МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

В.В. Вдовенко, І.В. Сальник, Н.Г. Шевченко

ЗАДАЧІ ЗАОЧНОЇ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Навчально-методичний посібник

Кіровоград – 2008

ББК 22.1
В 25

УДК 51

Вдовенко В.В., Сальник І.В., Шевченко Н.Г.
В 25
Задачі заочної фізико-математичної школи: Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 88 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор (кафедра математики, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка) Ю.І. Волков
доктор педагогічних наук, професор (кафедра фізики, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка) М.І. Садовий
кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедрою методик Кіровоградського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти імені В. Сухомлинського Л.С. Голодюк

У посібнику на основі узагальнення досвіду роботи заочної фізико-математичної школи Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка подано методику й аналіз розв'язування основних типів завдань з математики й фізики. Він покликаний допомогти старшокласникам і абітурієнтам у стислі терміни систематизувати свої знання, удосконалити навички, застерегти від можливих помилок, а отже краще підготуватися до незалежного тестування з математики й фізики.

Посібник буде корисним випускникам загальноосвітніх шкіл, а також учителям та студентам фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 2 грудня 2008 року (протокол № 6).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ББК 22.1
УДК 51

ЗМІСТ

Шановні старшокласники!

У 2006 році фізико-математичний факультет Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка відновив роботу заочної фізико-математичної школи (далі ЗФМШ). Ми поставили перед собою завдання – зацікавити учнів старших класів вивченням математики та фізики, надати можливості більш глибоко вивчати ці предмети учням, які проживають у віддаленій сільській місцевості, допомогти випускникам підготуватися до зовнішнього тестування з математики та фізики та зорієнтуватися у виборі майбутньої професії.

Більшість слухачів ЗФМШ стали студентами фізико-математичного факультету КДПУ, інших престижних вузів – Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, Національного університету легкої промисловості, Київського інституту банківської справи, Харківського університету народного господарства та ін.

Узагальнюючи досвід роботи заочної фізико-математичної школи, молодими науковцями-методистами В.В. Вдовенко, І.В. Сальник та Н.Г. Шевченко і підготовлено цей посібник. У першому розділі подано методичні поради щодо розв'язування різних типів задач з математики, які пропонувалися слухачам ЗФМШ у різні роки. Матеріал другого розділу допоможе в стислі терміни повторити шкільний курс фізики. Мета посібника – допомогти старшокласникам і абітурієнтам систематизувати свої знання, удосконалити навички, застерегти від можливих помилок, а отже, краще підготуватися до незалежного тестування з математики й фізики. Значна увага приділяється аналізу умови кожної задачі, пошуку раціонального способу її розв'язання.

Декан фізико-математичного факультету
Р.Я. Ріжняк

Розділ 1. МАТЕМАТИКА

1.1. АЛГЕБРА

1.1.1. Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи

При розв'язуванні алгебраїчних рівнянь основними є такі методи:

- ✓ розкладання на множники;
- ✓ введення нових змінних.

Метод розкладу на множники полягає в наступному: якщо $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$, то будь-яке рівняння $f(x)=0$ є розв'язком сукупності рівнянь $f_1(x)=0;\ \ f_2(x)=0;\ \ \ldots;\ \ f_n(x)=0$ (обернене твердження не завжди є вірним).

Деякі типи алгебраїчних рівнянь вищих порядків, які зводяться до квадратних

1. Тричлене рівняння $ax^{2n}+bx^n+c=0\,(a,\,b,\,c\in\mathrm{R},\ a\neq 0,\ n\geq 2)$. Заміною $x^n=t$ зводиться до квадратного. При $n=2$ тричленне рівняння називається біквадратним рівнянням.

2. Зворотне (симетричне) рівняння $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ($a, b, c, d, e\in\mathrm{R}$, $ae\neq 0$).

За умови $\frac{e}{a}=\frac{d^2}{b^2}$ зводиться до квадратного: після ділення обох його частин на $x^2\neq 0$ маємо: $a\left(x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0$. Далі використовують заміну $x+\frac{d}{bx}=t$.

3. Рівняння виду $af^2(x)+b\varphi^2(x)+cf(x)\varphi(x)=0$, де $a, b, c\in\mathrm{R}$, $f(x),\varphi(x)-$ деякі функції – називається **однорідним**. Після ділення обох його частин на $\varphi^2(x)\neq 0$ (або $f^2(x)\neq 0$) і заміни $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=t$ (або $\frac{\varphi(x)}{f(x)}=t$) воно зводиться до квадратного.

4. Рівняння $(ax+b_1)^4+(ax+b_2)^4=0$, ($a, b_1, b_2\in\mathrm{R}$) заміною $ax+\frac{b_1+b_2}{2}=t$ зводиться до біквадратного.

5. Рівняння виду $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c$ ($c\neq 0$)

після ділення чисельника і знаменника кожного дробу на $x\neq 0$

$\frac{a}{px+\frac{q}{x}+n}+\frac{b}{px+\frac{q}{x}+m}=c$ і заміни $px+\frac{q}{x}=t$ зводиться до квадратного.

Приклади розв'язування рівнянь:

1. $\left(x^2+2x-1\right)^2+2x^2+3x=3$.

Представимо рівняння у вигляді $\left(x^2+2x-1\right)^2+2\left(x^2+2x-1\right)+1=x+2$.

Оскільки ліва частина рівняння являє собою повний квадрат, то отримаємо

$\left(x^2+2x\right)^2-(x+2)=0; \Leftrightarrow (x+2)^2\cdot x^2-(x+2)=0, \Leftrightarrow (x+2)\cdot\left(x^2(x+2)-1\right)=0$.

$(x+2)\cdot\left(x^3+2x^2-1\right)=0, \Leftrightarrow (x+2)\cdot\left(x^3+x^2+x^2-1\right)=0, \Leftrightarrow (x+2)\cdot\left(x^2(x+1)+(x+1)(x-1)\right)=0, \Leftrightarrow$

$$(x+2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x-1\right)=0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x+1=0, \\ x^2+x-1=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_2=-1, \\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: –2; –1; $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Щоб розв'язати дане рівняння, доцільно симетризувати його заміною: $x + 4 = a$, внаслідок якої дістанемо $x + 3 = a - 1$, а $x + 5 = a + 1$, а задане рівняння буде мати вигляд:

$(a-1)^4 + (a+1)^4 = 16, \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 + a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = 16, \Leftrightarrow a^4 + 6a^2 - 7 = 0, \Rightarrow a^2 = -7$ (сторонній корінь) або $a^2 = 1, \Rightarrow a_1 = 1$, або $a_2 = -1, \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = -5$.

Відповідь: –3 і –5.

3. $4x^4-16x^3+7x^2-32x+16=0$.

Визначимо, чи буде дане рівняння зворотним: $\dfrac{4}{16}=\left(\dfrac{-16}{-32}\right)^2$. Рівність виконується.

Поділимо обидві частини рівняння на x^2. Після групування дістанемо:

$$4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0.$$

Позначимо $x+\dfrac{2}{x}=y$, звідки $x^2+\dfrac{4}{x^2}=y^2-4$. Тоді задане рівняння буде мати вигляд $4\left(y^2-4\right)-16y+7=0$. Звідси $y_1= 4{,}5$, $y_2 = -0{,}5$. Розв'язавши сукупність рівнянь

$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=4{,}5; \\ x+\dfrac{2}{x}=-0{,}5 \end{array}\right.$, дістанемо $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}5$.

Відповідь: 4 і 0,5.

3. $\dfrac{5x}{x^2-3x+12}-\dfrac{3x}{2x^2-15x+24}+2=0.$

Це рівняння було запропоноване учням 11-х класів (кр№1, 2006-07 навч. рік.) ЗФМШ, проте у багатьох із них викликало труднощі. Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то область допустимих значень (ОДЗ) даного рівняння: $x\neq\dfrac{15\pm\sqrt{33}}{4}$.

Пересвідчившись, що нуль не є коренем даного рівняння, скоротимо перші два доданки на $x \neq 0$:

$$\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x^2-3x+12}{x}} - \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{2x^2-15x+24}{x}} + 2 = 0; \Leftrightarrow \frac{5}{x+\frac{12}{x}-3} - \frac{3}{2(x+\frac{12}{x})-15} + 2 = 0.$$

Застосуємо метод введення нової змінної. Покладемо $t = x + \frac{12}{x}$ і отримаємо рівняння $\frac{5}{t-3} - \frac{3}{2t-15} + 2 = 0$, корені якого будуть числа: $t_1 = 8$, $t_2 = \frac{3}{4}$. Тепер досить легко відшукати корені заданого рівняння: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

4. $\frac{2x^2-x+3}{3} - \frac{2x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x}{6}$ (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Визначимо ОДЗ даного рівняння: $2x^2-4x+3 \neq 0$. Оскільки дискримінант рівняння $2x^2-4x+3=0$ від'ємний, то $2x^2-4x+3 \neq 0$ при довільних значеннях $\boldsymbol{x}$. Отже ОДЗ заданого рівняння $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$.

Перевіркою можна встановити, що $\boldsymbol{x} \neq 0$, тому поділимо обидві частини рівняння на $\boldsymbol{x}$. Отримаємо: $\frac{2x^2-x+3}{3x} - \frac{2x}{2x^2-4x+3} = \frac{1}{6}$. Поділивши чисельник і знаменник кожного з дробів на $\boldsymbol{x}$, отримаємо рівняння: $\frac{2x-1+\frac{3}{x}}{3} - \frac{2}{2x-4+\frac{3}{x}} = \frac{1}{6}$ (*). Введемо заміну $t = 2x + \frac{3}{x}$ (**), тоді рівняння (*) буде мати вигляд $\frac{t-1}{3} - \frac{2}{t-4} = \frac{1}{6}$, звідки $t_1 = 0$, $t_2 = 11/2$. Підставивши отримані значення в формулу заміни (**), знайдемо $\boldsymbol{x}_1 = 2$, $\boldsymbol{x}_2 = 3/4$.

Відповідь: $\boldsymbol{x}_1 = 2$, $\boldsymbol{x}_2 = 3/4$.

5. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$ (кр№2, 11 кл. 2007-08 навч. рік)

Позначимо $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = y$, тоді $y^2 = \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}\right) - \frac{8}{3}$.

Внаслідок чого дістанемо: $3y^2 + 8 = 10y$, тоді $3y^2 - 10y + 8 = 0$, $\Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = \frac{4}{3}$.

Підставивши отримані значення у формулу заміни, отримаємо сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}, \\ \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, x_2 = 6, \\ x_3 = 3 \pm \sqrt{21}. \end{array}\right.$

Відповідь: –2, 6, $3 \pm \sqrt{21}$.

Основні методи розв’язування систем рівнянь:

1. Спосіб підстановки
2. Спосіб алгебраїчного додавання
3. Спосіб введення нових змінних
4. Система містить однорідне рівняння
5. Графічний метод
6. Комбінований метод

Розв’яжемо системи рівнянь:

1. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y - xy^2 = 2. \end{cases}$ (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Помножимо друге рівняння системи на (–3) та додамо перше і друге рівняння.

$$\left.\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ -3x^2 y + 3xy^2 = -6, \end{cases}\right| + \Rightarrow (x-y)^3 = 1, \Leftrightarrow x - y = 1.$$

Отже маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 y - xy^2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ xy(x-y) = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

З останньої системи рівнянь легко знайти розв’язки: (2;1) та (–1;–2).

Відповідь: (2;1), (–1;–2).

2. $\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$ **(**кр№4, 10 кл. 2007-08 навч. рік**).**

Введемо заміну: $x + y + 1 = t$, $\Rightarrow$ $x + y = t - 1$, тоді перше рівняння буде мати вигляд: $t^2 + (t-1)^2 = 25.$ Розв’язавши його, знайдемо $t_1 = 4$, або $t_2 = -3$.

Тоді $x + y = 3$, або $x + y = -4$. Отже, дана система рівнянь буде рівносильна сукупності систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ (x-y)(x+y) = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -4, \\ (x-y)(x+y) = 3, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ 3\cdot(x-y) = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -4, \\ -4\cdot(x-y) = 3, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -\frac{3}{4}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{19}{8}, \\ y = -\frac{13}{8}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: (2;1) або ($-\frac{19}{8}; -\frac{13}{8}$).

3. $\begin{cases} xy = 12, \\ xz = 15, \\ yz = 20. \end{cases}$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Перемноживши всі три рівняння системи, маємо: $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600$, тобто $(xyz)^2 = 3600 \Leftrightarrow xyz = \pm 60.$

Розділивши останнє рівняння на кожне рівняння даної системи, маємо: $x = \pm 3$, $y = \pm 4$, $z = \pm 5$.

Відповідь: (±3, ±4, ±5).

4. $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$ (кр№2, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

З другого рівняння випливає, що або $x^5 = 0$ (тобто $x = 0$), або $\sqrt{x^2-4y^2}=0$. Проте, підставивши в перше рівняння значення $x = 0$, отримаємо: $-y+\sqrt{-4y^2}=2$. Очевидно, що підкореневий вираз $(-4y^2)\le 0$ при довільних значеннях y, тому $x\neq 0$, а отже $\sqrt{x^2-4y^2}=0$ (1).

Підставивши це значення в перше рівняння системи, отримаємо: $x - y + 0 = 2$, тобто $x = y + 2$. Підставимо значення $x = y + 2$ в рівняння (1): $(y+2)^2-4y^2=0$, $\Leftrightarrow y^2+4y+4-4y^2=0$, $\Leftrightarrow$ $3y^2-4y-4=0$. Корені цього рівняння $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Тоді $x_1 = 4$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Відповідь: (4;2), $(1\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$.

5. $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

Додавши перше і друге рівняння, отримаємо:

$$x^2+y^2+2xy+(x+y)=12, \Leftrightarrow (x+y)^2+(x+y)=12.$$

Увівши заміну: $x + y = a$, отримаємо: $a^2 + a - 12 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$. Тож задана система рівнянь буде рівносильна сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3, \\ x+y+xy=5, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-4, \\ x+y+xy=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Отримані системи легко розв’язати методом підстановки. Перша система буде мати розв’язок: (2;1), (1;2), а друга система розв’язків не має.
Відповідь: (2;1), (1;2).

Розв’язування нерівностей

І. Квадратні нерівності, тобто нерівності виду $ax^2+bx+c>0$ (<0), $a\neq 0$.

Будемо вважати, що $a>0$. Якщо це не так, то помноживши обидві частини нерівності на – 1 та змінивши знак нерівності на протилежний, отримаємо бажане.

Щоб розв’язати нерівність можна:

1. Квадратний тричлен розкласти на множники, тобто записати нерівність у вигляді $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ (<0).
2. Корені многочлена нанести на числовий промінь.
3. Схематично побудувати параболу, яка проходить через ці корені (рис. 1).

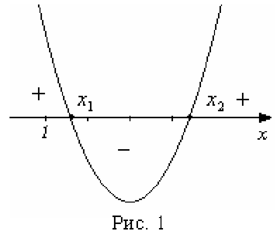


Рис. 1

4. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то при $a > 0$ та D < 0 квадратний тричлен для довільного x є додатнім.

ІІ. Раціональні нерівності вищих степенів ($n > 2$), тобто нерівності виду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 > 0\,(< 0)$, $n > 2$.

Щоб розв'язати нерівність можна:

1. Многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ розкласти на множники і записати задану нерівність у вигляді $a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0$ (< 0). При цьому необхідно ділити обидві частини нерівності на вирази додатні при будь-якому значенні змінної (якщо вираз від'ємний при будь-якому значенні змінної, то знак нерівності необхідно змінити на протилежний).
2. Корені многочлена нанести на числовий промінь.

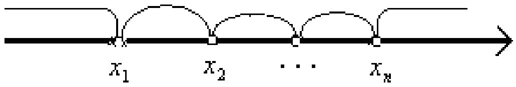


Рис. 2

3. Визначити, якого знаку набуває ліва частина нерівності $a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0$ (< 0) на кожному з утворених проміжків.
4. Записати відповідь.

ІІІ. При розв'язуванні **дробово-раціональних нерівностей** рекомендуємо дотримуватися наступної схеми:

1. Перенести всі члени нерівності в ліву частину.
2. Всі члени нерівності в лівій частині звести до спільного знаменника, тобто нерівність записати у вигляді $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$ (< 0).
3. Замінити дробову нерівність цілою, тобто нерівність $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0\,(< 0)$ буде рівносильна системі $\begin{cases} f_1(x) \cdot f_2(x) > 0 \;\; (< 0) \\ f_2(x) \neq 0. \end{cases}$
4. Розв'язати отриману систему.

Наприклад, розв'яжемо нерівність: $\dfrac{20}{x^2 - 4} < \dfrac{5}{x - 2} - \dfrac{3}{x + 2}$.

Перенесемо всі члени нерівності в ліву частину $\dfrac{20}{x^2 - 4} - \dfrac{5}{x - 2} + \dfrac{3}{x + 2} < 0$.

Зведемо всі дроби до спільного знаменнику

$$\frac{20 - 5(x + 2) + 3(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} < 0, \Leftrightarrow \frac{-2x + 4}{(x - 2)(x + 2)} < 0, \Leftrightarrow \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} > 0.$$

З останньої нерівності можна визначити критичні точки $x = \pm\, 2$. Перевіримо, якого знаку набуває функція $f(x) = \dfrac{2(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$ на кожному з інтервалів:

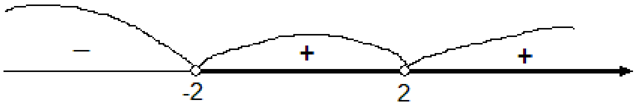


Рис. 3

Відповідь: $x \in (-2;\, 2) \cup (2;\, +\infty)$.

Наведемо розв'язки нерівностей, які були запропоновані учням ЗФМШ в різні роки:

1. $\frac{1}{x^2} \geq x$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

$$\frac{1}{x^2} \geq x, \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - x \geq 0, \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x^2} \geq 0, \Leftrightarrow \frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{x^2} \geq 0.$$

Оскільки вирази $1+x+x^2 > 0$ і $x^2 > 0$, то і $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.
Виключивши з отриманого проміжку точку, яка перетворює знаменник в нуль ($x = 0$), отримаємо $x \in (-\infty;0) \cup (0;1]$.

Відповідь: $x \in (-\infty;0) \cup (0;1]$.

2. $x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} \leq 0$ (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

$$(x^2 - 6x + 9) + \left(2 - \frac{6}{x}\right) \leq 0, \Leftrightarrow (x-3)^2 + \frac{2x-6}{x} \leq 0, \Leftrightarrow (x-3)^2 + \frac{2(x-3)}{x} \leq 0, \Leftrightarrow (x-3)\left(x - 3 + \frac{2}{x}\right) \leq 0, \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-3)\left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} \leq 0, \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{x} \leq 0.$$

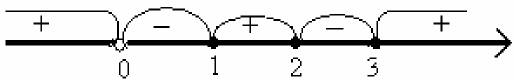


Рис. 4

Останню нерівність легко розв'язати методом інтервалів.
Отримаємо $x \in (0;1] \cup [2;3]$.
Відповідь: $x \in (0;1] \cup [2;3]$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$ (відп.: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$); **б)** $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$ (відп.: $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$);

в) $\frac{x}{x^2 - x + 2} + \frac{x}{x^2 + x + 2} = \frac{3}{4}$ (відп.: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$);

г) $(2x^2 - x + 1)^2 + x^2(2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0$ (відп.: $x = 1$);

д) $x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 9 = 0$ (відп.: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$);

е) $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$ (відп.: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$).

2. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2 y + xy^2 = 20. \end{cases}$ (відп.: (4;1) та (1;4)); **б)** $\begin{cases} \frac{5}{x^2 - xy} + \frac{4}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2 - xy} - \frac{3}{y^2 - xy} = \frac{6}{5}. \end{cases}$ (відп.: (5;3), (–5;–3));

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$ (відп.: (5;3) та (3;5)); **г)** $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0, \\ x + y^2 - 20 = 0. \end{cases}$ (відп.: (4;4) та (–5;–5)).

3. Розв'язати нерівності:

а) $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}$ (відп.: $x \in (1;3) \cup (3;5)$); **б)** $\dfrac{x+1}{x-1} \ge \dfrac{x+5}{x+1}$ (відп.: $x \in (-\infty;-1) \cup (1;3]$);

в) $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} < \dfrac{25x-47}{10x-15} - \dfrac{3}{3x+4}$ (відп.: $x \in \left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{79}{75};\dfrac{3}{2}\right) \cup (2;\infty)$).

1.1.2. Рівняння та нерівності з модулями

При розв'язуванні рівнянь, що містять змінну під знаком модуля часто використовують такі методи:

- ✓ розкриття модуля за означенням;
- ✓ піднесення обох частин рівняння в квадрат;
- ✓ метод розбиття на проміжки.

Нагадаємо, що $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \; при \; f(x) \ge 0, \\ -f(x), \; при \; f(x) < 0. \end{cases}$

При розв'язуванні нерівностей з модулями корисно пам'ятати, що розв'язком нерівності $|x| < a,\; a > 0$ є множина $(-a;\, a)$, а розв'язком нерівності $|x| > a,\;\; a > 0$ є множина $(-\infty,-a) \cup (a;+\infty)$.

1. Розв'язати рівняння $|x-2| + |x+2| - 3x + 1 = 0$ (кр№1, 2006-07 навч. рік).

Знайдемо нулі підмодульних виразів: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Ці точки розбивають ОДЗ на проміжки: $x \in (-\infty;-2) \cup [-2;2] \cup (2;+\infty)$.

Знайдемо знаки, які набувають підмодульні вирази на кожному з отриманих проміжків. На проміжку $x \in (-\infty;-2)$ обидва підмодульних вирази набувають знак "–"; на проміжку $x \in [-2;2]$ перший підмодульний вираз набуває знак "–", а другий – знак "+"; на проміжку $x \in (2;+\infty)$ обидва підмодульні вирази додатні. А тепер розкриємо знаки модулів на кожному проміжку.

Розглянемо проміжок $x \in (-\infty;-2)$. Задане рівняння на цьому проміжку набуде вигляду: $-(x-2) - (x+2) - 3x + 1 = 0$. Розкриємо дужки: $-x + 2 - x - 2 - 3x + 1 = 0, \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$. Проте отриманий корінь є стороннім, оскільки не входить до проміжку $x \in (-\infty;-2)$.

Розглянемо проміжок $x \in [-2;2]$. Маємо $-x + 2 + x + 2 - 3x + 1 = 0, \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$. Цей корінь входить до проміжку.

Розглянемо проміжок $x \in (2;+\infty)$. Маємо $x - 2 + x + 2 - 3x + 1 = 0, \Leftrightarrow x = 1$. Оскільки отриманий корінь не входить до проміжку $x \in (2;+\infty)$, то він являється стороннім.

Відповідь: $x = \dfrac{5}{3}$.

2. Знайти всі розв'язки рівняння $\frac{2x^2-5|x|+2}{x+2}=0$, що належать області визначення функції $y=\frac{x}{4x^2-1}$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Дана функція $y=\frac{x}{4x^2-1}$ визначена при всіх дійсних значеннях $x \neq \pm 0{,}5$.

Розглянемо рівняння $\frac{2x^2-5|x|+2}{x+2}=0$. При $x < 0$, це рівняння буде мати вигляд: $\frac{2x^2+5x+2}{x+2}=0$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2x^2+5x+2=0,\\ x+2\neq 0.\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = -2$ – сторонній корінь, перетворює знаменник рівняння на нуль, $x_2 = -0{,}5$ не задовольняє області визначення функції. При $x \geq 0$, рівняння $\frac{2x^2-5|x|+2}{x+2}=0$ буде мати вигляд: $\frac{2x^2-5x+2}{x+2}=0$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ x+2\neq 0,\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$ (сторонній корінь не задовольняє області визначення функції). Отже, $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

3. Розв'язати нерівності: а) $|x^2-5x|<6$.

Ця нерівність рівносильна наступній: $-6<x^2-5x<6$. Подвійну нерівність можна записати у вигляді системи нерівностей

$$\begin{cases}x^2-5x<6,\\ x^2-5x>-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x-6)<0,\\ (x-2)(x-3)>0.\end{cases}$$

Щоб знайти розв'язок системи, на числовому промені нанесемо розв'язок першої (зверху) та другої (знизу) нерівностей. Розв'язком системи буде їх спільна частина (рис. 5).

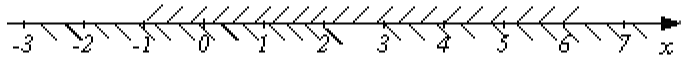


Рис. 5

Відповідь: $x\in(-1;2)\cup(3;6)$.

б) $|x^2-x-12|\leq 8-2x$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

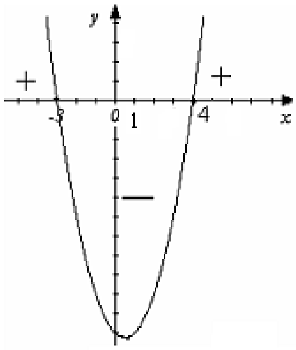


Рис. 6

Знайдемо значення, які підмодульний вираз перетворюють на нуль: 1

$x^2-x-12=0, \Rightarrow x_1=-3, x_2=4$. В цих точках підмодульний вираз змінює знак (рис. 6). Розкриємо знак модуля на кожному з проміжків.

Розглянемо проміжок: $x\in(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$.

$x^2-x-12-8+2x\leq 0, \Leftrightarrow x^2+x-20\leq 0, \Leftrightarrow x\in[-5;4]$.

Знайшовши перетин отриманого проміжку з проміжком $x\in(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$, маємо $x\in[-5;-3)$.

Розглянемо проміжок: $x\in[-3;4]$:

$-(x^2-x-12-8+2x)\leq 0, \Leftrightarrow x^2-3x-4\geq 0, \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

Знайшовши перетин отриманого проміжку з $x \in [-3;4]$, отримаємо $x \in [-3;-1] \cup \{4\}$.

Об'єднаємо знайдені розв'язки: $x \in [-5;-3)$ та $x \in [-3;-1] \cup \{4\} \Rightarrow x \in [-5;-1] \cup \{4\}$.

Відповідь: $x \in [-5;-1] \cup \{4\}$.

в) $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq \dfrac{1}{2}$, (кр№3, 2006-07 навч. рік)

Оскільки в заданій нерівності знаменник дробу не дорівнює нулю, знайдемо ОДЗ цієї нерівності: $x \in (-\infty; 2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$.

В точці 3 підмодульний вираз змінює свій знак. Ця точка розбиває ОДЗ на проміжки:

$x \in (-\infty; 2) \cup (2;3)$ та $x \in (3;+\infty)$. На першому та другому проміжках підмодульний вираз буде від'ємний, на третьому – додатній. Розкриємо модуль на кожному проміжку:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;2) \cup (2;3), \\ \dfrac{-(x-3)}{x^2-5x+6} \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;2) \cup (2;3), \\ \dfrac{-x(x-3)}{2(x-2)(x-3)} \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ \dfrac{(x-3)(x-4)}{2(x-2)(x-3)} \leq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;2) \cup (2;3), \\ x \in [0;2). \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x \in [2;3) \cup (3;4], \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0;2), \\ x \in (3;4]. \end{array}\right.$$

Об'єднавши обидві серії розв'язків, отримаємо: $x \in [0;2) \cup (3;4]$.

Відповідь: $x \in [0;2) \cup (3;4]$.

Розв'яжіть рівняння та нерівності з модулями самостійно:

1. $|x| + |x-1| = 1$ (відп.: $x \in [0;1]$). **2**. $|x-2| + |x-4| + |x-6| = 12$ (відп.: $x_1=0$, $x_2=8$).

3. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$ (відп.: $x \in [1{,}5;2)$). **4**. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leq 1$ (відп. $x \in [0;1{,}6] \cup [2{,}5;+\infty)$).

1.1.3. Задачі на складання рівнянь (систем рівнянь)

Розв'язування задач на складання рівнянь (або системи рівнянь) звичайно здійснюється у три етапи:

1. Вибір невідомого (або декількох невідомих) та складання рівняння (або системи рівнянь), що пов'язує деякою залежністю обране невідоме з величинами, які задані в умові задачі.
2. Розв'язування отриманого рівняння (або системи рівнянь).
3. Відбір розв'язків за змістом задачі.

Серед розмаїття текстових задач можна виокремити певні типи, розв'язання яких відбувається за більш-менш загальною схемою. Це задачі на рух, на числа, на спільну роботу, на розчини і відсотки і т.ін.

1. Відстань між містами річкою становить 80 км. Теплохід долає цей шлях у два кінці за 8 год 20 хв. Визначити швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії 4 км/год. (кр№2, 2006-07 навч. рік.)

Позначимо за x км/год – швидкість теплохода в стоячій воді, тоді швидкість теплохода за течією буде (x+4) км/год, а проти течії – (x – 4) км/год. Враховуючи, що 8 год 20 хв = $8\frac{1}{3}$ год, складемо рівняння: $\frac{80}{x+4}+\frac{80}{x-4}=8\frac{1}{3}$, коренями якого будуть числа x_1 = 20 і x_2 = – 0,8. Оскільки другий корінь не задовольняє умову задачі, тому швидкість теплохода в стоячій воді буде 20 км/год.

2. Із міста виїхав мікроавтобус. Через 10 хвилин після нього із цього міста виїхала в тому ж самому напрямку легкова машина, яка наздогнала автобус на відстані 40 км від міста. Знайти швидкість мікроавтобуса, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості легкової машини (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Нехай $\boldsymbol{x}$ км/год – швидкість легкової машини, тоді ($\boldsymbol{x}$–20) км/год – швидкість автобуса. Враховуючи, що 10 хв = 1/6 год, можна скласти рівняння: $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=\frac{1}{6}$, коренями якого будуть числа $\boldsymbol{x}_1$ = 80, $\boldsymbol{x}_2$ = –60 (сторонній корінь). Тоді швидкість мікроавтобуса $\boldsymbol{x}$ – 20 = 60 (км/год).

Відповідь: 60 км/год.

3. При якому значенні $\boldsymbol{x}$ числа $\boldsymbol{x}$ – 7, $\boldsymbol{x}$ + 5, 3$\boldsymbol{x}$ + 1 будуть послідовними членами геометричної прогресії? (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

За властивістю геометричної прогресії $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ маємо: $(x+5)^2=(x-7)(3x+1)$. Розв’язавши останнє рівняння, отримаємо корені x_1 = 16, x_2 = – 1.

Отже, $\boldsymbol{x}_1$ – 7 = 9, $\boldsymbol{x}_1$ + 5 = 21, 3$\boldsymbol{x}_1$ + 1 = 49 та $\boldsymbol{x}_2$ – 7 = –8, $\boldsymbol{x}_2$ + 5 = 4, 3$\boldsymbol{x}_2$ + 1 = – 2.

Відповідь: x_1 = 16, x_2 = – 1.

4. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 10. Якщо від цього числа відняти 18, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти початкове число. (кр№2, 2006-07 навч. рік).

Нехай a – кількість десятків даного двоцифрового числа, b – кількість одиниць. Тоді це число можна представити у вигляді 10a+b. За умовою задачі можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2+b^2=10, \\ 10a+b-18=10b+a. \end{cases}$$

З останньої системи рівнянь, отримаємо розв’язки: (3,1) і (– 1,3). Оскільки другий розв’язок не задовольняє умову задачі, то шукане число буде **31**.
Відповідь: 31.

5. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних натуральних непарних чисел кратна 8 (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Два послідовні непарні числа можна представити у вигляді $2k-1$ та $2k+1$, де $k\in$Z. Виразимо різницю квадратів цих двох чисел:

$$(2k+1)^2-(2k-1)^2=4k^2+4k+1-(4k^2-4k+1)=4k^2+4k+1-4k^2+4k-1=8k.$$

Очевидно, що число виду $8k$, де $k\in$Z буде кратним 8.

6. Довести, що якщо від трьохзначного натурального числа відняти число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо число, сума цифр якого дорівнює 18 (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Довільне трьохзначне натуральне число можна представити у вигляді: $100a+10b+c$, де $a, b, c \in N$. Тоді число записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку матиме вигляд: $100c+10b+a$. Запишемо різницю цих чисел: $100a+10b+c-(100c+10b+a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99\cdot(a-c)$. Очевидно, що $(a - c)$ – число однозначне. Добуток 99 на довільне однозначне число дає в результаті число, сума цифр якого дорівнює 18. Це легко перевірити.

7. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 12 днів. Якщо перший робітник виконає половину роботи, а потім другий ще половину, то всю роботу буде завершено за 25 днів. На скільки днів раніше один від одного робітники можуть виконати всю роботу, працюючи окремо? (кр№2, 2006-07 навч. рік.)

Приймемо всю величину роботи за одиницю. Нехай x днів – час, необхідний для виконання всієї роботи першому робітнику, y днів – другому. Тоді $1/x$ – продуктивність праці першого робітника, а $1/y$ – другого. За умовою задачі $x/2+y/2=25$. Далі, оскільки при сумісній роботі першого і другого робітників виконується $(1/x+1/y)$ частина роботи за один день, а вся робота виконується ними за 12 днів, то $12(1/x+1/y)=1$. Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=25, \\ 12\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо (30;20), (20,30).

Тепер дамо відповідь на запитання задачі: оскільки $30 - 20 = 10$, то на 10 днів раніше один від одного робітники зможуть виконати необхідну роботу, працюючи окремо.

Відповідь: на 10 днів.

8. Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180г 6-відсоткового його розчину? (кр№1, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

В 180 г 6-відсоткового розчину буде $180 \cdot 0{,}06=10{,}8$ (г) солі.

Нехай x – кількість грамів першого розчину,

y – кількість грамів другого розчину.

Таким чином отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=180, \\ \dfrac{4x}{100}+\dfrac{10y}{100}=10{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=180, \\ 4x+10y=1080, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=120, \\ y=60. \end{cases}$$

Відповідь: 120 г, 60 г.

9. Сплав масою 12 кг містить 45% міді, решта – олово. Скільки чистого олова необхідно додати до цього сплаву, щоб отриманий сплав містив 40% міді?

В 12 кг сплаву було 45% міді, а олова – 55%, тобто $12\cdot 0{,}55$ кг олова. Нехай до початкового сплаву додали x кг олова. Тоді отримаємо $(12 + x)$ кг нового

сплаву, в якому олова стало 60%, тобто $\frac{60\cdot(12+x)}{100}$ кг. Таким чином, отримаємо рівняння: $\frac{55\cdot 12}{100}+x=\frac{60\cdot(12+x)}{100}$. Розв'язавши це рівняння, знайдемо x = 1,5.
Відповідь: 1,5 кг.

Завдання для самостійної роботи

1. Якщо двоцифрове число поділити на суму його цифр, то дістанемо в частці 4 і в остачі 3. Якщо ж це двоцифрове число поділити на добуток його цифр, то дістанемо в частці 3, а в остачі 5. Знайдіть це число (кр№1, 10 кл. 2006-07 навч. рік).
2. Троє друзів вирішили купити книгу. Першому не вистачало для купівлі книги 14 грн, другому – 37 грн, а третьому – 25 грн. Коли склали свої гроші разом, то отриманої суми їм також не вистачало. Скільки коштує книга?
3. Двоє робітників за зміну виготовляли 72 деталі. Після того, як перший підвищив продуктивність праці на 15%, а другий – на 25%, разом за зміну вони виготовляли 86 деталей. Скільки деталей виготовляв за зміну кожен робітник окремо після підвищення продуктивності праці? (відп.: 46 дет., 40 дет.).
4. Із міста А до міста В, відстань між якими 120 км, на мопеді вирушив кур'єр. Через 1 годину після цього із А на мотоциклі виїхав другий кур'єр, який наздогнав першого, передав йому доручення та негайно з цією самою швидкістю вирушив назад і повернувся до міста А у той момент, коли перший дістався до В. Яка швидкість першого кур'єра, якщо швидкість другого дорівнює 50 км/год? (відп.: 30 км/год).
5. З молока, жирність якого становить 5%, виготовляють сир, який має жирність 15,5%, при цьому залишається сироватка, яка має жирність 0,5%. Скільки сиру одержують з 1 т молока? (відп.: 300 кг).
6. Щорічний приріст населення міста становить 20%. Через скільки років населення міста подвоїться? (відп: 4 роки).

1.1.4. Тригонометрія

Тотожні перетворення тригонометричних виразів

У зв'язку з обмеженим об'ємом публікації ми не намагалися якимось чином систематизувати вправи на тотожні перетворення тригонометричних виразів, а наводимо розв'язки типових завдань, які були запропоновані слухачам ЗФМШ в різні роки.

1. Спростити вирази: а) $\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3$.

$\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3=2\cos^2 2\alpha+4\cos 2\alpha+2=2\left(\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha+1\right)=2(\cos 2\alpha+1)^2=$

$=2\cdot\left(2\cos^2\alpha-1+1\right)^2=2\cdot\left(2\cos^2\alpha\right)^2=8\cos^4\alpha$.

Відповідь: $8\cos^4\alpha$.

б) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)=\left(\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})-\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})\right)\cdot\left(\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})+\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})\right)=$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{8}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

2. Довести тотожності:

а) $\dfrac{1+ctg\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{ctg\alpha+tg\alpha}=\frac{1}{2}tg2\alpha$ (кр№2, 2006-07 навч. рік)

Скориставшись формулами зведення та розписавши $tg\alpha$ і $ctg\alpha$, ліву частину тотожності можна представити у вигляді:

$$\frac{1+ctg\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{ctg\alpha+tg\alpha}=\frac{1+tg2\alpha\cdot tg\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\left(1+\frac{2tg\alpha\cdot tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\right):\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1-tg^2\alpha+2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1+tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{1}{2}tg2\alpha.$$

Оскільки ліва частина тотожності дорівнює правій, отже тотожність доведено.

б) 8cos20°cos40°cos80°=1.

Помножимо і поділимо ліву частину тотожності на sin 20°. Отримаємо:

$$\frac{8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow\frac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$$

Тотожність доведено.

в) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\sin\left(30^\circ-10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=4$$

Тотожність доведено.

г) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg^4\alpha$ (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік)

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\frac{2-4\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2}{2+4\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2}=$$

$$\frac{1+2tg^2\alpha+tg^4\alpha-2+2tg^4\alpha+1-2tg^2\alpha+tg^4\alpha}{1+2tg^2\alpha+tg^4\alpha+2-2tg^4\alpha+1-2tg^2\alpha+tg^4\alpha}=\frac{4tg^4\alpha}{4}=tg^4\alpha.$$

3. Перевірити рівність: $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$ (кр№2, 2006-07 навч. рік)

Перетворимо різницю в добуток: $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}$.

Застосуємо штучний прийом: помножимо і розділимо отриманий добуток на $\cos\frac{\pi}{10}$ і скористаємося формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}}.$$

Оскільки за формулами зведення $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$, то отримаємо:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{2}\ .$$

4. Обчислити без таблиць: а) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$ (кр№1, 10 кл. 2006-07 навч. рік)

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

б) tg 9° – tg 27° – tg 63° + tg 81° (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Використовуючи формулу перетворення суми в добуток для тангенсів, отримаємо:

$$\left(tg9^\circ+tg81^\circ\right)-\left(tg27^\circ+tg63^\circ\right)=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\cdot\cos 63^\circ}=\frac{1}{\sin 9^\circ\cdot\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cdot\cos 27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=2\cdot\frac{\sin 54^\circ-\sin 18^\circ}{\sin 54^\circ\cdot\sin 18^\circ}=4\cdot\frac{\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=4\,.$$

Відповідь: 4.

в) $\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 37^\circ}$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Використовуючи формулу зведення $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, отримаємо:

$$\frac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 37^\circ}=\frac{\cos 68^\circ\sin 82^\circ-\cos 82^\circ\sin 68^\circ}{\cos 53^\circ\sin 67^\circ-\cos 67^\circ\sin 53^\circ}=\frac{\sin\left(82^\circ-68^\circ\right)}{\sin\left(67^\circ-53^\circ\right)}=\frac{\sin 14^\circ}{\sin 14^\circ}=1\,.$$

Відповідь:1.

5. Знаючи, що $\sin\alpha+\cos\alpha = m$, знайти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = m^2$, тобто $1+2\sin\alpha\cos\alpha = m^2, \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{m^2-1}{2}$ (1).

Спростимо вираз $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3 = \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

З урахуванням формули (1) отримаємо $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-3\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)^2 = \dfrac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

Тригонометричні рівняння

Тригонометричним називається рівняння, в якому:

1) аргументи знаходяться лише під знаком *тригонометричних* функцій;
2) аргументами є *лінійні* функції від невідомих;
3) з тригонометричними функціями виконуються лише *алгебраїчні дії.*

Загальна схема розв’язування тригонометричних рівнянь наступна:

1) визначають ОДЗ (область допустимих значень) вихідного рівняння;
2) здійснюють послідовно ряд переходів (наслідку або рівносильності) від вихідного рівняння до рівняння, розв’язок якого очевидний;
3) визначають корені здобутого рівняння;
4) перевіряють, чи є знайдені корені коренями вихідного рівняння.

Перевірка знайдених коренів необхідна, якщо в процесі розв’язання трапилося розширення ОДЗ або, якщо були використані тригонометричні тотожності, ОДЗ лівої та правої частини яких не співпадають.

У загальному випадку (якщо не накладені додаткові обмеження) тригонометричне рівняння або не має розв’язків, або має їх нескінченну кількість.

Загального методу розв’язання тригонометричних рівнянь не існує. Можна лише зазначити, що розглядувані в елементарній математиці тригонометричні рівняння зводяться шляхом різних перетворень до розв’язання найпростіших тригонометричних рівнянь. Загальні розв’язки найпростіших тригонометричних рівнянь наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Рівняння	Загальні розв’язки	Обмеження
$\sin \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x} = (-1)^n \arcsin \boldsymbol{a} + \pi n,\ n\in Z$	$\boldsymbol{a}\in[-1;1]$; $\arcsin \boldsymbol{a} \in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
$\cos \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x} = \pm \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi n,\ n\in Z$	$\boldsymbol{a}\in[-1;1]$; $\arccos \boldsymbol{a} \in [0;\ \pi]$
$\mathrm{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x} = \mathrm{arctg}\, \boldsymbol{a} + \pi n,\ n\in Z$	$\boldsymbol{a}\in[-\infty;+\infty]$; $\mathrm{arctg}\, \boldsymbol{a} \in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

ctg $x = a$	$x = \text{arcctg } a + \pi n,\ n\in Z$	$a\in[-\infty;+\infty]$; arcctg $a \in(0;\ \pi)$

Зауваження: інколи (при $a = \pm1$ та $a = 0$) зручніше використовувати окремі випадки розв'язання найпростіших рівнянь.
Наведемо розв'язки тих тригонометричних рівнянь, які викликали найбільше труднощів у слухачів ЗФМШ.

1. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

Перепишемо праву частину рівняння у вигляді: $\sin 2x = \left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2$, тоді

$$\sin 2x = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right), \Leftrightarrow \sin 2x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x, \Leftrightarrow$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0, \Leftrightarrow \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Останнє рівняння буде рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x_2 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ n,k \in Z$.

2. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$, (кр№1, 2006-07 навч. рік)
Розкладемо праву і ліву частини на множники:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x).$$

Інколи на цьому етапі учні припускаються помилки: ділять обидві частини рівняння на вираз $\sin x - \cos x$, не звертаючи уваги, що цей вираз може дорівнювати нулю, і таким чином втрачають корінь $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. Перенесемо всі доданки в одну сторону та винесемо спільний множник за дужки:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot(1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot(1 - \cos x + (\sin x \cdot \cos x - \sin x)) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot((1 - \cos x) - \sin x \cdot (1 - \cos x)) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot(1 - \cos x)\cdot(1 - \sin x) = 0$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0, \\ 1 - \cos x = 0, \\ 1 - \sin x = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x_2 = 2\pi k, k \in Z, \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x_2 = 2\pi k,\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,$ де $n, m, m \in Z.$

3. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -\cos 3x$ **(**кр№4, 11 кл. 2007-08 навч. рік**).**
Перепишемо дане рівняння у вигляді: $\cos x - \cos 3x = \sqrt{3}\sin x$.

Тоді $2\sin 2x\cdot\sin x-\sqrt{3}\sin x=0,\Leftrightarrow \sin x\cdot\left(2\sin 2x-\sqrt{3}\right)=0,\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\pi k,\\ x_2=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\end{array}\right.\qquad n,k\in Z.$$

Відповідь: $x_1=\pi k,\ x_2=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\quad n,k\in Z.$

4. $\sin^2 5x+1=\cos^2 3x$ **(**кр№4, 11 кл. 2007-08 навч. рік**)**.

Перепишемо рівняння у вигляді $\sin^2 5x+1-\cos^2 3x=0,\Leftrightarrow \sin^2 5x+\sin^2 3x=0.$ Проте це можливо лише при умові, коли $\sin 5x=0,$ і $\sin 3x=0$, тобто дане рівняння рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases}\sin 5x=0,\\ \sin 3x=0,\end{cases}\text{звідки }\begin{cases}5x=\pi\cdot k,\\ 3x=\pi\cdot n,\end{cases}\text{тобто }\begin{cases}x=\dfrac{\pi k}{5},\\ x=\dfrac{\pi n}{3},\end{cases}\qquad n,k\in Z.\qquad (1)$$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, отримаємо рівняння $\dfrac{\pi\cdot k}{5}=\dfrac{\pi\cdot n}{3},$ тобто 3k = 5n. Це рівняння має розв'язок $\begin{cases}k=5l,\\ n=3l,\end{cases}$ де $l\in Z$. Підставляючи значення k і n в рівність (1), отримаємо $x=\pi l$, де $l\in Z$.

Відповідь: $x=\pi l$, де $l\in Z$.

Тригонометричні нерівності

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводиться, як правило, до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей, тобто нерівностей виду sin ***x>a,*** cos ***x>a,*** tg ***x>a,*** ctg ***x>a*** і т.д., а також до розв'язування сукупності, систем або сукупності систем найпростіших тригонометричних нерівностей. Для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей використовують одиничне тригонометричне коло, на якому множину значень змінної, що задовольняє заданій найпростішій нерівності, зображають у вигляді однієї або декількох дуг. Інколи використання графіка відповідної функції більш наочне та простіше.

1. Розв'язати нерівності: $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)<\dfrac{1}{4}$ (кр№2, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

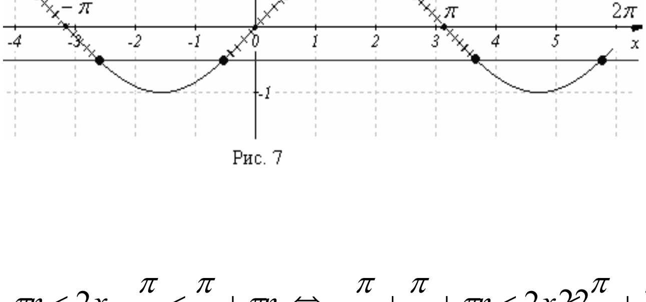


Рис. 7

З рис. 7. випливає,

$-\dfrac{1}{2}<\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)<\dfrac{1}{2},\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}>\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)>-\dfrac{1}{2},\Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{2}<\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{1}{2}$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\pi n,\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n<2x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}+\pi n<2x<\frac{5\pi}{12}+\pi n,\Leftrightarrow \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},n\in Z.$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$.

2. $2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > 0$.

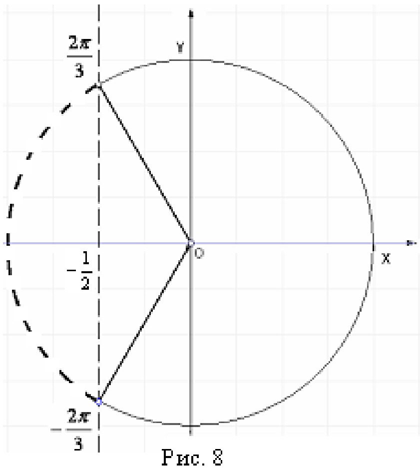


Рис. 8

Застосувавши формулу $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, отримаємо: $1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > 0$.

Тоді $-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > -1, \Leftrightarrow$

$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x > -1, \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x > -\frac{1}{2}, \Leftrightarrow$

$\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x > -\frac{1}{2}, \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$.

Остання нерівність має розв'язок (рис. 8):

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k.$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k\right), k \in Z$.

3. $\sin 4x - \cos 4x \cdot tg 2x \le \sqrt{3}.$ (кр№3, 2006-07 навч. рік.)

Виразимо і зведемо отримані вирази до спільного знаменника.

Оскільки $tg 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$, тоді $\sin 4x - \frac{\cos 4x \cdot \sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3}$.

Скориставшись формулою $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, маємо:

$\frac{\sin(4x - 2x)}{\cos 2x} \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow tg 2x \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x \le \frac{\pi}{3} + \pi n, \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x \le \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$.

4. $\cos 2x \le \sin x$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Розв'яжемо цю нерівність графічним способом. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \cos 2x$ і $y = \sin x$ і виберемо ті проміжки, на яких графік функції $y = \cos 2x$ лежить нижче графіка $y = \sin x$, або мають спільні точки (рис. 9).

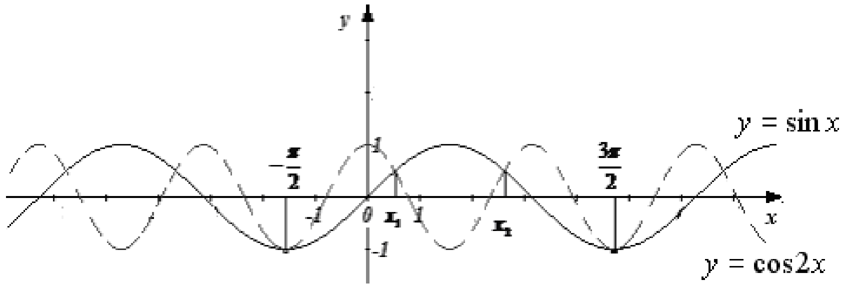


Рис. 9

Розв'язок буде складатися з проміжку [$x_1+2\pi n$, $x_2+2\pi n$] та точки $x_3 = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, де n, $k\in Z$.

Знайдемо x_1 та x_2: $\cos 2x = \sin x, \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x - \sin x = 0, \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{6}, x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Відповідь: $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right] \cup x = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, n, $k \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести тотожності:

а) $\cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{3}{2}$;
б) $\dfrac{tg2\alpha + ctg3\beta}{ctg2\alpha + tg3\beta} = \dfrac{tg2\alpha}{tg3\beta}$;

в) $tg20^\circ \cdot tg40^\circ \cdot tg80^\circ = \sqrt{3}$;
г) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

д) $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$;
е) $\cos 4\alpha \cdot tg2\alpha - \sin 4\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$.

2. Обчислити:

а) $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, якщо $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$ (відп.: $\dfrac{1}{5}$);

б) $tg\dfrac{x}{2}$**,** якщо $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$ (відп.: 2 або $-\dfrac{1}{3}$).

3. Перетворити у добуток:

а) $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha$ (відп.: $8\cos^4 2\alpha$); **б)** $\sqrt{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \sqrt{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $0 < \alpha \le \pi$ (відп.: $2\sin\dfrac{\alpha}{4}$).

4. Розв'яжіть тригонометричні рівняння самостійно:

а) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ (відп.: $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n,k \in Z$);

б) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$ (відп.: $x_1 = \dfrac{\pi k}{5}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n,k \in Z$);

в) $\cos 3x = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$ (відп.: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$; $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n,k \in Z$);

г) $4\cos^2 6x + 16\cos^2 3x = 13$ (відп.: $x = \dfrac{\pi}{18}(6n \pm 1)$);

д) $tg\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos 6x = 0$ (відп.: $x_1 = \dfrac{\pi k}{6}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{12}(4n-1)$, $n,k \in Z$);

е) $\cos 3x + \cos\dfrac{5}{2}x = 2$ (відп.: $x = 4\pi l$, $l\in Z$).

5. Розв'язати тригонометричні нерівності самостійно:

а) $\cos 2x + \cos x > 0$ (відп.: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$);

б) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$ (відп.: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in Z$);

в) $\sin 4x + \cos 4x \cdot ctg 2x > 1$ (відп.: $x \in \left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$);

г) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x < 0$ (відп.: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$);

д) $\cos^2 2x + \cos^2 x \le 1$ (відп.: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in Z$);

е) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) > 1$.

1.1.5 Ірраціональні рівняння та нерівності

Ірраціональні рівняння

Ірраціональними називаються рівняння, в яких змінна міститься під знаком кореня.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є наступні:

1) метод піднесення обох частин рівняння в одну й ту ж степінь;
2) метод введення нових змінних.

В деяких випадках виявляється доцільним використання різних штучних прийомів.

Поява сторонніх коренів може відбутися за рахунок того, що при піднесенні обох частин заданого рівняння $f(x) = g(x)$ в парну степінь ми отримаємо рівняння, яке є наслідком не лише цього рівняння, але й рівняння $f(x) = -g(x)$, адже $(g(x))^2 = (-g(x))^2$. Якщо рівняння $f(x) = -g(x)$ має корені, то саме вони й є сторонніми коренями заданого рівняння $f(x) = g(x)$. Причиною появи сторонніх коренів можуть бути також деякі заміни, які виконуються в ході розв'язування рівняння. Саме тому необхідною частиною розв'язування ірраціональних рівнянь є перевірка.

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$.

Знаходження ОДЗ цього рівняння пов'язане з розв'язуванням систем ірраціональних нерівностей, тому в даному випадку цього робити не доцільно. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо: $\sqrt{x+8} + 2 = 2\sqrt{x+1}$. Підносячи ще двічі до квадрата, остаточно дістаємо квадратне рівняння $9x^2 - 64x - 64 = 0$, корені якого $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{8}{9}$. Перевіркою встановлюємо, що x_2 – сторонній корінь.

Відповідь: $x = 8$.

2. $\sqrt[3]{x-4} = 1 - \sqrt{x+1}$.

Якщо ірраціональне рівняння має корені різних степенів, то при його розв'язуванні є сенс відразу зробити заміну $\sqrt[3]{x-4}=y$, $\sqrt{x+1}=z$ і дістати систему рівнянь $\begin{cases} y=1-z, \\ z^2-y^3=5, \end{cases}$ звести її до розв'язування рівняння $y^3-y^2+2y+4=0$, або $(y+1)(y^2-2y+4)=0$, з якого маємо $y=-1$, тоді $x=3$.

Відповідь: $x=3$.

3. $5\sqrt{x^2-2x+1}-4\sqrt{x^2+6x+9}=11$.

Помітивши, що кожний із підкореневих виразів являє собою повний квадрат, запишемо: $5\sqrt{(x-1)^2}-4\sqrt{(x+3)^2}=11$, тоді дістанемо $5|x-1|-4|x+3|=11$. Точки $x=-3$ і $x=1$ розбивають числову пряму на проміжки знакосталості виразів, що містяться під знаком модуля. Отже, маємо:

$x\in(-\infty;-3);\Rightarrow -5x+5+4x+12=11,\ \ x=6$ – сторонній корінь, не належить даному проміжку,

$x\in[-3;-1];\Rightarrow -5x+5-4x-12=11$, $x=-2$ – корінь, належить даному проміжку,

$x\in(1;+\infty);\Rightarrow 5x-5-4x-12=11$, $x=28$ – корінь, належить даному проміжку.

Відповідь: $x_1=-2$, $x_2=28$.

4. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}=0$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

ОДЗ рівняння можна отримати з розв'язку системи: $\begin{cases} x^2-x\ge 0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

Сума додатних виразів $\sqrt{x^2-x}$ і $\sqrt{x^2+x-2}$ буде рівна нулю лише тоді, коли кожний з підкореневих виразів буде дорівнювати нулю. Тому маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x^2-x=0, \\ x^2+x-2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0, x_2=1, \\ x_1=1, x_2=-2. \end{cases}$

Спільним розв'язком обох рівнянь буде $x=1$.

Відповідь: 1.

5. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3$.

ОДЗ: $x\ge 5$. Оскільки права частина рівняння більша за нуль, то $\sqrt{x-5}>\sqrt{2x-1}$. Тому $x-5>2x-1$ та $x<-4$, а такі значення x суперечать ОДЗ. Отже, задане рівняння розв'язків не має.

Відповідь: коренів не має.

6. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$ (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Не радимо при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь поспішати з піднесенням обох частин рівнянь до відповідного степеня, спочатку треба вивчити систему і поміркувати, як можна обійтися без цього.

Перемножимо обидва рівняння системи почленно:

$$\sqrt{\frac{20y}{x}\cdot\frac{16x}{5y}}=\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2, \Rightarrow y=4.$$

Додамо обидва рівняння заданої системи.

Маємо: $\sqrt{\frac{20y}{x}}+\sqrt{\frac{16x}{5y}}=2\sqrt{x+y}$, де $x\neq 0,\ y\neq 0$.

Піднесемо до квадрату обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{20y}{x}+2\sqrt{\frac{20y\cdot 16x}{x\cdot 5y}}+\frac{16x}{5y}=4(x+y), \Leftrightarrow \frac{5y}{x}+4+\frac{4x}{5y}=x+y.$$

Підставимо в останнє рівняння $y=4$ і знайдемо x.

Маємо: $\frac{20}{x}+4+\frac{x}{5}=x+4, \Leftrightarrow \frac{20}{x}=\frac{4x}{5}\Leftrightarrow x^2=25, \Leftrightarrow x=\pm 5.$

Підставивши отримані розв'язки в задану систему, можна побачити, що розв'язки $x=-5$, $y=4$ є сторонніми, а $x=5$, $y=4$ – задовольняють цю систему.

Відповідь: (5;4).

Ірраціональні нерівності

$\sqrt[2k]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)\geq 0,\\ f(x)<g^{2k}(x).\end{cases}$	$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)\geq 0,\\ f(x)>g^{2k}(x),\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geq 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Розв'язати нерівності:

а) $\sqrt{x^2-3x-18}>x-1$, (кр№1, 2006-07 навч. рік)

Дана нерівність $\sqrt{x^2-3x-18}>x-1$ буде рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x-18>0,\\ x-1<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x-18\geq 0,\\ x-1>0,\\ x^2-3x-18>(x-1)^2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-3]\cup[6;+\infty),\\ x\in(1;+\infty),\\ x\in(-\infty;-19),\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-3]\cup[6;+\infty),\\ x\in(-\infty;1)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in 0,\\ x\in(-\infty;-3]\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3].$$

Розв'язавши цю сукупність нерівностей одержимо проміжок $x\in(-\infty;-3]$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-3]$.

Примітка. Часто учні просто підносять обидві частини нерівності до квадрату, не беручи до уваги, що обидві частини нерівності можна підносити до квадрату лише в тому випадку, коли кожна частина нерівності невід'ємна, а тут права частина даної нерівності може бути і **від'ємною**.

б) $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$ **(**кр№4, 10 кл. 2007-08 навч. рік)

Дана нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6+x-x^2\ge 0,\\4x-2\ge 0,\\9\left(6+x-x^2\right)>\left(4x-2\right)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}6+x-x^2\ge 0,\\4x-2<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-2;3],\\x\ge 0{,}5,\\x\in(-1;2),\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[0{,}5;2),\\x\in(-2;0{,}5),\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[0{,}5;2),\\x\in[-2;0{,}5),\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-2;2).$$

Відповідь: $x\in[-2;2)$.

в) $4-x<\sqrt{x^2-2x}$ (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Перепишемо задану нерівність у вигляді: $\sqrt{x^2-2x}>4-x$. Оскільки вираз (4–$\boldsymbol{x}$) може бути як додатнім, так і від'ємним, то дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей, яку буде нескладно розв'язати:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x\ge 0,\\x^2-2x>0,\\x^2-2x>\left(4-x\right)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x>0,\\4-x\le 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left(\dfrac{8}{3};4\right],\\x\in[4;+\infty),\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right).$$

Відповідь: $x\in\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right)$.

г) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}>1$ (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Відокремимо радикал: $\sqrt{x+3}>1+\sqrt{2-x}$.

Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}x+3\ge 0,\\2-x\ge 0,\\x+3>1+2\sqrt{2-x}+2-x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3,\\x\le 2,\\x>\sqrt{2-x};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[-3;2],\\x\ge 0;\\x^2>2-x;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[0;2],\\x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;2].$$

Відповідь: $x\in(1;2]$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати ірраціональні рівняння:

а) $\sqrt{9-5x}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}$ (відп.: $x=1$);

б) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+8x+16}=5$ (відп.: $x_1=-4$, $x_2=1$);

в) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$ (відп.: $x_1=-1$, $x_2=1$);

г) $\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{x-1}$ (відп.: коренів не має);

д) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ (відп.: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$)

2. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\x^2y+y^2x=20.\end{cases}$ (відп.: (4;1), (1;4));

б) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3,\\\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5,\\\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4.\end{cases}$ (відп.: (3; – 2; 6));

в) $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y=6}, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2.\end{cases}$ (відп.: (2;2));

г) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78,\end{cases}$ (x>0, y>0) (відп.: (4;9); (9;4)).

3. Розв'язати ірраціональні нерівності:

а) $\sqrt{x+6}<x-5$ (відп.: $x\in\left(\dfrac{11+3\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$**);**

б) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$ (відп: $x\in(-\infty;0]\cup(4{,}5;+\infty)$);

в) $\sqrt{(x+2)(x-5)}>8-x$ (відп.: $x\in\left(6\dfrac{6}{13};+\infty\right)$).

г) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$ (відп.: $x\in\{-1\}\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$);

д) $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+1}<\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x-3}$ (відп.: $x\in[-1;-0{,}5]\cup(3;4]\cup\{-4\}$);

е) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{x+4}$ (відп.: $x\in\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2};1\right]$).

1.1.6. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності

Тотожні перетворення показникових та логарифмічних виразів

При перетворенні показникових і логарифмічних виразів потрібно враховувати властивості показникової та логарифмічної функцій, властивості дій над степенями та логарифмами, основну логарифмічну тотожність (a, b> 0, $a\neq 1$)

$$a^{\log_a b}=b.$$

Інколи доречним є використання формули переходу до логарифма за новою основою: $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ та $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (a, b, c > 0, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$).

1. Обчислити:

а) $3^{\log_5 7}-7^{\log_5 3}$

В показнику степеня першого виразу перейдемо до основи 3:

$$3^{\frac{\log_3 7}{\log_3 5}}-7^{\log_5 3}=\left(3^{\log_3 7}\right)^{\frac{1}{\log_3 5}}-7^{\log_5 3}=7^{\log_5 3}-7^{\log_5 3}=0.$$

Відповідь: 0.

б) $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$

Оскільки 49 = 7^2, то $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}=7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}$**.**

Розглянемо показник степеня $2-\frac{1}{2}\log_7 25 = 2-\log_7 5 = \log_7 49 - \log_7 5 = \log_7 \frac{49}{5}$.

Тоді $7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9,8$.

Відповідь: 9,8.

2. Обчислити $\log_3 18$, якщо $\log_3 12 = a$ (кр№2, 11 кл 2007-08 навч. рік).

$$\log_3 18 = \log_3(3^2 \cdot 2) = 2 + \log_3 2 = 2 + \log_3 \sqrt{\frac{12}{3}} = 2 + \frac{1}{2}\cdot \log_3 \frac{12}{3} = 2 + \frac{1}{2}\left(\log_3 12 - \log_3 3\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(a-1\right) = \frac{a+3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a+3}{2}$.

3. Довести нерівність: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

Перейдемо до логарифма за основою π, тоді:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2.$$

4. Що більше $2\log_{0,5}\frac{1}{5}$ чи $3\log_8 26$?

Перейдемо в кожному з логарифмів до основи 2: $2\log_{0,5}\frac{1}{5} = \log_2 25$;

$3\log_8 26 = \log_2 26$. Тепер очевидно, що $\log_2 25 < \log_2 26$.

Відповідь: $2\log_{0,5}\frac{1}{5} < 3\log_8 26$.

Показникові рівняння та нерівності

Показниковим рівнянням називається рівняння, в якому невідома входить в показник степеня.

При розв'язуванні показникових рівнянь потрібно намагатися звести початкове рівняння до вигляду $a^{f(x)} = b$.

Деякі основні типи показникових рівнянь

1. $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;

2. $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

3. $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a \neq b$.

За допомогою методів розв'язування показникових рівнянь показникову нерівність можна звести до найпростішого вигляду $a^{f(x)} > b$ (або $a^{f(x)} < b$). Отриману нерівність можна записати у вигляді $a^{f(x)} > a^{\log_a b}$ та зробити висновки:

1. якщо $a > 1$, то $f(x) > \log_a b$, розв'язуємо цю нерівність;

2. якщо $0<a<1$, то $f(x) < \log_a b$, розв'язуємо цю нерівність.

Розв'язати показникові рівняння:

а) $3^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}}=3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}-\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}=0,\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x+\cos x-6}{2\cos^2 x-1}=0,\Leftrightarrow$$

$$\frac{(\cos x+2)(2\cos x-3)}{2\cos^2 x-1}=0,\Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x+2)(2\cos x-3)=0,\\ 2\cos^2 x\neq 1\end{cases}$$

Проте ні $\cos x+2\neq 0$, ні $2\cos x-3\neq 0$, тому й дріб $\frac{(\cos x+2)(2\cos x-3)}{2\cos^2 x-1}\neq 0$.

Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів не має.

б) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$ (кр№2, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Оскільки $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}$, то можна ввести заміну $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=t$ і задане рівняння буде мати вигляд: $t+\frac{1}{t}=10$. Досить легко отримати корені цього рівняння $t_1=5+\sqrt{24},\ \ t_2=5-\sqrt{24}$. Підставивши отримані значення в формулу заміни, отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5+\sqrt{24},\\ \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5-\sqrt{24},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(5+\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+\sqrt{24}\right)^1,\\ \left(5+\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+\sqrt{24}\right)^{-1},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=-2.\end{array}\right.$

Відповідь: ±2.

в) $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$

Рівняння **однорідне**, адже його можна записати як $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0$**.**

Розділимо обидві частини рівняння на $2^{2x}\neq 0$, отримаємо $6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0$.

Позначимо $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$, $t>0$. Маємо $6t^2-13t+6=0,\Rightarrow t_1=\frac{3}{2},$ або $t_2=\frac{2}{3}$.

Отримаємо два рівняння: $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}$, або $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}$. Знайдемо $x_1=1,\ \ x_2=-1$.

Відповідь: $x_1=1,\ \ x_2=-1$.

Розв’язати показникові нерівності та їх системи:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}}<3^{-x}$**.**

Зведемо до спільної основи та виконаємо рівносильні перетворення:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} > x, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3>0, \\ x>0, \\ x+3>x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3>0, \\ x<0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), \end{cases} \\ x\in(-3;0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-3;0)\cup\left(0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Відповідь: $x\in(-3;0)\cup\left(0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

2. $\begin{cases} 2^{\cos x}\ge 1, \\ \frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}>0. \end{cases}$ (кр№3, 2006-07 навч. рік.)

$$\begin{cases} 2^{\cos x}\ge 2^0, \\ \frac{2x-2+2-x}{2(2-x)}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\ge 0, \\ \frac{x}{2(x-2)}<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z; \\ x\in(0;2). \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Відповідь: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Логарифмічні рівняння та нерівності

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, в якому невідома міститься під знаком логарифму. Шляхом тотожних перетворень логарифмічні рівняння зводять до таких основних типів:

1. $\begin{cases} \log_a f(x)=b, \\ 0<a\ne 1, b>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=a^b;$ **2.** $\begin{cases} \log_a f_1(x)=\log_a f_2(x), \\ 0<a\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=f_2(x), \\ f_1(x)>0; \end{cases}$

3. $\log_{\varphi(x)} f_1(x)=\log_{\varphi(x)} f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=f_2(x), \\ 0<\varphi(x)\ne 1, \\ f_1(x)>0. \end{cases}$

За допомогою методів розв’язування логарифмічних рівнянь логарифмічну нерівність можна звести до одного з таких типів:

1. $\begin{cases} \log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)<f_2(x), \\ f_1(x)>0, \\ 0<a<1; \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)>f_2(x), \\ f_2(x)>0, \\ a>1; \end{cases}$

3. $\log_{\varphi(x)} f_1(x)>\log_{\varphi(x)} f_2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\varphi(x)<1, \\ f_1(x)>0, \\ f_1(x)<f_2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x)>1, \\ f_2(x)>0, \\ f_1(x)>f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Розв’язати логарифмічні рівняння та нерівності

1. $\log_3\left(\log_{0,5}^2 x-3\log_{0,5}x+5\right)-2=0.$

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}\log_{0,5}^2 x-3\log_{0,5}x+5>0,\\ x>0.\end{cases}$

Можна пересвідчитися, що перша нерівність дійсна при будь-яких значеннях x, бо відповідне рівняння $t^2-3t+5=0$ має від'ємний дискримінант. Отже ОДЗ: $x>0$.

$\log_3\left(\log_{0,5}^2 x-3\log_{0,5}x+5\right)=2,\Rightarrow \log_{0,5}^2 x-3\log_{0,5}x+5=3^2,\Leftrightarrow \log_{0,5}^2 x-3\log_{0,5}x-4=0$.

Введемо заміну $t=\log_{0,5}x$ і отримаємо рівняння: $t^2-3t-4=0$, коренями якого будуть числа $t_1=4$, $t_2=-1$. Тоді $\log_{0,5}x=4$ або $\log_{0,5}x=-1$, звідки $x_1=1/16$, $x_2=2$.

Відповідь: $x_1=1/16$, $x_2=2$.

2. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2-1=0$ (кр№3, 2006-07 навч. рік)

Знайдемо область допустимих значень: $\begin{cases}x+12>0,\\ x>0, x\neq 1.\end{cases}$ Звідки маємо: $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Перейдемо до основи 4.

$$\log_4(x+12)\cdot\frac{\log_4 2}{\log_4 x}-1=0,\Leftrightarrow \frac{\log_4(x+12)}{2\log_4 x}=1,$$

$$\log_x(x+12)=2,$$

$$x^2=x+12,\Rightarrow x_1=4, x_2=-3$$

Проте другий корінь $x=-3$ не входить в ОДЗ.

Відповідь: $x=4$.

3. $\log_{\sin 3x}\left(\cos x-\cos 2x\right)=1$ (кр№3, 11 клас, 2007-08 навч. рік)

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}\cos x-\cos 2x>0,\\ \sin 3x>0,\\ \sin 3x\neq 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\\ x\in\left(\dfrac{2\pi n}{3};\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi n}{3}\right),\\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}.\end{cases}$, при $n\in Z$.

$$\log_{\sin 3x}\left(\cos x-\cos 2x\right)=\log_{\sin 3x}\sin 3x,\Leftrightarrow \cos x-\cos 2x=\sin 3x,\Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}=0,\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0,\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x}{2}=0,\\ \sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{3x}{2}=0.\end{array}\right.$$

Розв'язком першого рівняння буде $x_1=\dfrac{2\pi m}{3}$ (при $m\in Z$). Розв'яжемо друге

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0,\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right)=0,\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0,\Leftrightarrow$$

рівняння: $\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\\ x_3=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi m.\end{array}\right.$

Враховуючи ОДЗ, виключимо сторонні корені. Отримаємо $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$, ($l \in Z$).

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$, ($l \in Z$).

4. $\log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) \le 1$ (кр№3, 11 клас, 2007-08 навч. рік).

Перепишемо дану нерівність у вигляді: $\log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) \le \log_8 8$.

Ця нерівність буде рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty), \\ x \in [-1;5]. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;1) \cup (3;5].$$

Відповідь: $x \in [-1;1) \cup (3;5]$.

$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$, (кр№3, 2006-07 навч. рік)

Дана нерівність рівносильна сукупності систем :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 > 24 - 6x; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 < 24 - 6x. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3, \\ x > 1.5, \\ x < 4, \\ x > \frac{27}{8}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x > 1.5, \\ x < 4, \\ x < \frac{27}{8}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(\frac{27}{8};4\right), \\ x \in (2;3). \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right).$$

Відповідь: $x \in (2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right)$.

Показниково-степеневі рівняння та нерівності

Зауважимо, що оскільки функція не показникова, а показниково-степенева, що має вигляд $y = u(x)^{v(x)}$, то її область визначення знаходимо, розглядаючи три випадки:

1). u(x) > 0, υ(x) – будь-яке число;

2). u(x) < 0, υ(x) – ціле число;

3). u(x) = 0, υ(x) – ціле додатне число.

Тож розв'язування рівнянь виду $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^m$ зводиться до таких випадків:

1). $f(x) = 1$;

2). $f(x) = -1$;

3). $f(x) = 0$;

4). $\varphi\ (x) = m$ (перевірка коренів, знайдених у 2, 3 та 4 випадках, обов'язкова).

Розв'язування нерівності $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ зводиться до розв'язання двох систем

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

Розв'язування нерівності виду $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ аналогічне.

Розв'язати рівняння та нерівності

1. $(x+5)^{x^2-x-1}=x+5$.

Розглянемо випадки:

1). $x + 5 = 1$, $x_1 = -4$.

2). $x + 5 = -1$, $x_2 = -6$.

3). $x + 5 = 0$, $x_3 = -5$.

4). $x^2 - x - 1 = 1$, звідки $x_4 = 2$, $x_5 = -1$.

Перевіркою переконуємося, що всі знайдені корені задовольняють рівняння.

Відповідь: $x_1 = -4$, $x_2 = -6$, $x_3 = -5$, $x_4 = 2$, $x_5 = -1$.

2. $\left(x^2-8x+15\right)^{x+6}<1$ (кр№2, 11 кл 2006-07 навч. рік)

Якщо $x^2 - 8x + 15 \neq 0$ (тобто $x\neq3$ і $x\neq5$), то $\left(x^2-8x+15\right)^0=1$, тому можна переписати задану нерівність можна наступним чином: $\left(x^2-8x+15\right)^{x+6}<\left(x^2-8x+15\right)^0$.

Оскільки відносно основи $x^2-8x+15$ невідомо, більша вона одиниці, чи знаходиться в проміжку від нуля до одиниці, то необхідно розглянути ці обидві можливості. Тоді дана нерівність буде рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-8x+15>1,\\ x+6<0;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2-8x+15<1,\\ x+6>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-4+\sqrt{2})(x-4-\sqrt{2})>0,\\ x<-6;\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x-5)>0,\\ (x-4+\sqrt{2})(x-4-\sqrt{2})<0,\\ x>-6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система має розв'язок: $x\in(-\infty;\ -6)$, друга: $x\in(4-\sqrt{2};3)\cup(5;4+\sqrt{2})$.

Об'єднавши отримані розв'язки, маємо: $x\in(-\infty;-6)\cup(4-\sqrt{2};3)\cup(5;4+\sqrt{2})$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити:

а) $\dfrac{3\lg2+2\lg3}{\lg6+0{,}5\lg2}$ (відп.: 2); **б)** $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12}2}$ (відп.: 3);

в) lg 25, якщо lg 2 = a (відп.: $2(1-a)$); **г)** $\log_{49}16$, якщо $\log_{14}28 = a$ (відп.: $\dfrac{2(a-1)}{2-a}$);

д) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9$ (відп.: 2); **е)** $\log_{\sqrt{2}}5\cdot\log_5 3\cdot\log_3 16$ (відп.: 8);

є) $5^{\frac{\log_{25}9}{\log_8 3}+1}$ (відп.: 40); ж) $7^{\frac{1}{\log_9^2 49}}-3^{\frac{1}{\log_3 7}}$ (відп.: 0).

2. Що більше:

а) $2\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}$ чи $3\log_{27}\dfrac{1}{17}$; **б)** $2^{\log_3 5}-0{,}1$ чи $5^{\log_3 2}$?

3. Спростити: $\dfrac{2\log_2^2 3-\log_2^2 12-\log_2 3\cdot\log_2 12}{\log_2 108}$ (відп.: – 2).

4. Довести нерівність: $\log_{17}19>\log_{19}20$.

5. Розв'язати показникові та логарифмічні рівняння:

а) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$ (відп.: 0 та 0,5);

б) $4^{tg^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$ (відп.: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$);

в) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$ (відп.: $x = 2$);

г) $\lg(x+10)+0{,}5\lg x^2=2-\lg 4$ (відп.: $-5+5\sqrt{2}$ та 5);

д) $\log_3\left(4\cdot 3^{x-1}-1\right)=2x-1$ (відп.: 0;1);

е) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$ (відп.: 1/6 та 6).

6. Розв'язати показникові-степеневі рівняння та нерівності:

а) $(x+4)^{x^2+9x+8}=1$ (відп.: –3; –5; –8; –1);

б) $(x-3)^{2x^2-7x}\le 1$ (відп.: $x\in[3{,}5;4)$).

7. Розв'язати показникові та логарифмічні нерівності:

а) $2^{x+3}+3\cdot 5^{x-1}<7\cdot 2^{x-2}+5^x$ (відп.: $x\in(3;+\infty)$);

б) $\frac{25^x-3\cdot 5^x-10}{x^2+5x-6}\le 0$ (відп.: $x\in(-\infty;-6)$);

в) $0{,}008^x+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04$ (відп.: $x\in\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$);

г) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3}<1$ (відп.: $x\in\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$);

д) $\log_5\left(\log_3\left(\frac{x^2-x-18}{x-2}\right)\right)\ge 0$ (відп.: $x\in[-2;2)\cup[6;+\infty)$);

е) $\log_x\left|x^2-1\right|>0$ (відп.: $x\in(0;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$).

1.1.7. Функція. Властивості основних елементарних функцій

Зразки типових завдань до теми

1. Знайти область визначення функції: $y=\frac{x+1}{\sqrt{10+3x-x^2}}+\sqrt{x+1}$.

Оскільки підкореневий вираз не може бути від'ємним, а знаменник не дорівнює нулю, то область визначення даної функції можна знайти розв'язавши систему нерівностей: $\begin{cases}10+3x-x^2>0,\\ x+1\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-2;5),\\ x\ge -1,\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;5)$.

Відповідь: $x\in[-1;5)$.

2. Дослідіть функцію на парність (непарність): $y=x^3-x\cdot\sqrt{9-x^2}$ (кр№1, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Згадаємо означення непарної функції: функція $y=f(x)$ називається непарною, якщо для довільного x з області визначення існує $-x$ з області визначення і виконується умова: $f(-x)=-f(x)$.

Отже, необхідно спочатку знайти область визначення заданої функції та перевірити, чи буде ця область визначення симетричною відносно початку координат, а потім перевірити виконання умови $f(-x) = -f(x)$.

1). Знайдемо область визначення функції: $9 - x^2 \ge 0$, $\Rightarrow x \in [-3; 3]$. Очевидно, що область визначення є симетричною відносно початку координат.

2). $f(-x) = (-x)^3 - (-x)\sqrt{9-(-x)^2} = -x^3 + x\sqrt{9-x^2} = -(x^3 - x\sqrt{9-x^2})$.

Висновок: задана функція – непарна.

3. Знайдіть період функції: $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Використавши формулу пониження степеня: $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, маємо $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x$. Очевидно, що період цієї функції буде дорівнювати 2π.

Відповідь: 2π.

4. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = |x-1| + |x-2| + x$. (кр№1, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Знайдемо значення, які перетворюють підмодульні вирази в нуль: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Ці точки розбивають область визначення функції на три проміжки: $(-\infty; 1) \cup [1;2] \cup (2; +\infty)$. Розкривши знак модуля на кожному з вказаних проміжків, отримаємо: при $x \in (-\infty; 1) \Rightarrow y = -(x-1) - (x-2) + x$, тобто $y = -x + 3$; при $x \in [1;2] \Rightarrow y = x - 1 - (x-2) + x$, тобто $y = x+1$; при $x \in (2; +\infty) \Rightarrow y = x - 1 + x - 2 + x$, тобто $y = 3x - 3$. Побудувавши графіки відповідних функцій на кожному з вказаних проміжків, отримаємо графік, зображений на рис. 10.

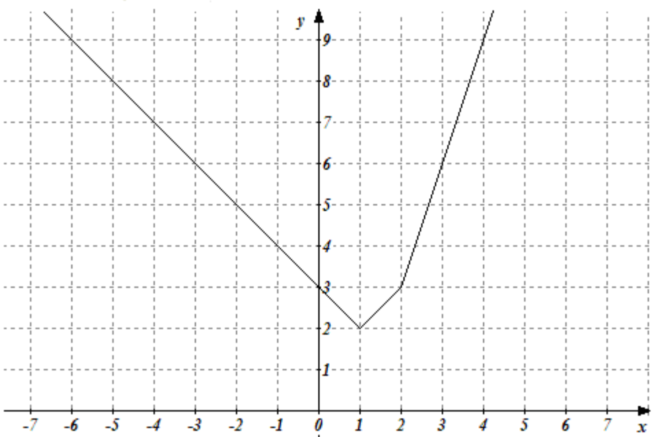


Рис.10

б) $y = x^2 - |x+1| - 1$ (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

Нам потрібно розглянути два випадки: $x+1 \ge 0$ та $x+1 < 0$. Розкривши знак модуля на кожному з вказаних проміжків, у першому випадку отримаємо функцію $y = x^2 - x - 2$; у другому випадку маємо: $y = x^2 + x$. Графік функції $y = x^2 - |x+1| - 1$ зображено на рис.11.

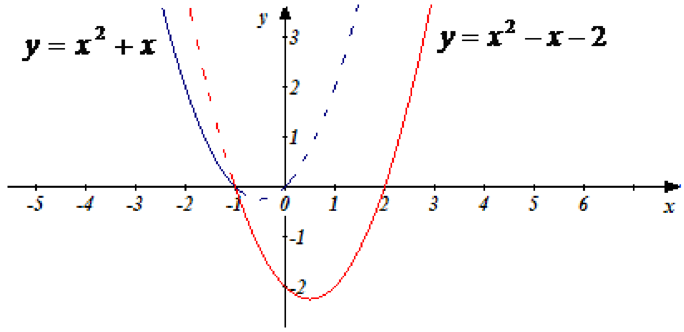


Рис.11

в). $y = \sin x + \sin|x|$ (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Оскільки $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0, \end{cases}$ то функція $y = \sin x + \sin|x|$ прийме вигляд:

при $x \ge 0, \Rightarrow y = \sin x + \sin x = 2\sin x,$ а при $x < 0, \Rightarrow y = \sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0$.

На рис. 12 графік функції $y = \sin x + \sin|x|$ зображено суцільною лінією.

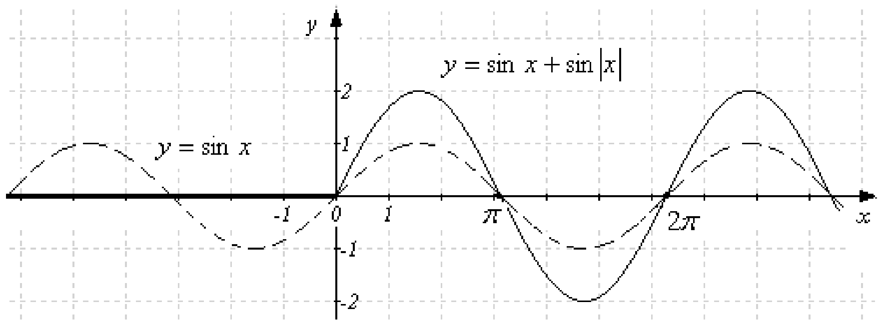


Рис.12

г). $y = tg|x| + |tgx|$.(кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік)

Розглянемо два випадки:

I. Якщо $tgx \ge 0, \Rightarrow y = tg|x| + tgx$; при $x \ge 0, \Rightarrow y = 2tgx,$ а при $x < 0, \Rightarrow y = 0.$

II. Якщо $tgx < 0, \Rightarrow y = tg|x| - tgx,$ при $x \ge 0, \Rightarrow y = tgx - tgx, \Rightarrow y = 0,$ при $x < 0, \Rightarrow y = -2tgx$.

Графік функції $y = tg|x| + |tgx|$ зображено на рис. 13.

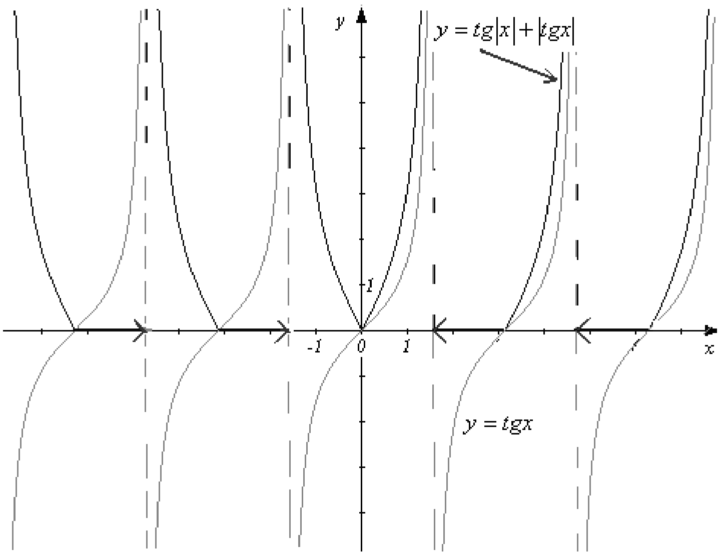


Рис. 13

Розв'язати самостійно:

1. Знайти область визначення функцій: **а)** $y = \sqrt{16 - x^2} - 3\sqrt{x^2 - 4}$; **б)** $y = \sqrt{\log_2(\sin 2x)}$.

2. Дослідити функцію на парність/непарність $y = \dfrac{(x-3)^3}{1-x} - \dfrac{(x+3)^3}{1+x}$.

3. Побудувати графіки функцій: а) $y = \sqrt{x^2} - 2x$; **б)** $y = 2^{|x|-x}$.

1.1.8. Початки математичного аналізу

1. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

а) $y = x^2 - 2x + 3$ та $y = 2x$.

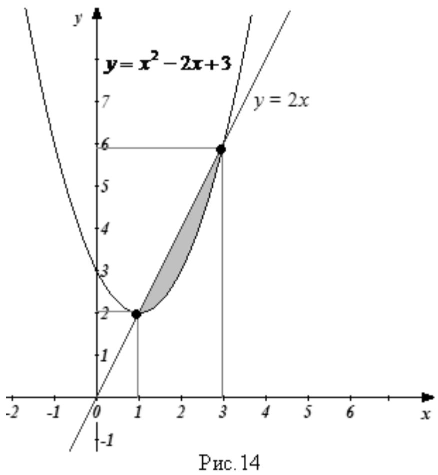


Рис. 14

Знайдемо точки перетину заданих ліній: $x^2 - 2x + 3 = 2x$. Це будуть $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Намалювавши графіки заданих функцій, отримаємо фігуру, зображену на рис. 14. Знайдемо площу фігури, обмежену заданими лініями за допомогою інтегралу:

$$S = \int_1^3 (2x - x^2 + 2x - 3)dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx = \frac{4}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$ кв. од.

б) $y = \sqrt{x+1}$, $y = x - 1$, $y = 0$ (кр№2, 2007-08 навч. рік).

$$S_{ABD} = S_{ABC} - S_{\Delta DBC} = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}dx - 2 =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x+1}^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{3} - 2 = \frac{10}{3} (кв.од.)$$

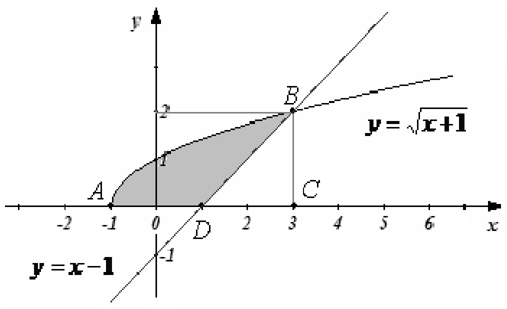


Рис. 15.

2. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = 3 - x^2 - 2x$ у точці з абсцисою x=1 і проілюструвати розв'язок. (кр№2, 2006-07 навч. рік)

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо значення функції в заданій точці

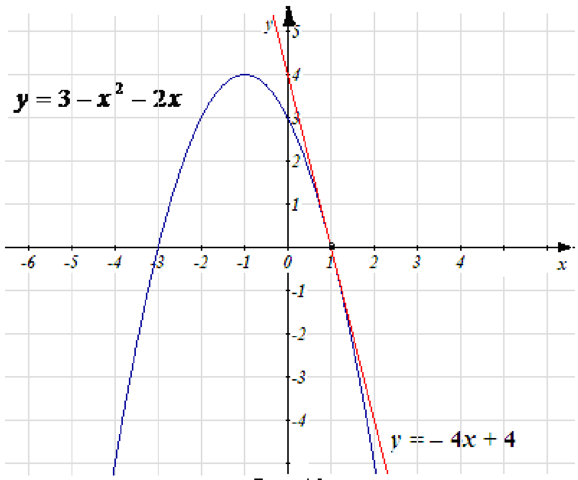


Рис. 16

$x_0 = 1$: $y_0 = f(1) = 3–1^2 – 2 = 0$.

Знайдемо похідну функції в заданій точці: $y' = – 2x – 2$, тоді $y'(1) = – 2 – 2 = –4$.

Підставивши отримані значення в загальне рівняння дотичної, маємо:

$y = – 4(x – 1)$, отже $y = – 4x + 4$.

Отриманий розв'язок можна проілюструвати (див. рис.16):

3. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = x^2 + 2x – 3$ в точках її перетину з віссю абсцис та проілюструвати розв'язок (кр№2, 2007-08 навч. рік)

Очевидно, що графіком функції $y = x^2 + 2x – 3$ буде парабола, з вершиною в точці (–1;4) та нулями в точках $x_1 = – 3$ і $x_2 = 1$.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

де x – незалежна змінна, y – залежна змінна, точка з координатами $(x_0; y_0)$ – точка дотику, а $y'(x_0)$ – значення похідної функції в точці дотику.

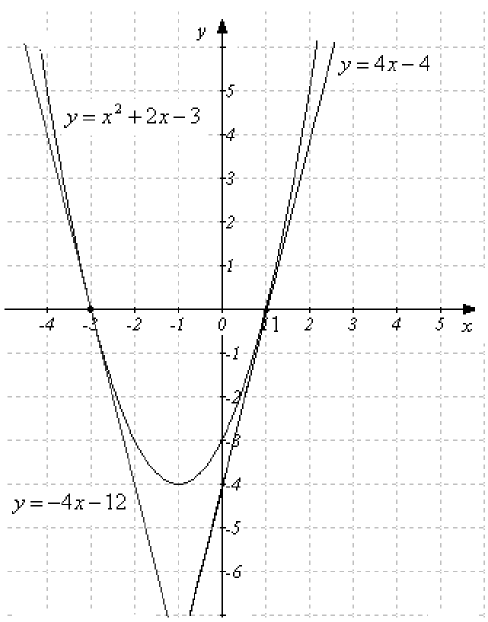


Рис.17.

Знайдемо похідну $y' = (x^2 + 2x – 3)' = 2x + 2$.

Значення похідної в точках $x_1 = – 3$ і $x_2 = 1$ буде відповідно $y'_1 = – 4$ та $y'_2 = 4$, рівняння дотичних: $y = – 4x – 12$ та $y = 4x – 4$.

Графіки кривої $y = x^2 + 2x – 3$ та дотичних $y = – 4x – 12$, $y = 4x – 4$ зображено на рис. 17.

4. В якій точці дотична до графіка функції $y = \frac{x+2}{x-2}$ утворює кут 135° з віссю $0x$? Знайти рівняння цієї дотичної.

Знайдемо похідну заданої функції. За геометричним змістом похідної $y' = k$, де $k = tg135° = -1$. $y' = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = -\frac{4}{(x-2)^2}$ Значить, $-\frac{4}{(x-2)^2} = -1$, звідки знаходимо x = 0 або x = 4. Значить, маємо дві точки (0;–1) та (4;3). Рівняння дотичних: $y = -x - 1$ та $y = -x + 7$.

Відповідь: (0;–1) та (4;3); $y = -x - 1$ та $y = -x + 7$.

Розв’язати самостійно:

1. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 - 2x + 3$ та $y = 2x$; **б)** $y = 4 - x^2$, $y = 2 + x$.

2. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд $y = 8x - 19$. Визначити абсиду точки дотику (відп: x = 3).

3. Знайти, в якій точці графіка функції $y = \sqrt{2x-1}$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом 45° (відп.: (1;1)).

4. Знайти первісну F(x) функції $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, графік якої проходить через точку A (2;–7).

5. Обчислити інтеграл: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2}\,dx$ (відп.: $\frac{3\pi}{2}$).

6. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^2 - x^3$ на відрізку [–1;3] (відп.: 4 і 0).

7. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$, яка паралельна прямій $4x + y = 2$ (відп.: $y = -4x + 7$).

1.2. ГЕОМЕТРІЯ

1.2.1. Планіметрія

У зв’язку з обмеженим об’ємом публікації ми не намагалися якимось чином систематизувати задачі з геометрії, а наводимо розв’язки тих завдань, які викликали найбільше труднощів у слухачів ЗФМШ.

1. На діаметрі кола радіусом ***R*** побудовано правильний трикутник. Обчислити площу тієї частини цього трикутника, яка лежить зовні кола. (кр№3, 2006-07 навч. рік)

Розв’язання

Оскільки сторона даного ΔABC дорівнює діаметру, тобто $a = 2R$, то площа $S_{ABC} = ((2R)^2\sqrt{3})/4 = R^2\sqrt{3}$.

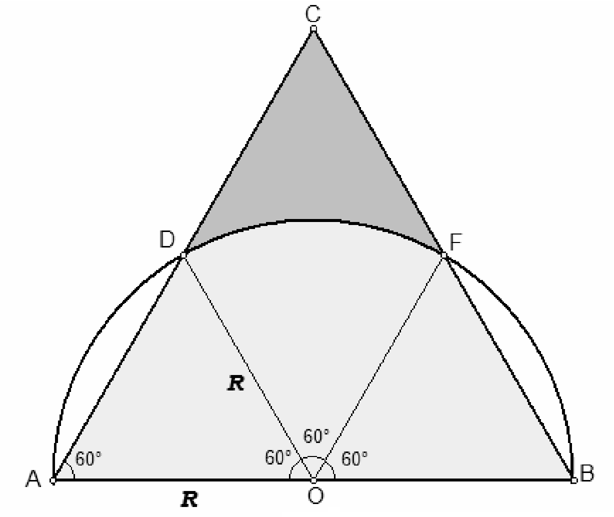


Рис.18

Розглянемо ΔADO. Він буде рівностороннім, оскільки $\angle$DAO=60° (бо ΔABC – правильний), AO=DO=R.
З рівності трикутників ΔBFO=ΔADO $\Rightarrow$ $S_{\Delta BFO}=S_{\Delta ADO}=(R^2\sqrt{3})/4$.
Оскільки $\angle$DOF=60°, то площа сектора DOF: $S_{сект}=\frac{1}{6}\pi R^2$.
Знайдемо площу частини трикутника, яка лежить зовні кола:
$S = S_{ABC} - (2S_{\Delta ADO} + S_{сект}) =$

$$= R^2\sqrt{3} - \left(\frac{2R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}\pi R^2\right) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6}.$$

Відповідь: $\frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6}$.

2. Площа рівнобедреної трапеції, в яку можна вписати коло, дорівнює 2 см^2. Знайти сторони трапеції, якщо кут при основі дорівнює 30°. (кр№3, 2006-07 навч. рік)

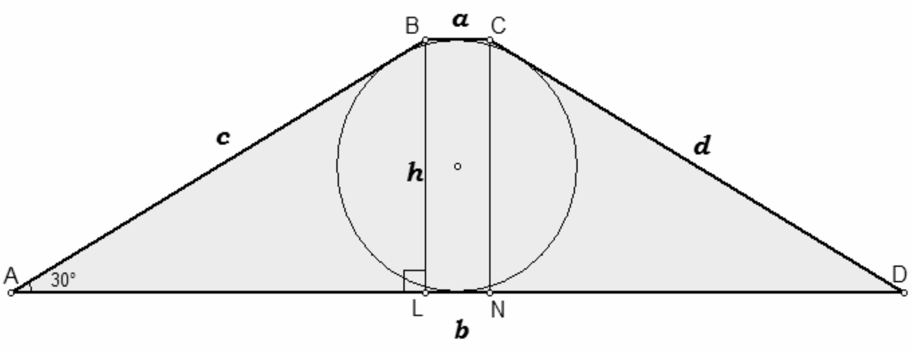


Рис 19

1). У трапецію (рис. 19) можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми протилежних сторін рівні: $a+b=c+d$. Оскільки трапеція рівнобедрена, то $a+b=2c$, то $c=(a+b)/2$.

Враховуючи, що катет $h=c/2$, виразимо площу цієї трапеції:

$$S = \frac{a+b}{2}h = ch = 2h^2,$$

$$2h^2 = 2, \Rightarrow h = 1, \Rightarrow c = 2\ (см).$$

2). Розглянемо ΔABL ($\angle$ALB=90°): $AL = c\cdot\cos 30^0 = 2h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

Тоді AD=a+2AL=a+2$\sqrt{3}$. Оскільки $a+b=c+d$, то a +a+2$\sqrt{3}$=2c.
Враховуючи, що c = 2см, виразимо із останнього співвідношення сторони BC і AD:
BC =2 –$\sqrt{3}$ (см), AD = 2 +$\sqrt{3}$ (см).
Відповідь: основи трапеції дорівнюють (2 –$\sqrt{3}$) см та (2 +$\sqrt{3}$) см, бічна сторона – 2см.

3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16 см. Обчислити відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола (кр№1, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

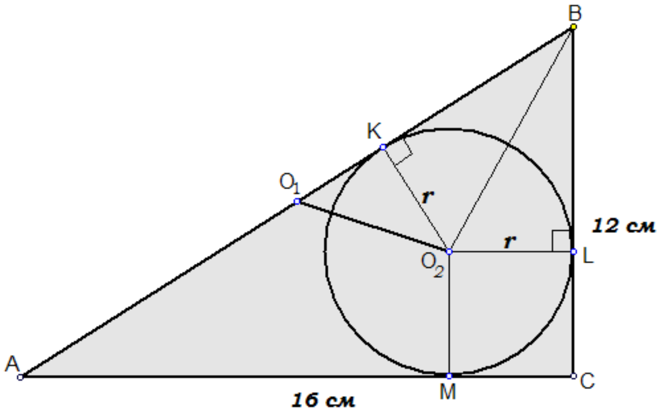


Рис. 20

Як відомо, центр кола описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині його гіпотенузи (точка O_1). Нехай O_2 – центр кола, вписаного в заданий трикутник ABC (рис. 20). За теоремою Піфагора легко знайти гіпотенузу трикутника: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$ (см). Центр вписаного в трикутник кола $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{16 + 12 - 20}{2} = 4$ (см).

Оскільки $MCLO_2$ – квадрат, тому $LC = r = 4$ см, тоді $BL = 12 – 4 = 8$ (см).
Розглянемо $\Delta BLO_2 = \Delta BKO_2$ (бо ці трикутники прямокутні, BO_2 – спільна, $LO_2 = KO_2 = r$) $\Rightarrow$ BL = BK = 8 (см). Тоді $KO_1 = BO_1 – BK = 2$ (см).
Розглянемо ΔO_1KO_2 ($\angle K=90°$). За теоремою Піфагора знайдемо відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола:
$O_1O_2^2 = 4^2 + 2^2 = 20, \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{20}$ (см).

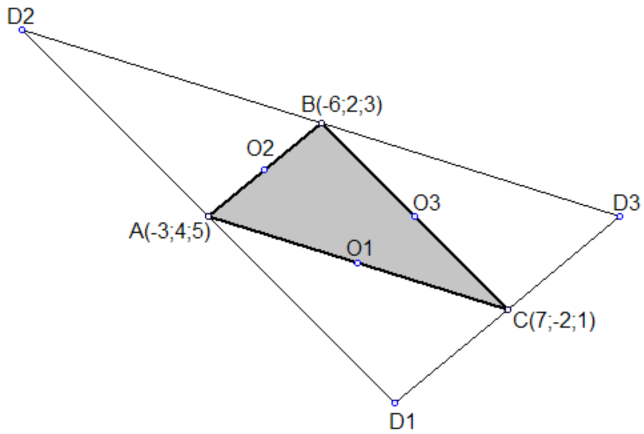


Рис. 21

Відповідь: $\sqrt{20}$ (см).

4. Точки A(-3,4,5), B(-6,2,3), C(7,-2,1) – вершини паралелограма. Знайдіть координати четвертої вершини цього паралелограма (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

<u>**І випадок**</u>. AC – діагональ.
Знайдемо координати середини AC, точку $O_1\left(\dfrac{7-3}{2}; \dfrac{4-2}{2}; \dfrac{5+1}{2}\right) \Rightarrow O_1(2;1;3)$.
Враховуючи, що діагоналі паралелограма в точці перетину діляться пополам, знайдемо координати четвертої вершини паралелограма $ABCD_1$:
$2 = \dfrac{-6 + x_1}{2}; \Rightarrow x_1 = 10;\ 1 = \dfrac{2 + y_1}{2}; \Rightarrow y_1 = 0;\ 3 = \dfrac{3 + z_1}{2}; \Rightarrow z_1 = 3$. Отже $D_1(10;0;3)$.
Більшість слухачів ЗФМШ вірно знайшли координати точки D_1, проте всі можливі три випадки розглянули лише одиниці (в умові задачі не вказано, який саме паралелограм задано: ABCD, ACBD чи CABD). Всі три випадки зображено на рис. 21.
<u>**ІІ випадок**</u>. AB – діагональ. Аналогічно до першого випадку знайдемо координати середини відрізка AB: $O_2(-4,5;3;4)$ і четвертої вершини паралелограма $ACBD_2$ точки $D_2(-16;8;7)$.
<u>**ІІІ випадок**</u>. BC – діагональ. Аналогічно можна знайти координати середини відрізка BC: $O_3(0,5;0;2)$ і четвертої вершини паралелограма $CABD_3$ точки $D_3(4;-4;-1)$.

Відповідь: $D_1(10;0;3)$, $D_2(-16;8;7)$, $D_3(4;-4;-1)$.

5. Висота, бісектриса і медіана, проведені з однієї вершини трикутника, розділили кут при цій вершині на 4 рівні частини. Довести, що трикутник прямокутний (кр№2, 11 кл. 2007-08 навч. рік)

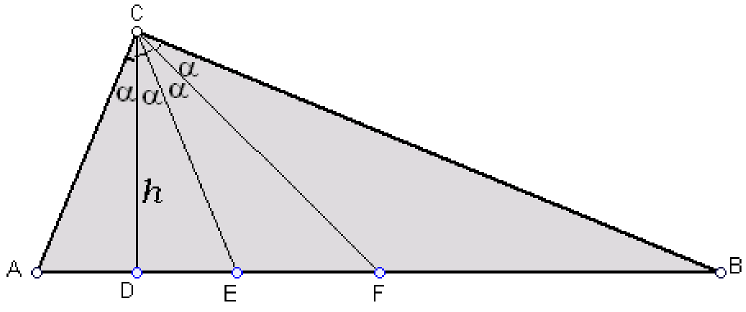


Рис. 22

Нехай висота h = CD, бісектриса b = CE, медіана m = CF (рис. 22).
Тоді AD = h·tgα, DF = h·tg2α, FB = DB – DF = h·tg3α – h·tg2α.
Проте AF = FB, тобто AD + DF = DB – DF, або h·tgα + h·tg2α = h·tg3α – h·tg2α.
Оскільки $h\neq 0$, то отримаємо:

tgα + tg2α = tg3α – tg2α, ⇔
2tg2α = tg3α – tgα, ⇔
2tg2α = $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha}$, або $\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha}$.
Звідки 2cos3α·cosα – cos2α = 0;
cos4α + cos2α – cos2α = 0, ⇔ cos4α = 0, ⇒ 4α = $\frac{\pi}{2}$, тобто ∠ACB = $\frac{\pi}{2}$.

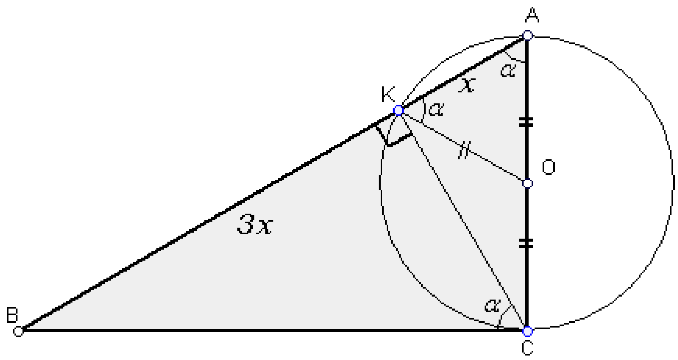


Рис.23

5. Коло, побудоване на катеті прямокутного трикутника як на діаметрі, ділить гіпотенузу у відношенні 1:3. Обчислити кути трикутника (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Розглянемо ∠BKC = ∠AKC = 90° (вписаний кут, що опирається на діаметр). Отже, CK – висота прямокутного ΔABC, проведена до гіпотенузи, а тому CK^2 = AK·BK (рис.23).
Позначивши AK = x, BK = 3x, отримаємо: $CK = \sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}$. Тоді
$tg\angle B = \frac{CK}{BK} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
∠ABC = 30°, а ∠BAC = 60°.

Відповідь: 30°, 60°.

7. Квадрат з периметром ***P*** повернули навколо його центра на 45°. Визначити площу
спільної частини обох положень квадрата (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік).
Спільною частиною обох положень квадрата буде восьмикутник

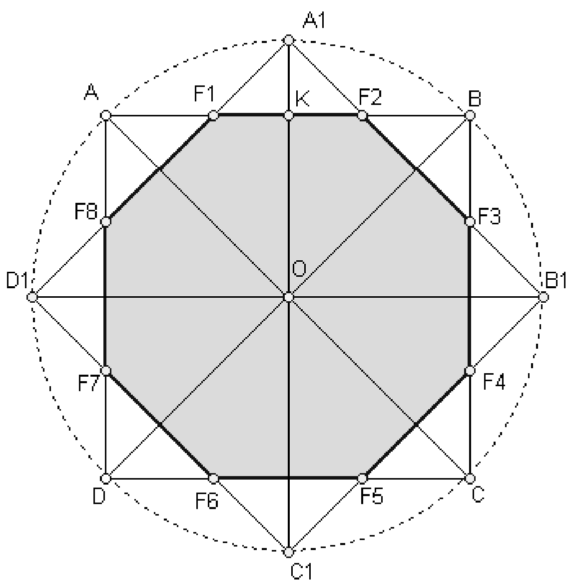


Рис. 24

$F_1F_2F_3F_4F_5F_6F_7F_8$ (див. рис. 24). Для того, щоб знайти його площу, необхідно від площі квадрата ABCD відняти чотири площі ΔAF_1F_8. Сторона AB = ***P***/4, тоді площа квадрата ABCD: $S_{ABCD}=AB^2=(P/4)^2=P^2/16$.

Діагональ квадрата $A_1C_1= AB\sqrt{2}=\frac{P\sqrt{2}}{4}$, тоді $A_1O = \frac{P\sqrt{2}}{8}$.

Оскільки $\Delta AF_1F_8 = \Delta A_1F_2F_1$, знайдемо $A_1K = A_1O - KO = \frac{P\sqrt{2}}{8}-\frac{P}{8}=\frac{P}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

$$S_{\Delta A_1F_2F_1}=A_1K^2=\frac{P^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{64}=\frac{P^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{64}.$$

Тоді шукана площа восьмикутника:

$$S_8=\frac{P^2}{16}-\frac{4P^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{64}=\frac{P^2}{16}-\frac{P^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{16}=$$
$$=\frac{P^2\left(1-3+2\sqrt{2}\right)}{16}=\frac{P^2\left(2\sqrt{2}-2\right)}{16}=\frac{P^2\left(\sqrt{2}-1\right)}{8}.$$

Відповідь: $\frac{P^2\left(\sqrt{2}-1\right)}{8}$.

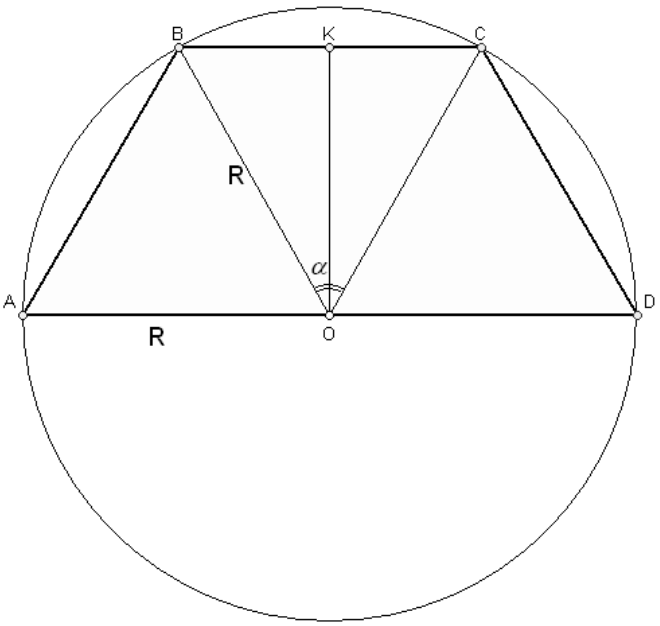


Рис. 25

8. У круг радіуса R вписано трапецію, одна основа якої збігається з діаметром, а друга – стягує дугу α. Знайти площу трапеції (кр№4, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

Розглянемо ΔВКО (∠ВКО = 90°) (див. рис. 25): $BK=R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, тоді

$BC=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, а висота трапеції $OK=R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

Отже, основи трапеції $BC=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, а $AD=2R$, тому

$$S=\frac{2R+2R\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot R\cos\frac{\alpha}{2}=R^2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь: $R^2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

9. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60° (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

З рис. 26 видно, що за теоремою косинусів: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{7}$,

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{3}.$$

Позначимо кут між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ через φ і запишемо скалярний добуток векторів $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cos\varphi .$$

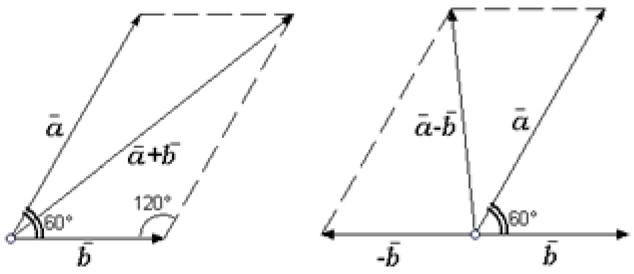


Рис. 26

З іншого боку

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|a\right|^2-\left|b\right|^2=4-1=3 .$$

Тому можна записати $3=\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi$.

Звідки $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Відповідь: $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Розв'язати самостійно:

1. На сторонах АВ і ВС трикутника АВС зовні його побудовано квадрати ABDE BCKM. Довести, що відрізок DM вдвічі більший від медіани BP ΔABC.
2. В паралелограмі зі сторонами a і b ($a > b$) проведено бісектриси внутрішніх кутів. Знайти довжини діагоналей чотирикутника, утвореного в перетині бісектрис (відп.: $a - b$).
3. Площа трикутника АВС дорівнює P. Відрізок DE, паралельний основі AC, відтинає від трикутника ABC ΔBED з площею Q. На стороні AC взяли довільну точку M і з'єднали відрізками прямих з точками D і E. Знайти площу чотирикутника BEMD (відп.: $\sqrt{PQ}$).
4. На катетах та гіпотенузі прямокутного трикутника зовні його як на сторонах побудові квадрати. Вільні вершини кожних двох сусідніх квадратів з'єднані відрізком прямої лінії. Обчислити площу отриманого шестикутника, якщо відомо, що гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а площа S (відп.: $4S + 2c^2$).
5. Доведіть, що бісектриси кутів довільного чотирикутника при перетині утворюють чотирикутник, який можна вписати в коло.
6. Коло, побудоване на катеті прямокутного трикутника як на діаметрі, ділить гіпотенузу у відношенні 1:3. Знайти кути трикутника (відп.: 30° і 60°).
7. Довжина сірника дорівнює 1. Складіть із 12 сірників многокутник, який обмежує площу рівну 4.

1.2.2. Стереометрія

1. Основи рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 8 і 18 см. Деяка точка віддалена від кожної сторони трапеції на 10 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трапеції (кр№1, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

1). Оскільки деяка точка P віддалена від кожної сторони трапеції на однакову відстань (рис. 27), то точка P проектується в площину трапеції в точку O – центр кола, вписаного в трапецію. Відомо, що коли в чотирикутник можна вписати коло, то суми протилежних сторін такого чотирикутника рівні, тому AB + CD = AD + BC $\Rightarrow$ 2BC = AB+ CD $\Rightarrow$ BC = 13 см.
2). Опустимо з вершини A на основу CD висоту AH. Оскільки задана трапеція рівнобічна, то DH = ½(CD–AB) $\Rightarrow$ DH = 5 см.

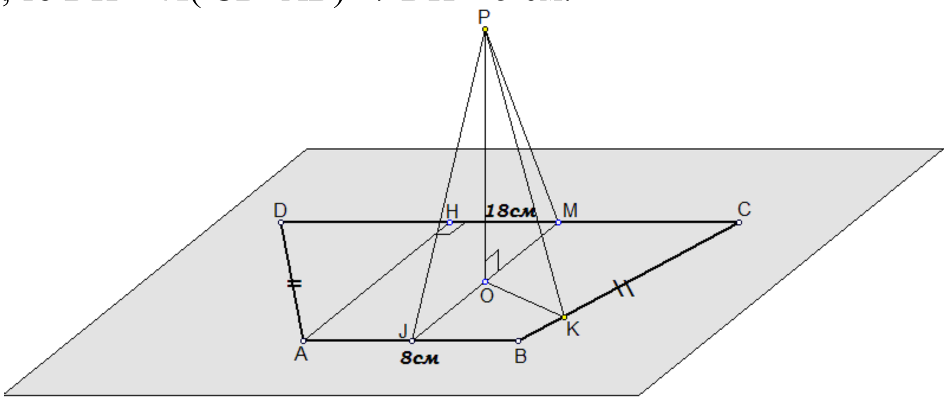


Рис. 27

3). Розглянемо ΔADH (∠AHD = 90°). За теоремою Піфагора $AH^2 = AD^2 - DH^2$, тобто AH = 12 см. Оскільки AH = JM = $2r$, то r = 6 см.
4). Розглянемо ΔPOJ (∠POJ=90°): $PO^2 = PJ^2 - JO^2$, тому PO = 8см.

Відповідь: 8 см.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють ***a*** та ***b***. Точка M знаходиться на відстані ***h*** від площини трикутника і на однаковій відстані від всіх його вершин. Знайти цю відстань (кр№3, 10 кл. 2007-08 навч. рік).

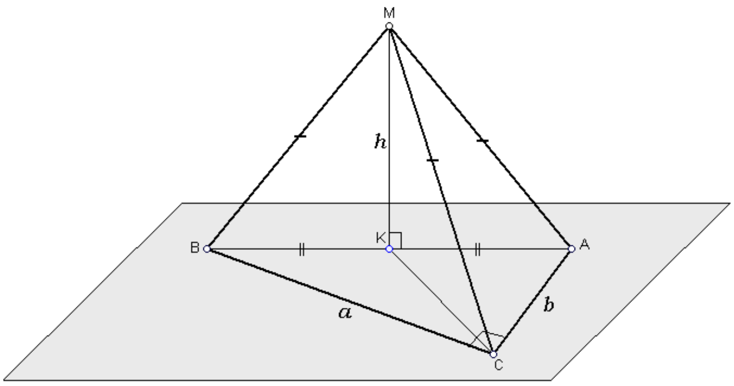


Рис. 28

Оскільки за умовою похилі MA=MB=MC, то рівні і їх проекції KA=KB=KC, а це значить, що точка K – центр кола, описаного навколо ΔABC. Але за умовою цей трикутник прямокутний, а значить точка K збігається з серединою гіпотенузи AB (рис. 28).

Маємо: $MA = \sqrt{MK^2 + AK^2}$; тоді $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Отже, $MA = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}$.

3. Площина квадрата складає кут α з площиною, що проведена через одну з його сторін. Який кут складає з тією ж площиною діагональ квадрата? Е

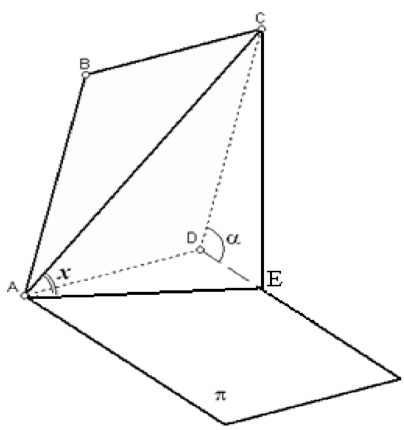


Рис. 29

Нехай ABCD – даний квадрат (рис.29). З точки C опустимо перпендикуляр CE на задану площину π. Оскільки AD⊥DC, то за теоремою про три перпендикуляри AD⊥DE, а значить ∠CDE – кут між площинами ABCD і π.
Нехай $\boldsymbol{a}$ – сторона квадрата ABCD, ∠CAE = $\boldsymbol{x}$.
Тоді з ΔCAE маємо:

$$\sin x = \frac{CE}{AC} = \frac{a \cdot \sin\alpha}{a\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

4. Основа піраміди – ромб з діагоналями 30 см і 40 см. Бічне ребро завдовжки 18 см перпендикулярне до площини основи. Знайти площу поверхні піраміди. (кр№3, 2006-07 навч. рік)

1). Нехай SABCD – задана піраміда (рис. 30), бічне ребро SB – перпендикулярне до площини основи піраміди. Тоді бічні грані ABS та BDS також будуть перпендикулярні до площини основи.

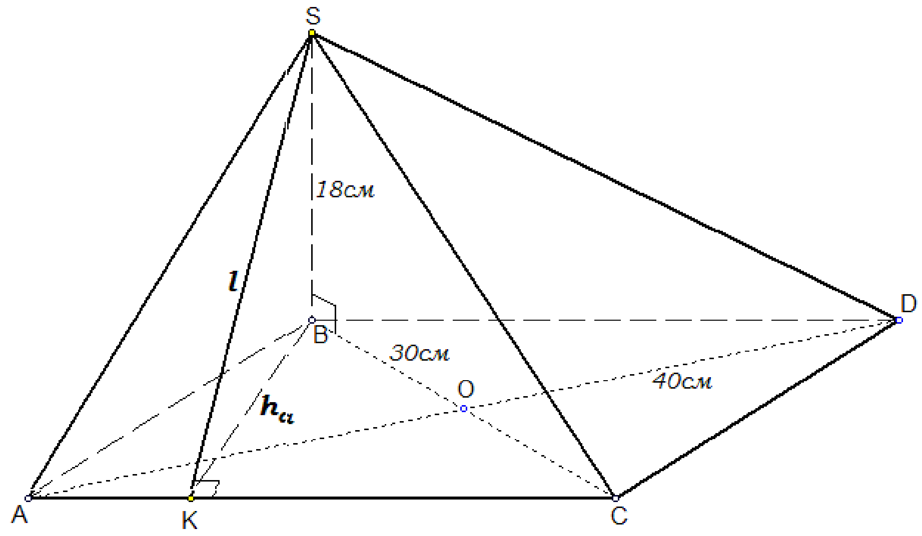


Рис.30

2). З трикутника AOC (∠AOC=90°) за теоремою Піфагора знайдемо сторону ромба AC:
$AC^2 = AO^2 + CO^2, \Rightarrow AC^2 = 15^2 + 20^2 = 625, \Rightarrow AC = 25$ (см).
Площа основи S_{ABCD} = (AD·BC):2 = (30·40):2 = 600(см^2).
З іншого боку площа ромба ABCD S = AC·BK = 25·h_a.
Прирівнявши ці дві формули, знайдемо висоту основи h_a = 24(см).
3). Розглянемо прямокутний трикутник SBK та знайдемо висоту бічної грані ASC:
$l^2 = BK^2 + SB^2 = 18^2 + 24^2 = 900 \Rightarrow l = 30$(см).
3). Площа бічної поверхні буде складатися з площ попарно рівних трикутників:
$S_{ABS} = S_{DBS} = (AB \cdot BS):2 = (18 \cdot 25):2 = 225$(см^2),
$S_{ACS}=S_{DCS}=(AC \cdot SK):2=(30 \cdot 25):2=375$ (см^2).
Тоді площа повної поверхні **S**= $S_{ABCD}+2(S_{ABS}+ S_{ACS})=1800$(см^2).

За браком місця ми розглянули випадок, коли задане бічне ребро лежить навпроти більшої діагоналі. Випадок, коли задане бічне ребро лежить навпроти меншої діагоналі, розв'язується аналогічно. Нескладно довести, що площа поверхні в другому випадку буде дорівнювати тій самій величині, 1800 см^2.
Відповідь: 1800 см^2.

6. Відрізок прямої, який з'єднує точку кола верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює $\boldsymbol{l}$ і утворює з площиною основи кут α. Знайти відстань від цієї прямої до вісі циліндра, якщо осьовий переріз циліндра – квадрат. (кр№3, 2006-07 навч. рік)

1) Розглянемо ΔB_1BA ($\angle B_1BA=90^o$): $BB_1 = l\cdot sin\alpha \Rightarrow$
$OB = OA = (l\cdot sin\alpha):2$; $AB = l\cdot cos\alpha \Rightarrow AM=(l\cdot cos\alpha):2$.

2) Розглянемо ΔOMA ($\angle OMA=90^o$):

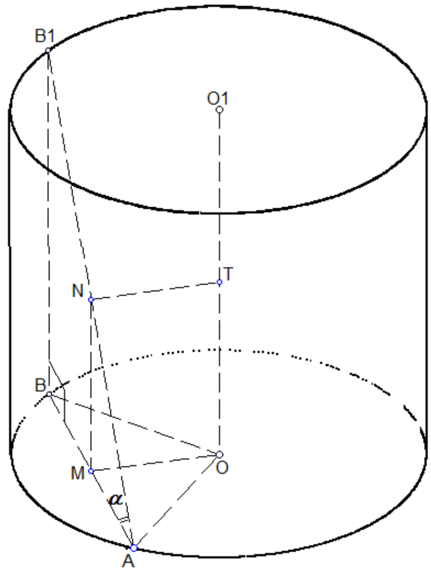


Рис. 31

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{l^2}{4}\sin^2\alpha - \frac{l^2}{4}\cos^2\alpha} = \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

3) $NT=OM \Rightarrow NT= \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $NT= \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$. 31

7. Визначте площу перерізу кубу площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер куба паралельно діагоналі куба, що перетинає ці ребра, якщо ребро куба дорівнює $\boldsymbol{a}$ (кр№2, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

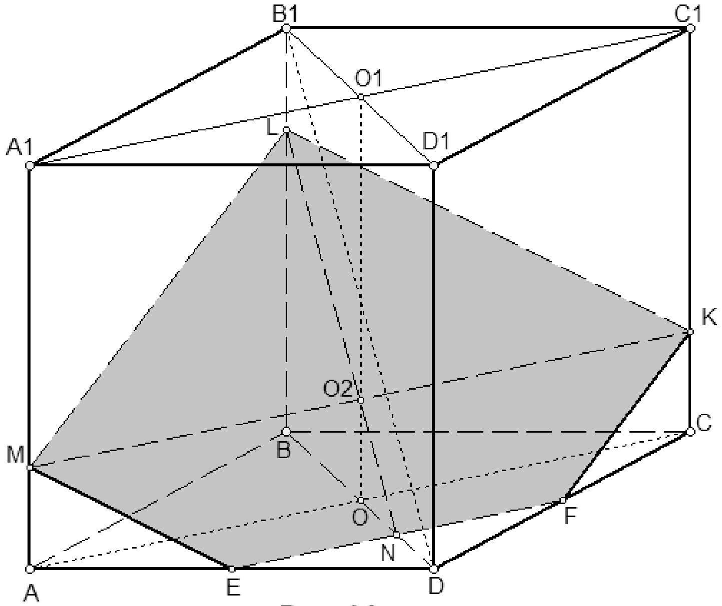


Рис. 32

Нехай E і F – середини суміжних ребер. Точку N дістанемо як точку перетину відрізків EF і BD. Проведемо $NL \,||\, B_1D$, $NL \cap OO_1 = O_2$. Через O_2 проводимо $MK \,||\, AC$. Шуканий переріз EFKLM (рис. 32). П'ятикутник EFCBA буде ортогональною проекцією для побудованого перерізу EFKLM. Тому $S_{EFKLMN} = \frac{S_{EFCBA}}{\cos\angle LNB}$. Але $\angle LNB=\angle B_1DB$, тому досить знайти косинус кута нахилу діагоналі B_1D до площини основи. Оскільки BD – діагональ квадрата зі стороною ***a***, то

BD=$a\sqrt{2}$, тоді

$B_1D = \sqrt{B_1B^2 + BD^2} = a\sqrt{3}$. Таким чином

$\cos\angle LNB = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Знайдемо площу п'ятикутника EFCBA. Для цього від площі квадрата ABCD віднімемо площу прямокутного ΔEFD. Отже,

$S_{EFCBA} = a^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{8}$.

Тоді $\boldsymbol{S_{EFKLMN}} = \frac{S_{EFCBA}}{\cos\angle LNB} = \frac{7a^2}{8} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$.

Відповідь: $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$

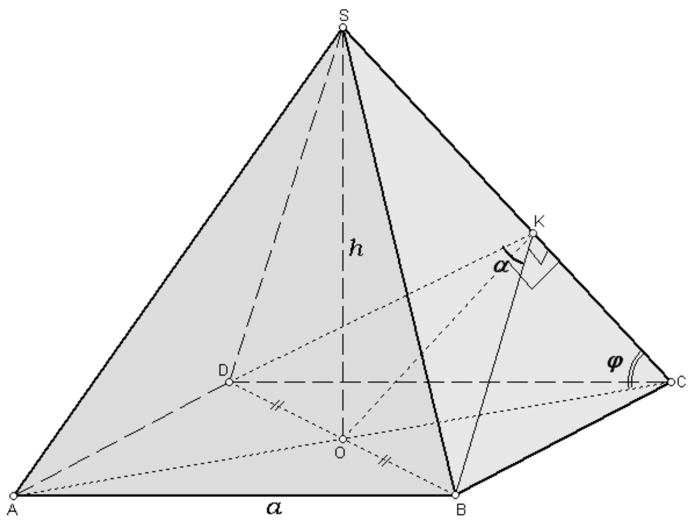


Рис. 33

8. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює ***a***, а двогранний кут між сусідніми бічними гранями дорівнює α (кр№3, 11 кл. 2007-08 навч. рік).

1). Як відомо, двогранний кут вимірюється так званим лінійним кутом. Будується він таким чином: з точок B та D до ребра двогранного кута SC в його гранях проводять відрізки BK⊥ SC і DK⊥ SC. Кут BKD і буде лінійним кутом двогранного кута між бічними гранями SBC та SDC, тобто ∠BKD=α (див. рис. 33).

2). Розглянемо Δ BKD – рівнобедрений, BO = DO, BK = DK, тому $\angle BKO = \frac{\alpha}{2}$ і

∠KOB=90°.

Оскільки BD=$a\sqrt{2}$, тоді BO=$\frac{a}{\sqrt{2}}$ і $OK = \frac{a}{\sqrt{2}} ctg\,\frac{\alpha}{2}$.

3). Розглянемо ΔKOC (∠OKC=90°). Нехай ∠KCO = φ.

Тоді $\sin\varphi = \frac{OK}{OC} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}} ctg\frac{\alpha}{2} : \frac{a}{\sqrt{2}} = ctg\frac{\alpha}{2}$.

Виразимо $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{ctg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin\alpha}{2\sqrt{-\cos\alpha}}$, отже 90°<α<180°.

З іншого боку з ΔSOC $(\angle SOC = 90°)$ виразимо $tg\varphi = \dfrac{h}{OC} \Rightarrow$

$$h = OC \cdot tg\varphi = \frac{a\sin\alpha}{2\sqrt{2(-\cos\alpha)}} = \frac{\sqrt{2}a\sin\alpha}{4\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

Тоді об'єм заданої піраміди $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot h = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}a\sin\alpha}{4\sqrt{-\cos\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}a^3\sin\alpha}{12\sqrt{-\cos\alpha}}$, при $90° < \alpha < 180°$.

Відповідь: $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3\sin\alpha}{12\sqrt{-\cos\alpha}}$, при $90° < \alpha < 180°$.

Розв'язати самостійно:

1. Бічне ребро та сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a. Знайти площу перерізу, проведеного через сторону основи під кутом 60° до площини основи (відп.: $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$).
2. У правильній чотирикутній піраміді з центру основи O опущені перпендикуляри на дві суміжні бічні грані OH_1 та OH_2. Знайти площу перерізу, проведеного через точки O, H_1, H_2, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а двогранний кут при бічному ребрі піраміди α (відп.: $\dfrac{a^2}{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}$).

Розділ 2. Фізика

2.1. МЕХАНІКА

2.1.1. Кінематика

Основні формули кінематики

Зміна швидкості і переміщення при прямолінійному русі

$$v=v_0+at,\ \ s=v_0t+\frac{at^2}{2},$$

Доцентрове прискорення $a_n=\frac{v^2}{R}$.

При рівномірному русі по колу: кутова швидкість

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

Зв'язок кутової і лінійної швидкостей

$$v=\omega R.$$

Кутове прискорення змінного обертового руху

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$$

Для рівнозмінного обертового руху

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t;\varphi=\omega_0+\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути вираженими через кутову швидкість і прискорення $a_\tau=\varepsilon R\ \ a_n=\omega^2 R.$

Алгоритм розв'язку найпростіших задач з кінематики.

1. Виявіть і запишіть характер руху.
2. Виявіть і, якщо є, запишіть початкову швидкість.
3. Запишіть коротку умову задачі, виразіть всі величини в одиницях СІ.
4. Використовуючи основні формули кінематики, доберіть формули, які необхідні для розв'язку даної задачі.
5. Визначіть напрям руху тіл, оберіть тіло відліку та напрям вісі координат, визначте проекції швидкостей та прискорень на вісь.
6. Запишіть формули в проекціях на обрану вісь.
7. Знайдіть шукану величину.
8. Обрахуйте числове значення.
9. Проаналізуйте результат.

Для розв'язання графічних задач використовуйте знання графіків лінійної та квадратичної функцій. Побудовані графіки необхідно вміти «читати». Це значить: визначати початкову координату і швидкість руху; записувати рівняння координати; визначати час і місце зустрічі тіл; визначати, в який момент часу тіло має дану координату; визначити координату, яку тіло має в даний момент часу.

Приклади розв'язування задач

1. Автомобіль проїхав половину шляху зі швидкістю v_1=90 км/год. Половину часу, який залишився, він їхав зі швидкістю v_2=20 км/год, а останню ділянку — зі швидкістю v_3=40 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

Дано:

v_1=90 км/год

v_2=20 км/год

v_3=40 км/год

v_c – ?

Розв'язання:

Для часу, протягом якого автомобіль проїхав першу половину шляху, записуємо:

$$t_1 = \frac{s}{2v_1}$$

Другу половину шляху автомобіль проїхав протягом часу *t,* який складають два однакових відрізків часу t_2, зі швидкостями відповідно v_2 і v_3 , тобто

$$\frac{s}{2} = (\upsilon_3 + \upsilon_2)t_2,$$

звідки

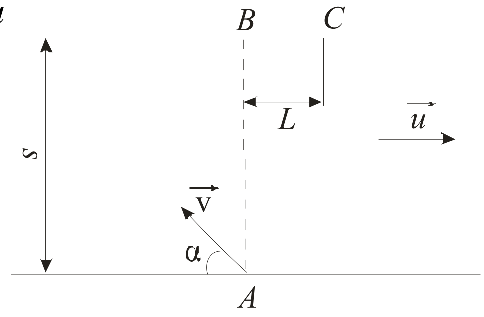
$$t = 2t_2 = \frac{s}{\upsilon_3 + \upsilon_2}.$$

Для середньої швидкості знаходимо:

$$\upsilon_c = \frac{s}{\tau} = \frac{s}{\frac{s}{2\upsilon_1} + \frac{s}{\upsilon_2 + \upsilon_3}} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}, \qquad \upsilon_c = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}$$

$$\upsilon_c = \frac{2\cdot 90\cdot(20+40)}{2\cdot 90+20+40} = 45 \text{ (км/год)}$$

2. Катер пливе по річці шириною s=500 м зі швидкістю відносно води v=5,2 м/с, тримаючи курс під кутом $б = 30°$ до берега (див. рисунок). Внаслідок зносу човна течією він припливає з точки *A* до точки *C,* яка знаходиться на відстані L=100 м від точки *B*. Яка швидкість *u*



Дано:

s=500 м

v=5,2 м/с

$б = 30^0$

L=100 м

u - ?

Розв'язання:

Для перпендикулярного переміщення човна знаходимо:

$$s = \mathrm{v}\sin б t\text{, звідки } t = \frac{s}{\mathrm{v}\sin б}$$

Для горизонтального переміщення знаходимо:

$$L=(u-\mathrm{v}\cos\text{б})t\,.$$

Підставивши вираз для часу t, одержуємо:

$$L=(u-\mathrm{v}\cos\text{б})\frac{s}{\mathrm{v}\sin\text{б}}\,,$$

або

$$u=\mathrm{v}\left(\frac{L}{s}\sin\text{б}+\cos\text{б}\right)$$

$u=5{,}2\cdot\left(\frac{100}{500}0{,}5+0{,}866\right)\approx 5$ (м/с)

3. Тіло, що рухається прямолінійно рівноприскорено, за перші дві секунди спостереження пройшло 180 м, за другі дві секунди – 168 м в тому ж самому напрямі, за треті дві секунди – 156 м і т.і. Визначити прискорення тіла.

Дано:

t=2 с

s_1=180 м

s_2=168 м

s_3=156 м

a - ?

Розв'язання:

$$s_1=\mathrm{v}_0t-\frac{at^2}{2}\ (1),\qquad \mathrm{v}_{02}=\mathrm{v}_0-at\,,$$

тоді

$$s_2=(\mathrm{v}_0-at)t-\frac{at^2}{2}=\mathrm{v}_0t-3\frac{at^2}{2}\ (2)$$

З (1) і (2) одержуємо:

$$s_1-s_2=at^2\,,$$

звідки

$$a=\frac{s_1-s_2}{t^2}$$

$a=\frac{180-168}{4}=3$ (м/с^2)

4. Рухаючись рівноприскорено, автомобіль за 2 с пройшов 60 м та збільшив свою швидкість утричі. Знайдіть початкову та кінцеву швидкості автомобіля на цій ділянці шляху.

Дано:

t=2 с

s=60 м

$\mathrm{v}=3\mathrm{v}_0$

v_0 - ?

v - ?

Розв'язання:

$$s=\frac{\mathrm{v}^2-\mathrm{v}_0^{\,2}}{2a}=\frac{(3\mathrm{v}_0)^2-\mathrm{v}_0^{\,2}}{2a}=\frac{4\mathrm{v}_0^{\,2}}{a}$$

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0+at;\ 3\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_0+at,$$

звідки

$$a=\frac{2\mathrm{v}_0}{t}\,.$$

Для швидкостей знаходимо:

$$s=\frac{4\mathrm{v}_0{}^2t}{2\mathrm{v}_0},\ \text{звідки}\quad \mathrm{v}_0=\frac{s}{2t}\ \text{і}\ \mathrm{v}=\frac{3s}{2t}$$

v_0=15 м/с; v=45 м/с.

5. Гелікоптер піднімався з поверхні землі вертикально вгору з прискоренням 2 м/с^2. Через певний час з нього випав предмет і ще через 3,5 с впав на землю. Через який час t після початку руху гелікоптера з нього випав цей предмет? Вважайте g=10 м/с, опір повітря не враховуйте.

Дано:

a=2 м/с^2

t_1=3,5 с

g=10 м/с^2

t - ?

Розв'язання:

Тіло падало протягом t_1 с, із початковою швидкістю, напрямленою вертикально вгору. Для висоти у точці падіння запишемо:

$$h=\mathrm{v}_0t_1+\frac{gt_1{}^2}{2},\ \text{де}\ \mathrm{v}_0=-at.$$

$$h=-att_1+\frac{gt_1{}^2}{2}=t_1\left(\frac{gt_1}{2}-at\right)\ (1)$$

Гелікоптер подолав цей шлях за час t без початкової швидкості, злітаючи з прискоренням a

$$h=\frac{at^2}{2}\ (2)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (1) і (2), знайдемо:

$$\frac{at^2}{2}+at_1t-\frac{gt_1{}^2}{2}=0$$

З підстановкою кількісних значень для a, t_1, g рівняння набуває вигляду:

$$t^2+7t-60=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+240}}{2}\ \text{(с)}$$

t=5 с.

2.1.2. Динаміка

Основні формули динаміки

До динаміки поступального руху

$$F=ma,\ \ F=\gamma\frac{m_1m_2}{R^2},\ F_\text{т}=\mu N,\ \ F_\text{п}=-kx.$$

До динаміки обертового руху

$$F=ma_\text{n}=\frac{mv^2}{R}=m\omega^2R.$$

Алгоритм розв'язування задач на другий закон Ньютона

1. Уважно прочитайте умову задачі. Виявіть, яке тіло рухається. Під дією яких сил? Який характер руху?

2. Запишіть коротку умову. Виразіть всі величини в одиницях СІ.

3. Зробіть малюнок. Зобразіть осі координат, тіло і всі діючі на тіло сили.

4. Запишіть рівняння другого закону Ньютона в векторному вигляді.

5. Запишіть основне рівняння динаміки для проекцій на осі координат.

6. Знайдіть всі величини, що входять в ці рівняння.

7. Розв'яжіть рівняння (або систему рівнянь) відносно невідомої величини, тобто розв'яжіть задачу в загальному вигляді.

8. Знайдіть шукану величину.

9. Визначте одиницю величини та перевірте, чи підходить вона по змісту.

10. Розрахуйте числове значення величини.

11. Проаналізуйте відповідь.

Приклади розв'язування задач

1. Тіло масою 5 кг рухається горизонтально з початковою швидкістю 1 м/с під дією сили 30 Н, що напрямлена під кутом 60^0 до горизонту. Запишіть рівняння залежності переміщення від часу, якщо коефіцієнт тертя становить 0,1.

Дано:

m=5 кг

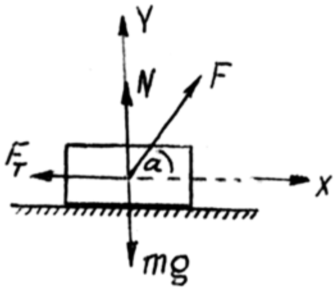
v_o=1 м/с

F=30 Н

б =60^0

м=0,1

x=$x(t)$



Розв'язання:

В проекції на горизонтальну вісь для рівняння руху тіла записуємо:

$$F\cos б - м(mg - F\sin б) = ma,$$

звідки

$$a = \frac{F\cos б - м(mg - F\sin б)}{m},$$

підставляючи цей результат в рівняння для рівноприскореного руху, розрахуємо переміщення:

$$x = v_0 t + \left(\frac{F\cos б - м(mg - F\sin б)}{2m}\right)t^2$$

a=2,5 м/с^2

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} = t + 1{,}25\,t^2 .$$

2. Електровоз на горизонтальній ділянці шляху розвиває постійну силу тяги 0,345 МН. Визначити силу опору руху електровозу масою 1300 т, якщо на ділянці шляху 300 м його швидкість зросла від 36 км/год до 42 км/год.

Дано:

F=$345\cdot10^3$ Н

m=$13\cdot10^5$ кг

s=300 м

v_1=10 м/с

v_2=11,6 м/с

F_0 - ?

Розв'язання:

Складаємо систему рівнянь

$$F - F_0 = ma \quad (1)$$

$$s = \frac{v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}}{2a} \quad (2)$$

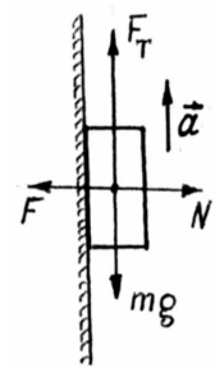
Розв'язуючи її відносно сили опору, знаходимо:

$$a = \frac{v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}}{2s}$$

$$F_0 = F - \frac{m(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2})}{2s}$$

$$F_0 = 345 \cdot 10^3 - \frac{13 \cdot 10^5 (134{,}5 - 100)}{2 \cdot 300} = 0{,}27 \cdot 10^6 \text{ (Н)}$$

3. Вантаж масою 2 кг*,* який притиснутий силою 100 Н до вертикальної стіни, рухається вгору з прискоренням 1,5 м/с^2. Розрахувати значення сили тяги, якщо коефіцієнт тертя 0,2.



Дано:

m=2 кг

F=100 Н

a=1,5 м/с^2

м = 0,2

F_T - ?

Розв'язання:

Запишемо основне рівняння динаміки

$$\vec{F}_T + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

В проекціях на вісі координат:

На *y*:

$$N - mg = 0, \ \textit{або} \ mg = N$$

На *x*:

$$F_T - F_{тр} - mg = ma,$$

звідки

$$F_T = ma + мF + mg$$

F_T=2·1,5+0,2·100+2·9,8=42,6 (Н)

4. Тіло масою 2 кг рухається вздовж горизонтальної площини з прискоренням 3 м/с^2 під дією двох послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами жорсткості відповідно 1 кН/м та 2 кН/м. Визначити сумарне видовження цих пружин, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,2.

Дано:

m=2 кг

a=3 м/с^2

k_1=10^3 Н/м

k_2=2·10^3 Н/м

м=0,2

Δl -?

Розв’язання:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

З 2-го закону Ньютона для руху вантажу

$$F - \text{м}mg = ma$$

знаходимо силу, прикладену до кожної пружини

$$F = m(a + \text{м}g) = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \,,$$

звідки

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1};\ \Delta l_2 = \frac{F}{k_2}\ .$$

Остаточно одержуємо:

$$\Delta l = m(a + \text{м}g)\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$\Delta l = \frac{2(3 + 0{,}2 \cdot 9{,}8)}{10^3}(1 - 0{,}5) = 14{,}88 \cdot 10^{-3}\ (\text{м})$$

2.1.3. Закони збереження

Основні формули

Робота постійної сили

$$A = Fs\cos\alpha\ ,\ E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}\ ,\ E_{\text{п}} = mgh,\ E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}\ .$$

До гідроаеродинаміки: закон Бернулі

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = const\,,$$

При стаціонарному плині рідини в трубі для двох довільно вибраних перерізів справедливе відношення

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 V = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 V\ .$$

При розв’язуванні задач на закон збереження імпульсу слід визначити як рухаються тіла фізичної системи і чи діють на них зовнішні сили. Якщо ці сили відсутні (або їх сума дорівнює нулю), то використовують закон збереження імпульсу; якщо зовнішні сили діють, то сумарний імпульс сили, що діє на систему, дорівнює сумарній зміні імпульсу системи тіл. Пам’ятайте, що імпульс величина відносна. Наприклад, м’яч масою 1 кг, що рухається по полю із швидкістю 4 м/с відносно поля, має імпульс відносно Землі – 4 кгм/с, а відносно футболіста, що веде цей м’яч – 0. Такий саме характер мають робота та енергія.

Приклади розв’язування задач

1. При вертикальному старті ракети масою 50 т з її двигунів за 0,2 с викидається 200 кг продуктів згоряння зі швидкістю 1500 м/с. Визначити прискорення ракети на початку її руху.

Дано:
$M = 5 \cdot 10^4$ кг
$m_0 = 200$ кг
v=1500 м/с
$t_0 = 0{,}2$ с

a - ?

Розв'язання:

За законом збереження імпульсу згідно з вжитими позначеннями запишемо:

$$m\text{v}_0 = (M-m)\text{v}$$

Для шуканого прискорення запишемо: $a = \dfrac{\text{v}-\text{v}_0}{t}$

і врахувавши, що $\text{v}_0=0$, для прискорення знаходимо:

$$a = \frac{m\text{v}}{(M-m)t}, \qquad a = \frac{200\cdot 1500}{(50000-200)\cdot 0,2} = 30,1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

2. Тіло масою 2 кг падає з висоти 5 м і занурюється в сніг на 50 см. Знайдіть середню силу опору снігу, якщо середня сила опору повітря 4 Н.

Дано:

m=2 кг

h_1=5 м

h_2=0,5 м

F_1=4 Н

F_2-?

Розв'язання:

З формули роботи для сили опору снігу

$$A_2 = \Delta W = F_2 h_2$$

знаходимо:

$$F_2 = \frac{\Delta W}{h_2}$$

$$\Delta W = mgh_1 - F_1 h_1 = h_1(mg - F_1)$$

Остаточно одержуємо:

$$F_2 = \frac{h_1(mg - F_1)}{h_2}$$

$$F_2 = \frac{5(2\cdot 9,8 - 4)}{0,5} = 156 \text{ (Н)}$$

3. Транспортер піднімає 250 кг піску до кузова автомобіля за 1 с. Довжина стрічки транспортера 4 м, кут нахилу 35°, а ККД транспортера 80%. Яку потужність розвиває двигун транспортера?

Дано:

m=250 кг

t=1 с

s=4 м

б $=35^0$

з =80%

N - ?

Розв'язання:

Записуємо рівняння для корисної роботи

$$A_k = mgh, \text{ де } h = s\sin б$$

і для затраченої роботи

$$A_з = Nt\,.$$

З рівняння для ККД

$$\eta = \frac{mgs\sin б}{Nt}100\%$$

знаходимо:

$$N = \frac{mgs\sin б}{з t}100\%$$

$$N = \frac{250 \cdot 9{,}8 \cdot 4 \cdot 0{,}5736}{80\% \cdot 1}100\% = 7026{,}3 \text{ (Вт)}.$$

4. Тіло кинули вертикально вниз з початковою швидкістю 10 м/с з висоти 100 м. На якій висоті кінетична енергія тіла дорівнюватиме його потенціальній енергії? Опір повітря не враховуйте.

Дано:

v_0=10 м/с

h_1=100 м

h_2 - ?

Розв'язання:

Запишемо рівняння для механічної енергії тіла на висоті h_1

$$W = mgh_1 + \frac{mv_0^2}{2}.$$

На висоті h_2 для цієї ж енергії запишемо:

$$W = mgh_2 + \frac{mv_h^2}{2} = 2mgh_2 .$$

Прирівнявши праві частини рівнянь, знаходимо:

$$mgh_1 + \frac{mv_0^2}{2} = 2mgh_2, \quad \text{звідки} \quad h_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{v_0^2}{4g}$$

$$h_2 = \frac{100}{2} + \frac{100}{4 \cdot 9{,}8} = 52{,}55 \text{ (м)}.$$

2.2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

2.2.1. Основи молекулярно-кінетичної теорії

Основні формули

Одна атомна одиниця маси

$$M_{од}=1{,}66 \cdot 10^{-27} кг .$$

Кількість речовини

$$\nu = \frac{N}{N_a} = \frac{m}{M}$$

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

$$P=\frac{1}{3}mn\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\overline{E} =nkT.$$

Рівняння Менделеєва-Клапейрона

$$PV=\frac{m}{M}RT.$$

Закон Бойля-Маріотта

$$PV=\text{const}.$$

Закон Гей-Люссака

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Закон Шарля

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Відносна вологість повітря

$$\varphi = \frac{p}{p_0} 100\%.$$

Поверхневий натяг рідини

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

Висота підняття змочуючої рідини в капілярі

$$H = \frac{2\sigma \cos\iota\theta}{\rho g r}.$$

Для твердих тіл: абсолютне видовження

$$\Delta l = l - l_0,$$

відносне видовження $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$,

модуль Юнга

$$E = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{F l_0}{S \Delta l}.$$

Для багатьох задач даного розділу необхідно вміти визначати молярні маси речовин. Для цього за відомими з таблиці Мендєлєєва відносними атомними масами обчислюють відносну молярну масу, а потім за формулою $M=10^{-3}M_r$ кг/моль і молярну масу.

В задачах на закони ідеального газу як правило задано початкові параметри та деякі кінцеві параметри газу. Для розв'язання таких задач рівняння стану ідеального газу записують двічі: для початкового і для кінцевого станів. Використовуючи додаткові умови та допоміжні формули, визначають тиск, об'єм або температуру газу через інші задані величини. Якщо в процесі, що описаний в умові задачі маса газу не змінюється, а також залишається сталим один з параметрів, можна розв'язувати задачі використовуючи газові закони.

Розв'язуючи задачі на поверхневий натяг рідин, треба пам'ятати, що якими б тонкими не були плівки, шар рідини завжди має дві поверхні, уздовж кожної з яких діють сили поверхневого натягу. Якщо поверхневий натяг визначають методом відриву крапель, то діаметр краплі вважають рівним діаметру капіляра.

Основні розрахункові задачі на властивості твердих тіл зводяться до застосування поняття напруги, закону Гука для деформацій розтягу чи стиску, а також на застосування понять границі міцності і коефіцієнта запасу міцності. Часто в задачах треба визначити можливість розривання тіла за певних умов. У цих випадках за законом Гука обчислюють напругу, яка діє на тіло, і порівнюють її з границею міцності, яка є сталою величиною для певної речовини.

Приклади розв'язування задач

1. Суміш газів складається з 30 г азоту і деякої кількості вуглекислого газу. Середня молярна маса суміші дорівнює 32 г/моль. Визначте масу вуглекислого газу в суміші.

Дано:

m_1=0,03 кг

$M_1=14\cdot10^{-3}$ кг/моль

$M_2=44\cdot10^{-3}$ кг/моль

$M_c=32\cdot10^{-3}$ кг/моль

m_2 - ?

Розв'язання:

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{m_1}{M_1} \\ \nu_2 = \dfrac{m_2}{M_2} \\ \dfrac{m_1+m_2}{\nu_1+\nu_2} = M_c \end{cases}$$

Розв'язавши систему відносно m_2, знаходимо:

$$m_2 = \frac{m_1 M_2 (M_c - M_1)}{M_1 (M_2 - M_c)} \qquad m_2 = 0{,}1414 \text{ кг.}$$

2. На деякій планеті 80% маси атмосфери складає кисень, а 20% - неон. Визначте середню молярну масу атмосфери планети.

Дано:

80% - m_1

20% - m_2

$M_1=16\cdot10^{-3}$ кг/моль

$M_2=20\cdot10^{-3}$ кг/моль

M_c - ?

Розв'язання:

$$M_c = \frac{m}{\nu}, \; m = m_1 + m_2, \; m_2 = \frac{m_1}{4}, \; m = m_1 + \frac{m_1}{4} = \frac{5m_1}{4}$$

$$\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}, \; \nu_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{m_1}{4M_2},$$

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_1}{4M_2} = m_1\left(\frac{4M_2 + M_1}{4M_1 M_2}\right), M_c = \frac{5m_1 \cdot 4M_1 M_2}{4m_1(4M_2 + M_1)} = \frac{5M_1M_2}{4M_2 + M_1}.$$

$$\text{Отже: } M_c = \frac{5M_1M_2}{4M_2 + M_1}$$

$$M_c = \frac{5\cdot16\cdot10^{-3}\cdot20\cdot10^{-3}}{(4\cdot20+16)\cdot10^{-3}} = 16{,}6\cdot10^{-3} \text{ (кг/моль)}$$

3. Рухомий поршень, що не проводить тепло, ділить циліндр на дві частини об'ємом 200 см^3 і 100 см^3. Спочатку температура газу в обох частинах 300 К, а тиск 100 кПа. Потім меншу частину остудили льодом, що тане, а велику нагріли в окропі. Який тиск установиться в циліндрі?

Дано:

$V_1=2\cdot10^{-4}$ м^3

$V_2=10^{-4}$ м^3

T_0=300 K
p_0=10^5 Па
T_1=273 K
T_2=373 K
p - ?

Розв'язання:

З рівнянь першого стану для кількостей речовини в першій і другій частинах циліндра відповідно запишемо:

$$\nu_1 = \frac{p_0 V_1}{RT_0} \text{ і } \nu_2 = \frac{p_0 V_2}{RT_0}.$$

Після зміни температур рівняння стану для обох частин мають вигляд:

$$p(V_1 - \Delta V) = \nu_1 R T_1,$$
$$p(V_2 + \Delta V) = \nu_2 R T_2$$

Додавши останні рівняння і, підставивши вирази для кількостей речовини, остаточно для p одержуємо

$$p = \frac{p_0(V_1 T_1 + V_2 T_2)}{V_1 + V_2}.$$

$$p = \frac{10^5(2\cdot 10^{-4}\cdot 273 + 10^{-4}\cdot 373)}{2\cdot 10^{-4} + 1\cdot 10^{-4}} = 10{,}6\cdot 10^6 \text{ (Па)}$$

4. У першій посудині об'ємом $2\cdot 10^{-3}$ м^3 знаходиться газ під тиском $1{,}7\cdot 10^5$ Па, а в другій посудині об'ємом $3{,}2\cdot 10^{-3}$ м^3 – газ під тиском $0{,}55\cdot 10^5$ Па при такій же температурі. Посудини з'єднані між собою тонкою трубкою з краном. Який тиск установиться в посудинах після того, як відкриють кран? Температура не змінюється.

Дано:
V_1 =$2\cdot 10^{-3}$ м^3
p_1=$1{,}7\cdot 10^5$ Па
V_2 =$3{,}2\cdot 10^{-3}$ м^3
p_2=$0{,}55\cdot 10^5$ Па
T=const
p - ?

Розв'язання:

До відкривання крана: для газу в першій посудині:

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT, \quad \text{звідки } \nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT}$$

для газу в другій посудині:

$$p_2 V_2 = \nu_2 RT, \text{ звідки } \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT}$$

Після відкривання крану

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT, \quad \text{або} \quad p(V_1 + V_2) = \left(\frac{p_1 V_1}{RT} + \frac{p_2 V_2}{RT}\right)RT,$$

звідки

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}, \qquad p = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}7\cdot 10^5 + 3{,}2\cdot 10^3\cdot 0{,}55\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-3} + 3{,}2\cdot 10^{-3}} = 0{,}99\cdot 10^5 \text{ (Па)}$$

5. Горизонтальне дротове кільце масою 2 г і радіусом 5 см торкається поверхні води. Яку силу потрібно прикласти до нього, щоб відірвати від води? Температура води 20 ^{0}С, вода змочує дріт. Поверхневий натяг води 0,073 Н/м.

Дано:
m=2·10^{-3} кг
R=5·10^{-2} м
у =0,073 Н/м
F - ?

Розв'язання:

$$F=F_н+P$$

$$P=mg$$

$$F_н=2\cdot 2\,\mathrm{p}R\mathrm{y}$$

$$F=4\mathrm{p}R\mathrm{y}+mg$$

F=4·3,14·5·10^{-2}·0,073+2·10^{-3}·10$\approx$65,8·10^{-3} (Н)

6. У ванночку об'ємом 6 см^3 падають краплі води з трубки. Скільки крапель потрібно, щоб заповнити ванночку? Внутрішній діаметр трубки 1 мм, температура води 20 ^{0}С. Поверхневий натяг води при 20 ^{0}С становить 73· ·10^{-3} Н/м.

Дано:
V=6·10^{-6} м^3
d=10^{-3} м
у =73·10^{-3} Н/м
с =10^3 кг/м^3
N - ?

Розв'язання:

$$N=\frac{V}{V_0},$$

V_0 – об'єм краплини.

З умови $F_н=P$ знаходимо: $2\mathrm{p}r\mathrm{y}=\mathrm{c}gV_0$ або $\mathrm{p}d\mathrm{y}=\mathrm{c}gV_0$ $\quad V_0=\frac{\mathrm{p}d\mathrm{y}}{\mathrm{c}g}$,

Отже: $N=\frac{V\mathrm{c}g}{\mathrm{p}d\mathrm{y}}$ $N=\frac{6\cdot10^{-6}\cdot10^{3}\cdot10}{3{,}14\cdot10^{-3}\cdot73\cdot10^{-3}}=262$ краплі

7. Ліфт масою 500 кг піднімається з прискоренням 0,5 м/с^2 на сталевому тросі. Якою має бути площа поперечного перерізу троса при запасі міцності, рівному 10?

Дано:
$m=500$ кг
a=0,5 м/с^2
n=10
$\mathrm{y}_{мц}=500$ МПа
S - ?

Розв'язання:

$$F=m(a+g)$$

$$\mathrm{y}=\frac{F}{S}$$

Напруга, що створюється силою напруга повинна дорівнювати запасу міцності: $\frac{F}{S}=n\mathrm{y}$, звідки

$$S = \frac{F}{n\text{у}}$$

$$S = \frac{500 \cdot (0{,}5 + 9{,}8)}{10 \cdot 5 \cdot 10^8} = 10{,}3 \cdot 10^{-7} \ (\text{м}^2)$$

2.2.2. Основи термодинаміки

Основні формули

Перше начало термодинаміки

$$Q = \Delta U + A.$$

Кількість теплоти розраховують за формулами:

$$Q=cm\Delta t,\ \ Q=\lambda m,\ \ Q=rm,\ \ Q=qm.$$

Робота в термодинаміці

$$A=p(V_2-V_1).$$

Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

для ідеальної теплової машини $\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Якщо в умові задачі описано процеси, за яких відбувається лише теплообмін, то спочатку треба з’ясувати, внутрішня енергія яких тіл зменшується, а яких – збільшується, і записати рівняння теплового балансу. Якщо в задачі дано ККД теплообміну, то рівняння теплового балансу матиме вигляд $\eta Q_1 = Q_2$.

Розв’язуючи задачі на процеси, що відбуваються з виконанням механічної роботи, треба користуватися законом збереження та перетворення енергії.

Задачі на теплові процеси в газах розв’язують за допомогою першого закону термодинаміки, з’ясувавши спочатку характер процесу, що відбувається в газі. Після цього варто записати закон не в загальній формі, а відповідно до певного газового процесу, і скористатися виразом для внутрішньої енергії газу та рівнянням стану ідеального газу.

Приклади розв’язування задач

1. Алюмінієвий калориметр масою 50 г містить 250 г води при 16 ^{0}С. Яку кількість пари при температурі 100 ^{0}С потрібно ввести в калориметр, щоб температура води в ньому підвищилася до 90 ^{0}С?

Дано:

$c_а$=900 кДж/кг·К

$m_А$=0,05 кг

$m_В$=0,250 кг

t_1=16 С

$t_п$=100 ^{0}С

$t_с$=90 ^{0}С

L=2,3·10^6 Дж/кг

$c_в$=4200 Дж/кг·К

$m_п$ - ?

Розв’язання:

Q_1 – кількість теплоти, яку одержали калориметр з водою

$$Q_1 = (c_A m_A + c_B m_B)(t_c - t_1)$$

Q_2 – кількість теплоти, яку віддала пара масою m_n

$$Q_2 = m_n(L + c_B(t_n - t_c))$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_n = \frac{(c_A m_A + c_B m_B)(t_c - t_1)}{L + c_B(t_n - t_c)}$$

$$m_n = \frac{(900 \cdot 0{,}05 + 4200 \cdot 0{,}25) \cdot 74}{2{,}3 \cdot 10^6 + 4200 \cdot 10} = 0{,}0346 \text{ (кг)}$$

2. На електроплитці потужністю 600 Вт, що має ККД 45%, нагріли до кипіння 1,5 л води, взятої при 10 ^{0}C, при цьому 5% води перетворилося в пару. Як довго тривало нагрівання?

Дано:

P=600 Вт

$з_1$=45%

m_B=1,5 кг

t_1=10 ^{0}C

t_2=100 ^{0}C

$з_2$=5%

ф - ?

Розв'язання:

Робота електричного струму

$$A = Pф$$

Кількість теплоти, яку одержала вода: $Q = m_B(c_B \Delta t + з_2 L)$, отже

$$з_1 Pф = m_B(c_B \Delta t + з_2 L),$$

звідки

$$ф = \frac{m_B(c_B \Delta t + з_2 L)}{з_1 P}$$

$$ф = \frac{1{,}5 \cdot (4200 \cdot 90 + 0{,}05 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6)}{0{,}45 \cdot 600} = 42{,}6 \text{ (хв.)}$$

2.3. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

2.3.1. Електрика

Основні формули

Закон Кулона $$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

Напруженість електричного поля

$$E = \frac{F}{q},$$

Для точкового заряду на відстані r від нього

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

Потенціал поля точкового заряду $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Робота по переміщенню заряду q електричним полем

$$A=q(\varphi_1-\varphi_2)=qU.$$

Співвідношення між різницею потенціалів і напруженістю електричного поля

$$E=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}.$$

Електроємність $C=\frac{q}{\varphi}$.

Ємність плоского конденсатора $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{d}S$.

Електрична енергія зарядженого конденсатора

$$W_c=\frac{qU}{2}=\frac{CU^2}{2}=\frac{q^2}{2C}.$$

Закон Ома для ділянки кола

$$I=\frac{U}{R}.$$

Для опору електричному струму

$$R=\rho\frac{l}{S},$$

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

$$I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+E}{R}.$$

Закон Ома для замкнутого кола

$$I=\frac{E}{R+r}.$$

Робота, що здійснює електричний струм по переміщенню заряду на ділянці кола

$$A=IUt.$$

Потужність електричного струму

$$P=IU.$$

Закон Джоуля-Ленца

$$Q=I^2Rt.$$

ККД джерела струму

$$\eta=\frac{U}{E}.$$

Сила взаємодії точкових зарядів визначається законом Кулона. Якщо заряди не точкові, користуватися законом не можна, слід використовувати поняття лінійної або поверхневої густини. Напруженість електричного поля, створеного системою зарядів знаходиться як векторна сума напруженостей полів, створених окремими зарядами.

Приклади розв'язування задач

1. Дві однакові металеві заряджені кульки знаходяться на відстані 10 см одна від одної. Сила відштовхування кульок 30 мкН. Після дотику та віддалення кульок на початкову відстань сила відштовхування стала рівною 90 мкН. Знайдіть заряди кульок перед дотиком.

Дано:
R= 0,1 м
F_1=$30{\cdot}10^{-6}$ Кл.
F_2=$90{\cdot}10^{-6}$ Кл
q_1 - ? q_2 -?

Розв’язання:

Після дотику кульок заряд кожної з них складав:

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

Запишемо рівняння закону Кулона до і після дотику кульок:

$$F_1 = k\frac{q_1 q_2}{eR^2} \quad (1)$$

$$F_2 = k\frac{\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2}{eR^2} = k\frac{(q_1 + q_2)^2}{4eR^2}. \quad (2)$$

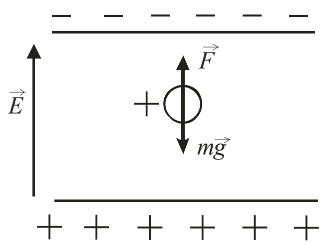
Розв’язавши систему рівнянь відносно невідомих q_1 і q_2, знаходимо відповідні значення.

$q_1 = 1{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл

$q_2 = 18{,}1 \cdot 10^{-9}$ Кл

2. Нейтральна порошинка масою 10^{-11} г втратила 20 електронів. Вона знаходиться в рівновазі між пластинами плоского конденсатора. Яка відстань між пластинами, якщо напруга на конденсаторі дорівнює 150 В?

Дано:
m=10^{-14} кг
n=20
U=150 В
e=$1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл
d - ?



Розв’язання:

$$mg = F$$

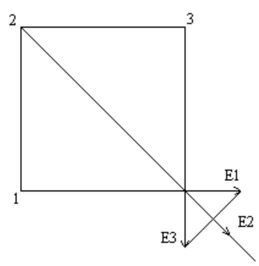
$$F = qE = q\frac{U}{d} \qquad q = ne$$

$$mg = ne\frac{U}{d} \quad d = \frac{neU}{mg}$$

$$d = \frac{20 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 150}{10^{-14} \cdot 9{,}8} = 0{,}00498(м)$$

$d \approx 5$ мм

3. У трьох вершинах квадрата із стороною 40 см знаходяться однакові позитивні заряди по 5 нКл кожний. Знайти напруженість поля в четвертій вершині квадрата.



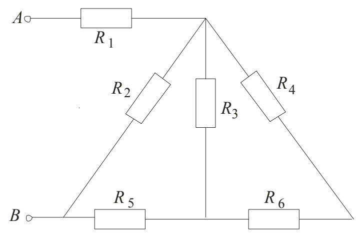
Результуюча напруженість $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

В проекції на вісь Ох: $E = 2E_1 cos 45^0 + E_2$

$E_1 = \frac{kq}{r^2}$, $E_2 = \frac{kq}{2r^2}$

E=269,4 В/м

4. Відшукайте силу струму в кожному з резисторів (див. рисунок), якщо напруга між точками *A* і *B* дорівнює 12 В.



Дано:

$U_{AB} = 12$ В

$R_1 = 4$ Ом

$R_2 = 4$ Ом

$R_3 = 5$ Ом

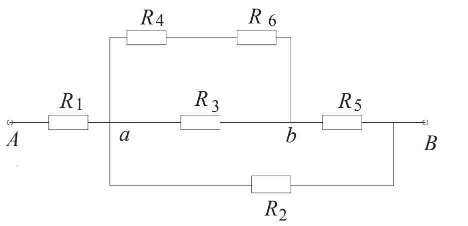
$R_4 = 3$ Ом

$R_5 = 1{,}5$ Ом

$R_6 = 2$ Ом

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$,- ?

Розв'язання:



За законом Ома:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}}.$$

Відповідно до еквівалентної схеми:

$$R_{AB} = R_1 + R_{ab}$$

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_{346} + R_5} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{346}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_6}$$

Виконаємо розрахунки:

$$\frac{1}{R_{346}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3+2} = \frac{2}{5}\ \text{Ом}^{-1} \qquad \frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{\frac{5}{2} + 1{,}5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \text{Ом}^{-1}$$

$$R_{346} = \frac{5}{2}\ \text{Ом} \qquad R_{ab} = 2\ \text{Ом}$$

$$R_{AB} = 4 + 2 = 6\ \text{Ом}$$

Для струмів:

$$I = I_1 = I_{aB} = I_{346} = I_3 = I_5.$$

Отже:

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{12}{6} = 2\ \text{А}$$

Для напруг:

$$U_{AB} = U_1 + U_2$$

$$U_2 = U_{AB} - U_1 = U_{AB} - I_1 R_1 = 12 - 2 \cdot 4 = 4\ B$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A}$$

$$U_2 = U_5 + U_{346}$$

$$U_2 = I_5 R_5 + I_{346} R_{346}$$

$$I_5 = I_{346}$$

$$U_2 = I_5 (R_5 + R_{346})$$

$$I_5 = \frac{U_2}{R_5 + R_{346}} = \frac{4}{\frac{5}{2} + 1{,}5} = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_5 = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_4 + I_6$$

$$I_4 = I_6$$

$$I_3 = 2I_4$$

$$I_4 = I_6 = \frac{I_3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ A}$$

2.3.2. Магнетизм

Основні формули

Магнітна індукція в точці, віддаленій на r від нескінченно довгого, тонкого, прямолінійного провідника зі струмом I

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2\pi r}.$$

Магнітна індукція в центрі витка зі струмом радіусом R

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Потік вектора індукції

$$\Phi = BS\cos\alpha .$$

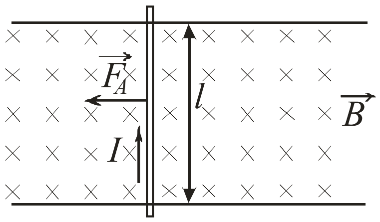
В явищах магнетизму розглядаються сили різної природи: сили взаємодії струму і магнітної стрілки, що діє вздовж лінії, яка з’єднує їх, залежить не тільки від відстані між об’єктами, але й від сили струму; сили, що виникають між двома паралельними провідниками із струмом, які не є центральними, пропорційні силі струму і обернено пропорційні відстані між ними; сила, що діє на рухомий заряд з боку магнітного поля, яка залежить від швидкості руху заряду.

Магнітна індукція – є векторна величина. Тому, так само як і напруженість електричного поля, індукція магнітного поля, створеного системою провідників, знаходиться як геометрична сума векторів окремих полів.

Приклади розв’язування задач

1. На паралельні горизонтальні рейки подано напругу і по провіднику AB (див. рисунок) тече струм 1 А. Під дією магнітного поля провідник рухається з прискоренням 2 м/с^2. Знайдіть індукцію магнітного поля, якщо площа поперечного перерізу провідника дорівнює 1 мм^2, а густина матеріалу провідника 2500 кг/м^3. Тертя не враховуйте.

Дано:
I=1 А
$a = 2$ м/с^2
s=1 мм^2
с = 2500 кг/м^3
B - ?



Розв’язання:

Під дією сили Ампера, провідник отримує прискорення у напрямку дії цієї сили:

$$ma = F_A, \text{ або } \quad ma = BIl,$$

де

$$m = \text{с}V = \text{с}ls$$

тоді

$$\text{с}lsa = BIl.$$

отже

$$B = \frac{\text{с}sa}{I}$$

$B = \dfrac{2500 \cdot 1 \cdot 2}{1}$ =5000 (Тл)

2. Протон розганяється зі стану спокою в електричному полі з різницею потенціалів 1,5 кВ і влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. У магнітному полі він рухається по дузі кола радіусом 60 см. Визначити модуль вектора магнітної індукції.

Дано:
q=1,6·10^{-19} Кл
m=1,67·10^{-27} кг
U=1,5·10^3 В
R=0,6 м
$\sin б = 1$
B - ?

Розв’язання:

За енергією, якої протону надає електричне поле

$$W = qU = \frac{m\text{v}^2}{2}$$

знаходимо для швидкості

$$\text{v}^2 = \frac{2qU}{m} \quad (1)$$

З другого закону динаміки для руху протона в магнітному полі

$$\frac{m\text{v}^2}{R} = Bq\text{v}$$

з урахуванням (1) знаходимо:

$$B = \frac{m\text{v}}{Rq} = \sqrt{\frac{2Um}{qR^2}}$$

$$B = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}36}} = 9{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)}.$$

3. Визначити величину вектора індукції магнітного поля, в якому на провідник довжиною активної частини 5 см діє сила 50 мН? Сила струму у провіднику 25 А. Провідник розміщений у просторі перпендикулярно лініям індукції магнітного поля.

Дано:
l=0,05 м
F=0,05 Н
I=25 А
$\sin б$=1
B - ?

Розв'язання:

З формули для визначення сили Ампера

$$F = BIl \sin б$$

знаходимо: $$B = \frac{F}{Il \sin б} \qquad B = \frac{0{,}05}{25 \cdot 0{,}05 \cdot 1} = 0{,}04 \text{ (Тл)}$$

2.3.3. Електричний струм в різних середовищах

Основні формули

Для сили струму $I = \frac{q}{t}$, $I = q_0 n\text{v}S$,

Залежність опору від температури

$$R = R_0(1 + \alpha \, \Delta T).$$

Маса речовини, що виділяється на електроді

$$m = kIt,$$

Об'єднаний закон електролізу

$$M = \frac{1}{F}\,\frac{A}{n}\,q \text{ або } m = \frac{M}{N_a n e}\,q\,.$$

Енергія іонізації зарядженої частинки q, що пройшла потенціал іонізації U_i
$E_i = qU_i$.
Робота виходу електрона з металу $A_{вих} = e\Delta\varphi$.

Приклади розв'язування задач

1. На катоді електролітичної ванни з розчином мідного купоросу за $1{,}2 \cdot 10^2$ с виділилося 1,64 г міді. Амперметр, який включено в коло послідовно з ванною, показує струм 3,8 А. Чи правильно проградуйовано амперметр? Електрохімічний еквівалент міді $0{,}33 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

Дано:

$\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^{2}$ с
$m = 1{,}64 \cdot 10^{-3}$ кг
I_A=3,8 А
k_{Cu} =0,33·10^{-6} кг/Кл
I - ?

Розв'язання:

$$m = k_{Cu} I \Delta t$$

$$I = \frac{m}{k_{Cu}\Delta t}$$

$$I = \frac{1{,}64 \cdot 10^{-3}}{0{,}33 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{2}} = 41{,}4 \text{ А}$$

$41{,}4\text{ А} \neq 3{,}8\text{ А}$ - амперметр проградуйований не вірно.

2. Середня швидкість впорядкованого руху електронів у мідному провіднику з площею поперечного перерізу 1 мм^2 дорівнює 7,4·10^{-3} см/с. Знайдіть силу струму в провіднику. Вважайте, що кожний атом міді дає один вільний електрон. Густина міді 8900 кг/м^3, а молярна маса M=63,546·10^{-3} кг/моль.

Дано:
S=10^{-6} м^2
v=74·10^{-6} м/с
M=63,546·10^{-3} кг/моль
с_{Cu} =8900 кг/м^3
I - ?

Розв'язання:

$$I = enS\text{v}$$

$$n = \frac{\text{с}_{\text{Cu}} N_A}{M}$$

$$I = \frac{e\text{с}_{\text{Cu}} N_A S\text{v}}{M}$$

$$I = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 8900 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-6} \cdot 74 \cdot 10^{-6}}{63{,}546 \cdot 10^{-3}} = 0{,}99 \text{ (А)}$$

3. При 0^{0}С опори двох провідників, які з'єднано послідовно та підключено до джерела постійної наруги, R_1=1 Ом і R_2=2,5 Ом. Перший провідник нагріли до 850^{0}С, а температура другого залишилася незмінною. Потужність струму в першому провіднику при цьому не змінилася. Знайдіть температурний коефіцієнт опору матеріалу провідників. Внутрішнім опором джерела струму знехтувати.

Дано:
T_1=273 K
T_2=1123 K
R_1=1 Ом
R_2=2,5Ом
$P_1=P_1'$ б – ?

Розв'язання:

$$R_1' = R_1(1 + б\Delta t)$$

$$б = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{R_1'}{R_1} - 1\right);\ I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2};$$

$$I_2 = \frac{U}{R_1' + R_2};\ P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2};$$

$$P_1' = I_2^2 R_1' = \frac{U^2 R_1'}{(R_1' + R_2)^2};\ \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{U^2 R_1'}{(R_1' + R_2)^2}$$

$$R_1(R_1' + R_2)^2 = R_1'(R_1 + R_2)^2$$

$$R_1 R_1'^2 - (R_1 + R_2)^2 R_1' + R_1 R_2^2 = 0$$

$$R_1' = \frac{(R_1 + R_2)^2 \pm \sqrt{\left[-(R_1 + R_2)^2\right]^2 - 4R_1^2 R_2^2}}{2R_1}$$

$$R_1' = \frac{(R_1 + R_2)^2 \pm \sqrt{\left[(R_1 + R_2)^2 - 2R_1R_2\right]\cdot\left[(R_1 + R_2)^2 + 2R_1R_2\right]}}{2R_1}$$

$$R_1' = \frac{(R_1 + R_2)^2 \pm \sqrt{\left[(R_1^2 + R_2^2)\right]\cdot\left[R_1^2 + R_2^2 + 4R_1R_2\right]}}{2R_1}$$

Підставляючи значення R_1 і R_2 , знаходимо:

$$R_1'^2 - 7{,}25R_1' + 6{,}25 = 0\ .$$

Розв’язавши рівняння, знаходимо:

$R_1' = 6{,}25$ Ом і $R_1' = 1$ Ом -(значення до нагрівання) Для б одержуємо: $б = \frac{1}{850}\left(\frac{6{,}25}{1} - 1\right) = 0{,}0061764\ (K^{-1})$

2.3.4. Електромагнітна індукція

Основні формули

Закон електромагнітної індукції

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ .$$

В провіднику довжиною *l*, що рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі

$$\varepsilon_i = Blv\sin\alpha\ .$$

Для рамки площею S, що обертається в магнітному полі

$$\varepsilon_i = nBS\omega\sin\alpha\ .$$

Магнітний потік пропорційний струму в контурі

$$Ц = LI\ ,\ \text{а}\quad \varepsilon_s = -\frac{\Delta Ц}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}\ .$$

Індуктивність довгого соленоїда малого діаметра, де *n* – кількість витків на одиницю довжини соленоїда, а *V* – об’єм соленоїда

$$L = \mu_0\mu n^2 V\ .$$

Енергія магнітного поля струму

$$E_{м}=\frac{LI^2}{2}.$$

Знак «мінус» в законі електромагнітної індукції пояснюється правилом Ленца і має суто фізичний зміст. Тому в задачах зміна магнітного потоку обраховується по модулю.

Приклади розв'язування задач

1. Мідне дротове кільце розташовано горизонтально в однорідному вертикальному магнітному полі. Магнітна індукція поля змінюється з часом зі швидкістю 2 Тл/с. Радіус кільця дорівнює 5 см, а радіус дроту 1 мм. Знайдіть індукційний струм у кільці.

Дано:

$с = 1,7\cdot 10^{-8}$ Ом·м

$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 2$ Тл/с

$r = 5\cdot 10^{-2}$ м.

$r_1 = 10^{-3}$ м

I_i - ?

Розв'язання:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} S = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \mathrm{p} r^2. \quad (1)$$

$$R = \frac{с 2 \mathrm{p} r}{\mathrm{p} r_1^2} \quad (2)$$

Врахувавши (1) і (2), одержуємо:

$$I_i = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\mathrm{p} r^2 \mathrm{p} r^2}{2 \mathrm{p} с r} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\mathrm{p} r r_1^2}{2с}; \quad I_i = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\mathrm{p} r r_1^2}{2с}$$

$$I_i = \frac{2\cdot 3,14\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot \left(10^{-3}\right)^2}{2\cdot 1,7\cdot 10^{-8}} = 9,2\,(A)$$

2. Свинцеве кільце радіусом 5 см розташоване горизонтально між полюсами електромагніту, який створює вертикальне однорідне магнітне поле з магнітною індукцією 0,5 Тл. Охолоджуючи кільце, його переводять у надпровідний стан. Якою буде сила струму в кільці після вимикання електромагніту? Індуктивність надпровідного кільця 5 мГн.

Дано:

$r = 0,05$ м

$B = 0,5$ Тл

$L = 0,005$ Гн

ΔI-?

Розв'язання:

$$\varepsilon_s = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}, \quad \Delta I = -\frac{\varepsilon_s \Delta t}{L}, \quad \varepsilon_s = -\frac{B\Delta S}{\Delta t}$$

$$\varepsilon_s = -\frac{Bpr^2}{\Delta t}, \quad \Delta I = \frac{Bpr^2 \Delta t}{L\Delta t}$$

$$\Delta I = \frac{B\text{p}r^2}{L}; \quad \Delta I = \frac{0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{50 \cdot 10^{-4}} = 0{,}785(A)$$

2.4. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

2.4.1. Механічні коливання та хвилі

Основні формули

До гармонічних коливань і хвиль: рівняння гармонічних коливань

$$X = X_{\max}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях

$$v = \omega X_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0); \quad a = -\omega^2 X_{\max}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання

$$E = \frac{kX_{max}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Для довжини механічної хвилі

$$\lambda = \upsilon T \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{\upsilon}{\nu}.$$

Рівняння плоскої монохроматичної хвилі

$$y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Різниця фаз двох точок бігучої хвилі і різниця ходу пов’язані співвідношенням

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Коливання та хвилі різної природи описуються законами, які ґрунтуються на спільних закономірностях. Тому дуже важливо ґрунтовно вивчити всі поняття, закономірності та формули механічних коливань. Особливо зверніть увагу на енергетичні перетворення під час коливань: перетворення потенціальної енергії деформованого (або піднятого над землею) тіла в кінетичну енергію його поступального руху.

Приклади розв'язування задач

1. Куля масою $m = 4$ кг висить на пружинах, які з'єднано послідовно. Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють 28 Н/м та 43 Н/м. Відшукайте період коливань кулі.

Дано:
m=4 кг
k_1=28 Н/м
k_2=43 Н/м
T - ?

Розв'язання:

Із рівняння закону Гука для послідовно з'єднаних пружин:

$$mg = k_1 x_1 + k_2 x_2 = k_3 (x_1 + x_2)$$

і кожної пружини окремо:

$$mg = k_1 x_1; \; mg = k_2 x_2$$

знаходимо:

$$k_3 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Для періоду маємо: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{4 \cdot (28 + 43)}{28 \cdot 43}} = 3{,}05 \; (c)$$

2. Годинник, маятник якого має довжину 1 м, відстає за добу на 0,5 год. Як треба змінити довжину маятника, щоб годинник точно показував час?

Дано:
l_1= 1 м
Δt=0,5 год.
t=24 год.
Δl - ?

Розв'язання:

За зміною довжини маятника випливає зміна періоду коливань.

$$t - \Delta t = NT_1 \; (1)$$

$$t = NT_2 \; (2)$$

Розв'язавши систему, знаходимо:

$$N = \frac{t - \Delta t}{T_1}, \; t = \frac{t - \Delta t}{T_1} T_2$$

Враховуючи, що

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}, \text{ а } T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

одержуємо:

$$\frac{t^2}{(t - \Delta t)^2} = \frac{l_2}{l_1},$$

звідки

$$l_2 = l_1 \frac{t^2}{(t - \Delta t)^2},$$

Тоді для зміни довжини маємо:

$$\Delta l = l_2 - l_1$$

Отже:

$$\Delta l = l_1\left(\frac{t^2}{(t-\Delta t)^2} - 1\right) \qquad \Delta l = 1\cdot\left(\frac{24^2}{23{,}5^2}\right) - 1 = 0{,}043 \text{ (м)}.$$

2.4.2. Електромагнітні коливання

Основні формули

Для вільних електромагнітних коливань в коливальному контурі справедливі співвідношення

$$q = q_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$
$$u = U_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$
$$i = I_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Повна електромагнітна енергія контуру

$$E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$

Повний опір кола змінного струму

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Для діючих значень сили струму і напруги справедливі формули

$$I_д = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}; \quad U_д = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Середня потужність змінного струму

$$P_{ср} = IU\cos\alpha.$$

Коефіцієнт трансформації трансформатора

$$K = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

ККД трансформатора

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Електромагнітні коливання відбуваються в коливальному контурі внаслідок перетворень енергії електричного поля зарядженого конденсатора в енергію магнітного поля котушки.

Приклади розв'язування задач

1. Рамка площею 400 см^2 має 75 витків. Вона обертається в однорідному магнітному полі з індукцією 15 мТл. У початковий момент площина рамки перпендикулярна до ліній магнітної індукції поля. Яка ЕРС індукції через 10 мс після цього? Амплітудне значення ЕРС дорівнює 3,6 В.

Дано:

$S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2

N=75

$B = 15 \cdot 10^{-3}$ Тл

$t = 10^{-2}$ с

$\varepsilon_{\max} = 3{,}6$ В

$\varepsilon - ?$

Розв’язання:

Рамка обертається в однорідному полі за гармонійним законом:

$$\varphi(t) = \cos щt$$

Тоді магнітний потік крізь рамку з урахуванням цього обертання розрахується як:

$$\Phi = BSN\cos щt$$

За законом електромагнітної індукції у рамці індукується ЕРС індукції:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BSNщ sinщt = e_{max} sinщt$$

$$е_{\max} = BSNщ; \quad щ = \frac{е_{\max}}{BSN}$$

$$е = е_{\max} sin\frac{е_{\max}}{BSN}t$$

$$e = 3{,}6\, sin \frac{3{,}6 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 75} = 2{,}58\ (B)$$

2. У деякий момент часу заряд конденсатора коливального контуру дорівнює 30 мКл, а сила струму в котушці 4 А. За час Δt заряд збільшився до 50 мКл, а сила струму зменшилася до нуля. Знайдіть найменше можливе значення Δt, вважаючи коливання незгасаючим.

Дано:

$q_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ Кл

I=4 А

$q_2 = q_{\max} = 5 \cdot 10^{-2}$ Кл

I_2=0

$\Delta t_{\min} - ?$

Розв’язання:

Якщо t=0, q=0 і I=$I_{\max}$

Якщо t=t_1:

$$q_1 = q_2 \sin\frac{2р}{T}t_1; \qquad \frac{q_1}{q_2} = sin\frac{2p}{T}t_1$$

$$0{,}6 = \sin\frac{2р}{T}t_1; \qquad \arcsin 0{,}6 = 37^0 = 0{,}2р$$

$$0{,}2р = 2р\frac{t_1}{T}$$

$$t_1 = 0{,}1T$$

$$t_2 = 0{,}25T$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}15T \quad (1)$$

Для знаходження виразу періоду скористаємося енергетичними перетвореннями в коливальному контурі.

Для моменту $t=t_1$

$$W = \frac{q_1^{\ 2}}{2C} + \frac{LI_1^{\ 2}}{2}$$

Для моменту t_2:

$$W = \frac{q_2^{\ 2}}{2C}$$

$$\frac{q_1^{\ 2}}{2C} + \frac{LI_1^{\ 2}}{2} = \frac{q_2^{\ 2}}{2C}.$$

Звідси

$$LC = \frac{q_2^{\ 2} - q_1^{\ 2}}{I_1^{\ 2}}, \text{ а } \sqrt{LC} = \frac{\sqrt{q_2^{\ 2} - q_1^{\ 2}}}{I_1}.$$

Тоді

$$T = \frac{2\pi\sqrt{q_2^{\ 2} - q_1^{\ 2}}}{I_1} \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), одержуємо

$$\Delta t = \frac{0{,}15 \cdot 2\text{p}}{I_1}\sqrt{q_2^{\ 2} - q_1^{\ 2}}$$

Підставивши кількісні значення, знаходимо: $\Delta t_{\min} = 0{,}09 \cdot 10^{-3}$ с.

3. При вільних електромагнітних коливаннях у контурі максимальне значення сили струму 3 А, а період 6 мс. Визначити ємність конденсатора й амплітудне значення напруги на ньому, якщо індуктивність котушки дорівнює 0,2 Гн.

Дано:

$I_{\max}$=3 А

T=$6\cdot10^{-3}$ с

L=0,2 Гн

C - ?

$U_{\max}$- ?

Розв'язання

З формули Томсона:

$$T = 2\text{p}\sqrt{LC}$$

$$C = \frac{T^2}{4\text{p}^2 L}$$

Із закону збереження енергії

$$\frac{LI^2_{\max}}{2} = \frac{CU^2_{\max}}{2}$$

визначаємо: $$U_{\max} = I_{\max}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$C = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 0{,}2} = 4{,}56 \cdot 10^{-6} \text{ (Ф)};$$ $$U_{\max} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{4{,}56 \cdot 10^{-6}}} = 628 \text{ (В)}$$

4. Вхідний контур радіоприймача складається з котушки індуктивністю 2 мГн і плоского слюдяного конденсатора з площею пластин 10 см^2 та відстанню між пластинами 2 мм. На яку довжину хвилі настроєно радіоприймач?

Дано:

L=2·10^{-3} Гн

S=10^{-3} м^2

d=2·10^{-3} м

е=7

л - ?

Розв'язання:

$$л = cT; T = 2р\sqrt{LC}; C = \frac{е_0 еS}{d}$$

$$л = 2рc\sqrt{\frac{Lе_0 еS}{d}}$$

$$л = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} \approx 469 \text{ (м)}$$

2.5. ОПТИКА

Основні формули

Для тонкої лінзи

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Оптична сила лінзи

$$D = \frac{1}{F}.$$

Лінійне збільшення лінзи

$$Г = \frac{f}{d}.$$

Максимум інтерференції світла

$$\Delta_{max} = 2k\frac{\lambda}{2}, \; k=0, 1, 2, \ldots,$$

Мінімум інтерференції світла

$$\Delta_{min} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \; k= 0, 1, 2, \ldots,$$

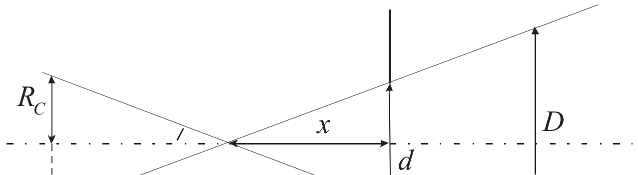
Умова максимуму дифракції для дифракційної гратки

$$d\sin\varphi = k\lambda, \; k=1, 2, 3, \ldots,$$

Приклади розв'язування задач

1. Промені сонця, що заходить, потрапляють у затемнену кімнату через невеликий круглий отвір у ставні. Діаметр отвору 6 см, відстань від вікна до протилежної стіни 3 м. Оцініть діаметр світлової плями на протилежній стіні, якщо сонячні промені падають на ставню під прямим кутом.

Дано:



d=6·10^{-2} м
R_C =7·10^{8} м
L_C =15·10^{10} м
l=3 м
D - ?

Розв'язання:

За рисунком:

$$tg\text{б} = \frac{R_C}{L_C - x} = \frac{d/2}{x} = \frac{D/2}{l + x}, \text{ звідки}$$

$$\frac{d}{x} = \frac{D}{l + x} \ (1) \text{ і } \frac{R_C}{L_C - x} = \frac{d}{2x} \ (2)$$

З (1) рівняння знайдемо шукано величину D:

$$D = \frac{d(l + x)}{x} = d\left(\frac{l}{x} + 1\right)$$

З (2) рівняння знайдемо $\frac{1}{x}$:

$$\frac{2R_C}{d} = \frac{L_C - x}{x}, \ \frac{L_C}{x} = \frac{2R_C}{d} + 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{L_C}\left(\frac{2R_C}{d} + 1\right)$$

Підставимо це значення і остаточно:

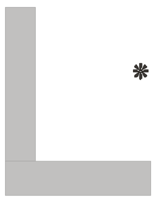
$$D = d\left(\frac{l}{L_C}\left(\frac{2R_C}{d} + 1\right) + 1\right)$$

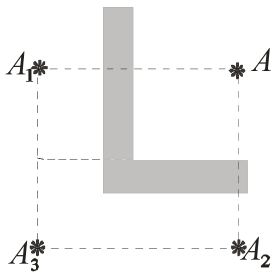
$$D = 6 \cdot 10^{-2} \times$$

$$\times\left(\frac{3}{15 \cdot 10^{10}}\left(\frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{8}}{6 \cdot 10^{-2}} + 1\right) + 1\right) =$$

$$= 8{,}8 \cdot 10^{-2}\ (\text{м}) \approx 9 \text{ см}$$

2. Світна точка A знаходиться між двома дзеркалами,, що утворюють прямий двогранний кут (див. рисунок). Скільки зображень цієї точки дають дзеркала?





Розв'язання:

Внаслідок відбиття світла від дзеркал 1 і 2 виникають відповідні зображення точок A_1 та A_2. Деякі промені, що відбиті спочатку від дзеркала 1 потім відбиваються від дзеркала 2. Після першого відбиття пучок цих променів виходить із точки A_1, в якій перехрещуються продовження променів. Тому після другого відбиття з'явиться ще й уявне зображення A_3 точки A_1 в дзеркалі 2. Зображення точки A_2 в дзеркалі 1 також попаде т точку A_3. Більш ніж два відбиття не має жоден промінь, отже інших зображень не буде. Таким чином ми отримали *три зображення*.

3. Палиця, забита у дно озера, піднімається над водою на 1 м. Глибина озера 2 м. Чому дорівнює довжина тіні палиці на дні, коли висота сонця над горизонтом 30^0?

Дано:

h=1 м

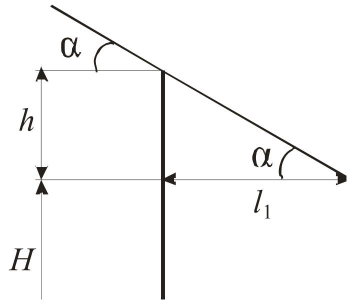
H=2 м

$б = 30^0$

x - ?

Розв’язання:

За рисунком визначаємо: $x=l_1+l_2$



$$l_1 = \frac{h}{\text{tgб}}, \text{ а } l_2 = H\text{tgв}.$$

Із закону заломлення знаходимо значення і тангенс кута в

$$\sin б n_1 = \sin в n_2$$

$$\sin в = \frac{\sin(90-б)\cdot 1}{1{,}4} = \frac{\sqrt{3}}{2{,}8} = 0{,}62,$$

$$в = 38^0,\ \text{tgв} = 0{,}7813$$

$$б = 30^0,\ \text{tgб} = 0{,}5774$$

$$x = \frac{1}{0{,}5774} + 2\cdot 0{,}7813 = 3{,}2945 \ \text{(м)}$$

4. Два когерентних джерела монохроматичного світла з довжиною хвилі 500 нм знаходяться на відстані 1 мм одне від одного та на однаковій відстані 6 м від екрана. Точка O екрана знаходиться в середині світлої смуги. На якій відстані від цієї точки знаходиться середина сусідньої світлої смуги?

Дано:

л=500 нм

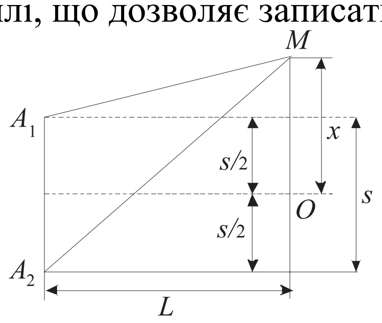
$s=10^{-3}$ м

L=6 м

x - ?

Розв’язання:

Так як в точці O знаходиться максимум освітлення тоді зсув фаз між джерелами відсутній. В точці M наступного максимуму (див. рис.) різниця ходу хвиль дорівнює довжині хвилі, що дозволяє записати:



$$\sqrt{L^2+\left(x+\frac{s}{2}\right)^2}-\sqrt{L^2+\left(x-\frac{s}{2}\right)^2}=\text{л}\,.$$

З останнього визначаємо: $x=\dfrac{2L\text{л}}{s}$ $\qquad x=\dfrac{2\cdot 6\cdot 5\cdot 10^{-7}}{10^{-3}}=6\cdot 10^{-3}$ (м)

5. На дифракційну решітку з періодом 4 мкм падає нормально світло, що пропустили через світлофільтр. Смуга пропускання світлофільтра – від 500 нм до 550 нм. Чи будуть спектри різних порядків перекриватися один з одним?

Дано:

d=4·10^{-6} м

л_k =500·10^{-9} м

л_{k+1} =550·10^{-9} м

k - ?

Розв'язання:

Оскільки максимальний порядок спектра обмежений умовою $k\le\dfrac{d}{\text{л}_k}$,

розрахувавши значення k і k+1, відмічаємо можливість перекривання спектрів

$$k_1=\frac{4\cdot 10^{-6}}{500\cdot 10^{-9}}=8.$$

$$k_{k+1}=\frac{4\cdot 10^{-6}}{550\cdot 10^{-9}}=7{,}2$$

- спектри перекриватись не будуть.

2.6. КВАНТОВА ФІЗИКА

2.6.1. Світлові кванти

Основні формули

Енергія фотона

$$E{=}h\nu=\frac{hc}{\lambda}\,.$$

Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту

$$h\nu=A+\frac{mv^2}{2}\,.$$

Тиск світла при коефіцієнту відбивання β

$$P{=}\frac{I}{c}(1+\beta)\,.$$

Розв'язування задач про світлові кванти ґрунтується на використанні рівняння Ейнштейна, формул, що пов'язують енергію, імпульс та масу фотона з частотою відповідної світлової хвилі. Енергія частинок вимірюється в еВ. Нагадаємо, що 1 еВ = 1,6·10^{-19} Дж.

Приклади розв'язування задач

1. Фотони із енергією 6 еВ виривають фотоелектрони з металу з роботою виходу 4,5 еВ. Знайдіть максимальний імпульс фотоелектронів.

Дано:
E=6 еВ=
$=9{,}6\cdot10^{-19}$ Дж
A=4,5 еВ=$2{,}4\cdot10^{-19}$ Дж
$m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
$p_{\max}-?$

Розв'язання:

$$p_{\max}=m\text{v}_{\max}$$

З рівняння Ейнштейна для фотоефекту: $E=A+\dfrac{m\text{v}^2}{2}$

знаходимо $\text{v}^2=\dfrac{2(E-A)}{m}$.

Для імпульсу запишемо: $p_{\max}=\sqrt{2m(E-A)}$

$p_{max}=\sqrt{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(9{,}6-2{,}4)\cdot10^{-19}}\approx1{,}14\cdot10^{-24}$ *кг · м/с*

2. Коли на поверхню металу діє випромінювання з довжиною хвилі 400 нм, затримуюча напруга дорівнює 1 В. Якою буде затримуюча напруга при дії на цю поверхню випромінювання з довжиною хвилі 300 нм?

Дано:
$л_1$=400·10^{-9} м
U_1=1 В
$л_2$=300·10^{-9} м
$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
$c=3\cdot10^{8}$ м/с
$e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
U_2 - ?

Розв'язання:

З рівняння Ейнштейна для опромінення з λ_1:

$$\frac{hc}{л_1}=A+eU_1$$

знаходимо $$A=\frac{hc}{л_1}-eU_1.$$

Для опромінення з $л_2$ рівняння Ейнштейна набуває вигляду

$$eU_2=hc\left(\frac{1}{л_2}-\frac{1}{л_1}\right)+eU_1$$

звідки $$U_2=\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{л_2}-\frac{1}{л_1}\right)+U_1$$

$$U_2=\frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\times\left(\frac{1}{3\cdot10^{-7}}-\frac{1}{4\cdot10^{-7}}\right)+1=2{,}036\text{ (В)}.$$

3. Світло нормально падає на поверхню твердого тіла. Порівняйте тиск світла на цю поверхню в трьох випадках: а) поверхня дзеркальна; б) поверхня чорна; в) поверхня біла. Обґрунтуйте свою відповідь.

Дано:

Світло падає перпендикулярно на поверхню:

А) дзеркальну;

Б) чорну;

В) білу.

Порівняти тиски світла на кожну з поверхонь

Розв'язання:

Тиск світла *P* на площину дорівнює числовому значенню нормальної складової сумарного імпульсу, що передається фотонами одиниці площі поверхні тіла за одиницю часу. За дзеркальної поверхні тіла імпульс максимальний; за чорної - мінімальний, (фотон поглинається поверхнею); за білої поверхні – імпульс набуває проміжного значення.

2.6.2. Фізика атома та атомного ядра

Основні формули

Енергія кванта випромінювання атомом

$$h\nu = E_n - E_k\,.$$

Частота ліній спектру атомів водню

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Стала Рідберга

$$R = \frac{e^4 m}{8\varepsilon_0 h^3 c} = 1{,}097\cdot 10^7\ м^{-1}\,.$$

Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda\cdot t} = N_0 2^{-t/T}$$

Період напіврозпаду

$$T = \frac{ln\,2}{\lambda}\,.$$

Енергія зв'язку ядра

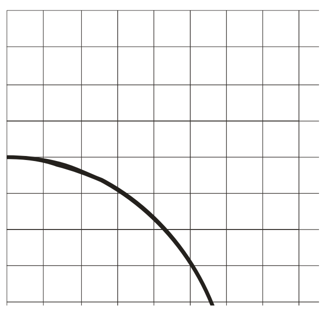
$$\Delta E = c^2 \Delta m \quad \text{або} \quad \Delta E = c^2\left[Zm_p + (F - Z)m_n - m_я\right]$$

Енергія ядерної реакції

$$\Delta E = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$$

Приклади розв'язування задач

1. На рисунку показано трек протона, який рухався в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією 0,2 Тл, напрямленому перпендикулярно до площини рисунка. Відстань між лініями сітки дорівнює 1 см. Яка швидкість протона?



Дано:

B=0,2 Тл

R=6·10^{-2} м
m=1,67·10^{-27} кг
q=1,6·10^{-19} Кл
v - ?

Розв'язання:

Сила Лоренца в даному випадку є і доцентровою силою, тобто:

$$F = Bq\text{v}\sin б,$$

де $\sin б = 1$;

$$F = \frac{m\text{v}^2}{R}$$

Прирівнюючи праві частини цих двох рівнянь, маємо:

$$Bq\text{v} = \frac{m\text{v}^2}{R} \qquad \text{v} = \frac{Bq\text{R}}{m}$$

$$v = \frac{0{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}$$

2. Період напіврозпаду Ітрію-90 дорівнює 64 год. На скільки відсотків зменшується інтенсивність радіоактивного випромінювання препарату Ітрію-90 за 40 годин?

Дано:

T=64 год.
t=40 год
$\frac{N - N_1}{N}$ - ?

Розв'язання:

За законом радіоактивного розпаду

$$N_1 = Ne^{-лt},$$

звідки

$$\frac{N_1}{N} = e^{-лt}. \qquad \frac{N - N_1}{N} = 1 - e^{-лt}$$

Підставивши $л = \frac{\ln 2}{T}$, одержуємо

$$\frac{N - N_1}{N} = 1 - e^{-\frac{40 \ln 2}{64}}$$

$$\frac{N - N_1}{N} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35, \qquad \frac{N - N_1}{N} \cdot 100\% = 35\%.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Радянська школа, 1991. – 224 с.
2. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Швацбург С.И. Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. – М.: Просвещение, 1986. – 352 с.
3. Гельфанд М.Б., Лоповок Л.М., Скобелєв Г.М., Тесленко І.Ф. Розв'язування геометричних задач у середній школі. – К.: Радянська школа, 1972. – 261 с.
4. Каплан Я.Л. Рівняння. – К.: Радянська школа, 1968. – 406 с.
5. Кушнір І., Фінкельштейн Л. Навчання у просторі. Посібник зі стереометрії. – К.: Факт, 2003. – 166 с.
6. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 1. Алгебра та початки аналізу. – Львів: ВНТЛ, 1997. – 93 с.
7. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
8. Макаренко О.І. Конкурсні завдання вступних іспитів з математики: Навч. посібник. – КНЕУ, 2004. – 315 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. – К.: Агрофирма «Александрия», 1993. – 60 с.
10. Олешко Т.І., Ластівка І.О. Математика. Вступні завдання в НАУ. – К.: НАУ2005. – 84 с.
11. Петраков И.С. Математические кружки в 8 – 10 классах. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
12. Письменный Д.Т. Математика (пособие для старшеклассников). – К.: Станица, 1997. – 288 с.
13. Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Минск: Полымя, 1998. – 108 с.
14. Чудутов Ю.В. Тригонометричні рівняння. У трьох частинах. – К., 1995.
15. Ясінський В.В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ». – К.: НТУУ «КПІ», 2003. – 324 с.

ЗАДАЧІ ЗАОЧНОЇ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Навчально-методичний посібник

В.В. Вдовенко
І.В. Сальник
Н.Г. Шевченко

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 02.12.2008. Формат 60×84$^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф. Ум. др. арк. 3,6. Тираж 550. Зам. № 5408.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua