вага сплаву	*8-m*	=	*m*	+	*8-2m*		*6-m*	+	*2m*	=	*6+m*
	*		*		*		*		*		*
Частина міді в сплаві	$\frac{z}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	сплав, що отримався		*1-й сплав*		*2-й сплав*		*1-й сплав*		*2-й сплав*		*сплав, що отримався*
	Ситуація А						*Ситуація В*				
	Загальна задачна ситуація, описана в тексті задачі										

Рис. 4. Структурна модель задачної ситуації задачі 2.

Тепер заповнимо клітини матриці інформації, виходячи з умови основної задачі та позначень невідомих величин. Пояснимо основні особливості створення такої матриці, яка зображає структурну модель задачної ситуації (див. рис. 4). Структурна модель містить опис обох ситуацій, зображених в ієрархічній моделі (рис. 3). По горизонталі задачна ситуація характеризується аналогічно до структурної моделі попередньої задачі 1 трьома параметрами − вагою міді у сплаві, вагою сплаву та частиною міді у сплаві. Вертикальні стовпчики описують кількісні характеристики ситуацій А та В. При аналізі ситуації А виділимо три її компоненти: кількісні характеристики шматка, відтятого від першого сплаву; кількісні характеристики залишку другого сплаву; кількісні характеристики сплаву, що отримався.

Справді, так як x − відсоток частки міді у першому шматку сплаву, y − відсоток частки міді у другому шматку сплаву, z − відсоток частки міді у шматках сплавів, що отрималися, то частина міді у першому сплаві − $\frac{x}{100}$, у другому сплаві − $\frac{y}{100}$, у сплаві, що отримався − $\frac{z}{100}$.

Так як m − маса частини, відтятої від першого шматка, то від другого шматка за умовою задачі відтяли $2m$. Тоді маємо, що m кг першого шматка сплавляють з частиною другого шматка, що лишилася, а це $8\text{-}2m$ кг. Тому маса шматка, що отримався у результаті сплавляння, визначиться так $8\text{-}2m+m=8\text{-}m$ кг.

Позначимо на рис. 4 незаповнені клітини знаками питання: вагу міді у шматку, що отримався в результаті сплавляння; вагу міді у частині, що відтяли від першого шматка; вагу міді у частині, що залишилася від другого шматка. Враховуючи змістовний зв’язок (1), характерний для таких задач, ми легко можемо визначити перелічені величини, відповідно позначивши їх як

$$(8-m)*\frac{z}{100},\ m*\frac{x}{100},\ (8-2m)*\frac{y}{100}$$

(на структурній моделі ці зв’язки вказані як вертикальні).

Вага міді в сплаві	$(8-m)*\frac{z}{100}$	$=$	$m*\frac{x}{100}$	$+$	$(8-2m)*\frac{y}{100}$		$(6-m)*\frac{x}{100}$	$+$	$2m*\frac{y}{100}$	$=$	$(6+m)*\frac{z}{100}$
	‖		‖		‖		‖		‖		‖
Вага сплаву	*8-m*	=	*m*	+	*8-2m*		*6-m*	+	*2m*	=	*6+m*
	*		*		*		*		*		*
Частина міді в сплаві	$\frac{z}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	сплав, що отримався		***1-й сплав***		***2-й сплав***		***1-й сплав***		***2-й сплав***		***сплав, що отримався***
	Ситуація А						*Ситуація В*				
	Загальна задачна ситуація, описана в тексті задачі										

Рис. 5. Побудова системи рівнянь за структурною моделлю задачної ситуації.

Зазначимо, що логічно буде вказати і той факт, що сума вмістів міді у частині, що відтяли від першого шматка, та у частині, що залишилася від другого шматка, дорівнює вмісту міді у шматку, що отримався в результаті сплавляння. Цей факт позначений на структурній моделі наявністю горизонтального зв'язку в рядку «вага міді у сплаві» у характеристиках «ситуації А». Відмітимо, що вказане співвідношення буде компонентом розв'язуючої моделі задачі, яка буде представлена у даному випадку системою алгебраїчних рівнянь. Аналогічним способом аналізуємо ситуацію В і заповнюємо клітини правої частини матриці інформації (див. рис. 4) і оформимо матрицю інформації, що зображена на рис. 5.

Третьою основною евристикою процесу розв'язання задачної ситуації буде створення її *моделі у вигляді алгебраїчного рівняння (або системи алгебраїчних рівнянь)*, яке одержимо із структурної моделі задачної ситуації − «матриці інформації».

Алгебраїчна модель задачної ситуації − система рівнянь (4) (на рис. 5 зафарбована сірим кольором), яка в результаті елементарних перетворень (множимо обидва рівняння системи на 100, розкриємо дужки, з першого рівняння виразимо *8(z-y)*, а з другого − *6(x-z)*) перетворюється в систему (4.1):

$$\begin{cases}(8-2m)*\frac{y}{100}+m*\frac{x}{100}=(8-m)*\frac{z}{100}\\(6-m)*\frac{x}{100}+2m*\frac{y}{100}=(6+m)*\frac{z}{100}\end{cases}\qquad(4)$$

$$\begin{cases}8(z-y)=m(x+z-2y\\6(x-z)=m(x+z-2y)\end{cases}\qquad(4.1)$$

З системи (4.1) отримуємо:

$$\frac{z-y}{x-z}=\frac{3}{4}\qquad(5)$$

Враховуючи результати розв'язання задачі 1, робимо висновок, що для виконання умови другої задачі у процесі сплавляння шматків маса шматка першого сплаву має відноситися до маси шматка другого сплаву як 3:4. Складемо пропорцію (див. ліву або праву частину матриці інформації на рис. 5 − строчку «вага сплаву»):

m/(8-2m)=3/4 або *(6-m)/2m=3/4*

В результаті розв'язування любого з рівнянь отримаємо результат *m=2,4 кг.* Тобто, від першого шматка відтяли 2,4 кг, а від другого (за умовою у 2 рази більше) − 4,8 кг.

Це ж співвідношення випливає і з наочного порівняння рівняння (1) з другим рівнянням системи (4).

Для цього використаємо схематичне зображення.

a	***	***x/100***	**+**	***b***	***	***y/100***	**=**	***a+b***	***	***z/100***
6-m	***	***x/100***	**+**	***2m***	***	***y/100***	**=**	***6+m***	***	***z/100***

Як показано раніше із першого рівняння цього схематичного зображення отримуємо розв'язок задачі 1 у вигляді пропорції:

$$\frac{a}{b}=\frac{z-y}{x-z}$$

На основі цієї пропорції і співвідношення (5) отримуємо:

$$\frac{6-m}{2m}=\frac{z-y}{x-z}=\frac{3}{4}$$

Звідси знаходимо *m=2,4 кг.*

Використання результатів задачі 1 як допоміжної для розв'язування задачі 2 дозволяє здійснити декомпозицію розв'язування другої задачі до двох задач, що розв'язуються послідовно, що значно полегшує розв'язання другої задачі.

Ми передбачаємо зауваження читачів про такий важливий факт. Задача 2 має інше розв'язання. На перший погляд воно є коротшим та простішим. Його можна прокоментувати так. Так як результуючий сплав в обох випадках містить однаковий відсоток міді, то й вагові частки шматків, які сплавляються у першому та другому випадках, мають бути однаковими. Якщо прийняти до уваги, що у першому випадку сплавляється шматок першого сплаву вагою *m* кг та шматок другого сплаву вагою *8-2m* кг, а в другому випадку сплавляється шматок першого сплаву вагою *6-m* кг та шматок другого сплаву вагою *2m* кг, то, виходячи з вище наведеного зауваження про пропорційність вагових частин шматків, ми матимемо очевидну рівність:

$$\frac{m}{8-2m}=\frac{6-m}{2m}.$$

Розв'язування цього рівняння дає результат 2,4 кг.

Переконані, що останній абзац читачі перечитуватимуть з недовірою кілька разів. І це вірно, тому що повірити у це просте розв'язування можна лише глибоко проаналізувавши та зрозумівши структуру задачі (або задач такого виду). Тобто, провівши солідну підготовчу роботу з вивчення задачної ситуації, зв'язків між відомими та невідомими елементами предметної області задачі, ієрархії логічних відношень складових частин задачі, що й передбачає запропонована нами технологія розв'язування текстових математичних задач.

Розглянемо ще один приклад конкретної задачі, взятої з [32] (вправа 564).

***Задача 3*. В річку впадає притока. Катер відходить від пункту А, що знаходиться на притоці, йде за течією 80 км до впадання притоки у річку в пункті В, а потім іде вгору по річці до пункту С. На шлях від А до С він затратив 18 годин, а на зворотній шлях – 15 годин. Знайти відстань ВС, якщо власна швидкість катера 18 км/год., а швидкість течії річки – 3км/год.**

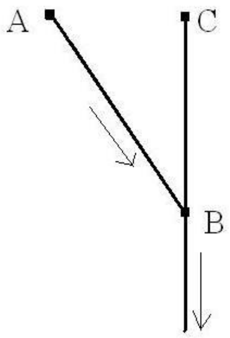


Рис. 6

Визначимо часткові процеси, з яких складається загальний процес, описаний у задачній ситуації:

- загальний процес повністю визначає рух катера від точки А, через точку В до точки С і, навпаки, від точки С через точку В до точки А (рис. 6) – стрілками вказаний напрям течії у притоці та річці;
- процес, який описує рух катера від точки А через точку В до точки С; процес, який описує рух катера від точки С через точку В до точки А;

•процес, який описує рух катера від точки А до точки В; процес, який описує рух катера від точки В до точки С; процес, який описує рух катера від точки С до точки В; процес, який описує рух катера від точки В до точки А.

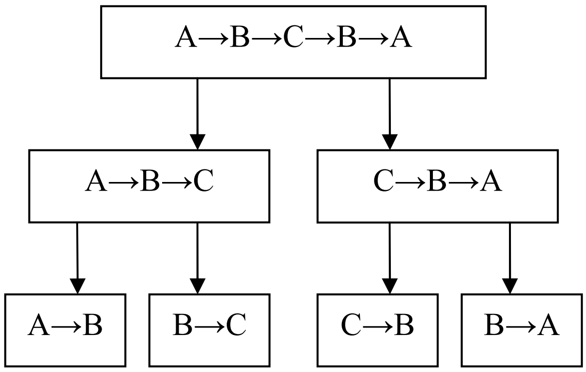


Рис. 7. Процесуальна ієрархія структурування задачної ситуації

Отже, на рис. 6 зображена перша модель задачної ситуації у вигляді рисунку чи загальної схеми (*наочно-схематична модель*).

Другою моделлю задачної ситуації буде *ієрархія умови задачі,* яка будується на основі наочно-схематичної моделі. Ця модель зображена на рис. 7.

Перша та друга моделі задачі досить добре відображають структуру задачної ситуації в плані виділення її складових та ієрархічного підпорядкування цих складових. Однак це ще далеко не вся інформація про задачну ситуацію − вказані моделі не відображають зв’язки (залежності) між всіма елементами предметної області задачі. Для більш повного відображення інформації про задачну ситуацію ми пропонуємо створити *структурну модель задачі − «матрицю інформації» про задачну ситуацію*.

Опишемо процес побудови матриці інформації, виходячи з умови задачі та перших двох моделей. Рух катера з пункту А через В до С і навпаки, з С через В до А логічно розбити на 2 етапи. Отже, тут ми використали результати аналізу (розбиття) загального процесу на його складові частини. В свою чергу, вказані часткові процеси (за умовою задачі) в результаті аналізу розбиваються відповідно на більш деталізовані складові (зміст цих процесів описаний вище). Виходячи зі сказаного, «базовий» варіант матриці інформації (структурної моделі задачі) матиме вигляд, зображений на рис. 8.

Шлях			**80**		**?**	**=**	**?**		**80**		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18+?^1$		**18-3**		**18+3**		$18-?^2$		
			*		*		*		*		
Час	**18**	=	**?**	+	**?**		**?**	+	**?**	=	**15**
			процес A→B		***процес B→C***		***процес C→B***		***процес B→A***		
			процес A→B→C				***процес C→B→A***				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 8. Структурна модель задачі.

Пояснимо процес її побудови. З умови задачі відомо, що на шляху від А до В, протяжність якого 80 км, катер рухався за течією притоки, значення швидкості течії якої невідомо. Але відомою є власна швидкість катера − 18 км/год. Тому у відповідній комірці матриці позначаємо − 18+?. Час руху від А до В невідомий, тому в комірці зазначаємо − ?. Зазначаємо у матриці інформації існуючий зв'язок: час руху катера від А до В помножений на швидкість руху катера на ділянці від А до В дорівнюватиме довжині шляху від А до В. Аналогічно аналізуємо рух від В до С, від С до В, від В до А. Факт затрачання 18 годин та 15 годин на рух відповідно від А через В до С та від С через В до А позначимо на схемі відповідними зв'язками ?+?=18 та ?+?=15. Факт рівності шляху від В до С та шляху від С до В позначимо на схемі у відповідній комірці ?=?. Факт рівності значень швидкості течії притоки при русі катера від А до В та від В до А визначимо позначенням цих значень відповідно $?^1$ та $?^2$ та приміткою що $?^1 = ?^2$.

У подальшому викладі ми переконаємо читача, що з використанням такого способу аналізу задачної ситуації вибір змінної величини до задачі є довільним і таким, що не має принципового значення. Позначимо змінною x швидкість течії у притоці. Залишилося «обрати місце розташування» на матриці інформації майбутньої аналітичної моделі задачі − рівняння. Ми також переконаємо читача, що і цей вибір є довільним, так як всі «різні» рівняння, що стали наслідком різних «виборів», будуть еквівалентними. Задамося метою побудувати рівняння на ділянці матриці, яка позначає рівність відстаней від В до С та від С до В: ?=? (ці комірки на рис. 8 зафарбовані). Міркування проводимо так. Щоб знайти відстань від В до С, треба знати час руху від В до С (швидкість руху катера проти течії річки відома − (18-3) км/год), щоб знайти час руху катера від В до С, треба знати час руху катера від А до В (так як в сумі ці величини дають 18 годин), а щоб знайти час руху катера від А до В, треба шлях від А до В розділити на швидкість катера за течією притоки − а він відомий з врахуванням позначення: 18+х. Зазначимо, що вказаний шлях міркувань позначений на рис. 8 стрілочками. Отже, час руху від А до В дорівнює $\frac{80}{18+x}$, час руху від В до С дорівнює $18-\frac{80}{18+x}$, шлях від В до С дорівнює $15*(18-\frac{80}{18+x})$. Міркуючи аналогічно, знаходимо за «правою частиною» матриці інформації шлях від С до В, який дорівнює $21*(15-\frac{80}{18-x})$. Отже, рівняння до задачі має вигляд:

$$15*(18-\frac{80}{18+x}) = 21*(15-\frac{80}{18-x}) \qquad (6)$$

Всі ці етапи аналізу спочатку слід відображати на матриці інформації, вписуючи послідовно в міру проведення міркувань замість знаків запитань відповідні вирази (рис. 9) і тільки після вірного заповнення всіх комірок матриці інформації можна приступати до побудови та розв'язування аналітичної моделі задачі.

Побудуємо рівняння до задачі в іншому місці матриці інформації − на місці співвідношення ?+?=18 (це співвідношення позначає інформацію, що на ввесь шлях від А через В до С катер затратив 18 годин). Міркуємо так. Форма ?+?=18 у лівій частині містить невідомі доданки − час руху катера від А до В та час руху катера від B до C. Щоб знайти час руху катера від A до B треба відстань від A до B поділити на швидкість катера за течією у притоці. Маємо: $\frac{80}{18+x}$ (годин). Щоб знайти час руху катера від B до C (дивіться рис. 8), треба знати шлях від B до C, щоб знайти шлях від B до C треба знати шлях від C до B (тавтологія, але рухаємося строго за ділянками матриці), щоб знайти шлях від C до B треба знати час руху катера від C до B, щоб знайти час руху катера від C до B треба знати час руху катера від B до A, і, нарешті, щоб знайти час руху катера від B до A, треба розділити відстань від B до A на швидкість катера проти течії у притоці: $\frac{80}{18-x}$. Провівши зворотну операцію − операцію синтезу, отримаємо в заданому місці рівняння (7):

$$\frac{80}{18+x}+21*(15-\frac{80}{18-x})/15=18 \qquad (7)$$

Шлях			**80**		$15*(18-\frac{80}{18+x})$	=	$21*(15-\frac{80}{18-x})$		**80**		
			‖		‖		‖		‖		
Швид-кість			**18+x**		**18-3**		**18+3**		**18-x**		
			*		*		*		*		
Час	**18**	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$18-\frac{80}{18+x}$		$15-\frac{80}{18-x}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	**15**
			процес A→B		***процес B→C***		***процес C→B***		***процес B→A***		
			процес A→B→C				***процес C→B→A***				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 9. Побудова рівняння (6) за результатами аналізу матриці інформації.
Загальний вигляд матриці інформації після завершення послідовного заповнення її комірок по мірі проведення міркувань зображений на рис. 10. Зазначимо, що рівняння (6) та (7) є еквівалентними з точністю до тотожного перетворення.

Шлях			**80**		$21*(15-\frac{80}{18-x})$	=	$21*(15-\frac{80}{18-x})$		**80**		
			‖		‖		‖		‖		
Швид-кість			**18+x**		**18-3**		**18+3**		**18-x**		
			*		*		*		*		
Час	**18**	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$21*(15-\frac{80}{18-x})/15$		$15-\frac{80}{18-x}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	**15**
			процес A→B		***процес B→C***		***процес C→B***		***процес B→A***		
			процес A→B→C				***процес C→B→A***				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 10. Побудова рівняння (7) за результатами аналізу матриці інформації.

З метою переконання читача, що з використанням такого способу аналізу задачної ситуації вибір змінної величини до задачі є довільним, позначимо змінною *t* час руху катера від В до С. Рівняння задачі побудуємо на вертикалі (див. рис. 8): час руху катера від А до В помножити на швидкість руху катера від А до В дорівнює відстані від А до В. Міркуємо так (слідкуйте за процесом заповнення матриці інформації, зображеної на рис. 11). Форма згаданої вертикалі є такою: ?*(18+?^{1})=80. Щоб знайти час руху катера від А до В, треба від загального часу руху на ділянці від А через В до С відняти час руху катера від В до С: *18- t* (годин). Щоб знайти швидкість катера за течією притоки треба знати швидкість течії у притоці, щоб знайти швидкість течії у притоці (скористаємося інформацією про процес «від В до А», розміщеною у правій частині матриці) треба знати час руху катера від В до А, а для цього треба знати час руху катера від С до В, а для цього треба знати відстань від С до В, яку ми можемо знайти як *15*t* (км). Провівши обернену операцію − синтез − отримаємо у заданому місці матриці інформації рівняння (8):

$$(18-t)(18+(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}}))=80 \qquad (8)$$

Шлях			**80**		$15t$	=	$15t$		**80**		
			‖		‖		‖		‖		
Швид-кість			$18+(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}})$		**18-3**		**18+3**		$18-(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}})$		
			*		*		*		*		
Час	**18**	=	$18-t$	+	t		$\frac{15t}{21}$	+	$15-\frac{15t}{21}$	=	**15**
			процес А→В		***процес В→С***		***процес С→В***		***процес В→А***		
			процес А→В→С				***процес С→В→А***				
			процес А→В→С→В→А								

Рис. 11. Побудова рівняння (8) за результатами аналізу матриці інформації. Загальний вигляд матриці інформації після завершення послідовного заповнення її комірок в міру проведення міркувань зображений на рис. 11.

Зазначимо, що при зміні «замовлення» на розміщення рівняння до задачі ми, як і в попередньому випадку, отримаємо еквівалентні рівняння, які переводяться одне до іншого елементарними тотожними перетвореннями. Так, рівняння (9) позначає факт − шлях руху катера від В до С дорівнює шляху руху катера від С до В (форма ?=?), рівняння (10) описує факт − на ввесь шлях від А через В до С катер затратив 18 годин (форма ?+t=18). Пропонуємо читачеві самостійно перевірити правильність запису вказаних рівнянь, проаналізувавши та заповнивши відповідні матриці інформації.

$$15t = 21(15-80/(18-(\frac{80}{18-t}-18)) \qquad (9)$$

$$t+80/(18+(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}}))=18 \tag{10}$$

Наступний рівень процесуальної ієрархії задачної ситуації визначається двома процесами (див. рис. 7). Отже, математичних моделей задачі може бути дві, тому ми можемо розраховувати на дві змінні величини. Врахуємо, що попереднє зауваження з приводу вільного вибору змінних величин та місця розташування на матриці інформації аналітичних моделей задачі залишається справедливим і для цього випадку. Нехай x – це швидкість течії притоки, а y – відстань ВС. Тоді евристики, що будуть використані у процесі побудови математичних моделей задачних ситуацій, спиратимуться на структурні моделі, що описують рух катера з А через В до С (ліва частина матриці повної інформації − рис. 12) та рух катера від С через В до А (права частина матриці повної інформації − рис. 12). Очевидно, що процес аналізу обох названих підпроцесів передбачає їх розбиття на складові частини. А саме − рух катера від А через В до С розбиваємо на два процеси: рух катера від А до В та рух катера від В до С. Аналогічно поступаємо з процесом – рухом катера від С через В до А.

Шлях			**80**		**y**	**=**	**y**		**80**		
			‖		‖		‖		‖		
Швид-кість			**18+x**		**18-3**		**18+3**		**18-x**		
			*		*		*		*		
Час	**18**	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$\frac{y}{15}$		$\frac{y}{21}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	**15**
			процес A→B		***процес B→C***		***процес C→B***		***процес B→A***		
			процес A→B→C				***процес C→B→A***				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 12. Побудова системи рівнянь (11) за результатами аналізу матриці інформації.

Побудуємо рівняння за фактами: на шлях від А через В до С катер затратив 18 годин (форма на рис. 5 ?+?=18), на шлях від С через В до А катер затратив 15 годин (форма ?+?=15). Використавши аналогічні до попередніх міркування, що супроводжуються заповненням матриці інформації (рис. 12), маємо систему рівнянь (11), яка і є аналітичною моделлю задачі, побудованою за першим рівнем процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації. Дослідження та розв’язання цієї моделі приведе до виконання вимоги задачі.

$$\begin{cases} \frac{80}{18+x}+\frac{y}{15}=18 \\ \frac{y}{21}+\frac{80}{18-x}=15 \end{cases}$$

Розглянемо наступний рівень процесуальної ієрархії задачної ситуації, який визначатиметься чотирма процесами – рух від А до В, рух від В до С, рух від С до В, рух від В до А. Очевидно, що майбутня математична модель задачі буде мати вигляд системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Позначимо довільно ці невідомі. Нехай x – швидкість течії притоки, y – відстань ВС, z – час руху катера від А до В, t – час руху катера від С до В. Тоді побудова евристичних алгоритмів розв'язування задачі за вказаним рівнем буде відбуватися з використанням структурних моделей, зображених на рис. 13.

Шлях	**80**	**y**	**y**	**80**
	‖	**‖**	**‖**	**‖**
Швидкість	**18+x**	**15**	**21**	**18-x**
	*	*	*	*
Час	**z**	**18-z**	**t**	**15-t**
	процес A→B	***процес B→C***	***процес C→B***	***процес B→A***

Рис. 13. Побудова системи рівнянь (12) за результатами аналізу матриці інформації.

Відповідно до структурних моделей, зображених на рисунку 13, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z(18+x)=80 \\ (18-z)\,15=y \\ 21t=y \\ (15-t)\,(18-x)=80 \end{cases} \qquad (12)$$

розв'язавши яку, прийдемо до знаходження відстані ВС, що вимагається питанням задачі.

Примітка 1. Припущення про рівність кількості процесів, кількості математичних моделей та кількості змінних може бути справедливим не для всіх задач, а лише для тих, у яких вимагається знайти конкретну іменовану величину. Якщо ж у задачі вимагається визначити співвідношення між відповідними іменованими величинами, то кількість змінних може бути на одиницю більшою, ніж кількість математичних моделей (або процесів). Читач може переконатися у цьому самостійно, розглянувши в описаному вище контексті задачі № 529, 530, 588, 592 та інші подібні з [32].

Примітка 2. При порівнянні визначених нами трьох рівнів (для даної конкретної задачі) процесуальної ієрархії структуризації задачної ситуації очевидно є закономірність: чим нижчий рівень процесуальної ієрархії, тим складнішими для сприймання суб'єктом навчання є евристичні алгоритми, що використовуються у процесі побудови математичної моделі задачі, але тим простішою в контексті розв'язання та дослідження виявляється сама математична модель. Дійсно, структурна модель задачі, зображена на рис. 9, не є очевидною − для її осмислення суб'єкту навчання треба прикласти певні зусилля, але відповідна математична модель − рівняння (6) − є очевидно простішою у дослідженні та розв'язанні, ніж система рівнянь (11), і, тим більше, система (12). Очевидною є і обернена закономірність: чим вищий рівень процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації, тим простішими є евристичні алгоритми побудови математичної моделі задачі і складнішою є сама математична модель у контексті її дослідження та розв’язання.

Проведене вище дослідження дозволяє зробити такі висновки:

1. Евристичний алгоритм процесу розв’язання задачної ситуації буде складатися з евристик (приписів), що визначатимуть послідовність та процес створення моделей задачної ситуації.

Умова задачі у вигляді тексту є вербальною моделлю вихідної проблемної ситуації ***і, по суті, задає задачну ситуацію як систему даних і запитання задачі.***

Першою евристикою процесу розв’язування задачної ситуації буде створення моделі задачної ситуації у вигляді ієрархії її складових (рис. 1, рис. 3, рис. 7). Така модель створюється на основі даних задачі і відображатиме ієрархію у системі «задачна ситуація», а не тільки її складові, як це було в тексті задачі. Однак ієрархічна модель задачної ситуації не відображає проблему задачної ситуації (запитання задачі) та зв’язки між складовими системи «задачна ситуація».

Другою евристикою процесу розв’язування задачної ситуації буде створення її моделі у вигляді матриці (таблиці) інформації − структурної моделі задачі. Ця модель (рис. 2, 4, 5, 8−13) створюється після введення невідомих на основі умови задачі та попередньої її моделі.

Третьою евристикою процесу розв’язування задачної ситуації буде створення її моделі у вигляді рівняння або системи рівнянь, які одержимо з матриці інформації про задачну ситуацію. Це ***аналітична модель задачі***. Зазначимо, що в науково-методичній літературі також зустрічається термін − розв’язуюча модель.

Крім перелічених моделей при розв’язуванні текстових задач на процеси використовуються і наочно-схематичні моделі (описані нами в [3]), але для задач на відсотки вони використовуються рідко.

2. Створення моделі задачної ситуації у вигляді матриці інформації дає можливість повно і ефективно провести етап матеріалізації розумових дій суб’єкта навчання у знаковій формі, про що йдеться в [2], і дозволяє моделювати процес розв’язування задачної ситуації у вигляді послідовностей моделей його етапів. Процес створення матриці інформації про задачну ситуацію є системним підходом до розв’язання задачної ситуації, тому що: а) визначає складові частини задачної ситуації згідно побудованої ієрархії; б) дає цілісне (матриця) та елементарне (клітина матриці) уявлення про задачну ситуацію; в) відображає зв’язки між елементами (клітинами) предметної області задачі; г) допомагає скласти розв’язуючу модель задачі у вигляді системи рівнянь.

Потрібно зазначити, що наведена технологія розв’язування текстових задач не може бути зведена до алгоритму в розумінні Ф.Неймана чи В.Глушкова, тобто до її «автоматичного розв’язування».

У межах кожної евристики (основної чи «часткової») суб'єкт розв'язання конкретної задачі повинен створити власний однозначний алгоритм розв'язання задачної ситуації.

Основна ідея запропонованої вище технології розв'язання текстових задач з математики, що описують процеси певного виду, полягає в структуруванні поля можливостей (або поля можливих дій) для суб'єкта розв'язання задачі за допомогою приписів алгоритмічного виду (чи евристичних алгоритмів) з відповідним зменшенням невизначеності задачної ситуації і зростанням її визначеності, тобто зростанням інформації про задачну ситуацію. При «поміщенні» суб'єкта розв'язання задачі (разом із конкретною текстовою задачею) до структурованого в такий спосіб поля можливостей значно полегшуються зусилля при відшуканні рішення цієї задачі.

3. Системний підхід у науці виник як відповідь на дослідження складних процесів, складність яких, зокрема, полягає у їх невизначеності. Таким процесом і є процес розв'язування текстових математичних задач. Поле можливостей для суб'єкта розв'язування таких задач має значну невизначеність, що утруднює отримання однозначного алгоритму розв'язування.

Кібернетичний підхід до розв'язування таких проблем передбачає створення моделі (чи послідовності моделей) процесу розв'язування задачної ситуації (у нашому випадку − модель задачної ситуації у вигляді матриці інформації). Згідно [5], моделлю деякого процесу (процесу розв'язування задачі) називається знакова система (матриця інформації), що а) чимось подібна задачній ситуації, тобто має якісь однакові на даному рівні деталізації властивості із задачною ситуацією; б) модель є більш визначеною та простою у порівнянні із самою задачною ситуацією; в) робота з моделлю (перетворення моделі) дає нову інформацію про задачну систему, тобто зменшує її невизначеність і, в кінцевому підсумку, приводить до повної визначеності, тобто, до розв'язку.

Ще раз підкреслимо, що запропонована технологія розв'язування певного типу текстових задач з математики не «відміняє» творчих пошуків суб'єкта розв'язання таких задач . Така технологія ніяк не може «автоматизувати» творчі моменти процесу розв'язування задачної ситуації. По суті, запропонована технологія є спробою створення моделей процесу розв'язування задачі у вигляді моментів перетворень моделей задачної ситуації, що можна вважати інноваційним підходом до розв'язування текстових задач з математики.

Список рекомендованої літератури.

1. Збірник задач з математики для вступників до втузів / За редакцією М.І.Сканаві. − Київ: Вища школа, 1992. − 445 с.
2. Исследование мышления в советской психологии // Под. ред. П.Л. Гальперина. –М.: Мысль, 1966. – 120 с.
3. Ріжняк Р.Я. Моделі задач на рух у 4-5 класах // Радянська школа. – 1989. – № 10. – с. 35 – 39.
4. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. − Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. − 160 с.
5. Творческая природа научного познания // Ответственный редактор Д.П.Горский. − Москва: Наука, 1984. − 388 с.
6. Арнольд И.В. О задачах по арифметике. // Математика в школе. -1995.-№5.
7. Багачева Г.Н. К методике обучения школьников IV-V классов анализу текстовых задач. // Математика в школе.-1984.-№1.
8. Богданович М.В., Бурда М.І. Творчо, винахідливо: навчання учнів IV-V класів складати текстові задачі.// Радянська школа.-1989.-.№5.
9. Драган З.П. К методике решения задач в IV классе. // Математика в школе. – 1983.-№1.
10. Канашева Н.А. О решении задач на проценты.// Математика в школе. –1995.-№5.
11. Левитас Г.Г. Об изучении процентов в V классе. // Математика в школе. - 1991.- №4.
12. Мацкин Ю.М. Использование элементов координатного метода при решении текстовых задач в V классе.// Математика в школе. – 1987.-№4.
13. Мельникова Е. Сколько учеников у Пифагора? Решение задач с помощью уравнений. 6кл. // Все для вчителя.- 1999.-№19-20.
14. Никифоров Н.Н. К изучению темы «Решение задач с помощью уравнений» // Математика в школе.-1994.-№2.
15. Никольская И.А. Из опыта изучения темы «Задачи на проценты» // Математика в школе.- 1975.-№5.
16. Овсиенко Г.В. Большое внимание арифметическим задачам. // Математика в школе.-1997.- №1.
17. Панишева О.В. Масштаб. Задачи на пропорцию: Урок-путешествие.// Все для вчителя.-2000.-№23.
18. Радченко Е.В. Решение текстовых задач в IV-V классах. // Математика в школе. - 1987.-№4.
19. Рязановский А.Р. Задачи на части и проценты.// Математика в школе. – 1992.-№2.
20. Сухіна Л. Застосування моделі під час вивчення відсотків. // Математика в школі. – 2000.-№5.
21. Царева С.Е. Введение удобных единиц измерения как метод текстовых задач. // Математика в школе.-1997.-№6.

22. Шевкин А.В. Еще раз об изучении процентов.// Математика в школе. – 1993.-№1.

23. Шихалиев Х.Ш. О решении задач с помощью пропорций. // Математика в школе.-1985.-№6.

24. Гончаренко О.В. Позначення невідомих буквами при розв’язуванні задач за допомогою рівнянь: систематизований матеріал для 6-9 класів. // Все для вчителя. –1999.-№15-16.

25. Иржавцева В.П., ФедченкоЛ.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики : Пособие для учителя / Под ред. Н.Л. Коломинского. –К.: Рад.школа, 1989.

26. Колягин Ю.М. Задача в обучении математике. –М.: Просвещение, 1977.

27. Куликов Ю.М. Вариации на тему учебной задачи // Математика в школе. –1994.-№2.

28. Нешков К.И., Семушин А.Д. Функции задач в обучении // Математика в школе. –1971.-№3.

29. Никифоров Н.Н. К изучению темы «Решение задач с помощью уравнений» // Математика в школе.-1994.-№2.

30. Орехов Ф.А. Решение задач методом составления уравнений. Пособие для учителей восьмилетней школы. –М.: Просвещение, 1971.

31. Пасічник І.Д. Про навчання школярів систематизації матеріалу з математики. // Радянська школа. –1981.-№6.

32. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей techinstitutов. − Москва: Просвещение, 1991. − 352 с.

Розділ 5. Стратегії навчання математичної статистики

Становлення особистості учня в навчальному процесі загальноосвітньої школи має багато аспектів, напрямків, рівнів. Важливе місце в процесі такого становлення займає предметно-методичний аспект та аспект управління-спілкування навчальним процесом. Ми спробуємо проілюструвати модель навчального процесу у школі з акцентом на певних особливостях методів і форм навчання, спілкування, які сприяють формуванню в учнів складних здібностей.

Існує цілий пласт невикористаних можливостей: методів, форм, прийомів, засобів викладання й спілкування вчителів та учнів, які значно покращили б рівень математичної підготовки школярів.

У короткому викладі не має можливостей широкого дослідження поставленої проблеми. Тому ми покажемо її суть та зміст в окремих моментах педагогічного процесу загальноосвітніх закладів.

Одним з таких моментів є вплив застосування комп'ютерів та сучасних інформаційних технологій на навчальний процес у школі з метою більшої його ефективності. Зокрема, розглянемо це на прикладі навчання математичної статистики учнів старших класів.

На сьогодні навчальні плани й програми профільний (математичних) шкіл побудовані так, що їх виконання дає розрізнені знання з різних дисциплін, які мало зв'язані між собою і ще менше зорієнтовані на єдину ідею – підготовку школярів до практичної діяльності. Зокрема навчання математичної статистики практично дуже мало пов'язане з іншими шкільними предметами. Ще менше заняття з математичної статистики зорієнтовані на підготовку до майбутньої діяльності учнів як організаторів, майбутніх керівників.

Ми виділяємо декілька рівнів стратегій викладання (і відповідно навчання) математичної статистики у школі, які пов'язані з професійною орієнтацію навчального процесу. Чільне місце тут буде займати використання інформаційної технології Exel [4], яка передбачена навчальними програмами шкіл і викладається в курсі інформатики.

Викладання математичної статистики передбачає формування в учнів 11 класів основних понять математичної статистики (середнього значення, дисперсії, середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта кореляції, ліній регресії, часових рядів, статистик та ін.) та їх застосування до розв'язування конкретних задач. При цьому виникає ціла низка проблем і труднощів: низьке забезпечення методичними розробками навчання математичної статистики з використанням міжпредметних зв'язків; недостатнє забезпечення навчального процесу сучасними комп'ютерами й інформаційними технологіями; низький рівень засвоєння знань учнями з комп'ютерних та інформаційних технологій; мала кількість годин, відведених на вивчення математичної статистики навчальними планами та ін.

Першим рівнем навчання (відповідно, першою стратегією навчання) математичної статистики є рівень, на якому комп'ютери взагалі не використовуються. Тоді складні арифметичні обчислення виконуються вручну чи із застосуванням калькуляторів та різних таблиць. При цьому за часом, затратами сил і енергії технічні обчислення займають левову частку в навчанні, що значно гальмує формування в учнів сутності та змісту відповідних понять математичної статистики, суттєво знижує розвиток їх творчих здібностей (обчислення виконуються за відомими алгоритмами, формулами, творчість тут мінімальна), затримує формування практичних вмінь і навичок при розв'язанні задач математичної статистики, задач статистичного аналізу, фактично не дає змоги розв'язувати задачі прикладного характеру. Зокрема, вибірки для учбових задач беруться малого розміру, що приводить до значної статистичної похибки і спотворює уявлення про відповідне поняття (наприклад, середнього квадратичного відхилення, частотний розподіл, статистичну рівність чи відмінність дисперсій чи середніх значень). Більшість підручників, довідників і посібників, збірників задач і вправ з математичної статистики написані у відповідності до програм навчальних закладів фізико-математичного профілю, які не відображають специфіки задач статистичного аналізу за іншими фахами. Тому професійна орієнтація в плані підготовки майбутніх хіміків, біологів, географів, психологів, соціологів, економістів, менеджерів, журналістів на заняттях з математичної статистики практично дуже мала, а то й зовсім відсутня. Все це призводить до того, що засвоєння знань з математичної статистики учнями репродуктивне, формальне, без належного зв'язку з іншими дисциплінами і майбутньою професійною діяльністю. Наведений рівень навчання не забезпечує потрібною мірою формування в учнів нового жанру мислення, пов'язаного із розумінням тих чи інших явищ математичної статистики.

Розглянемо задачу 1. За даними таблиці про врожайність пшениці за останні 25 років на деякій ділянці землі знайти середнє квадратичне відхилення врожайності.

Врожайність (ц/га)	20	25	30	35	40	45	50
Кількість років з вказаною врожайністю	2	3	5	6	4	3	2

З точки зору статистики ця задача не є складною, але для її розв'язання слід провести такі обчислення: знайти середнє арифметичне значення даних вибірки, знайти відхилення від середнього, а потім корінь квадратний із середнього арифметичного квадратів відхилень. Отже:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i - x_c)^2}{25}}, \qquad (1)$$

де $x_c = \frac{20*2+25*2+30*5+35*6+40*4+45*3+50*2}{25} = 34{,}8(ц/га)$, тоді, маємо: $\sigma = 8.304$.

На цьому етапі всі обчислення проводяться вручну чи за допомогою калькуляторів.

Наступні рівні навчання студентів математичної статистики пов'язані з використанням комп'ютерів та інформаційної технології Exel [4].

Другий рівень (друга стратегія) навчання математичної статистики характерний використанням Exel-технології практично з тим же самим методичним забезпеченням, що й перший рівень навчання. Перевагами другого рівня навчання над попереднім будуть такі. Обчислення не займатимуть провідного місця за часовими й енергетичними затратами; вибірки можуть бути значного розміру, реально розв'язується проблема формування в учнів понять математичної статистики, статистичного аналізу, за великим рахунком формування нового жанру мислення. Кількість розв'язаних прикладів і задач завдяки комп'ютеру може зрости у декілька разів у порівнянні з безкомп'ютерним навчанням, що дає змогу значно підвищити формування аналітико-операційних здібностей школярів. При цьому Exel-технологія [4] дає можливість вести різні обчислення (середнє значення, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт кореляції, рівняння лінії регресії, різних статистик і т.п.) двома шляхами: безпосередньо за формулами, які набирає в Exel учень; це дає можливість краще запам'ятовувати формули математичної статистики та зрозуміти їх зміст; користуватися майстром функцій (статистичні функції), тобто готовим результатом. Exel-технологія має потужні графічні можливості, що дає змогу отримувати якісні графічні зображення у вигляді різних діаграм. Так при вивченні регресивного аналізу й побудові лінії регресії для двох величин можна графічно досліджувані величини зобразити точками, а рівняння лінії регресії (прямої) автоматично знаходить комп'ютер та зображує її на рисунку, що дозволяє візуально оцінювати розкидання точок відносно лінії регресії, її кут нахилу до осі абсцис. Ще краще досліджувати в Exel-технології розвиток певних випадкових процесів. Саме лінія регресії показує в часі тенденцію розвитку процесу, швидкість його зміни, коливання. Так можна досліджувати, наприклад, тенденції розвитку прибутків фірми, числа захворювань певною хворобою, урожайність сільськогосподарських культур, народжуваність дітей, виборчих процесів, інфляції, зміни температури і т.п. Лінія регресії дозволяє здійснювати прогноз на основі лінійної (чи нелінійної) інтерполяції.

Роки	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Врожайність	20	25	30	35	20	50	25	50	45	35	30	40	35
Роки	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	
Врожайність	40	30	45	25	35	40	30	35	30	45	40	35	

Середня врожайність	34,80

Квадратичне відхилення середньої врожайності	1724

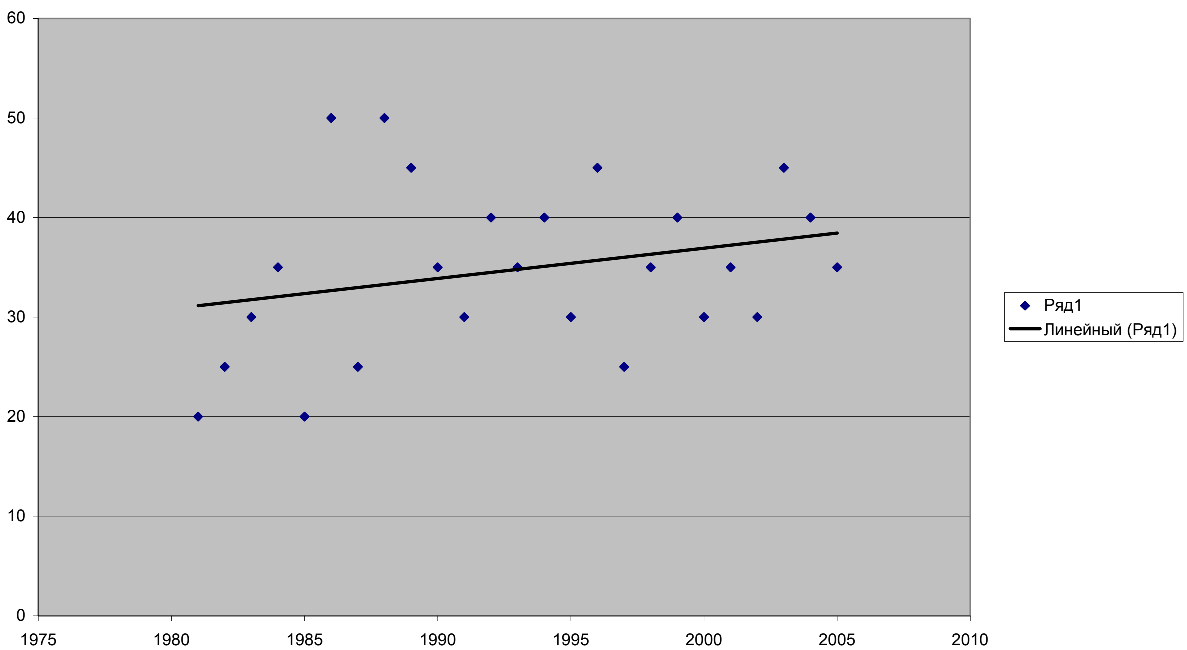
Середнє квадратичне відхилення врожайності	8,304

Таблиця 1.

Продемонструємо використання технології Exel у процесі розв'язування задачі 1. Дані задачі представлені у вигляді таблиці розподілу врожайності за роками. Вимога задачі виконана шляхом використання при розв'язуванні стандартних статистичних функцій, які повертають знайдене середнє арифметичне масиву чисел та квадратичне відхилення масиву чисел (таблиця 1). На рисунку 1 зображена лінія регресії, яка наочно ілюструє тенденцію розвитку описуваного процесу.

Головним недоліком, на наш погляд, другого рівня викладання математичної статистики є відірваність від цілісного процесу формування майбутнього фахівця з хімії, біології, психології, економіки і т.д. Недостатність спеціального методичного забезпечення призводить до того, що учні знаходяться в полі можливостей, яке їм окреслює математика, математична статистика й інформатика. Їхні знання слабо інтегруються в цілісний процес професійної підготовки майбутнього фахівця.

Рисунок 1. Врожайність пшениці по роках



Третім рівнем (третьою стратегією) навчання математичної статистики ми вважаємо вихід у міжпредметні зв'язки, коли буде створене *методичне забезпечення*, яке дозволить розв'язувати задачі з хімії, біології, економіки, географії за допомогою математичної статистики з використанням комп'ютерів. При створенні таких посібників потрібні зусилля викладачів математики, інформатики та відповідного фаху (хіміка, біолога, економіста, географа і т.п.). Акцент занять буде зміщений на розв'язання "фахової проблеми", а не проблеми математичної статистики чи інформатики. Тоді відбудеться розширення поля можливостей допрофесійної підготовки учнів. Математична статистика почне відігравати роль інструменту розв'язання задач, пов'язаних із майбутньою професійною діяльністю. При цьому не знижується увага до формування у школярів основних понять математичної статистики, понять статистичного аналізу, аналітичних і операційних здібностей.

Поява нового виміру (спеціального методичного забезпечення) в процесі навчання математичної статистики дозволяє формувати міжпредметні зв'язки, створювати проблемні ситуації у вигляді ділової гри, формувати у студентів системно-інтегративні знання. Одним з головних позитивів такого підходу є створення та розв'язання проблемної ситуації.

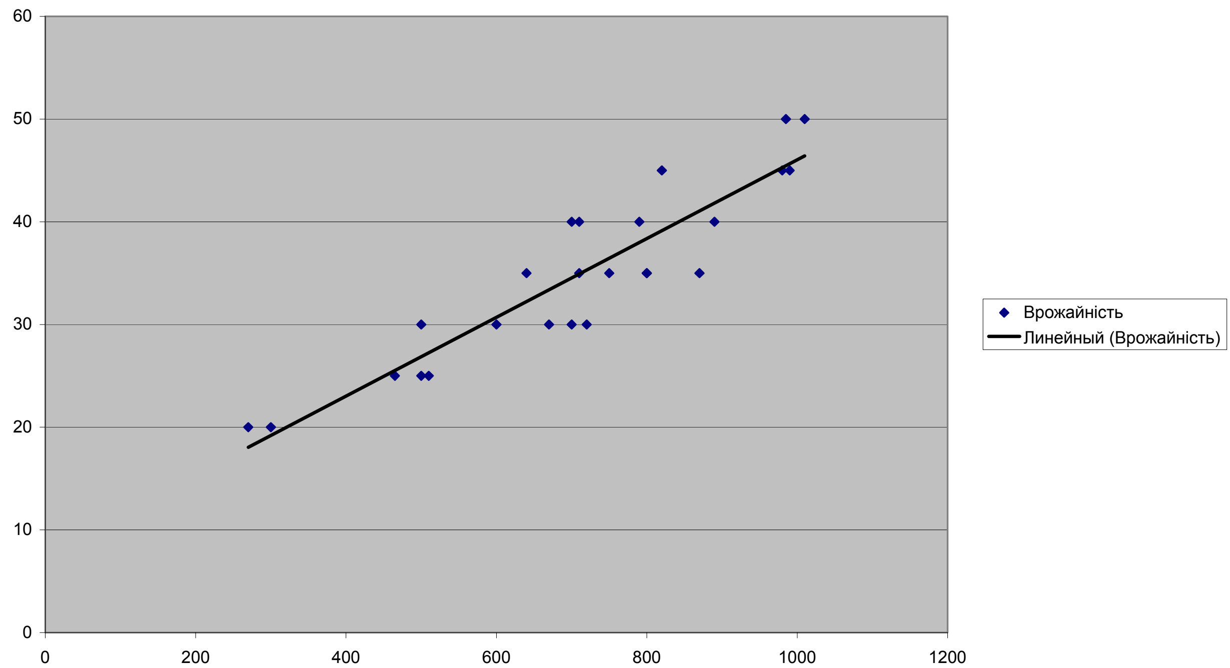
Для ілюстрації цього рівня змінимо так умову задачі 1. Проаналізувати таблицю 2 на предмет зв'язку між кількістю опадів та врожайністю пшениці. Результати аналізу підтвердити статистичними розрахунками коефіцієнта кореляції.

Роки	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Кількість опадів (мм)	270	465	500	870	300	985	500	1010	990	800	600	710	640
Врожайність	20	25	30	35	20	50	25	50	45	35	30	40	35
Роки	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	
Кількість опадів (мм)	700	670	820	510	710	790	720	750	700	980	890	800	
Врожайність	40	30	45	25	35	40	30	35	30	45	40	35	

Таблиця 2.

Звернемо увагу на той аспект аналізу таблиці 2, який стосується ілюстративного компоненту формулювання висновків. Залежність врожайності від кількості опадів можна зобразити, побудувавши лінію регресії (рисунок 2), яка наочно ілюструє тенденцію розвитку процесу, швидкість його зміни, дає

Рисунок 2. Залежність врожайності від кількості опадів



можливість здійснити прогноз врожайності. Але очевидним є факт, що кількість опадів – це лише один з багатьох факторів, які впливають на врожайність пшениці. Тому у процесі формулювання висновків треба обумовлювати їх справедливість при позитивному впливі усіх інших факторів.

Четвертим рівнем (четвертою стратегією) навчання математичної статистики можна вважати рівень розв'язання задачі в реальних умовах, коли учні, отримуючи завдання, самі здійснюють експерименти по збору статистичних даних з відповідним подальшим їх опрацюванням за допомогою математичної статистики з використанням інформаційних технологій, зокрема Exel-технології, STATISTIKA, SPSS та ін. Так при вивченні середніх значень, дисперсії, середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта кореляції, лінії регресії чи тенденцій розвитку якогось процесу учням даються відповідні завдання з метою побудови відповідної вибірки експериментальним шляхом із подальшою обробкою вибірки за допомогою комп’ютера. При цьому виконання завдань носить характер невеликого самостійного наукового дослідження. У такий спосіб формується фахівець з інтегративними знаннями, складними здібностями, гуманітарним мисленням, а навчання математичної статистики стає органічною складовою процесу підготовки майбутнього фахівця.

Для даного рівня завдання учням може бути таким: зібравши необхідні дані про урожайність пшениці в Кіровоградській області за останні 25 років, зробити обґрунтовані статистичними розрахунками висновки про вплив кількості опадів в цьому регіоні на кількісні характеристики урожайності.

Одним із напрямків підготовки учнів загальноосвітніх навчальних закладів є збільшення акценту на організацію їх самостійної роботи, на самовизначення й саморозвиток особистості майбутнього фахівця. Зрозуміло, що третій і четвертий рівень навчання розділу “Вступ до статистики” курсу “Алгебра і початки аналізу” 11 класу створить досить широке поле можливостей для такої самореалізації учнів. Однак такий підхід до навчання основ статистики вимагатиме координації навчальних планів і програм з інформатики, математики та “нематематичних” дисциплін.

У певних конкретних умовах кожна з наведених стратегій навчання має свої обмеження. Тому вчителеві необхідно на основі наведених чотирьох «чистих» стратегій будувати власну комбіновану стратегію навчання. Перший наш досвід навчання основ математичної статистики учнів класів природничого спрямування за другим, третім і четвертим рівнями обнадійливий.

Список рекомендованої літератури

1. Беспалько В.П., Татур Ю.Г. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов: Учебно-методическое пособие. – М.: Высшая школа, 1989. – 144 с.
2. Кушнір В.А. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 348 с.
3. Кушнір В.А. Гуманітарне мислення вчителя // Соціальна психологія. – 2004. – № 4(6). – С. 81 – 95.
4. Лопач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Exel. – К.: МОРИОН, 2001. – 408 с.
5. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Формування в учнів старших класів складних здібностей на заняттях із математичної статистики // ПостМетодика, 2007, № 5 (76), с. 46-50.

ЗМІСТ

Інноваційні методи навчання математики

Науково-методичний посібник

Василь Андрійович Кушнір

Григорій Андрійович Кушнір

Ренат Ярославович Ріжняк

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ

Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 02.12.2008. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф. Ум. др. арк. 8,7. Тираж 550. Зам. № 5405.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ

Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1

Тел.: (0522) 24-59-84.

Fax.: (0522) 24-85-44.

E-Mail: mails@kspu.kr.ua