МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

Л.В. Ізюмченко, О.П. Макарчук

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

ТРЕТЬОГО ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОГО КОНКУРСУ-ЗАХИСТУ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ РОБІТ УЧНІВ-ЧЛЕНІВ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Методичний посібник

Кіровоград – 2008

ББК 22.1 р.
І 39
УДК 51.07

Л.В. Ізюмченко, О.П. Макарчук
І 39
Розв'язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 124 с.

Рецензенти: кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики та фізики Кіровоградського національного технічного університету, доцент С.М. Якименко
вчитель вищої категорії, старший вчитель гімназії № 9 м. Кіровограда І.Є. Шверненко

Посібник містить завдання контрольних робіт з математики III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України фізико-математичного та економічного, науково-технічного відділень та відділення обчислювальної техніки та програмування 2000-2008 років, наведені їхні розв'язання, відповіді. До деяких задач подано декілька способів розв'язання.

Не секрет, що такі завдання викликають великі труднощі не тільки у школярів та студентів, а й у досвідчених вчителів, оскільки як правило потребують нестандартних підходів чи спеціальних прийомів. Даний посібник покликаний полегшити роботу вчителів при підготовці учнів до конкурсів, математичних турнірів, змагань, олімпіад. Наведені відповіді (розв'язання) дозволяють здійснити самоконтроль.

Видання розраховане на вчителів математики, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, учнів, які цікавляться математикою.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 2 грудня 2008 року (протокол № 6).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ББК 22.1 р.
УДК 51.07

У Кіровограді в 1996 році було створено регіональне відділення МАН, яке об'єднує під своїм дахом здібну до науки шкільну молодь. Робота цього закладу полягає в пошуці і залученні до науково-дослідницької, експериментальної та винахідницької роботи обдарованих кіровоградців.

Програма Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України передбачає три етапи. Перший етап - конкурс науково-дослідницьких робіт. Оцінюються: складність, науковість, повнота розкриття теми; аргументованість висновків; актуальність та елементи творчості; стиль, грамотність; якість оформлення роботи. Максимальна кількість балів - 22. Другий етап - виконання контрольних завдань із базових дисциплін. Контрольна робота передбачає 9 завдань за трьома рівнями складності та виконується протягом 3 годин: 1 рівень - 3 завдання по 2 бали, 2 рівень - 3 завдання по 4 бали, 3 рівень - 3 завдання по 7 балів. Максимальна кількість балів - 39. Третій етап - захист науково-дослідницьких робіт. На захисті мають право бути присутніми інші члени секції як опоненти. Для захисту надається до 10 хвилин. Оцінювання захисту передбачає: аргументацію вибору та розкриття теми дослідження з урахуванням власного вкладу дослідника; логічність, чіткість, лаконічність викладання матеріалу, використання наочних матеріалів; повноту, вичерпність відповідей; культуру мовлення; активна кваліфікована участь у веденні дискусій. Максимальна кількість балів - 39. Максимальна сумарна оцінка за участь у всіх етапах програми конкурсу-захисту становить 100 балів.

Переможці визначаються за сумою балів, одержаних на всіх етапах конкурсу-захисту. Кількість перших, других, третіх місць становить до 50 відсотків від загальної кількості учасників у секціях з орієнтовним розподілом їх у співвідношенні 1:2:3. Перше місце не визначається, якщо учасник не набрав 85 балів. Друге місце не визначається, якщо учасник не набрав 80 балів. Третє місце не визначається, якщо учасник не набрав 75 балів. При рівності залікових балів декількох учасників місця визначаються за результатом виконання контрольних завдань з базових дисциплін.

Посібник спрямований на консультаційну допомогу учням-членам МАН при підготовці до написання контрольної роботи з математики, наукову підтримку вчителів у проведенні занять та при роботі з обдарованими школярами. Завдання поділені на 2 групи – алгебраїчні та геометричні задачі, у завданнях вказано клас, для якого була запропонована задача, – 9 (10 або 11) та у дужках - кількість балів - 2, 4 або 7. Предметний покажчик дозволить швидше орієнтуватися в посібнику.

Алгебраїчні задачі

9 (2 бали). *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9; \\ 2x^2 + xy - 5y^2 = 4. \end{cases}$

Виключимо вільні члени і зведемо рівняння до квадратного: $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \;\Big|\; \cdot(-4) \\ 2x^2 + xy - 5y^2 = 4 \;\Big|\; \cdot 9 \end{cases}$ $\quad 14x^2 + 17xy - 57y^2 = 0 \;\big|: y^2$ (досліджуємо окремо випадок $y = 0$, переконуємося, що $y \neq 0$), а тоді: $14\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 17\frac{x}{y} - 57 = 0$ – маємо квадратне рівняння відносно невідомої $\left(\frac{x}{y}\right)$; дискримінант $D = 17^2 + 4 \cdot 14 \cdot 57 = 3481 = 59^2$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = \frac{-17 \pm 59}{28}; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)_1 = -\frac{76}{28} = -\frac{19}{7}; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{42}{28} = \frac{3}{2}.$$

1) $5x^2 - 7y^2 = 17$; $\quad x = -\frac{19}{7}y$; $\quad 5 \cdot \frac{361}{49}y^2 - 7y^2 = 17$; $\quad 1462y^2 = 833$; $y^2 = \frac{833}{1462} = \frac{49}{86}$; $\quad y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{49}{86}} = \pm\frac{7}{\sqrt{86}}$; $\quad x_{1,2} = \mp\frac{19}{7} \cdot \sqrt{\frac{49}{86}} = \mp\frac{19}{\sqrt{86}}$.

Маємо два розв'язки: $\left(-\frac{19}{\sqrt{86}}; \frac{7}{\sqrt{86}}\right)$; $\left(\frac{19}{\sqrt{86}}; -\frac{7}{\sqrt{86}}\right)$.

(Перевірка: $\begin{cases} \frac{361}{86} + \frac{266}{86} + \frac{147}{86} = 9; \\ 2 \cdot \frac{361}{86} - \frac{133}{86} - 5 \cdot \frac{49}{86} = 4. \end{cases}$ – вірно).

2) $5x^2 - 7y^2 = 17$; $\quad x = \frac{3}{2}y$; $\quad 5 \cdot \frac{9}{4}y^2 - 7y^2 = 17$; $\quad \frac{17}{4}y^2 = 17$; $\quad y^2 = 4$; $y_{3,4} = \pm 2$; а тоді $x_{1,2} = \pm 3$. Маємо ще два розв'язки: $(3;2)$; $(-3;-2)$.

(Перевірка: $\begin{cases} 9 - 12 + 12 = 9; \\ 18 + 6 - 20 = 4. \end{cases}$ – вірно).

Відповідь: $\left(\mp\frac{19}{\sqrt{86}}; \pm\frac{7}{\sqrt{86}}\right)$; $(\pm 3; \pm 2)$.

10 (2 бали). *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 3, \\ 2x^2 + xy - 6y^2 = 4. \end{cases}$

Виключимо вільні члени і зведемо рівняння до квадратного: $-2x^2 - 11xy + 30y^2 = 0$; переконуємося, що $y \neq 0$, тоді:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+11\frac{x}{y}-30=0, \qquad D=121+240=361=19^2,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{-11\pm19}{4}; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)_1=-\frac{15}{2}, \qquad \left(\frac{x}{y}\right)_2=2.$$

1) $x=-\dfrac{15}{2}y$, $\dfrac{225}{4}y^2+15y^2+3y^2=3$, $\dfrac{297}{4}y^2=3$, $y^2=\dfrac{12}{297}=\dfrac{4}{99}$;

$y_{1,2}=\pm\dfrac{2}{3\sqrt{11}}$; $x_{1,2}=\mp\dfrac{5}{\sqrt{11}}$. Маємо 2 розв'язки: $\left(\mp\dfrac{5}{\sqrt{11}};\pm\dfrac{2}{3\sqrt{11}}\right)$.

2) $x=2y$, $4y^2-4y^2+3y^2=3$, $y^2=1$, $y_{3,4}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$, розв'язки $(\pm2;\pm1)$.

Відповідь: $\left(\mp\dfrac{5}{\sqrt{11}};\pm\dfrac{2}{3\sqrt{11}}\right)$; $(\pm2;\pm1)$.

11 (4 бали). *Знайти принаймні один многочлен $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ з цілими коефіцієнтами a,b,c,d, щоб число $\sqrt[4]{2}-3\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}$ було коренем рівняння $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$.*

Нехай $x=\sqrt[4]{2}-3\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}$, $\left(x+3\sqrt[4]{4}\right)^2=\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2$, $x^2+6\sqrt{2}x+18=\sqrt{2}+4+\sqrt{8}$, $x^2+14=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}x$, або $x^2+14=(3-6x)\sqrt{2}$; підносимо до квадрата, отримаємо: $x^4+28x^2+196=72x^2-72x+18$, звідки $x^4-44x^2+72x+178=0$.

10 (7 балів). *Знайти всі пари цілих чисел (p,q), щоб многочлен $x^5+px^4+qx^3-px^2+(1-q)x+1$ розкладався в добуток многочленів з цілими коефіцієнтами.*

Дослідимо, чи можуть бути раціональні (цілі) корені, їх слід шукати серед дільників вільного члена: ±1.

$P(1)=1+p+q-p+(1-q)+1=3\neq0$, отже 1 не є коренем при $\forall p,q$.

$P(-1)=-1+p-q-p-(1-q)+1=-1\neq0$, отже -1 не є коренем при $\forall p,q$.

Отже, лінійних множників бути не може, тоді лишається можливість - є множники 2-го та 3-го степенів з цілими коефіцієнтами:

а) $x^5+px^4+qx^3-px^2+(1-q)x+1=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^3+bx^2+cx+1\right)$, причому

$\begin{cases}p=b+a,\\1-q=a+c,\end{cases}$ $\begin{cases}p=b+a,\\q=1-a-c,\end{cases}$ або

б) $x^5+px^4+qx^3-px^2+(1-q)x+1=\left(x^2+ax-1\right)\left(x^3+bx^2+cx-1\right)$, причому

$\begin{cases}p=b+a,\\1-q=-a-c,\end{cases}$ $\begin{cases}p=b+a,\\q=1+a+c.\end{cases}$

Випадок а). Умова має виконуватись для $\forall x\in R$, у тому числі і для

$x=\pm1:\ \begin{cases}3=(2+a)\cdot(2+b+c),\\ -1=(2-a)\cdot(b-c),\end{cases}$ оскільки $a,b,c\in Z$, маємо систему діофантових рівнянь. З другої умови маємо дві можливості для $2-a\in\{-1;\,1\}$, а тоді

$$a\in\{1;\,3\}:\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\ 3=3\cdot(2+b+c),\\ -1=(b-c),\end{cases}\\ \begin{cases}a=3,\\ 3=5\cdot(2+b+c),\\ -1=-(b-c),\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\ b+c=-1,\\ b-c=-1,\end{cases}\\ \begin{cases}a=3,\\ 2+b+c=\dfrac{3}{5},\\ -1=-(b-c),\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\\ c=0,\end{cases}\\ \textit{не цілі}\end{array}\right.\ \begin{cases}p=b+a,\\ q=1-a-c,\end{cases}\ \begin{cases}p=0,\\ q=0,\end{cases}$$

Випадок б). При $x=\pm1:\ \begin{cases}3=a\cdot(b+c),\\ -1=-a\cdot(-2+b-c),\end{cases}$ $a,b,c\in Z$, з другої умови маємо дві можливості для $a\in\{-1;\,1\}$, а тоді:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1,\\ 3=-(b+c),\\ 1=2-b+c,\end{cases}\\ \begin{cases}a=1,\\ 3=b+c,\\ 1=-2+b-c,\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1,\\ b=-1,\\ c=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}a=1,\\ b=3,\\ c=0,\end{cases}\end{array}\right.\quad \begin{cases}p=b+a,\\ q=1+a+c,\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=-2,\\ q=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}p=4,\\ q=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, маємо пару $(p;q)=(0;0)$ і многочлен $x^5+x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$;

$(-2;-2)$ і $x^5-2x^4-2x^3+2x^2+3x+1=\left(x^2-x-1\right)\left(x^3-x^2-2x-1\right)$;

$(4;2)$ і $x^5+4x^4+2x^3-4x^2-x+1=\left(x^2+x-1\right)\left(x^3+3x^2-1\right)$.

Відповідь: $\begin{cases}p=0\\ q=0\end{cases};\ \begin{cases}p=-2\\ q=-2\end{cases};\ \begin{cases}p=4\\ q=2\end{cases}.$

9 (2 бали). *Обчислити без таблиць:* $\sin 34^\circ\cdot\cos 56^\circ+\sin^2 56^\circ$.

$\underline{\sin 34^\circ}\cdot\cos 56^\circ+\sin^2 56^\circ=\underline{\cos 56^\circ}\cdot\cos 56^\circ+\sin^2 56^\circ=1.$

10 (2 бали). *Обчислити без таблиць:* $\left(\dfrac{\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

$$\left(\frac{\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2=\left(\frac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2=\left(\frac{2\cdot\sin 60^\circ\cdot\underline{\cos 20^\circ}}{\underline{\sin 70^\circ}}\right)^2=$$

$$=\left(2\cdot\sin 60^\circ\right)^2=\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3.$$

10 (2 бали). *Обчислити без таблиць:* $\sin 18^\circ\cdot\sin 306^\circ$.

$$\sin 18^\circ\cdot\sin 306^\circ=-\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\frac{-\sin 18^\circ\cos 36^\circ\cdot 2\cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{-\cos 36^\circ\cdot\sin 36^\circ\cdot 2}{2\cos 18^\circ\cdot 2}=$$

$$=-\frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}=-\frac{\sin 72^\circ}{4\cos\left(90^\circ-72^\circ\right)}=-\frac{\sin 72^\circ}{4\sin 72^\circ}=-\frac{1}{4}.$$

11 (2 бали). *Обчислити без таблиць:* $tg\frac{\pi}{9}\cdot tg\frac{\pi}{13}\cdot tg\frac{7\pi}{18}\cdot tg\frac{11\pi}{26}$.

Помічаємо, що сума аргументів першого і третього множників, другого і четвертого дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а тоді $\left(tg\frac{\pi}{9}\cdot tg\frac{7\pi}{18}\right)\cdot\left(tg\frac{\pi}{13}\cdot tg\frac{11\pi}{26}\right)=$

$$=\left(tg\frac{\pi}{9}\cdot ctg\frac{\pi}{9}\right)\cdot\left(tg\frac{\pi}{13}\cdot ctg\frac{\pi}{13}\right)=1.$$

10 (4 бали). *Довести рівність:* $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$.

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{2\sin\frac{\pi}{9}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{2\cdot\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cdot 2\cdot 2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}.$$

11 (7 балів). *Довести, що:* $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

1 спосіб: Розглянемо квадрат лівої частини:

$$\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2\cdot\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2\cdot\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{6\pi}{7}}{2}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+\right.$$

$\left.+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\right)$; обчислимо окремо добутки (і їхню суму) по два та три співмножники:

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\underline{\underline{\cos\frac{6\pi}{7}}}}{4\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\underline{\underline{\cos\frac{8\pi}{7}}}}{4\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{8};$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\cos\frac{6\pi}{7}}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\cos\frac{8\pi}{7}}+\underline{\underline{\cos\frac{4\pi}{7}}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\underline{\cos\frac{10\pi}{7}}}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Підставимо все у початковий вираз, матимемо: $\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2\cdot\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2\cdot\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2=\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64}$, звідки слідує доведення того, що потрібно. Автори вдячні Олегу Анатолійовичу Чернякову, вчителю-методисту, вчителю математики НВО ЛШДС «Вікторія-П», за запропоноване розв'язання.

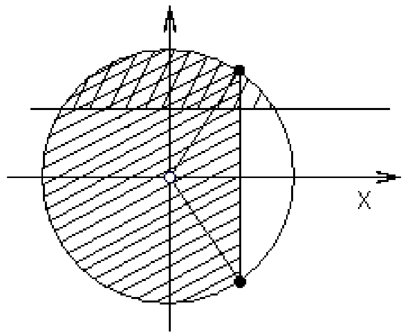
<u>2 спосіб</u>. Використаємо комплексні числа ($i^2=-1$). Розглянемо рівняння $x^7-1=0$, його корені ε_k ділять коло одиничного радіуса на 7 рівних частин:

$\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$; $\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$; $\varepsilon_3=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$; $\varepsilon_4=\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$; $\varepsilon_5=\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}$; $\varepsilon_6=\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}$; причому $\varepsilon_1+\varepsilon_6=2\cos\frac{2\pi}{7}$, $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_6=1$; $\varepsilon_2+\varepsilon_5=2\cos\frac{4\pi}{7}$, $\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5=1$; $\varepsilon_3+\varepsilon_4=2\cos\frac{6\pi}{7}$, $\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4=1$. Тоді розклад x^7-1 на множники має вигляд: $x^7-1=(x-1)\cdot(x-\varepsilon_1)\cdot(x-\varepsilon_2)\cdot(x-\varepsilon_3)\cdot(x-\varepsilon_4)\cdot(x-\varepsilon_5)\cdot(x-\varepsilon_6)$ або

$\frac{x^7-1}{x-1}=\left((x-\varepsilon_1)\cdot(x-\varepsilon_6)\right)\cdot\left((x-\varepsilon_2)\cdot(x-\varepsilon_5)\right)\cdot\left((x-\varepsilon_3)\cdot(x-\varepsilon_4)\right)$, у лівій частині – многочлен 6 степеня, який отримаємо за схемою Горнера або діленням «кутом», праву попарно перемножимо, матимемо: $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=$ $=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{7}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{7}+1\right)$. Рівність має місце для усіх значень невідомої x, у тому числі і при $x=1$:

$7=\left(2-2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(2-2\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(2-2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$, перейдемо до половинного кута: $7=4\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot 4\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot 4\sin^2\frac{3\pi}{7}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

11 (2 бали). *Розв'язати систему нерівностей*

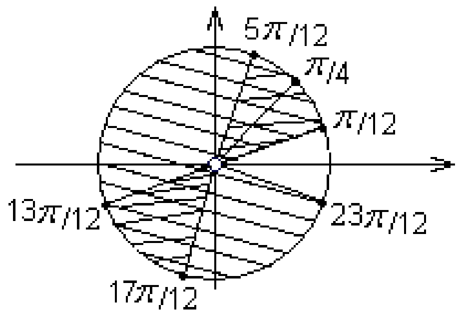


$$\begin{cases}\sin 2x\ge\frac{1}{2};\\ \cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Розв'язуючи нерівності, отримаємо

$$\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ k\in Z\\ \frac{\pi}{4}+2\pi m\le x\le\frac{7\pi}{4}+2\pi m;\ m\in Z.\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{12}+\pi k\le x\le\frac{5\pi}{12}+\pi k;\\ \frac{\pi}{4}+2\pi m\le x\le\frac{7\pi}{4}+2\pi m.\end{cases}; \text{ а тоді}$$



$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\\ \frac{13\pi}{12}+2\pi l\le x\le\frac{17\pi}{12}+2\pi l;\end{array}\right.\quad n\in \mathrm{Z},\ l\in \mathrm{Z}.$$

10 (2 бали). *Знайти множину значень функції* $y=5\sin 3x-12\cos 3x$.

1 спосіб. Враховуючи рівність $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, де $\varphi=arctg\frac{b}{a}$, отримаємо:

$y=5\sin 3x-12\cos 3x=13\cdot\sin(3x+\varphi)$, де $\varphi=arctg\left(-\frac{12}{5}\right)$.

Відповідь: множина значень: $[-13;13]$.

2 спосіб. Врахуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$y=5\sin 3x-12\cos 3x=(\overline{5;-12})\cdot(\overline{\sin 3x;\cos 3x});$$

$$|y|=\left|(\overline{5;-12})\cdot(\overline{\sin 3x;\cos 3x})\right|\le\left|(\overline{5;-12})\right|\cdot\left|(\overline{\sin 3x;\cos 3x})\right|=$$

$$=\sqrt{5^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{\sin^2 3x+\cos^2 3x}=13.$$

Знак рівності досягається, коли розглядувані вектори колінеарні, їхні координати пропорційні $(y_{\max} \Leftrightarrow \bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b};\quad y_{\min} \Leftrightarrow \bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b};)$:

$y_{\max} = 13 \Leftrightarrow \dfrac{\sin 3x}{5} = \dfrac{\cos 3x}{-12} = k > 0;$ звідки $tg3x = -\dfrac{5}{12}$, $3x$ – у другій чверті, $3x = \pi - arctg\left(\dfrac{5}{12}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$, звідки отримуємо x, при якому $y_{\max} = 13$.

$y_{\min} = -13 \Leftrightarrow \dfrac{\sin 3x}{5} = \dfrac{\cos 3x}{-12} = k < 0;$ звідки $tg3x = -\dfrac{5}{12}$, $3x$ – у IV чверті, $3x = -arctg\left(\dfrac{5}{12}\right) + 2\pi l,\ l \in Z$. А тому $y \in [-13;13]$.

Відповідь: множина значень: $[-13;13]$.

11 (7 балів). *При якому значенні параметра* a *найбільше значення виразу* $a\cos(x-y) + \sqrt{5}\ \sin(x-y) + 3\cos\ x + a\ \sin x$ *дорівнюватиме 8?*

Врахуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$a\cos(x-y) + \sqrt{5}\ \sin(x-y) + 3\cos\ x + a\ \sin x = \left(\overline{a; \sqrt{5}; 3; a}\right)\times$$
$$\times\left(\overline{\cos(x-y); \sin(x-y); \cos\ x; \sin x}\right) \le \sqrt{a^2 + 5 + 3^2 + a^2}\ \times$$
$$\times\ \sqrt{\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) + \cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{2a^2+14}\cdot\sqrt{2} = 8,$$ звідки $\sqrt{2a^2+14} = 4\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \pm 3$.

Зауваження: очевидно, можна підібрати 2 невідомі $(x; y)$ для кожного із значень параметра $a = \pm 3$ так, щоб виконувались умови:

$\dfrac{\cos(x-y)}{a} = \dfrac{\sin(x-y)}{\sqrt{5}} = \dfrac{\cos x}{3} = \dfrac{\sin\ x}{a} > 0$. А тоді вираз, даний в умові, дійсно досягає максимального значення, що дорівнює 8.

11 (4 бали). *Розв'язати рівняння* $x^2 - 2x\dfrac{\cos x}{|\cos x|} - 8 = 0$.

$$x^2 - 2x\frac{\cos x}{|\cos x|} - 8 = 0;\quad \left(x - \frac{\cos x}{|\cos x|}\right)^2 = 3^2;\ x - \frac{\cos x}{|\cos x|} = \pm 3;$$

Щоб розкрити модуль, врахуємо знак $\cos x$ у I, IV чверті: $x = 1 \pm 3$;

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 4 - \textit{не лежить ні в одній з цих чвертей} \\ x_2 = -2 - \textit{не лежить ні в одній з цих чвертей} \end{array}\right.$$

У II, III чверті: $x=-1\pm 3; \left[\begin{array}{l} x_1=-4-\textit{лежить в } II\,\textit{чв.} \\ x_2=2-\textit{лежить в } II\,\textit{чв.} \end{array}\right.$

Відповідь: $\{-4;2\}$.

11 (4 бали). *Знайти усі пари чисел* $(x;\,y)$*, для яких справджується нерівність* $y-\dfrac{1}{|\cos\pi x|}\ge\sqrt{1-y-x^2}$.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos\pi x\ne 0; \\ y-\dfrac{1}{|\cos\pi x|}\ge 0; \\ 1-y-x^2\ge 0. \end{cases}$ З останньої умови маємо, що $y\le 1$, а з передостанньої, що $y\ge\dfrac{1}{|\cos\pi x|}\ge 1$, причому знак рівності досягається, коли $\cos\pi x=\pm 1\Leftrightarrow\pi x=\pi k,\ k\in Z\Rightarrow x=k\in Z$, а тому маємо: $y=1$, підставляємо в ліву і праву частини, враховуємо ОДЗ, маємо: $x=0$.

Відповідь: (0; 1).

10 (4 бали). *Довести нерівність* $24\cdot\sin x-24\cdot\cos x+9\cdot\sin 2x\le 25$.

Нехай $\sin x-\cos x=y$, тоді $y^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-\sin 2x$, тому $\sin 2x=1-y^2$. Маємо нерівність:

$$24y+9\left(1-y^2\right)\le 25\Leftrightarrow 9y^2-24y+16\ge 0\Leftrightarrow(3y-4)^2\ge 0,$$ що вірно.

11 (4 бали). *Довести нерівність:* $(x-y)\cdot(x-y+2\cos x)+2\ge 2\sin^2 x$. *За яких умов досягається рівність?*

Перенесемо все у праву частину і виділимо повний квадрат:

$(x-y)\cdot(x-y+2\cos x)+\left(2-2\sin^2 x\right)=(x-y)^2+2\cdot(x-y)\cdot\cos x+\cos^2 x+\cos^2 x=$
$=(x-y+\cos x)^2+\cos^2 x\ge 0$ як сума квадратів. Знак рівності можливий, якщо:

$\begin{cases} x-y+\cos x=0; \\ \cos x=0; \end{cases}$ звідки $x=y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

11 (4 бали). *Розв'язати рівняння* $21tgx+ctgx-16\sqrt{3}\sin x=0$.

З умови $21tgx+ctgx-16\sqrt{3}\sin x=0$, враховуючи, що $\cos x\ne 0$, $\sin x\ne 0$, та поділивши на $\sin x$, отримаємо $\dfrac{21}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=16\sqrt{3}$ або $\dfrac{21}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1-\cos^2 x}=16\sqrt{3}$. Зведемо до спільного знаменника, отримаємо:

$$16\sqrt{3}\cos^3 x-20\cos^2 x-16\sqrt{3}\cos x+21=0.$$

Виконаємо заміну $y=\sqrt{3}\cos x$; тоді $y^2=3\cos^2 x$; $y^3=3\sqrt{3}\cos^3 x$, отримаємо $\dfrac{16}{3}y^3-\dfrac{20}{3}y^2-16y+21=0$ або $16y^3-20y^2-48y+63=0$. Отримане рівняння має три раціональні корені виду $\dfrac{p}{q}$, причому p є дільником вільного члена 63, а q – дільником старшого коефіцієнта 16. Перевіряємо за схемою Горнера або діленням у стовпчик на $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ і т.д.:

	16	−20	−48	63
$3/2$	16	4	−42	0
$3/2$	16	28	0	
$-7/4$	16	0		

, маємо $\left[\begin{array}{l} y_1=\dfrac{3}{2}; \\ y_2=\dfrac{3}{2}; \\ y_3=-\dfrac{7}{4}. \end{array}\right.$

А тоді, враховуючи заміну $y=\sqrt{3}\cos x$, маємо $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння* $\arcsin(2x-1)+\arcsin(1-x)=\dfrac{\pi}{3}.$

ОДЗ: $\begin{cases} |2x-1|\le 1, \\ |1-x|\le 1, \end{cases} \Rightarrow x\in[0;1].$

З умови матимемо: $\cos\big(\arcsin(2x-1)+\arcsin(1-x)\big)=\cos\dfrac{\pi}{3}$, врахуємо формулу косинуса суми:

$$\cos\big(\arcsin(2x-1)\big)\cdot\cos\big(\arcsin(1-x)\big)-\sin\big(\arcsin(2x-1)\big)\cdot\sin\big(\arcsin(1-x)\big)=\frac{1}{2};$$

а тоді $\sqrt{1-(2x-1)^2}\cdot\sqrt{1-(1-x)^2}-(2x-1)\cdot(1-x)=\dfrac{1}{2}$, виконаємо тотожні перетворення: $\sqrt{-4x^2+4x}\cdot\sqrt{-x^2+2x}=-2x^2+3x-\dfrac{1}{2}$, рівність можлива при невід'ємній правій частині $-2x^2+3x-\frac{1}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right]$, з урахуванням ОДЗ маємо обмеження: $x\in\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4};1\right]$. Піднесемо останню рівність до квадрата, матимемо:

$$4x^4-12x^3+8x^2=4x^4+9x^2+\frac{1}{4}-12x^3+2x^2-3x \Leftrightarrow 3x^2-3x+\frac{1}{4}=0.$$

Коренями останнього рівняння є $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, але $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}\notin\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4};1\right]$.

Відповідь: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$.

11 (4 бали). *Довести:* $\left|\cos x(1-\sin x)\right|\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Очевидно, що якщо $\sin x\geq 0$, то $\left|\cos x\right|\cdot\left|1-\sin x\right|\leq 1\cdot 1=1<\frac{3\sqrt{3}}{4}$; на жаль це не може бути доведенням при $\sin x<0$, а тому розглянемо функцію $f(x)=\cos x(1-\sin x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x$; обчислимо похідну $f'(x)=-\sin x-\cos 2x$, критичні точки $f'(x)=0$; $-\sin x-(1-2\sin^2 x)=0$ або $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, звідки $2(\sin x-1)(\sin x+\frac{1}{2})=0$;

1) $\sin x=1$, $\left|f(1)\right|=0$;

2) $\sin x=-\frac{1}{2}$, $\left[\begin{array}{l} x=-\pi/6+2\pi k; \\ x=-5\pi/6+2\pi k. \end{array}\right.$ $k\in Z$;

$$\left|f(-\frac{\pi}{6})\right|=\left|\cos(-\frac{\pi}{6})\right|\cdot\left|1-\sin(-\frac{\pi}{6})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})=3\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\left|f(-\frac{5\pi}{6})\right|=\left|\cos(-\frac{5\pi}{6})\cdot(1-\sin(-\frac{5\pi}{6}))\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})\right|=3\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Звідки випливає $0\leq\left|\cos x(1-\sin x)\right|\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

11 (7 балів). *Розв'язати нерівність* $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leq\sqrt[4]{8}$.

1 спосіб. Враховуючи нерівність між степеневими, маємо: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$. Взявши $a=\sqrt{\sin x}$, $b=\sqrt{\cos x}$, отримаємо: $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} \le 2\sqrt[4]{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{16}{2}} = \sqrt[4]{8}$. Таким чином, нерівність виконується для всіх дійсних x, для яких $\sin x$ і $\cos x \ge 0$, тобто $x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, де $n \in \mathrm{Z}$.

2 спосіб. Нехай $\sqrt{\sin x}=a$, $\sqrt{\cos x}=b$, тоді $a^4+b^4=\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Дослідимо функцію $f(a,b)=a+b$ при умові $a^4+b^4=1$, $a,b \ge 0$. Функція Лагранжа має вид $F=a+b-\lambda\left(a^4+b^4-1\right)$. $\frac{\partial F}{\partial a}=\frac{\partial F}{\partial b}=0$, $\begin{cases} 1-4\lambda a^3=0, \\ 1-4\lambda b^3=0, \end{cases}$ звідси $a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}$ і враховуючи умову $a^4+b^4=1$, маємо $a=b=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\pm\sqrt[4]{8}$. На межі маємо: $a=0$ і $b=1$ або $a=1$ і $b=0$, $f(0,1)=f(1,0)=1$. Таким чином найбільше значення функції $f(a,b)$ дорівнює $\sqrt[4]{8}$, тобто $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} \le \sqrt[4]{8}$ для всіх x, для яких вирази $\sqrt{\sin x}; \sqrt{\cos x}$ мають зміст.

Відповідь: $x \in \left[2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k \in \mathrm{Z}$.

11 (4 бали). *Нехай $a_1,...,a_n$ додатні числа і $a_1+a_2+...+a_n=n$. Довести, що $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \le 1$.*

1 спосіб. Використаємо метод Лагранжа, але розглянемо більш сильну умову, коли $a_1,...,a_n$ - невід'ємні числа, адже при першій умові (a_i - додатні, $i=\overline{1,n}$) відповідна множина не є компактом (не замкнена). Отже, введемо функцію Лагранжа $F=a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \lambda\left(a_1+a_2+...+a_n-n\right)$ на компакті $K=\left\{a_1+a_2+...+a_n=n \middle| a_i \ge 0, i=\overline{1,n}\right\}$ $\frac{\partial F}{\partial a_i}=0$, $\frac{\Pi}{a_i}=\lambda$, де $\Pi=a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$, звідси $a_1=a_2=...=a_n$ $(a_i \ne 0)$ і враховуючи умову $a_1+a_2+...+a_n=n$, маємо $a_i=1$ $F(a_1,a_2,...,a_n)=a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n=1$. На межі, якщо $a_i=0$ для якогось $1 \le i \le n$, то $F=0<1$. При $a_i=n$, $a_j=0$, при всіх $1 \le j \ne i \le n$, тому знову нерівність виконується.

2 спосіб. За нерівністю Коші $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, звідки $\frac{n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, а тоді $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \leq 1$.

11 (4 бали). *Знайти найменше значення многочлена* $P(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$.

За нерівністю Коші $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$ маємо $P(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 = 3 + (1 + x^2y^4 + x^4y^2) - 3x^2y^2 \geq$ $\geq 3 + 3\cdot\sqrt[3]{1\cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} - 3x^2y^2 = 3 + 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 3$; а оскільки $P(1;1) = 1$ і $P(x;y) \geq 3$, то $\min P(x;y) = 3$.

10 (2 бали). *Знайти множину значень функції* $y = 5\sin 3x - 12\cos 13x$.

3 спосіб. Нехай $\sin 3x = a$, $\cos 13x = b$. Розглянемо функцію $y = 5a - 12b$ на множині $K = \{a^2 + b^2 = 1\}$. Функція Лагранжа $F = 5a - 12b + \lambda(a^2 + b^2 - 1)$, $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$, $\begin{cases} 5 + 2a\lambda = 0, \\ -12 + 2\lambda b = 0, \end{cases}$ звідси $a = -\frac{5}{2\lambda}$, $b = \frac{6}{\lambda}$ і з умови $a^2 + b^2 = 1$ маємо: $\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{36}{\lambda^2} = 1$, $\lambda^2 = \frac{169}{4}$, $\lambda_{1,2} = \pm\frac{13}{2}$ з відповідними значеннями (a,b): $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right), \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ і функція $y: 13, -13$. На межі: $y(0,1) = -12$, $y(0,-1) = 12$, $y(1,0) = 5$, $y(-1,0) = -5$. Отже, шукана множина значень: $[-13,13]$.

10 (4 бали). *Довести нерівність* $24\sin x - 24\cos x + 9\sin 2x \leq 25$.

2 спосіб. Нехай $\sin x = a,\ \cos x = b$, тоді розглянемо функцію $f(a,b) = 24a - 24b + 18ab$ при умові $a^2 + b^2 = 1$ (враховано, що $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ і $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Функція Лагранжа $F = 24a - 24b + 18ab + \lambda(a^2 + b^2 - 1)$.

$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$ $\begin{cases} 24 + 18b + 2a\lambda = 0, \\ -24 + 18a + 2b\lambda = 0, \end{cases}$ $b = \frac{12\lambda + 108}{\lambda^2 - 81}$, $a = -\frac{12\lambda + 108}{\lambda^2 - 81}$, при $\lambda \neq \pm 9$. Звідси $a = -b$ і з умови $a^2 + b^2 = 1$ маємо пари (a,b): $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Легко показати (перевірте!), що $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ≤ 25.

Розглянемо випадки $\lambda = 9$ і $\lambda = -9$. При $\lambda = -9$ маємо: $a - b = \frac{4}{3}$, звідси $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}$, тому

$$f(a,b) = 24(a-b) + 18ab = 24 \cdot \frac{4}{3} + 9 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = 32 - 7 = 25.$$

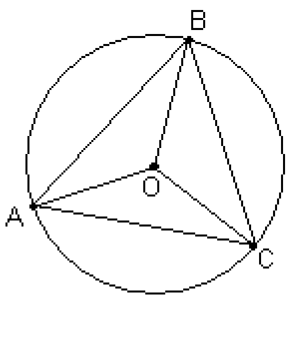
При $\lambda = 9$, $a + b = \frac{4}{3}$, аналогічно, $2ab = (a+b)^2 - (a+b)^2 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$. a і b є коренями рівняння (за Вієтом) $y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{7}{18} = 0$. Тепер потрібно знайти a і b і відповідне значення $f(a,b)$ та перевірити, що воно менше 25. На межі маємо пари (a,b): $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ з відповідними значеннями $f(a,b)$: -24, 24, 24, -24. Отже, $f(a,b) \le 25$. Нерівність доведено.

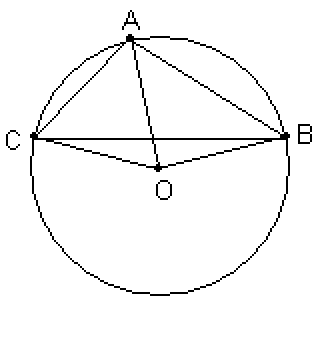
11 (7 балів). *Якщо* α, β, γ *- внутрішні кути трикутника,* $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, *то* $\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma} = \frac{3}{2}$. *Довести це твердження.*

Враховуючи відомі формули тригонометрії, маємо: $\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = tg\frac{\beta+\gamma}{2} = tg\frac{180^\circ - \alpha}{2} = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \frac{\frac{5}{13}+1}{\frac{12}{13}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

10 (7 балів). Нехай α, β, γ - внутрішні кути трикутника і справджується рівність $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$. Довести, що максимум значень кутів можливий тільки для рівностороннього трикутника.





<u>1 спосіб</u>. Розглянемо ΔABC з кутами α, β, γ відповідно. Нехай R, r - його радіуси описаного і вписаного кіл, S - його площа, p - півпериметр, O, I - центри описаного і вписаного кіл. Якщо ΔABC - гострокутний, то

$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$, або $S = \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$, якщо ΔABC - негострокутний (наприклад, $\angle A$ – тупий), то $S = S_{AOB} + S_{AOC} - S_{BOC} = \frac{R^2}{2}(\sin 2\beta + \sin 2\gamma - (-\sin 2\alpha)) =$

$= \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$. Як відомо (наприклад, з відомої класичної формули Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$), $R \geq 2r$ (нерівність Ейлера), тому $\frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = S = pr \leq p\frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ (тут враховано теорему синусів: $a = 2R\sin\alpha$), звідки $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$. Рівність можлива лише коли $R = 2r$, тобто ΔABC - рівносторонній ($R = 2r$, звідки $OI^2 = R^2 - R^2 = 0$, $I \equiv O$).

<u>2 спосіб</u>. Розглянемо функцію $f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin\alpha - \sin\beta - \sin\gamma$ на компакті $K = \{\alpha,\beta,\gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma - \pi = 0\}$. Функція Лагранжа:

$F = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin\alpha - \sin\beta - \sin\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \frac{\partial F}{\partial\beta} = \frac{\partial F}{\partial\gamma} = 0$, звідки $\begin{cases} 2\cos 2\alpha - \cos\alpha + \lambda = 0, \\ 2\cos 2\beta - \cos\beta + \lambda = 0, \\ 2\cos 2\gamma - \cos\gamma + \lambda = 0. \end{cases}$ Розглянемо рівняння $2\cos 2t - \cos t + \lambda = 0$. $2(2\cos^2 t - 1) - \cos t + \lambda = 0$, $4\cos^2 t - \cos t + \lambda - 2 = 0$, $\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33 - \lambda}}{8}$. Зазначимо, що якщо $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\pi]$), то $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому два з кутів α,β,γ рівні. Нехай $\alpha = \beta$, тоді $2\alpha + \gamma = \pi$, $\gamma = \pi - 2\alpha$, $f = \sin 2\alpha - \sin 4\alpha - 2\sin\alpha = \sin 2\alpha(1 - 2\cos 2\alpha) - 2\sin\alpha == 2\sin\alpha \times$ $\times(\cos\alpha(1 - 2(2\cos^2\alpha - 1)) - 1) == 2\sin\alpha(3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha - 1) =$ $= 2\sin\alpha(\cos 3\alpha - 1) \leq 0$ причому рівність можлива, лише коли $\alpha = 0$, або $\cos 3\alpha = 1$, $3\alpha = \frac{\pi}{2}$. На межі: 1) $\alpha = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = \pi$, $\gamma = \pi - \beta$, $f = -2\sin\beta \leq 0$, причому рівність можлива лише коли $\beta = 0$. 2) $\alpha = \pi$, звідси $\beta = \gamma = 0$, $f(\pi,0,0) = 0$. Отже, максимальне значення функції f: 0 і досягається для наступних трійок (α,β,γ): $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$, $(\pi,0,0)$, $(0,\pi,0)$, $(0,0,\pi)$. У випадку кутів трикутника нам прийнятний лише перший варіант.

11 (2 бали). *Розв'язати рівняння* $\log_3(\log_2(x-3))=\dfrac{1}{2}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-3>0 \\ \log_2(x-3)>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>3 \\ x-3>1 \end{cases} \Rightarrow x>4$;

$\log_2(x-3)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$; $x-3=2^{\sqrt{3}}$; $x=3+2^{\sqrt{3}}$.

11 (4 бали). *Розв'язати нерівність* $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\geq 4$.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0; \\ x\neq 1. \end{cases}$

Введемо заміну: $\log_2 x=t \Rightarrow 2^t=x$; $x^{\log_2 x}=\left(2^t\right)^t=2^{t^2}$.

$2^{t^2}+2^{t^2}\geq 4$; $2^{t^2}\geq 2$; $t^2\geq 1$; $|t|\geq 1$; $\left[\begin{array}{l} \log_2 x\geq 1 \\ \log_2 x\leq -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x\geq 2; \\ 0<x\leq \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння* $8^{\sqrt[3]{\log_2^2 x}}-7\cdot x^{\sqrt[3]{\log_x 2}}-6=0$.

Введемо заміну $\sqrt[3]{\log_2 x}=t$, тоді $t^3=\log_2 x$, звідки $x=2^{t^3}$ і $\sqrt[3]{\log_x 2}=t^{-1}$, а тоді $8^{t^2}-7\cdot\left(2^{t^3}\right)^{\frac{1}{t}}-6=0$; $8^{t^2}-7\cdot 2^{t^2}-6=0$; $\left(2^{t^2}\right)^3-7\cdot\left(2^{t^2}\right)-6=0$, маємо кубічне рівняння відносно $2^{t^2}=u$ з цілими коефіцієнтами $\begin{cases} u^3-7u-6=0 \\ u>0 \end{cases}$, корені шукаємо за схемою Горнера серед дільників вільного члена:

	1	0	−7	−6
−1	1	−1	−6	0
−2	1	−3	0	
3	1	0		

$-1,-2$ – сторонні корені, маємо: $2^{t^2}=3 \Rightarrow t^2=\log_2 3$, а тоді $t=\pm\left(\log_2 3\right)^{1/2}$, повернемося до заміни: $x_{1,2}=2^{t^3}=2^{\pm\left(\log_2 3\right)^{3/2}}$, або

$x_{1,2} = 2^{\log_2 3 \cdot \left(\pm \log_2^{1/2} 3\right)} = 3^{\pm\sqrt{\log_2 3}}$. Отримані значення входять в ОДЗ: $x_1 = 3^{-\sqrt{\log_2 3}} \approx 0{,}251$; $x_2 = 3^{\sqrt{\log_2 3}} \approx 3{,}987$.

Відповідь: $x = 3^{\pm\sqrt{\log_2 3}}$.

11 (4 бали). *Знайти всі* x, y, *для яких справджуються обидві рівності:* $\log_y x - 2\log_x y = 1$ *та* $x^2 + 2y^2 = 3$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0,\ x \neq 1; \\ y > 0,\ y \neq 1 \end{cases}$. Розглянемо першу умову: $\log_y x - 2\log_x y = 1$.

Введемо заміну $\log_y x = t$, маємо $t - 2\cdot\frac{1}{t} = 1$, звідки $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 2. \end{array}\right.$ Повертаючись до заміни та враховуючи другу умову, маємо (з урахуванням ОДЗ):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^{-1} = x, \\ x^2 + 2x^{-2} - 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = x, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^{-1} = x, \\ x^2 \in \{1; 2\}, \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = x, \\ x \in \{-3; 1\}, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння* $\log_{\sin x \cdot \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x = \frac{1}{4}$.

<u>1 спосіб</u>. $\frac{1}{4} = \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x \cdot \log_{\sin x \cdot \cos x} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x} =$

$= \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x \cdot \left(\log_{\sin x \cdot \cos x} \sin x \cos x - \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x\right)$, а тоді

$\frac{1}{4} = \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x\left(1 - \log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x\right)$, звідки $\left(\log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$,

$\log_{\sin x \cdot \cos x} \cos x = \frac{1}{2}$, а тоді $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = \cos x$, $\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x$,

$\cos x(\cos x - \sin x) = 0$, $\cos x \neq 0$, тому $\cos x = \sin x$, $tgx = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Як легко переконатися, n повинно бути парним, тому $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

<u>2 спосіб</u>. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases}$ перейдемо до нової основи, наприклад, $\sin x$,

отримаємо: $\dfrac{\log_{\sin x}\sin x}{\log_{\sin x}(\sin x\cdot\cos x)}\cdot\dfrac{\log_{\sin x}\cos x}{\log_{\sin x}(\sin x\cdot\cos x)}=\dfrac{1}{4}$, позначимо $\log_{\sin x}\cos x=t$, врахуємо, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів, маємо: $\dfrac{1}{1+t}\cdot\dfrac{t}{1+t}=\dfrac{1}{4}$, звідки $(1+t)^2=4t,$ розв'язуємо квадратне рівняння $1+2t+t^2-4t=0,\ \ t^2-2t+1=0,\ \ (t-1)^2=0$, отримуємо $t=1$. Враховуючи заміну $\log_{\sin x}\cos x=t$ і ОДЗ (I чверть), маємо $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi m$, $m\in \mathrm{Z}$.

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння*

$$\log_{4-x^2+3x}(\sin 5x-\sin x)=\log_{4-x^2+3x}(-\sin 2x).$$

ОДЗ: $\begin{cases}4-x^2+3x>0,\\ 4-x^2+3x\neq 1,\\ \sin 5x-\sin x>0,\\ -\sin 2x>0,\end{cases}$ перші дві умови дають обмеження $\begin{cases}x\in(-1;\,4)\\ x\neq\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}\end{cases}$.

Якщо усі 4 умови виконуються, вихідне рівняння приводить до:

$$\sin 5x-\sin x=-\sin 2x\Leftrightarrow 2\cos 3x\cdot\sin 2x+\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0;\\ 2\cos 3x+1=0.\end{array}\right.$$

Перше рівняння не задовольняє четверту умову ОДЗ, тому $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z$, звідки $x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}n,\ \ n\in Z$. Оскільки $x\in(-1;4),$ то з розв'язку $x=-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}n$ у цей проміжок попадають $-\dfrac{2\pi}{9};\dfrac{4\pi}{9};\dfrac{10\pi}{9}$, а з розв'язку $x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}n$ у цей проміжок попадають $\dfrac{2\pi}{9};\dfrac{8\pi}{9}$, перевіряємо, які з розв'язків задовольняють дві останні умови ОДЗ: $\begin{cases}\sin 5x-\sin x>0,\\ -\sin 2x>0,\end{cases}$

$$x=-\frac{2\pi}{9}:\ \begin{cases}\sin\left(-\dfrac{10\pi}{9}\right)-\sin\left(-\dfrac{2\pi}{9}\right)=-\sin\left(\dfrac{10\pi}{9}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)>0,\\ -\sin\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)>0,\end{cases}$$

для $x=\dfrac{4\pi}{9}$: $-\sin\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)<0$ - друга умова не виконується;

$x=\frac{10\pi}{9}$: $-\sin\left(\frac{20\pi}{9}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)<0$ - друга умова не виконується;

$x=\frac{2\pi}{9}$: $-\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)<0$ - друга умова не виконується;

$x=\frac{8\pi}{9}$: $\begin{cases}\sin\left(\frac{40\pi}{9}\right)-\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)>0,\\ -\sin\left(\frac{16\pi}{9}\right)=-\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)>0,\end{cases}$ умови виконуються.

Відповідь: $x\in\left\{-\frac{2\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}$.

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння*

$$\cos\left(\pi\ \log_2(x+1)\right)\cdot\cos\left(\pi\ \log_2(x+4)\right)=1.$$

ОДЗ: $x>-1$.

Враховуючи множину значень функції косинус і те, що права частина 1, маємо дві можливості:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\left(\pi\ \log_2(x+1)\right)=1,\\ \cos\left(\pi\ \log_2(x+4)\right)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\left(\pi\ \log_2(x+1)\right)=-1,\\ \cos\left(\pi\ \log_2(x+4)\right)=-1,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi\ \log_2(x+1)=2\pi k,\\ \pi\ \log_2(x+4)=2\pi l,\end{cases}\\ \begin{cases}\pi\ \log_2(x+1)=\pi+2\pi m,\\ \pi\ \log_2(x+4)=\pi+2\pi n,\end{cases}\end{array}\right. \quad k,l,m,n\in Z.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(x+1)=2k,\\ \log_2(x+4)=2l,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(x+1)=1+2m,\\ \log_2(x+4)=1+2n,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{2k}=x+1,\\ 2^{2l}=x+4,\end{cases}\\ \begin{cases}2^{2m+1}=x+1,\\ 2^{2n+1}=x+4,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4^l-4^k=3,\\ 2^{2n+1}-2^{2m+1}=3,\end{array}\right.$$

Друга рівність рівносильна до $2\cdot\left(2^{2n}-2^{2m}\right)=3$, що неможливо за натуральних значень m і n. З умови $2^{2n+1}=3+2^{2m+1}>3\Rightarrow n>0\Rightarrow n\in N$. Нескладно перевіряється неможливість виконання умови при від'ємному значенні невідомої m, наприклад, помноживши на $2^{-(2m+1)}$ $(2m+1<0)$ ліву і праву частини, та при $m=0$.

З першої рівності маємо $4^l=3+4^k>3\Rightarrow l>k$; $l>0$. Тому $l\in N$. Далі перепишемо $4^l-4^k=3$ у вигляді $4^k\cdot\left(4^{l-k}-1\right)=3$. При $k\in N$ рівність неможлива, бо ліва частина більша від 4, при $k=0$ отримаємо $l=1$, а тоді $x=0$ (входить в ОДЗ). Якщо $(-k)\in N$, домножимо ліву і праву частини на 4^{-k}, при цьому ліва частина не буде ділитися на 4, а права – буде. Що неможливо. Тому маємо єдину можливість.

Відповідь: $x = 0$.

11 (7 балів). *Розв'язати нерівність* $\log_2(8-4x-4x^2) \geq 3^{|2x+1|}$.

Дослідимо графіки функцій $y = \log_2(8-4x-4x^2)$ та $y = 3^{|2x+1|}$.

1. $y = \log_2(8-4x-4x^2)$,

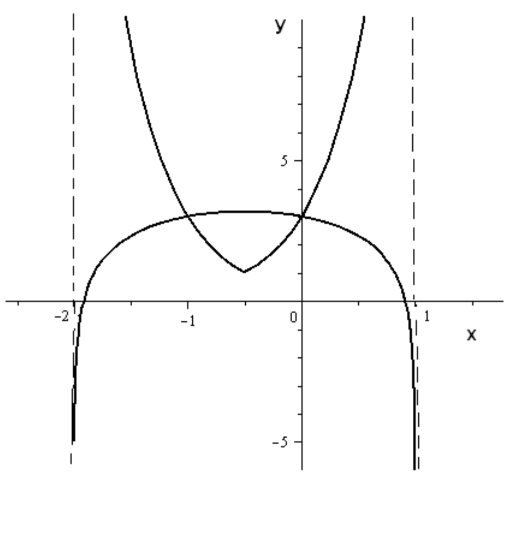
ОДЗ: $8-4x-4x^2 > 0 \Leftrightarrow -4\cdot(x+2)\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;1)$,

координати вершини: $x_0 = -\dfrac{1}{2};\ y_0 = 9$; графік симетричний відносно прямої $x = -\dfrac{1}{2}$; точки перетину з віссю абсцис $8-4x-4x^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{2}$; точка перетину з віссю ординат $(0;3)$; за рахунок симетрії відносно прямої $x = -\dfrac{1}{2}$, графік функції проходить через точку $(-1;3)$; $\lim\limits_{x\to -2+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-} y = -\infty$. На проміжку $x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ функція є спадною; на проміжку $x \in \left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ функція є зростаючою.

2. $y = 3^{|2x+1|}$, графік симетричний відносно прямої $x = -\dfrac{1}{2}$. Найменше значення $y_{\min}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3^0 = 1$, точка перетину з віссю ординат $(0;3)$; за рахунок симетрії відносно прямої $x = -\dfrac{1}{2}$, графік проходить через точку $(-1;3)$.

При $x \in \left(-\dfrac{1}{2};\infty\right)$ маємо $y = 3^{2x+1}$, функція є зростаючою, на проміжку $x \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ функція є спадною.

Аналіз дозволяє зробити наступні висновки:



на проміжку $x \in \left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ одна з функцій є зростаючою, а інша – спадною, тому вони можуть мати не більше однієї точки перетину, ця точка – $(-1;3)$;

на проміжку $x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ одна функція є спадною, а інша – зростаючою, тому міркуючи аналогічно, на цьому проміжку маємо точку – $(0;3)$. Таким чином, $x_1=-1;\ x_2=0.$ Для нерівності маємо $x\in[-1;\ 0\,]$.

Відповідь: $x\in[-1;\ 0\,]$.

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння* $9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2+x^{\sqrt[3]{\log_x 3}}$.

ОДЗ: $x>0, x\neq 1.$. Враховуючи, що $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}$ та $x=3^{\log_3 x}$, маємо:

$$9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2+\left(3^{\log_3 x}\right)^{(\log_3 x)^{-\frac{1}{3}}},\ 9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2+3^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}.$$

Нехай $3^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=t\ge 0$, тоді $t^2=2+t$, $t_1=2$, $t_2=-1$. Маємо

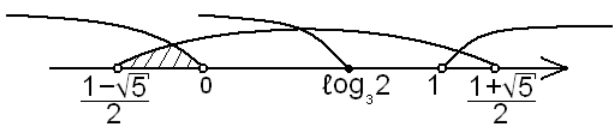
$$3^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2,\ \sqrt[3]{\log_3^2 x}=\log_3 2,\ \log_3 x=(\log_3 2)^{\frac{3}{2}},\ x=3^{(\log_3 2)^{1,5}}.$$

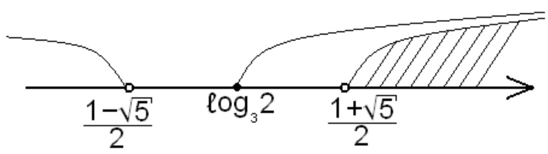
11 (4 бали). *Розв'язати нерівність* $\dfrac{3^{2x}-3^x-2}{\lg(x^2-x)}\ge 0$.

Розв'язання: $\dfrac{3^{2x}-3^x-2}{\lg(x^2-x)}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3^x+1)(3^x-2)}{\lg(x^2-x)}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3^x-2}{\lg(x^2-x)}\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^x-2\ge 0\\ \lg(x^2-x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}3^x-2\le 0\\ \lg(x^2-x)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\log_3 2\\ x^2-x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\log_3 2\\ 0<x^2-x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\log_3 2\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ x<\dfrac{1-\sqrt5}{2}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\log_3 2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.\\ \dfrac{1-\sqrt5}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}\end{cases}\end{array}\right..$$

$\log_3 2<\log_3 3=1,\qquad \dfrac{1-\sqrt5}{2}<0,\qquad \dfrac{1+\sqrt5}{2}>\dfrac{1+1}{2}=1.$ Розглянувши перетини





відповідних множин отримаємо розв'язок: $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$.

11 (4 бали). *Розв'язати рівняння* $\log_2(x^3+x)=\log_3(4-x)$.

Очевидно, розв’язком рівняння є $x=1$. Покажемо, що інших розв’язків немає: у лівій частині рівняння – зростаюча функція, у правій – спадна (на всій області визначення $x \in (0;\,4)$), тому графіки цих функцій можуть мати одну точку перетину, а отже рівняння має єдиний корінь.

11 (4 бали). *Розв’язати рівняння* $3^{x+1}+100=7^{x-1}$.

Очевидно, розв’язком рівняння є $x=4$. Перепишемо рівняння у рівносильному вигляді: $3^{x+1}+100=7^{x-1} \Leftrightarrow 3+100\cdot 3^{-x}=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{x}$. У лівій частині – спадна функція, у правій – зростаюча (на всій числовій прямій), тому рівняння має єдиний корінь: $x=4$.

11 (7 балів). *Розв’язати рівняння* $8\cdot 2^{x}=5^{x}+7$.

Введемо позначення: $f(x)=8\cdot 2^{x}-5^{x}-7$, обчислимо похідну $f'(x)=8\cdot 2^{x}\cdot\ln 2-5^{x}\cdot\ln 5$, критичні точки $f'(x)=0$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=8\frac{\ln 2}{\ln 5}\Rightarrow x=\log_{2,5}\left(8\log_5 2\right)\approx 1{,}3$. Для оцінки цього числа міркуємо наступним чином:

$8\log_5 2=\log_5 2^8=\log_5\left(2\cdot 128\right)\approx\log_5\left(2\cdot 125\right)=\log_5\left(2\right)+3\approx 3{,}5;$

$1<\log_{2,5}3{,}5<1{,}5,$

а тоді для $x\in(-\infty;\,\log_{2,5}\left(8\log_5 2\right))$ похідна $f'(x)>0$, функція $f(x)$ зростає, причому на кінцях проміжку функція приймає значень протилежних знаків, наприклад $x\to-\infty$, $f(-\infty)\to-7<0$, $f(1)>0$, а тому на проміжку є рівно один корінь. Так як $f(-3)=8\cdot 2^{-3}-5^{-3}-7<0$, $f(1)>0$, то цей корінь локалізовано $x\in(-3;1)$, нескладно побачити, що $x=0$.

На проміжку $x\in(\log_{2,5}\left(8\log_5 2\right);\,\infty)$ похідна $f'(x)<0$, функція $f(x)$ спадає, причому на кінцях проміжку функція приймає значень протилежних знаків, це випливає, наприклад, з того, що $f(1{,}5)>0$, $f(3)<0$, а тому на проміжку $x\in(1{,}5;\,3)$ є рівно один корінь, цей корінь $x=2$.

Відповідь: $x\in\{0;\,2\}$.

11 (2 бали). *Скільки коренів має рівняння* $\sqrt[3]{x^3+2x-4}+\sqrt{x+2}=4$? *Вказати один з коренів.*

$\sqrt[3]{x^3+2x-4}+\sqrt{x+2}=4$. $x=2$ є коренем.

1) $f_1=\sqrt[3]{x^3+2x-4}$ – зростаюча, $f_1'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+2x-4)^2}}\cdot(3x^2+2)>0.$

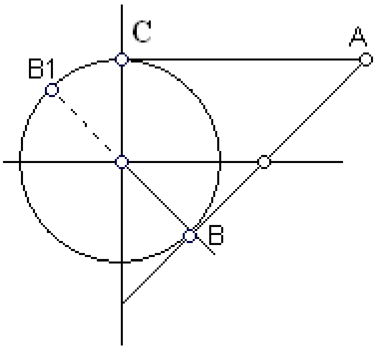
2) $f_2 = \sqrt{x+2}$ – зростаюча $\forall x \in ОДЗ$, $f_2{}' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$.

3) $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} + \sqrt{x+2}$ – сума зростаючих функцій – зростаюча функція.

4) Корінь єдиний $x = 2$.

11 (2 бали). *Знайти рівняння дотичної до графіка* $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x$ *при* $x = 1$.

$y' = 4x^3 - 15x^2 + 8x + 3$; $y'(1) = 0$; $y(1) = 3$; $y = 3 + 0(x-1) \Rightarrow y = 3$.



11 (4 бали). *Знайти рівняння дотичних до кола* $x^2 + y^2 = 4$*, що проходять через точку* $A(5;2)$.

<u>1 спосіб</u>. Одна з дотичних $AC \parallel Ox$, її рівняння: $y = 2$. Довжина дотичної AC дорівнює 5, отже, довжина другої дотичної теж 5.

Нехай $B(x;y)$: $AB = 5,\ B \in K(O;r) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 25 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} -10x - 4y = -8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$; $y = 2 - \dfrac{5}{2}x$,

$x^2 + \left(2 - \dfrac{5}{2}x\right)^2 = 4$, $x^2 + 4 + \dfrac{25}{4}x^2 - 10x = 4$, $29x^2 - 40x = 0$, $x(29x - 40) = 0$,

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \dfrac{40}{29} \\ y_2 = \dfrac{4-5x}{2} = -\dfrac{42}{29} \end{cases}$; $B\left(\dfrac{40}{29}; -\dfrac{42}{29}\right)$.

$\overline{OB} = \overline{\left(\dfrac{40}{29}; -\dfrac{42}{29}\right)} \parallel \overline{(20;-21)}$; рівняння прямої за точкою (5;2) і нормальним вектором $\overline{(20;-21)} \perp (AB)$: $20(x-5) - 21(y-2) = 0$ або $20x - 21y - 58 = 0$.

Відповідь: $y = 2$, $20x - 21y - 58 = 0$.

<u>2 спосіб</u>. Рівняння дотичної $y = y_0 + y'_0(x - x_0)$; $y = \mp\sqrt{4 - x^2}$, похідна $y'(x) = \mp\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \pm\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; тоді $y_0 = \mp\sqrt{4 - x_0^2}$; $y'_0 = \pm\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}$. Маємо

$y = \mp\sqrt{4 - x_0^2} \pm \dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x - x_0)$ – рівняння дотичної; оскільки вона проходить через точку $(5;2)$, то:

$$\begin{cases} 2 = \mp\sqrt{4-x_0^2} \pm \dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(5-x_0) \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2\sqrt{4-x_0^2} = \mp(4-x_0^2) \pm 5x_0 \mp x_0^2 \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \end{cases};$$

$2\sqrt{4-x_0^2} = \mp 4 \pm 5x_0$, $\quad 4(4-x_0^2) = 16 - 40x_0 + 25x_0^2$, $\quad 40x_0 - 29x_0^2 = 0$,

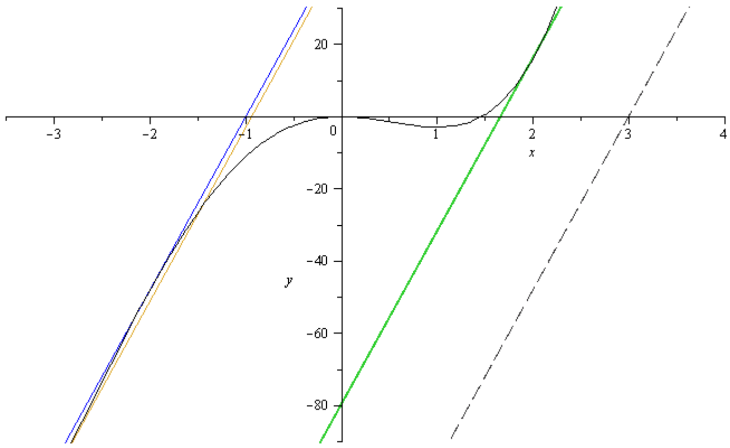
$\left[\begin{array}{l} (x_0)_1 = 0, \\ (x_0)_2 = \dfrac{40}{29}, \end{array}\right.$ а тоді маємо 2 рівняння дотичних:

1) $y = \sqrt{4-0^2} - \dfrac{0}{\sqrt{4-0^2}} \cdot (x-0)$, звідки $y = 2$;

2) $y = -\sqrt{4-\left(\dfrac{40}{29}\right)^2} + \dfrac{40/29}{\sqrt{4-\left(\dfrac{40}{29}\right)^2}} \cdot \left(x - \dfrac{40}{29}\right)$ або

$y = -\dfrac{42}{29} + \dfrac{40}{29} \cdot \dfrac{29}{42} \cdot \left(x - \dfrac{40}{29}\right) = -\dfrac{42}{29} + \dfrac{20}{21} \cdot \left(x - \dfrac{40}{29}\right)$ або $21y = 20x - 58$.

Відповідь: $y = 2$, $\quad 20x - 21y - 58 = 0$.

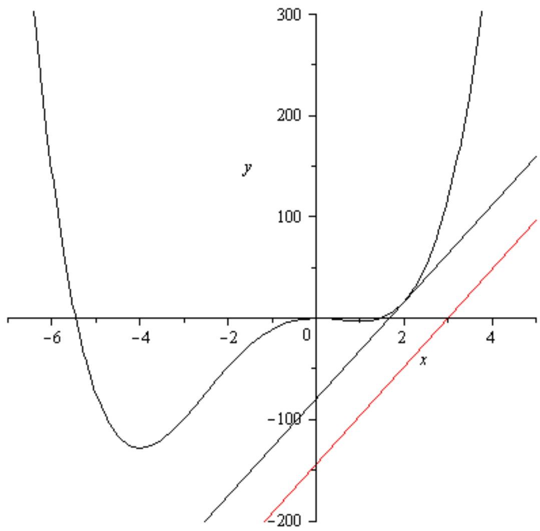


11 (4 бали). *Знайти точку на кривій* $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2$, *найближчу до прямої* $y = 48x - 144$.

Знайдемо дотичні до кривої, паралельні до даної прямої, тоді їхні кутові коефіцієнти $k = 48$.

$y' = 4x^3 + 12x^2 - 16x$

$4x^3 + 12x^2 - 16x = 48 \Leftrightarrow 4(x-2)(x+2)(x+3) = 0$. Маємо точки $x = 2$, $y(2) = 16$; $x = -2$, $y(-2) = -48$; $x = -3$, $y(-3) = -99$; та рівняння дотичних, відповідно: першої $y = 16 + 48(x-2)$, $y = 48x - 80$; другої $y = -48 + 48(x+2)$, $y = 48x + 48$; третьої $y = -99 + 48(x+3)$, $y = 48x + 45$. Аналіз рівнянь чотирьох прямих: даної прямої $l: y = 48x - 144$, дотичних $d_1: y = 48x - 80$, $d_2: y = 48x + 48$, $d_3: y = 48x + 45$ дозволяє



зробити висновок: найближче знаходиться дотична d_1 , найдалі – дотична d_2. Тому найближче до прямої $l: y = 48x - 144$ знаходиться точка кривої (2;16).

Зауваження: Можна було скористатися формулою відстані від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $l: a\,x + by + c = o$:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|a\,x_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

10 (4 бали). *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x + y = 2; \\ x^5 + y^5 = 6. \end{cases}$

Система є симетричною відносно двох невідомих, тому можна виразити усе через симетричні многочлени від двох невідомих $(x + y)$ і (xy), а оскільки $x + y = 2,$ можна отримати рівняння відносно (xy):

$(x + y)(x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4) = 6; \quad x + y = 2;$

$x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4 = 3;$ виділимо $(x + y)$:

$(x^2 + y^2)^2 - y^2x^2 - yx(x^2 + y^2) = 3;$

$((x + y)^2 - 2xy)^2 - (xy)^2 - yx((x + y)^2 - 2xy) = 3;$

$(x + y)^4 - 4(x + y)^2 xy + 4(xy)^2 - (xy)^2 - xy(x + y)^2 + 2(xy)^2 = 3;$

$(x + y)^4 - 5(x + y)^2 xy + 5(xy)^2 = 3;$

$2^4 - 5 \cdot 2^2 xy + 5(xy)^2 = 3$;

$5(xy)^2 - 20(xy) + 13 = 0$; виконаємо заміну $xy = t$; матимемо $5t^2 - 20t + 13 = 0$, $\frac{D}{4} = 100 - 65 = 35;$ $t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{35}}{5}$. Отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2; \\ xy = \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5} \end{cases} \Rightarrow u^2 - 2u + \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5} = 0; \\ \begin{cases} x + y = 2; \\ xy = \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5} \end{cases} \Rightarrow \quad u^2 - 2u + \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5} = 0; \end{array}\right.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$\left[\begin{array}{ll} u^2 - 2u + \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5} = 0; & \dfrac{D}{4} = 1 - \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5} = \dfrac{5 - 10 + \sqrt{35}}{5} = \dfrac{\sqrt{35} - 5}{5}; \\ u^2 - 2u + \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5} = 0; & \dfrac{D}{4} = 1 - \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5} < 0. \qquad \varnothing \end{array}\right.$$

$$u_{1,2}=1\pm\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}} \quad\Rightarrow\quad (x,y)=\left(\ 1\pm\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}};\ 1\mp\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\right).$$

10 (4 бали). *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x+y=1, \\ x^5+y^5=3. \end{cases}$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy,$$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=1(1-2xy-xy)=1-3xy$,

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(1-2xy)^2-2x^2y^2=2x^2y^2-4xy+1$,

$3=x^5+y^5=(x^4+y^4)(x+y)-xy(x^3+y^3)=2x^2y^2-4xy+1-xy(1-3xy)=.$

$=5x^2y^2-5xy+1$. Нехай $xy=t$, маємо рівняння $5t^2-5t+1=3$, $5t^2-5t-2=0$, $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{65}}{10}$. Розглянемо варіанти:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=\frac{5+\sqrt{65}}{10}, \end{cases}$ x,y є коренями (за Вієтом) рівняння $z^2-z+\frac{5+\sqrt{65}}{10}=0$, $D<0$, $z\in\varnothing$.

2) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=\frac{5-\sqrt{65}}{10}, \end{cases}$ маємо $z^2-z+\frac{5-\sqrt{65}}{10}=0$, $D=\frac{4\sqrt{65}-10}{10}=\frac{10\sqrt{65}-25}{25}$

$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10\sqrt{65}-25}}{10}$, $\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{10\sqrt{65}-25}}{10}$ $\quad$ або $\quad x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{10\sqrt{65}-25}}{10}$, $y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{10\sqrt{65}-25}}{10}$.

10 (7 балів). *Розв'язати систему:* $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^5+y^5+z^5=30. \end{cases}$

Позначимо $\sigma_n=x^n+y^n+z^n$, $a=x+y+z$, $b=xy+yz+xz$, $c=xyz$. Як легко переконатися $\sigma_{n+1}=a\sigma_n-b\sigma_{n-1}+c\sigma_{n-2}$. Причому $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz=3xyz$, адже $a=0$. Взявши $n=5$, маємо: $30=\sigma_5=0\cdot\sigma_4-(-3)3xyz+xyz\cdot 6=15xyz$, причому тут враховано, що $xy+yz+xz=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=-3$. $xyz=2$. За теоремою Вієта x,y,z є коренями рівняння $t^3-3t-2=0$,

$t(t+1)(t-1)-2(t+1)=0$, $(t+1)(t^2-t-2)=0$, $(t+1)^2(t-2)=0$, $t_{1,2}=-1$, $t_3=2$. Звідки маємо: $(x,y,z):(-1,-1,2)$, $(-1,2,-1)$, $(2,-1,-1)$.

9 (2 бали). *Нехай* $x+y+z=0$. *Довести, що*

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2\left(x^4+y^4+z^4\right).$$

$\sigma_{n+1}=a\sigma_n-b\sigma_{n-1}+c\sigma_{n-2}$ при $n=3$,

$\sigma_4=0\cdot\sigma_3-b\sigma_2+c\cdot 0=-b\sigma_2=-(xy+yz+xz)\left(x^2+y^2+z^2\right)$, але

$xy+yz+xz=\dfrac{1}{2}\left((x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)=-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$, тому

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2\left(x^4+y^4+z^4\right)$.

9 (7 балів). *Нехай перший і другий члени послідовності дорівнюють 1 і 3 відповідно, а кожен наступний, починаючи із третього, дорівнює сумі двох попередніх. Довести, що жоден із членів цієї послідовності не ділиться без остачі на 8.*

Запишемо остачі від ділення членів послідовності на 8: $1,3,4,7,3,2,5,7,4,3,7,2,1,3,4,7,3$. Як бачимо, дана послідовність остач періодична, серед них немає числа 0.

10 (7 балів). *Довести, що серед членів послідовності, заданої формулою* $x_{n+1}=20x_n-53$, *де* $x_1=3$, *простими числами будуть тільки числа* x_1 *та* x_2.

Обчислимо $x_2=7$ - просте, розглянемо усі інші члени послідовності: $x_{n+2}=20x_{n+1}-53=20(20x_n-53)-53=400x_n-21\cdot 53$. Помічаємо, що другий доданок ділиться на 3 і на 7. Оцінюючи перший і другий члени послідовності і цей факт, висловлюємо гіпотезу: усі непарні члени послідовності x_{2n+1} діляться на 3, усі парні x_{2n} – на 7. Доведення (методом математичної індукції): $x_1=3\,\vdots\,3$ (виконується); індукційне припущення: $x_{2n-1}\,\vdots\,3$; індукційний крок $x_{2n+1}=400\underbrace{x_{2n-1}}_{\vdots 3}-\underbrace{21\cdot 53}_{\vdots 3}\Rightarrow x_{2n+1}\,\vdots\,3$. А тому x_{2n+1} не просте. Доведено (для усіх непарних номерів). Для парних: база індукції $x_2=7\,\vdots\,7$; індукційне припущення: $x_{2n}\,\vdots\,7$; індукційний крок $x_{2n+2}=400\underbrace{x_{2n}}_{\vdots 7}-\underbrace{21\cdot 53}_{\vdots 7}\Rightarrow x_{2n+2}\,\vdots\,7$ - не просте.

<u>2 спосіб</u>. $x_{n+1}=20x_n-53$. Запишемо характеристичне рівняння: $\lambda=20\lambda-53$, його коренем є $\lambda=\dfrac{53}{19}$. Введемо допоміжну послідовність $y_n=x_n-\lambda\Rightarrow x_n=y_n+\lambda$. Тоді $x_{n+1}=y_{n+1}+\lambda=20(y_n+\lambda)-53\Rightarrow y_{n+1}=20y_n$, бо

$\lambda = 20\lambda - 53$. Маємо: $y_1 = x_1 - \lambda = 3 - \frac{53}{19} = \frac{4}{19}$, $y_2 = 20y_1 = 20 \cdot \frac{4}{19}$; $y_n = 20^{n-1} \cdot \frac{4}{19}$;

а тоді $x_n = 20^{n-1} \cdot \frac{4}{19} + \frac{53}{19}$; якщо n - непарне, $20^{(2k-1)-1} \equiv (-1)^{2k-2} \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$, а тоді $20^{2k-2} \cdot 4 + 53 \equiv 1 \cdot 4 + 53 \equiv 57 \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 3)$,

n - парне, $20^{2k-1} \equiv (-1)^{2k-1} \equiv -1 (\mathrm{mod} 3)$, а тоді $20^{2k-1} \cdot 4 + 53 \equiv -1 \cdot 4 + 53 \equiv 49 \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 7)$, а тому натуральними простими є тільки перші члени кожного ряду (парних чи непарних індексів).

Відповідь: прості тільки x_1 та x_2.

10 (7 балів). *Довести, що серед членів послідовності, заданої формулою* $x_{n+1} = 14x_n - 37$*, де* $x_1 = 3$, *простими числами будуть тільки числа* x_1 *та* x_2.

Обчислимо $x_2 = 5$ - просте, розглянемо усі інші члени послідовності: $x_{n+2} = 14x_{n+1} - 37 = 14 \cdot (14x_n - 37) - 37 = 196x_n - 15 \cdot 37$. Помічаємо, що другий доданок ділиться на 3 і на 5. Оцінюючи перший і другий члени послідовності і цей факт, висловлюємо гіпотезу: усі непарні члени послідовності x_{2n+1} діляться на 3, усі парні x_{2n} – на 5. Доведення - методом математичної індукції, як у попередньому прикладі.

10 (7 балів). *Довести, що серед членів послідовності, заданої формулою* $x_{n+1} = 32x_n - 85$*, де* $x_1 = 3$, *простими числами будуть тільки числа* x_1 *та* x_2.

Обчислимо $x_2 = 11$ - просте, розглянемо усі інші члени послідовності: $x_{n+2} = 32x_{n+1} - 85 = 32 \cdot (32x_n - 85) - 85 = 32^2 x_n - 33 \cdot 85$. Помічаємо, що другий доданок ділиться на 3 і на 11. Доводимо аналогічно попередньому прикладові: усі непарні члени послідовності x_{2n+1} діляться на 3, усі парні x_{2n} – на 11.

11 (7 балів). *Послідовність натуральних чисел* x_n *задана формулою* $x_{n+1} = 16x_n + 1$*, де* $x_1 = 1$. *Які з чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *будуть простими?*

Міркування, які привели до розв'язання задачі у попередньому прикладі, не дають результату. Тому розглянемо інший спосіб.

Наше рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = 16x_n + 1$. Характеристичне рівняння $\lambda = 16\lambda + 1$ має коренем $\lambda = -\frac{1}{15}$. Введемо допоміжну послідовність $y_n = x_n - \lambda \Rightarrow x_n = y_n + \lambda$. Тоді $x_{n+1} = y_{n+1} + \lambda = 16(y_n + \lambda) + 1$, звідки маємо $y_{n+1} = 16y_n$, бо $\lambda = 16\lambda + 1$. Маємо $y_1 = x_1 - \lambda = 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$, $y_n = \frac{16^n}{15}$; а тоді

$x_n = \frac{16^n}{15} - \frac{1}{15} = \frac{(4^n - 1)\cdot(4^n + 1)}{15}$. Очевидно, при будь-якому $n \in N$ вираз $(4^n - 1) \vdots 3$.

Якщо $n = 2m$ - парне, то $4^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod} 5)$, тоді $(4^n - 1) \vdots 15$, а тому числа виду $x_n = \frac{4^n - 1}{15} \cdot (4^n + 1)$ при парних n будуть складеними, якщо кожен з двох множників не дорівнює одиниці: другий множник не менший 17, а перший дорівнює одиниці лише при $n = 2$. Висновок: $x_2 = 17$ - просте.

Якщо $n = 2m + 1$ - непарне, то $4^n = 4^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 5)$, а тоді $4^n + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 5) \Rightarrow (4^n + 1) \vdots 5$. Маємо $(4^n - 1) \vdots 3$ і $(4^n + 1) \vdots 5$, а тому їхній добуток ділиться на 15: $4^n - 1 = 3t, t \in N$; $4^n + 1 = 5k, k \in N$, а тоді $x_n = \frac{(4^n - 1)\cdot(4^n + 1)}{15} = \frac{3t \cdot 5k}{15} = tk$ може бути простим, якщо тільки одне з двох значень t або k дорівнює 1; очевидно, цей випадок неможливий, адже з того, що $t = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow k = 1$, маємо $x_1 = 1$, яке не є простим і не є складеним. При всіх інших непарних значеннях n маємо складені числа.

Відповідь: тільки $x_2 = 17$ - просте.

11 (7 балів). *Послідовність натуральних чисел x_n задана формулою $x_{n+1} = 4x_n + 1$, де $x_1 = 1$. Які з чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будуть простими?*

$x_{n+1} = 4x_n + 1$, характеристичне рівняння $\lambda = 4\lambda + 1$, корінь $\lambda = -\frac{1}{3}$. Допоміжна послідовність $y_n = x_n - \lambda \Rightarrow x_n = y_n + \lambda$. Тоді $x_{n+1} = y_{n+1} + \lambda = 4(y_n + \lambda) + 1$, звідки маємо $y_{n+1} = 4y_n$, бо $\lambda = 4\lambda + 1$. Маємо $y_1 = x_1 - \lambda = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $y_n = \frac{4^n}{3}$; а тоді $x_n = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} = \frac{(2^n - 1)\cdot(2^n + 1)}{3}$. Подальше розв’язання аналогічне до попереднього і відповідь: тільки $x_2 = 5$ - просте.

9 (2 бали). *Дійсні числа a, b, c – члени арифметичної прогресії. Чи будуть квадрати цих чисел членами арифметичної прогресії?*

Нехай $a; b; c$ - члени арифметичної прогресії зі знаменником d. Обчислимо $a^2; b^2; c^2$:

$$a = b - d; \qquad a^2 = b^2 - (2bd - d^2);$$
$$b; \qquad b^2;$$
$$c = b + d; \qquad c^2 = b^2 + \left(2bd + d^2\right);$$

Тоді $a^2; b^2; c^2$ є членами арифметичної прогресії, якщо $2bd - d^2 = 2bd + d^2 \Rightarrow d = 0$.

Квадрати чисел будуть членами арифметичної прогресії тільки за умови, якщо $d = 0,\ a = b = c$.

10 (7 балів). *Знайти чотири цілих числа, що утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів трьох інших.*

Позначимо шукані числа як $a, b, c, f \in Z$, нехай прогресія зростає, d – знаменник, маємо $d = b - a \in Z$, $f = a^2 + b^2 + c^2$ – найбільше з a, b, c, f.

Тоді $b = a + d$, $c = a + 2d$, $f = a + 3d$ і $f = a^2 + b^2 + c^2$. Маємо $a + 3d = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2$; звідси отримаємо квадратне рівняння відносно a: $3a^2 + a(6d - 1) + \left(5d^2 - 3d\right) = 0$;
$D = (6d - 1)^2 - 12\left(5d^2 - 3d\right) = -24d^2 + 24d + 1 \ge 0, d \in Z$.

$$24d^2 - 24d - 1 = 0;\ \frac{D}{4} = 144 + 24 = 168 = 4 \cdot 42;$$

$$d_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{42}}{24} = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{12} \to \begin{cases} d \in \left[\dfrac{6 - \sqrt{42}}{12}; \dfrac{6 + \sqrt{42}}{12}\right] \\ d \in Z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = 0, \\ d_2 = 1. \end{array}\right.$$

1) $d = 0$, утвориться послідовність a, a, a, a; $a = a^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow 3a^2 - a = 0$;
$\begin{cases} a(3a - 1) = 0 \\ a \in Z \end{cases} \Rightarrow a = 0$. Відповідь: 0,0,0,0.

2) $d = 1$, утвориться послідовність $b - 1, b, b + 1, b + 2$;
$b + 2 = (b - 1)^2 + b^2 + (b + 1)^2$; $b + 2 = 3b^2 + 2$; $3b^2 - b = 0$;

$\begin{cases} b(3b - 1) = 0 \\ b \in Z \end{cases} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ c = 1, \\ f = 2. \end{cases}$ Відповідь: $-1, 0, 1, 2$.

Зауваження: Якщо послідовність спадає, матимемо $\begin{array}{l} d = 0 \to 0,0,0,0. \\ d = 1 \to 2,1,0,-1. \end{array}$

10 (7 балів). *Числа* $\sin x, \sin 7x, \sin 13x$ *утворюють арифметичну прогресію. Чи утворюють арифметичну прогресію числа* $\sin x, \sin 15x, \sin 29x$ *?*

Оскільки числа $\sin x, \sin 7x, \sin 13x$ утворюють арифметичну прогресію, то $2\sin 7x = \sin x + \sin 13x \Leftrightarrow 2\sin 7x = 2\sin 7x \cdot \cos 6x \Leftrightarrow 2\sin 7x \cdot (1-\cos 6x) = 0$, а тоді $\left[\begin{array}{l}\sin 7x = 0,\\ \cos 6x = 1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x = \pi n,\\ 6x = 2\pi m,\end{array}\right. n,m \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{7}n,\\ x = \dfrac{\pi}{3}m,\end{array}\right. n,m \in Z$.

Для того, щоб числа $\sin x, \sin 15x, \sin 29x$ утворювали арифметичну прогресію, необхідно, щоб для усіх значень невідомої $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{7}n,\\ x = \dfrac{\pi}{3}m,\end{array}\right. n,m \in Z$ виконувалась умова:

$$2\sin 15x = \sin x + \sin 29x \Leftrightarrow 2\sin 15x = 2\sin 15x \cdot \cos 14x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\sin 15x \cdot (1-\cos 14x) = 0$, а тоді $\left[\begin{array}{l}\sin 15x = 0,\\ \cos 14x = 1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}15x = \pi k,\\ 14x = 2\pi l,\end{array}\right. k,l \in Z$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{15}k,\\ x = \dfrac{\pi}{7}l,\end{array}\right. k,l \in Z$. Аналіз отриманих результатів, дозволяє зробити висновок, що при $k = 5m, l = n$ всі умови виконуються (друга сукупність є наслідком першої). Відповідь є позитивною.

9 (4 бали). *Довести нерівність* $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le 9$, *якщо* $a+b+c = 6$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\overline{(1,1,1)} \cdot \overline{(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1};\sqrt{4c+1})} \le \sqrt{3} \cdot \sqrt{(4a+1)+(4b+1)+(4c+1)} =$$
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{4\cdot(a+b+c)+3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4\cdot 6+3} = 9.$$

9 (7 балів). *Знайти найбільше значення функції* $f(x) = 3\cdot\sqrt{1-x} + 4\sqrt{x}$.

ОДЗ: $x \in [0; 1]$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$f(x) = \overline{(3,4)} \cdot \overline{(\sqrt{1-x};\sqrt{x})} \le \sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{(1-x)+x} = 5.$$

Знак рівності досягається за умови співнапрямленості векторів: $\overline{(3;4)} \uparrow\uparrow \overline{(\sqrt{1-x};\sqrt{x})} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x}}{3} = \dfrac{\sqrt{x}}{4} = k > 0 \Leftrightarrow 16\cdot(1-x) = 9x \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{25}$.

Функція $f(x)$ досягає найбільшого значення $f_{\max}\left(\dfrac{16}{25}\right) = 5$.

10 (7 балів). *Знайти найбільше значення функції* $f(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$.

ОДЗ: $x \in [0;\ 2]$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$f(x) = \overline{(1,2\sqrt{2})}\cdot\overline{(\sqrt{x};\sqrt{2-x})} \le \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{x+(2-x)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Знак рівності досягається за умови співнапрямленості векторів: $\overline{(1;2\sqrt{2})} \uparrow\uparrow \overline{(\sqrt{x};\sqrt{2-x})} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{1} = \dfrac{\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2}} = k > 0 \Rightarrow 8x = (2-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{9}$.

Функція $f(x)$ досягає найбільшого значення $f_{\max}\left(\dfrac{2}{9}\right) = 3\sqrt{2}$.

9 (7 балів). *Знайти всі пари дійсних чисел* (x, y), *для яких*

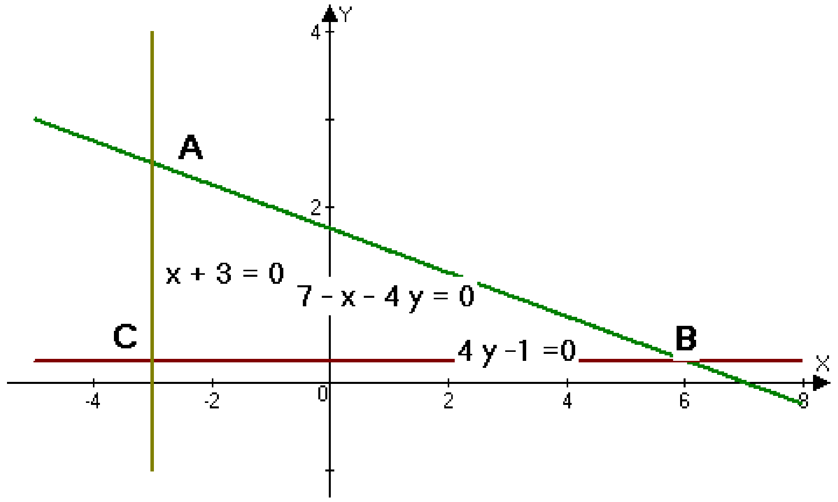
а) $\sqrt{7-x-4y} + \sqrt{3+x} + \sqrt{4y-1} = 3\sqrt{3}$

б) $\sqrt{7-x-4y} + \sqrt{3+x} + \sqrt{4y-1} \le 3\sqrt{3}.$

а) Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\sqrt{7-x-4y} + \sqrt{3+x} + \sqrt{4y-1} = \overline{(1;\,1;\,1)}\cdot\overline{(\sqrt{7-x-4y};\sqrt{3+x};\sqrt{4y-1})} \le$$
$$\le \sqrt{3}\cdot\sqrt{(7-x-4y)+(3+x)+(4y-1)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{9} = 3\sqrt{3}.$$

Знак рівності досягається за умови співнапрямленості векторів: $\overline{(1;1;1)} \uparrow\uparrow \overline{(\sqrt{7-x-4y};\sqrt{3+x};\sqrt{4y-1})} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{7-x-4y}}{1} = \dfrac{\sqrt{3+x}}{1} = \dfrac{\sqrt{4y-1}}{1} = k > 0$.



Очевидно, умова $k > 0$ виконується, маємо: $\begin{cases} 7-x-4y = 3+x; \\ 3+x = 4y-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: пара $(0;\ 1)$.

б) Нерівність

$\sqrt{7-x-4y}+\sqrt{3+x}+\sqrt{4y-1}\le 3\sqrt{3}$ має місце для усіх (x,y) з ОДЗ, обчислимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 7-x-4y\ge 0; \\ 3+x\ge 0; \\ 4y-1\ge 0; \end{cases}$$

Відповіддю є множина внутрішніх точок Δ ABC разом з межею.

10 (7 балів). *Знайти всі пари дійсних чисел* (x,y)*, для яких* $\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{3+x}+\sqrt{y+1}=5.$

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{3+x}+\sqrt{y+1}=\overline{\left(1;\,1;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\cdot\overline{\left(\sqrt{5-x-2y};\sqrt{3+x};\sqrt{2y+2}\right)}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{(5-x-2y)+(3+x)+(2y+2)}=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{10}=5.$$

Знак рівності досягається за умови співнапрямленості векторів: $\overline{\left(1;1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\uparrow\uparrow\overline{\left(\sqrt{5-x-2y};\sqrt{3+x};\sqrt{2y+2}\right)}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5-x-2y}}{1}=\frac{\sqrt{3+x}}{1}=\frac{\sqrt{2y+2}}{1/\sqrt{2}}=k>0$

Маємо: $\begin{cases} 5-x-2y=3+x; \\ 3+x=4y+4; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1; \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь: пара $(1;\ 0)$.

10 (7 балів). *Знайти всі пари дійсних чисел* (x,y)*, для яких* $15\sin x+8\cos x=3y^2+6y+20.$

Розглянемо ліву частину, скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$f(x)=\overline{(15;8)}\cdot\overline{(\sin x;\cos x)}\le\sqrt{15^2+8^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=17.$ Знак рівності досягається за умов $\frac{\sin x}{15}=\frac{\cos x}{8}>0\Rightarrow tg\,x=\frac{15}{8}$ (I чверть), звідки $x=arctg\frac{15}{8}+2\pi k,\ k\in Z$.

Отримали $\left|15\sin x+8\cos x\right|\le 17$, а тоді $\left|3y^2+6y+20\right|\le 17$. Маємо обмеження на y: $\begin{cases} 3y^2+6y+20\ge -17, \\ 3y^2+6y+20\le 17, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3y^2+6y+37\ge 0, \\ 3(y+1)^2\le 0, \end{cases}\Leftrightarrow y=-1.$

А тоді усі пари описуються: $\begin{cases} x = arctg\dfrac{15}{8} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = -1. \end{cases}$

11 (7 балів). *Довести нерівність* $5\sqrt{1-x^2} + 8x\sin y + 6x\cos y \le 5\sqrt{5}$.

ОДЗ: $x \in [0;1]$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$f(x) = (\overline{5;8;6}) \cdot (\overline{\sqrt{1-x^2};\, x\sin y;\, x\cos y}) \le \sqrt{5^2+8^2+6^2} \times$$
$$\times \sqrt{1-x^2+x^2\sin^2 y + x^2\cos^2 y} = \sqrt{125}\cdot\sqrt{1} = 5\sqrt{5}.$$

10 (7 балів). *Довести нерівність* $\sin x + 2\sin 2x - \sin 3x < 3$.

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$\sin x + 2\sin 2x - \sin 3x = -2\sin x\cdot\cos 2x + 2\sin 2x \le$$
$$\le 2\sqrt{\sin^2 x + 1}\cdot\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 2x} \le 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3.$$

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння* $2\cos 9x + \cos 7x - \cos 11x = 2\sqrt{2}$.

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$2\cos 9x + \cos 7x - \cos 11x = 2\cos 9x + 2\sin 9x\cdot\sin 2x \le$$
$$\le 2\sqrt{\cos^2 9x + \sin^2 9x}\cdot\sqrt{1+\sin^2 2x} \le 2\sqrt{2}.$$

Рівність можлива, лише коли $\dfrac{\cos 9x}{1} = \dfrac{\sin 9x}{\sin 2x} > 0$ і $\sin 2x = \pm 1$.

Розглянемо два випадки:

1) $\sin 2x = 1$, $\cos 9x = \sin 9x > 0$, а тоді $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ і $9x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, де $n,k \in Z$. Звідси маємо $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2}{9}\pi k$, $n,k \in Z$. З останніх двох рівностей отримаємо $9n - 2k = -2$ (діофантове рівняння), а тоді: $n = 2t$, $k = 1 + 9t$, $t \in \mathrm{Z}$. Звідки $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi t$, $t \in \mathrm{Z}$.

2) $\sin 2x = -1$, $\cos 9x = -\sin 9x > 0$, тоді $2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ і $9x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $n,k \in Z$. А тоді отримаємо $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2}{9}\pi k$, $n,k \in Z$. Прирівняємо, отримаємо: $9n - 2k = 2$, $n = 2t$, $k = -1 + 9t$, $t \in \mathrm{Z}$. Звідки $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi t$, $t \in \mathrm{Z}$.

Отже, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\, t$, де $t \in \mathrm{Z}$.

9 (7 балів). *Знайти усі трійки дійсних чисел (x, y, z), щоб*

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4, \\ z^4 + yz^2 + xz + 1 = 0. \end{cases}$$

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського маємо: $z^4 + z^2 + 1 = (y-1)(-z^2) + x(-z) \le \sqrt{(y-1)^2 + x^2} \cdot \sqrt{z^4 + z^2} = 2\sqrt{z^4 + z^2}$, звідси $\left(\sqrt{z^4 + z^2} - 1\right)^2 \le 0$, $z^4 + z^2 = 1$, $z^2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Рівність можлива, лише коли $\dfrac{y-1}{-z^2} = \dfrac{x}{-z} = k > 0$, $y - 1 = -kz^2$, $x = -kz$, $4 = x^2 + (y-1)^2 = k^2(z^2 + z^4) = k^2$, $k = 2$.

$x = -zk$; $x = 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $y = 1 - z^2 k = 1 - \left(\sqrt{5} - 1\right)$; $y = 2 - \sqrt{5}$, $z = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

або $x = -2\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $y = 2 - \sqrt{5}$, $z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Маємо два розв’язки $x = \pm 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $y = 2 - \sqrt{5}$, $z = \mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

9 (4 бали). *В одному сплаві маси латуні та міді знаходяться у відношенні 2:3, а в другому – у відношенні 4:5. Скільки частин першого та другого сплавів треба взяти, щоб дістати сплав, в якому маси цих металів знаходяться у відношенні 10:13?*

Розв’язання задачі зведемо до розв’язання системи лінійних рівнянь, де через x, y позначено, скільки частин першого і другого сплавів треба взяти, відповідно, щоб отримати z частин третього сплаву:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10z; \\ 3x + 5y = 13z. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 5z; \ \left| \cdot (-3) \right. \\ 3x + 5y = 13z. \end{cases} \quad -y = -2z \quad \begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases}.$$

А тому першого сплаву треба взяти 1 частину, другого – 2 частини.

10 (4 бали). *Визначити значення параметра $a \in R$, при кожному з яких рівняння $\dfrac{3}{2x - a} = \dfrac{4}{ax - 8}$ має від’ємні розв’язки.*

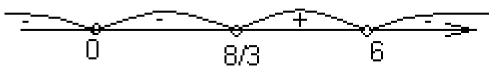
$$\frac{3}{2x-a}=\frac{4}{ax-8},\qquad \text{ОДЗ}\ \begin{cases} x\neq \dfrac{a}{2},\\ x\neq \dfrac{8}{a}\quad при\ \ a\neq 0, \end{cases}$$

1) при $a=0$ $\qquad \frac{3}{2x}=\frac{4}{-8}; x=-3$ – задовольняє умову.

2) $a\neq 0$ $\qquad 3(ax-8)=4(2x-a)$, або $\quad x(3a-8)=24-4a$,

(2.1) $a=\frac{8}{3}\quad x\cdot 0\neq 0 \Rightarrow a\neq\frac{8}{3}$;

(2.2) $a\neq\frac{8}{3}\quad x=\frac{24-4a}{3a-8}$, за умовою $x<0$, тому $\frac{24-4a}{3a-8}<0$; нулі чисельника і знаменника $\frac{8}{3}; 6$:



Маємо (з урахуванням випадку 1) $a\in\left(-\infty;\frac{8}{3}\right)\cup(6;\infty)$. Врахуємо ОДЗ:

$$\begin{cases} x\neq\dfrac{a}{2}\\ x\neq\dfrac{8}{a}\quad (a\neq 0)\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{24-4a}{3a-8}\neq\dfrac{a}{2}\\ \dfrac{24-4a}{3a-8}\neq\dfrac{8}{a}\end{cases}\qquad \begin{cases} 48-8a\neq 3a^2-8a;\\ 24a-4a^2\neq 24a-64;\end{cases}\qquad \begin{cases} a\neq\pm 4;\\ a\neq\pm 4.\end{cases}$$

Виключимо $a=-4$, що не задовольняє ОДЗ і входить у проміжок.

Відповідь: $a\in(-\infty;-4)\cup\left(-4;\frac{8}{3}\right)\cup(6;\infty)$.

10 (4 бали). *Знайти всі дійсні значення параметра* a*, для яких нерівність* $ax^2-x+1-a<0$ *має своїм наслідком нерівність* $0\leq x\leq 1$.

1) $a=0\quad -x+1<0,\ x>1$. Умова не виконується.

2) $a\neq 0$:

а) $a<0$ – нерівність має своїми розв'язками проміжок $(-\infty,\infty)$ при $D<0$; об'єднання проміжків $(-\infty, x_1)\cup(x_1;\infty)$ при $D=0$ і $(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$ при $D>0$, а тоді вона не має своїм наслідком $x\in[0;1]$.

б) $a>0$, якщо $D\leq 0$, нерівність $ax^2-x+(1-a)<0$ розв'язків не має. Якщо $D>0$ нерівність $ax^2-x+(1-a)<0$ має своїми розв'язками проміжок

($x_1; x_2$). Вона матиме своїм наслідком проміжок $x \in [0;1]$, якщо $\begin{cases} x_1 \geq 0; \\ x_2 \leq 1; \end{cases}$ а тому маємо три умови:

$$\begin{cases} D > 0; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \leq 1; \end{cases} \quad D = 1 - 4a(1-a) = (2a-1)^2 > 0;\ \forall a \neq \frac{1}{2}; \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm |2a-1|}{2a};$$

Якщо $0 < a < \dfrac{1}{2}$: $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm (1-2a)}{2a}$; $\quad x_1 = \dfrac{1-1+2a}{2a} = 1 \geq 0$ – виконується; $x_2 = \dfrac{1+1-2a}{2a} = \dfrac{1-a}{a} \leq 1$ – не виконується при $0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Якщо $a > \dfrac{1}{2}$: $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm (2a-1)}{2a}$, $\quad x_1 = \dfrac{1-(2a-1)}{2a} = \dfrac{1-a}{a} \geq 0$ – виконується при $a \leq 1$; $\quad x_2 = \dfrac{1+(2a-1)}{2a} = 1 \leq 1$ – виконується $\forall a > \dfrac{1}{2}$.

Відповідь: при $a \in \left(\dfrac{1}{2};1\right]$.

11 (7 балів). *Розв'язати рівняння:* $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-1} = \dfrac{a}{x^2}$.

По-перше, $x \neq 0$, і чисельник та знаменник – числа додатні (перевірте!), а тому значення параметра $a > 0$; по-друге, добутки чисельника і знаменника на спряжені дорівнюють: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = x^2+1-x^2 = 1$, $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = x^2+1-1 = x^2$. Враховуючи це, маємо: $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = \dfrac{a}{x^2}$, а тоді $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x^2} = \dfrac{a}{x^2}$ $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-x} = a$, звідки $\sqrt{x^2+1}+1 = a\sqrt{x^2+1}-ax$, а тоді $ax+1 = (a-1)\sqrt{x^2+1}$, за умови $(ax+1)\cdot(a-1) \geq 0$ (*) отримаємо $a^2x^2+2ax+1 = (a-1)^2\left(x^2+1\right)$. Рівняння $(2a-1)x^2+2ax+2a-a^2 = 0$ при $a = \dfrac{1}{2}$ перетворюється на лінійне, звідки $x = -\dfrac{3}{4}$. При $a > 0, a \neq \dfrac{1}{2}$ маємо квадратне рівняння, а тоді $\dfrac{D}{4} = a^2 - (2a-1)\left(2a-a^2\right) = 2a(a-1)^2$, $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-a \pm (a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}$. Перевіримо виконання умови (*) для x_1. $x_1=\dfrac{-a-(a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}$; $(ax_1+1)(a-1)=\left(a\cdot\dfrac{-a-(a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}+1\right)\cdot(a-1)$, виконавши перетворення, отримаємо $(ax_1+1)(a-1)=\left(\dfrac{-a\sqrt{2a}-a+1}{2a-1}\right)\cdot(a-1)^2$; якщо замінити у чисельнику $a=t^2$, отримаємо кубічне рівняння з єдиним дійсним (раціональним коренем) $\frac{1}{2}$, а тоді для усіх $a>0, a\neq\frac{1}{2}, a\neq 1$ умова (*) не виконується. Для x_2: $x_2=\dfrac{-a+(a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}$;

$(ax_2+1)(a-1)=\left(a\cdot\dfrac{-a+(a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}+1\right)\cdot(a-1)$, після перетворень матимемо $(ax_2+1)(a-1)=\left(\dfrac{a\sqrt{2a}-a+1}{2a-1}\right)\cdot(a-1)^2$; чисельник при усіх $a>0$ набуває додатних значень, тому при $a<\frac{1}{2}$ умова (*) не виконується, при $a>\frac{1}{2}$ виконується (нескладно помітити, що при $a=1$ $D=0,\ x_1=x_2$).

Відповідь: при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ розв'язків не має; при $a=\frac{1}{2}$ $x=-\frac{3}{4}$; при $a>\frac{1}{2}$ $x=\dfrac{-a+(a-1)\sqrt{2a}}{2a-1}$.

10 (4 бали). *Знайти найменший цілий корінь рівняння* $x^2-2(k+2)x+12+k^2=0$*, що має два різні корені.*

З умови задачі: $D>0,\ \dfrac{D}{4}=(k+2)^2-(12+k^2)=4(k-2)>0\ \Rightarrow k>2;$ $x_{1,2}=k+2\pm2\sqrt{k-2}$; найменше значення маємо при $k=3$; $x_1=3$; $x_2=7$.

Перевірка: $f(k)=k+2-2\sqrt{k-2};\ \ f'(k)=1-\dfrac{1}{\sqrt{k-2}},\ \ f'(k)=0,\ \ k=3.$

Якщо $k=(2;3),\ f'(k)<0,\ f$ - спадає, $k=(3;\infty),\ f'(k)>0,\ f$ - зростає, $\min\limits_{k\in(2;\,\infty)} f(k)=3$, при $k=3$.

Відповідь: при $k=3$; $x_1=3$; $x_2=7$.

11 (2 бали). *Знайти найбільше значення функції* $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^3+240}$, *якщо* x *набуває тільки натуральних значень.*

Обчисливши похідну $f'=-\dfrac{6(x^3-120+x^2)}{(x^3+240)^2}$, отримаємо єдину точку x, в якій похідна рівна нулю: $x\in(4;5)$, причому якщо $0<x<4$ $f'>0$ і $x>5$ $f'<0$, а тому в точці $x\approx 4{,}5$ функція досягає максимуму. Оскільки $x\in N$, обчислюємо $f(4)=\dfrac{3\cdot 4+2}{4^3+240}=\dfrac{7}{152}$ і $f(5)=\dfrac{3\cdot 5+2}{5^3+240}=\dfrac{17}{365}$ та переконуємося, що $f(5)>f(4)$. Зауваження: функція (і похідна) визначені для усіх $x\in N$.

Відповідь: при $x=5$; $f(5)=\dfrac{17}{365}$.

10 (7 балів). *Розв'язати нерівність*

$$\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}}\le 2.$$

$$\begin{cases} x\ge 8; \\ \left|\sqrt{x-8}+2\right|-\left|\sqrt{x-8}-2\right|\le 2. \end{cases}$$

$a)\ \sqrt{x-8}-2\ge 0;\quad x-8\ge 4;\quad x\ge 12;$

$\sqrt{x-8}+2-(\sqrt{x-8}-2)\le 2;$

$4\le 2;$

$\varnothing$

$b)\ \sqrt{x-8}-2<0;\quad \sqrt{x-8}<2;\quad 8\le x<12;$

$\sqrt{x-8}+2+(\sqrt{x-8}-2)\le 2;$

$\sqrt{x-8}\le 1;$

$8\le x\le 9.$

Відповідь: $x\in[8;9]$

11 (4 бали). *Знайти значення* $a\in R$, *при якому сума квадратів коренів рівняння* $x^2+ax+a-2=0$ *найменша.*

Нехай x_1, x_2 – корені рівняння. Враховуючи теорему Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1\cdot x_2=a-2, \end{cases}$, отримаємо:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-a)^2-2(a-2)=a^2-2a+4=(a-1)^2+3$. Найменше значення вираз набуває при $a=1$.

Зауваження: додатковою перевіркою встановлюємо: при $a=1$ дискримінант $D=5>0$, тобто корені рівняння – дійсні числа. Якщо виявиться, що при даному значенні a $D<0$, то розв'язання задачі рівносильне відшуканню найменшого значення виразу за обмежень $D \ge 0$, наприклад: якщо задача звучить так: *Знайти значення $a \in R$, при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax - (a-2) = 0$ найменша*. При розв'язанні приходимо до $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 + 2(a-2) = a^2 + 2a - 4 = (a+1)^2 - 5$, а тоді:

$$\begin{cases}(a+1)^2 - 5 \to \max,\\ D = a^2 + 4(a-2) \ge 0,\end{cases} \quad \begin{cases}(a+1)^2 - 5 \to \max,\\ D = (a+2)^2 - 12 \ge 0.\end{cases}$$

Звідки $a \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{3}\,] \cup [-2 + 2\sqrt{3}\,; \infty)$. Побудувавши параболу $y = (a+1)^2 - 5$ в системі координат Oay і відмітивши допустимі значення a, отримаємо, що при $a = -2 + 2\sqrt{3}$ сума $x_1^2 + x_2^2 = 8 - 4\sqrt{3}$ є найменшою. Причому ми розв'язуємо рівняння в множині дійсних чисел.

10 (4 бали). *При яких значеннях параметра a кожне з рівнянь $x^2 - 4x - 5 = a$ та $y^2 + 7y + 2 = a$ має по два цілих кореня?*

Умови існування коренів: $\begin{cases}x^2 - 4x - 5 = a;\\ y^2 + 7y + 2 = a.\end{cases}$ $\quad \begin{cases}(x-2)^2 = 9 + a;\\ \left(y + \dfrac{7}{2}\right)^2 = a - 2 + \dfrac{49}{4}.\end{cases}$

$\begin{cases}(x-2)^2 = 9 + a;\\ (2y+7)^2 = 4a + 41.\end{cases}$ Звідки $a \ge -9$. Очевидно, що при $\forall\, y \in Z$, число $2y + 7$ є непарним. Умова цілочисельності вимагає $\exists t, k \in N_0$, таких щоб $\begin{cases}9 + a = t^2; & \big|\cdot(-4)\\ 4a + 41 = (2k+1)^2.\end{cases}$ $\quad -(2t)^2 + (2k+1)^2 = 5$ або $(2k - 2t + 1)(2k + 2t + 1) = 5$ - прийшли до діофантового рівняння. Оскільки $t, k \in N_0$, другий співмножник додатний, тому і перший повинен бути додатним, крім того, перший множник не перевищує другого, тому лишається єдина можливість:

$$\begin{cases}2k - 2t + 1 = 1,\\ 2k + 2t + 1 = 5,\end{cases} \quad \begin{cases}4k = 4,\\ t = k,\end{cases} \quad \begin{cases}k = 1,\\ t = 1,\end{cases} \Rightarrow a = -8.$$

10 (7 балів). *Для всіх дійсних значень параметра a розв'язати рівняння* $\sqrt{x - 2a} + \sqrt{x - a^2 + 3} = \sqrt{2x - a^2 - 2a + 3}$.

ОДЗ: $\begin{cases}x \ge 2a;\\ x \ge a^2 - 3.\end{cases}$

$$(x - 2a) + 2\sqrt{x-2a}\sqrt{x - a^2 + 3} + (x - a^2 + 3) = 2x - a^2 - 2a + 3,$$

$$2\sqrt{x-2a}\sqrt{x - a^2 + 3} = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x-2a=0;\ x-a^2+3\ge 0; \\ x-a^2+3=0;\ x-2a\ge 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} x=2a;\ 2a-a^2+3\ge 0; & a\in[-1;3], \\ x=a^2-3;\ a^2-3-2a\ge 0; & a\in(-\infty;-1]\cup[3;\infty). \end{array}\right.$$

При $a=-1$ корені, обчислені за обома формулами, $x_1=-2,\ x_2=-2$ співпадають. При $a=3$ корені $x_1=6,\ x_2=6$ теж співпадають.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;-1]\cup[3;\infty);\ x=a^2-3;$ якщо $a\in(1;3);\ x=2a$.

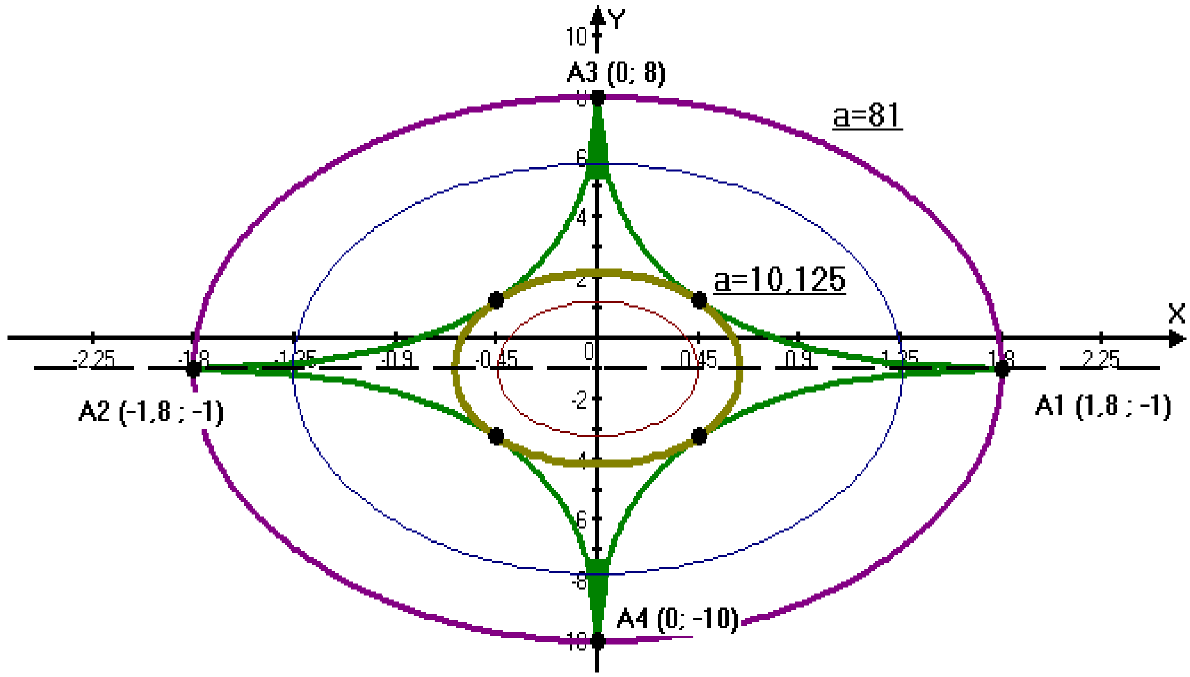
11 (7 балів). *Яким має бути число* a, *щоб існувало рівно чотири різні пари чисел* $(x;y)$, *для яких справджуються обидві рівності* $25x^2+y^2+2y=a-1$ і $\sqrt{5|x|}+\sqrt{|y+1|}=3$.

<u>1 спосіб</u>. Вказівка до розв'язання:

Перепишемо $25x^2+y^2+2y=a-1 \Leftrightarrow (5x)^2+(y+1)^2=a$ - є рівняння точки чи еліпса (кола, стиснутого в 5 разів до вісі Oy) при $a\ge 0$, для якого центром симетрії є точка $(0;-1)$. При $a<0$ рівняння не задовольняє жодна дійсна точка. Тому $a\ge 0$. Для $y\ge -1,\ a\ge 0$ маємо рівняння кривої $y=-1+\sqrt{a-(5x)^2}$, для $y<-1,\ a\ge 0$ маємо рівняння кривої $y=-1-\sqrt{a-(5x)^2}$. Для другої кривої $\sqrt{5|x|}+\sqrt{|y+1|}=3$ центром симетрії є точка $(0;-1)$. При $x\ge 0;\ y\ge -1$ рівняння рівносильне до $\sqrt{5x}+\sqrt{y+1}=3$ чи $y=5x+8-6\sqrt{5x}$. Тому достатньо знайти такі значення параметра, при яких є рівно одна спільна точка у обох функцій (в області $x>0;\ y\ge -1$).

Обчисливши похідні двох функцій і прирівнявши їх та значення обох функцій в точці дотику, маємо значення для параметра $a=10\frac{1}{8}$, точка дотику $\left(\frac{9}{20};\frac{5}{4}\right)$, інші точки – симетричні відносно прямої $y=-1;\ x=0$.

Друге граничне значення параметра отримаємо у точці, де похідна не існує, $a=81$, чотири спільні точки показано на рисунку.



2 спосіб: Якщо проаналізувати 1 спосіб, то видно, що ми йшли по стандартній схемі: спільна точка - спільна дотична - похідні в точці рівні і т.д. Насправді усі обчислення є досить громіздкими і тому виникло природне бажання знайти інше розв'язання.

З умови $25x^2 + y^2 + 2y = a - 1$ і $\sqrt{5|x|} + \sqrt{|y+1|} = 3$ при виконанні заміни $5x = X, y + 1 = Y$, що відповідає паралельному перенесенню початку координат в точку (0;-1) і розтягу вздовж осі абсцис у 5 разів (від осі Oy), маємо $\begin{cases} X^2 + Y^2 = a, \\ \sqrt{|X|} + \sqrt{|Y|} = 3, \end{cases}$ симетричну систему рівнянь відносно невідомих $|X|$ і $|Y|$.

Аналіз дозволяє зробити висновки, що як тільки пара (точка) з координатами (X, Y) задовольняє умови системи, то і точки з координатами $(X, -Y), (-X, Y), (-X, -Y), (Y, X), (-Y, X), (Y, -X), (-Y, -X)$ - задовольняють теж. Оскільки умова вимагає наявність лише чотирьох точок, то:

а) або точки (X, Y) і (Y, X) співпадають, тобто $X = Y$, або

б) $(X, Y) \equiv (-X, Y)$ або $(X, Y) \equiv (X, -Y)$, тобто $X = 0$ або $Y = 0$.

Розв'язання системи у випадку а): $\begin{cases} 2\sqrt{|X|} = 3, \\ 2X^2 = a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = \dfrac{9}{4}, \\ a = \dfrac{81}{8}, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{9}{20}, y = \pm\dfrac{9}{4} - 1 \\ a = \dfrac{81}{8}, \end{cases}$$ і точки $\left(\pm\dfrac{9}{20}, \pm\dfrac{9}{4} - 1\right); \left(\pm\dfrac{9}{20}, \mp\dfrac{9}{4} - 1\right)$; у випадку б) $X^2 = 9$ або $Y^2 = 9$, а тоді $a = 81$ - отримуємо 4 точки $A_1 - A_4$, зображені на рисунку.

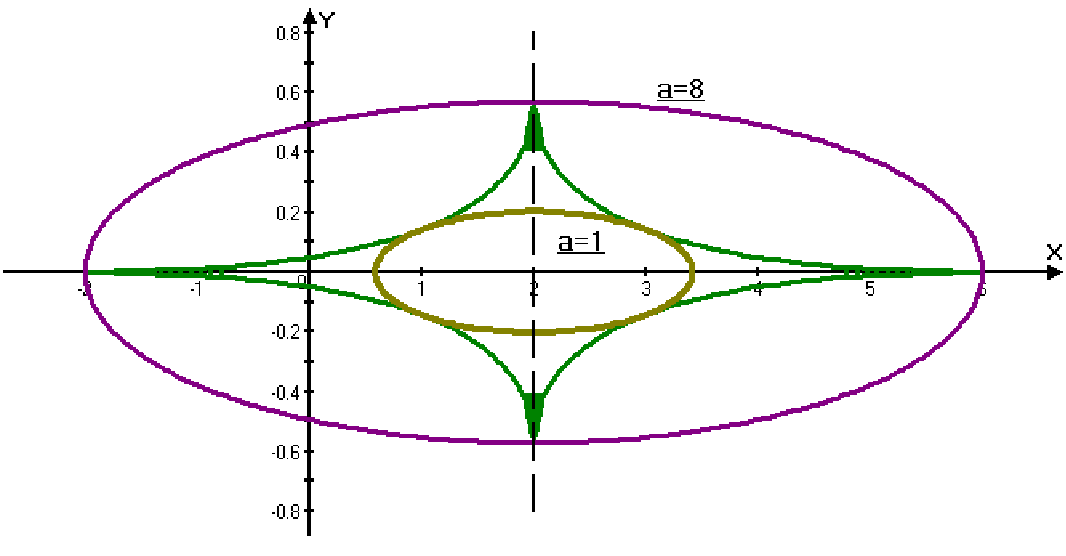
Відповідь: $a = 10\dfrac{1}{8}$ або $a = 81$.

11 (7 балів). *Знайти всі числа* a*, для яких існує чотири такі різні пари чисел* $(x; y)$*, що справджуються обидві рівності* $49y^2 + x^2 - 4x = 2a - 4$ і $\sqrt{7|y|} = 2 - \sqrt{|x-2|}$.

Дивись другий спосіб розв'язання попередньої задачі: заміна $x - 2 = X$, $7y = Y$, що відповідає паралельному перенесенню початку координат в точку (2; 0) і розтягу вздовж осі ординат, приводить до $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 2a, \\ \sqrt{|X|} + \sqrt{|Y|} = 2, \end{cases}$ симетричної системи рівнянь відносно невідомих $|X|$ і $|Y|$.

$$\begin{cases} 2\sqrt{|X|} = 2, \\ 2X^2 = 2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1, \\ a = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} X = 0;\ \sqrt{|Y|} = 2, \\ Y^2 = 2a, \end{cases} \Rightarrow a = 8.$$

Відповідь: $a = 1$ або $a = 8$.



11 (2 бали). *Спростити вираз* $x\sqrt{\frac{y}{x}} - 3y\sqrt{\frac{x}{y}} + 4xy\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Аналізуючи ОДЗ, помічаємо, що $x; y$ приймають значень однакового знаку. Якщо $x > 0, y > 0,$ $x\sqrt{\frac{y}{x}} - 3y\sqrt{\frac{x}{y}} + 4xy\frac{1}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} + 4\sqrt{xy} = 2\sqrt{xy}.$

Якщо $x < 0, y < 0,$ $x\sqrt{\frac{y}{x}} - 3y\sqrt{\frac{x}{y}} + 4xy\frac{1}{\sqrt{xy}} = -\sqrt{xy} + 3\sqrt{xy} + 4\sqrt{xy} = 6\sqrt{xy}.$

11 (2 бали). *Обчислити* $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

$$\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 7 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} - \sqrt{1 + 7 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}} +$$
$$+ \sqrt{9 + 5 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|\sqrt{5} + \sqrt{7}\right| - \left|1 - \sqrt{7}\right| +$$
$$+ \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \left(1 - \sqrt{7}\right) + \left(3 - \sqrt{5}\right) = 4.$$

10 (4 бали). *Довести, що* $\sqrt{21\sqrt{5} - 20} + \sqrt{6\sqrt{5} - 10} - \sqrt{9\sqrt{5} - 20} = 2\sqrt[4]{125}$.

$$\sqrt{21\sqrt{5} - 20} + \sqrt{6\sqrt{5} - 10} - \sqrt{9\sqrt{5} - 20} =$$
$$= \sqrt{\sqrt{5}\left(21 - 4\sqrt{5}\right)} + \sqrt{\sqrt{5}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)} - \sqrt{\sqrt{5}\left(9 - 4\sqrt{5}\right)} = \sqrt[4]{5} \cdot \left(2\sqrt{5} - 1\right) + \sqrt[4]{5} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) -$$
$$- \sqrt[4]{5} \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = \sqrt[4]{5} \cdot \left(2\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} + 2\right) = \sqrt[4]{5} \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt[4]{125}.$$

10 (4 бали). *Довести, що* $\sqrt{7\sqrt{3} - 12} - \sqrt{4\sqrt{3} - 6} + \sqrt{13\sqrt{3} - 12} = 2\sqrt[4]{3}$.

$$\sqrt{7\sqrt{3} - 12} - \sqrt{4\sqrt{3} - 6} + \sqrt{13\sqrt{3} - 12} =$$
$$= \sqrt{\sqrt{3}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)} - \sqrt{\sqrt{3}\left(4 - 2\sqrt{3}\right)} + \sqrt{\sqrt{3}\left(13 - 4\sqrt{3}\right)} = \sqrt[4]{3} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) - \sqrt[4]{3} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) +$$
$$+ \sqrt[4]{3} \cdot \left(2\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt[4]{3} \cdot \left(2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt[4]{3} \cdot 2 = 2\sqrt[4]{3}.$$

9 (4 бали). *Довести, що* $\sqrt{11\sqrt{2} - 12} + \sqrt{9\sqrt{2} - 8} - \sqrt{3\sqrt{2} - 4} = 3\sqrt[4]{2}$.

$$\sqrt{11\sqrt{2} - 12} + \sqrt{9\sqrt{2} - 8} - \sqrt{3\sqrt{2} - 4} =$$
$$= \sqrt{\sqrt{2}\left(11 - 6\sqrt{2}\right)} + \sqrt{\sqrt{2}\left(9 - 4\sqrt{2}\right)} - \sqrt{\sqrt{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right) + \sqrt[4]{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) -$$
$$- \sqrt[4]{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt[4]{2} \cdot \left(3 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1\right) = \sqrt[4]{2} \cdot 3 = 3\sqrt[4]{2}.$$

11 (4 бали). *Побудувати графік функції*

$$y = \sqrt[3]{3x + 1 + \sqrt{x(x + 3)^2}} + \sqrt[3]{3x + 1 - \sqrt{x(x + 3)^2}}.$$

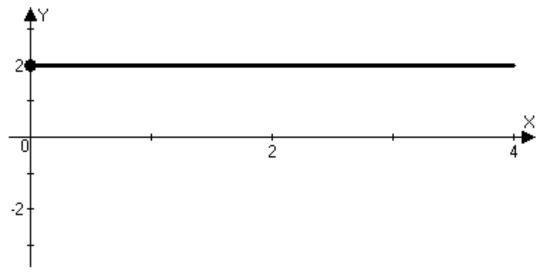
1 спосіб. ОДЗ: $x \geq 0$. Перепишемо підкореневі вирази, врахувавши формулу куба суми та різниці:

$$3x+1 \pm \sqrt{x(x+3)^2} = 3x+1 \pm (x+3)\sqrt{x} = 3\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot 1 + 1^3 \pm \left(\sqrt{x}\right)^3 \pm 3\sqrt{x} \cdot 1^2 =$$

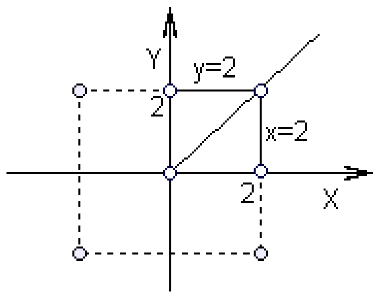
$$= 1^3 \pm 3\sqrt{x} \cdot 1^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot 1 \pm \left(\sqrt{x}\right)^3 = \left(1 \pm \sqrt{x}\right)^3.$$ А тоді

$y = \sqrt[3]{3x+1+\sqrt{x(x+3)^2}} + \sqrt[3]{3x+1-\sqrt{x(x+3)^2}} = \left(1+\sqrt{x}\right) + \left(1-\sqrt{x}\right) = 2$ для усіх $x \geq 0$.

Графіком функції є промінь з початком у точці $(0;2)$, паралельний до вісі абсцис.



2 спосіб: знаходимо похідну функції, показуємо, що вона дорівнює нулю, а тому функція є сталою, обчислюємо $y(0)=2$, а тому $y=2,\ \forall x \geq 0$.



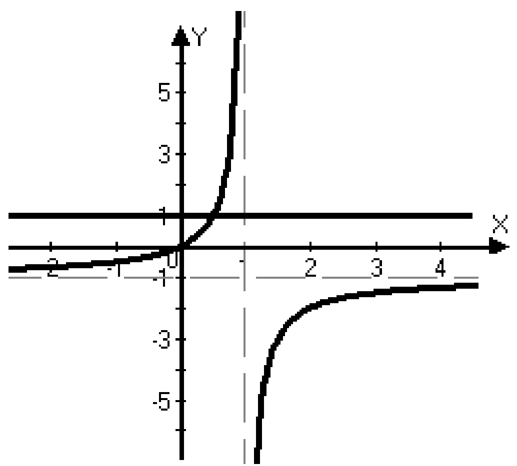
11 (2 бали). *На координатній площині Oxy зобразити всі точки, для яких виконується рівність* $|x+y|+|x-y|=4$.

Рівняння допускає заміну $(x;y)$ на $(x;-y)$, отже, графік рівняння симетричний відносно вісі абсцис, допускає заміну $(x;y)$ на $(-x;y)$, тому графік симетричний відносно вісі ординат, допускає заміну $(x;y)$ на $(-x;-y)$, отже, графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо побудувати у першій чверті і відобразити симетрично відносно усіх осей і початку координат.

І чверть: якщо $x>y$: $2x=4,\quad x=2$; якщо $x<y$: $2y=4,\ y=2$.

Графік рівняння – квадрат з вершинами $(\pm 2;\pm 2)$, $(\pm 2;\mp 2)$.

10 (4 бали). *На координатній площині Oxy зобразити всі точки, для яких справджується рівність* $xy^2 - y^2 - x + y = 0$.



Перепишемо наше рівняння $xy^2 - y^2 - x + y = 0$ у рівносильному вигляді:

$x(y^2-1)-(y^2-y)=0 \Leftrightarrow (y-1)(xy+x-y)=0$

звідки $\left[\begin{array}{l} y-1=0, \\ xy+x-y=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=\dfrac{-1}{x-1}-1,\ x\neq 1. \end{array}\right.$

Маємо об'єднання двох графіків: пряму, паралельну вісі абсцис, і гіперболу з центром симетрії в точці (1; -1).

11 (4 бали). *При яких значеннях параметра а графік* $y=x^4+ax^3+3x^2+2x$ *матиме вісь симетрії?*

Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені угору, тому вісь симетрії може бути тільки паралельна вісі ординат. Нехай $x=l$ - рівняння вісі симетрії. Тоді з того, що графіку належить точка з координатами $(l+x, y)$ випливає, що йому належить точка $(l-x, y)$ з тією ж ординатою.

$$\begin{cases} y(l+x)=(l+x)^4+a(l+x)^3+3(l+x)^2+2(l+x); \\ y(l-x)=(l-x)^4+a(l-x)^3+3(l-x)^2+2(l-x); \\ y(l+x)=y(l-x); \end{cases}$$

Віднімемо почленно від першої рівності другу, матимемо:

$8x^3l+8xl^3+2ax^3+6axl^2+12xl+4x=0$ або

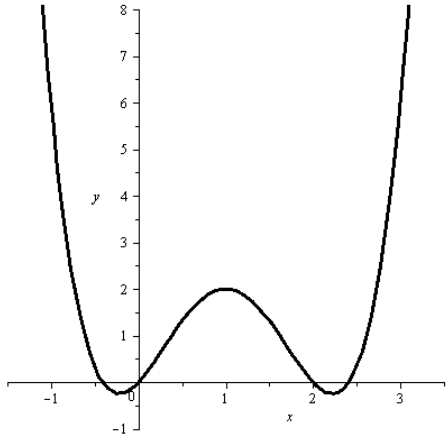
$2\cdot(x^3\cdot(4l+a)+x\cdot(4l^3+3al^2+6l+2))=0.$ Дана рівність має виконуватись для усіх значень невідомої x, а це можливо лише при:

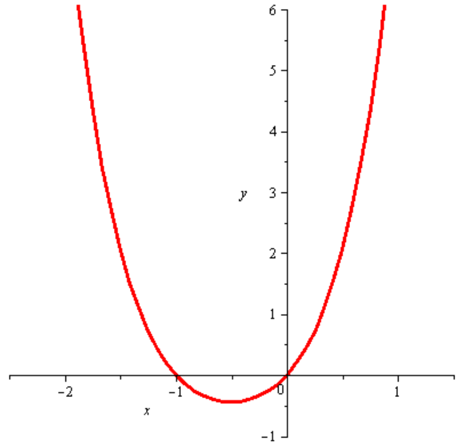
$$\begin{cases} 4l+a=0; \\ 4l^3+3al^2+6l+2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4l; \\ 4l^3+3\cdot(-4l)l^2+6l+2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4l; \\ -2(4l^3-3\cdot l-1)=0; \end{cases}$$

Останнє рівняння має раціональні корені:

$$\begin{array}{r|llll} & \underline{4} & \underline{0} & \underline{-3} & \underline{-1} \\ \hline 1 & 4 & 4 & 1 & |0 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 2 & |0 & \\ -\frac{1}{2} & 4 & |0 & & \end{array},\qquad \text{маємо} \left[\begin{array}{l} l_1=1; \\ l_2=l_3=-\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=-4; \\ a_2=a_3=2. \end{array}\right.$$

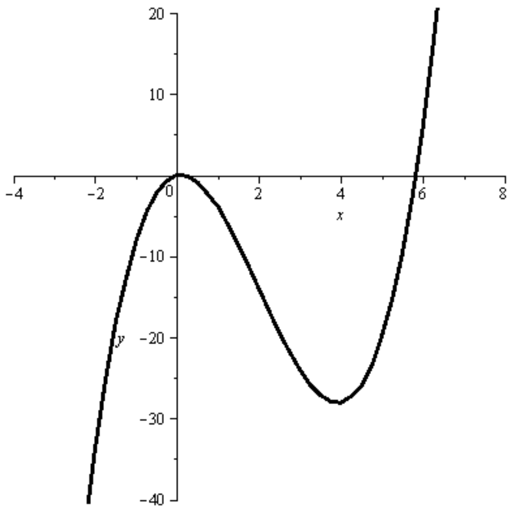
Отже, при значеннях параметра $a=-4; a=2$ графік функції $y=x^4+ax^3+3x^2+2x$ матиме вісь симетрії.





10 (4 бали). *Знайти координати центра симетрії графіка* $y = x^3 - 6x^2 + x$.

Графіком функції є парабола, нехай (a, b) - координати її центра симетрії. Тоді з того, що графіку належить точка з координатами $(a + x, b + y)$, випливає, що йому належить точка $(a - x, b - y)$. Отримаємо:



$$\begin{cases} b + y = (a + x)^3 - 6(a + x)^2 + (a + x); \\ b - y = (a - x)^3 - 6(a - x)^2 + (a - x). \end{cases}$$

Додамо почленно до першої рівності другу, матимемо:

$$2b = 2a^3 + 6ax^2 - 12a^2 - 12x^2 + 2a \ \big|: 2 \quad \text{або}$$

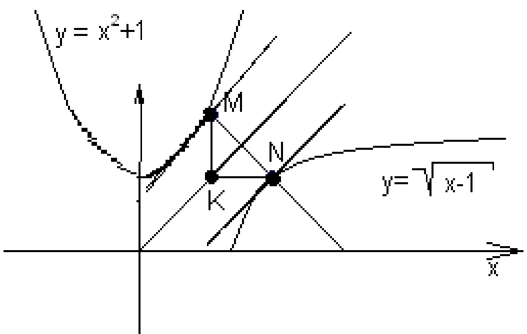
$$x^2 \cdot (3a - 6) + (a^3 - 6a^2 + a - b) = 0, \ \forall x \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 6 = 0; \\ a^3 - 6a^2 + a - b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -14. \end{cases}$$

Відповідь: $(2, -14)$ - координати центра симетрії графіка $y = x^3 - 6x^2 + x$.

11 (2 бали). *Знайти координати центра симетрії графіка* $y = x^3 + 3x^2 - x$.

Відповідь: $(-1; 3)$ - координати центра симетрії графіка $y = x^3 + 3x^2 - x$.



11 (7 балів). *Знайти найменшу відстань між точками M та N, які* *лежать відповідно на кривих* $y = x^2 + 1$ *і* $y = \sqrt{x-1}$.

У 1 чверті графіки кривих $y = x^2 + 1$ і $y = \sqrt{x-1}$ симетричні відносно прямої $y = x$, тоді пряма MN перпендикулярна до $y = x$, тобто якщо у точках M і N провести дотичні до графіків функцій, вони будуть паралельні прямій $y = x,\ k = tg\alpha = 1$: $\quad y = x^2 + 1;\ \ y' = 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2};\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4};\ \ M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$

$\Rightarrow K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow N\left(\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$; (точки M і N симетричні відносно прямої $y = x$), тоді

$MN = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

11 (4 бали). *Розв'язати нерівність* $\sqrt[3]{4x+3} + \sqrt[3]{x+2} \le \sqrt[3]{2x-1}$.

Розглянемо неперервну функцію $f(x) = \sqrt[3]{4x+3} + \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x-1}$, знайдемо x, при якому $f(x) = 0$, тоді $\sqrt[3]{4x+3} + \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x-1}$. (*)

Піднесемо до кубу співвідношення (*) $\left(\sqrt[3]{4x+3} + \sqrt[3]{x+2}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3$, спростимо вираз $5x + 5 + 3 \cdot \sqrt[3]{4x+3} \cdot \sqrt[3]{x+2} \cdot \left(\sqrt[3]{4x+3} + \sqrt[3]{x+2}\right) = 2x - 1$, замінимо суму, врахувавши (*), отримаємо: $3\sqrt[3]{(4x+3)(x+2)(2x-1)} = -3(x+2)$, $(4x+3)(x+2)(2x-1) + (x+2)^3 = 0$, винесемо спільний множник за дужки, матимемо $(x+2)\left((8x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 4)\right) = 0$ або $(x+2)(9x^2 + 6x + 1) = 0$, звідки $(x+2)(3x+1)^2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Перевіркою переконаємося, що x_2 не задовольняє (*), отже x_2 – сторонній корінь. Таким чином, для функції маємо єдиний корінь: $x = -2$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів, є два проміжки: $x \in (-\infty; -2)$ та $x \in (-2; +\infty)$. Визначимо знак функції $f(x)$ на кожному проміжку, обчислимо $f(-3) = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{9} - 1 < 0$, тому $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -2)$; $f(0) = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} + 1 > 0$, тому $f(x) > 0, \forall x \in (-2; \infty)$.

Якби для якогось $y \in (-2; +\infty)$ $\quad f(y) < 0$, то тоді б за теоремою про проміжне значення неперервної функції існував би нуль функції $f(x)$ на проміжку $(\min(0,y); \max(0,y))$, а це не так, отже $f(x) > 0$ при $x > -2$. (Аналогічно і $f(y) < 0$ при $x < -2$).

Тому розв'язок шуканої нерівності: $x \in (-\infty; -2]$.

10 (4 бали). *Розв'язати рівняння* $\frac{1}{\sqrt{14+6x}} + \frac{1}{\sqrt{14-6x}} = \frac{3}{2}$.

Як легко видно,

$$\frac{1}{\sqrt{14+6x}}+\frac{1}{\sqrt{14-6x}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{14+6x}+\sqrt{14-6x}=\frac{3}{2}\sqrt{14+6x}\cdot\sqrt{14-6x}.$$

Піднесемо обидві частини до квадрату і зробимо заміну $\sqrt{14+6x}\cdot\sqrt{14-6x}=t>0$, $14+6x+2t+14-6x=\frac{9}{4}t^2$, $\frac{9}{4}t^2-2t-28=0$, $9t^2-8t-112=0$; $t_1=4$, $t_2=-\frac{28}{9}$. Так як $t_2<0$, лишається лише $\sqrt{14+6x}\cdot\sqrt{14-6x}=4$, або $196-36x^2=16$, $x^2=5$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. Оскільки $14>6\sqrt{5}$ ($14^2=196$, а $\left(6\sqrt{5}\right)^2=180$), то врахувавши, що в даному випадку ми не могли отримати сторонніх коренів, приходимо до висновку, що корені: $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$.

10 (4 бали). *Чи завжди із того, що числа a,b і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ є раціональними, випливає, що обидва числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ є раціональними?*

Нехай $\sqrt{a}+\sqrt{b}=k\neq 0$ (при $k=0$ $a=b=0$), тоді $\sqrt{a}=k-\sqrt{b}$, піднісши обидві частини до квадрату маємо: $a=k^2-2k\sqrt{b}+b$, $\sqrt{b}=\frac{k^2+b-a}{2k}$ - раціональне число. Аналогічно $\sqrt{a}\in Q$. Відповідь: так.

10 (2 бали). *Нехай x, y, z – натуральні числа. Чи може число $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz$ бути простим натуральним числом?*

Так. Міркуємо наступним чином: нехай, наприклад, $x=y$, тоді число $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz=2x^3+z^3-3x^2z$ може бути простим, коли числа x і z – різної парності. Наприклад, при $x=y=2$ і $z=1$: $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz=8+8+1-3\cdot2\cdot2=5$ – просте; при $x=y=2$ і $z=3$: $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz=8+8+27-3\cdot2\cdot2\cdot3=7$; при $x=y=4$ і $z=3$: $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz=11$, або при $x=y=4$ і $z=5$: $x^3+y^3+z^3-3\cdot xyz=13$ і ін.

9 (4 бали). *Нехай x, y – натуральні числа. Чи може число $x^2+xy-2y^2+5x+4y+6$ бути простим натуральним числом?*

Розглянемо наш вираз як квадратний тричлен відносно невідомої x та розкладемо його на множники:

$$x^2 + xy - 2y^2 + 5x + 4y + 6 = x^2 + x(y+5) + (-2y^2 + 4y + 6);$$

$D = (y+5)^2 - 4 \cdot (-2y^2 + 4y + 6) = 9y^2 - 6y + 1 = (3y-1)^2 > 0, \quad \forall y \in N$.

$x_{1,2} = \dfrac{-(y+5) \mp (3y-1)}{2}$; $x_1 = -2y - 2,\ x_2 = y - 3$. А тоді отримаємо:

$x^2 + xy - 2y^2 + 5x + 4y + 6 = (x - y + 3) \cdot (x + 2y + 2)$. Цей добуток може бути простим, якщо менший з множників дорівнює одиниці, а більший є простим числом. При $y \geq 1$ перший множник менший за другий, а тому число може бути простим, тільки якщо $x - y + 3 = 1 \Leftrightarrow x = y - 2 \Rightarrow y \geq 3$, оцінимо, яким є другий множник: $x + 2y + 2 = (y-2) + 2y + 2 = 3y \vdots 3$ і є непростим для усіх $y \geq 3$. Очевидно, якщо $y = 1 \vee 2$ - перший множний не дорівнює одиниці, другий за нього – більший, а тому число є складеним.

Відповідь: число не може бути простим.

10 (4 бали). *Нехай x, y – натуральні числа. Чи може число $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y - 3$ бути простим натуральним числом?*

Розкладемо наш вираз на множники:

$$x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y - 3 = x^2 + x(y+2) + (-2y^2 + 7y - 3);$$

$D = (y+2)^2 - 4 \cdot (-2y^2 + 7y - 3) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2 > 0, \quad \forall y \in N$.

$x_{1,2} = \dfrac{-(y+2) \mp (3y-4)}{2}$; $x_1 = -2y + 1,\ x_2 = y - 3$. А тоді отримаємо:

$x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y - 3 = (x - y + 3) \cdot (x + 2y - 1)$.

При $y > 1$ перший множник менший за другий:

$\begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ x + 2y - 1 \ - \text{просте} \end{cases} \Rightarrow x - y + 3 = 1 \Leftrightarrow x = y - 2 \Rightarrow y \geq 3$, а другий множник: $x + 2y - 1 = (y-2) + 2y - 1 = (3y - 3) \vdots 3$ і є непростим для усіх $y \geq 3$.

При $y = 1$ другий множник менший за перший і маємо число $(x+2) \cdot (x+1)$, яке є складеним для $\forall x \in N$.

Відповідь: число не може бути простим.

11 (4 бали). *Знайти натуральні числа m та n, що мають максимальну суму, якщо $23(m+n) = mn$.*

<u>1 спосіб</u>: $23(m+n) = mn$, звідки $mn \vdots 23$, тобто m або n ділиться на 23. Оскільки рівняння не змінюється від того, щоб m і n поміняти місцями, то для

певності вважатимемо, що $m \vdots 23$, $m = 23k$, $k \in \mathrm{N}$. $23(23k+n) = 23kn$, звідки $23k + n = kn$, $n = \dfrac{23k}{k-1} = 23 + \dfrac{23}{k-1}$, тому $k-1=1$ або 23. А тоді $k=2$, $n=46$, $m=46$ або $n=24$, $m = 23 \cdot 24 = 552$. Другий варіант відповідає найбільшій сумі $m+n=576$.

<u>2 спосіб</u>: розв'яжемо діофантове рівняння $23(m+n) = mn$, розкладаючи на множники: $mn - 23m - 23n = 0 \Leftrightarrow (m-23)\cdot(n-23) = 23^2$. Оскільки усі дільники 23^2 є $(\pm1);(\pm23);(\pm23^2)$, враховуючи симетричність рівняння відносно m та n і умову $m,n \in N$, отримаємо два принципово різних випадки: $\begin{cases} m-23=23, \\ n-23=23, \end{cases}$ *і* $\begin{cases} m-23=23^2, \\ n-23=1. \end{cases}$ Другий випадок $\begin{cases} m=23\cdot24 \\ n=24 \end{cases}$ дає максимальну суму $m+n=576$.

11 (4 бали). *В множині натуральних чисел розв'язати рівняння* $2n^2m = 3n^2 + 5m$.

<u>1 спосіб</u>. $m = \dfrac{3n^2}{2n^2-5} \geq 2$, адже при $m=1$, $n^2 = -5$, що неможливо. Отже, $3m^2 \geq 4n^2 - 10$, $n^2 \leq 10$, $n = 1,2,3$. Перебравши отримаємо: $n=2$, $m=4$.

<u>2 спосіб</u>. Розв'яжемо діофантове рівняння $2n^2m = 3n^2 + 5m$ способом розкладання на множники: $4n^2m - 6n^2 + 10m = 0$, $(2n^2-5)\cdot(2m-3) = 15$, враховуючи обмеження на $m,n \in N$ та дільники числа 15, матимемо: $\begin{cases} 2n^2-5=1, \\ 2m-3=15, \end{cases} n \notin N;$ $\begin{cases} 2n^2-5=3, \\ 2m-3=5, \end{cases} \begin{cases} n=2, \\ m=4 \end{cases};$ $\begin{cases} 2n^2-5=15, \\ 2m-3=1, \end{cases} n \notin N.$ Від'ємні множники числа 15 не задовольняють умови задачі: $\begin{cases} 2n^2-5=-1, \\ 2m-3=-15, \end{cases} n,m \notin N.$

Відповідь: $n=2$, $m=4$.

11 (4 бали). *Довести, що для довільного цілого числа* n *існує таке ціле число* m*, що* m *ділиться без остачі на три, а число* $n+m$ *ділиться без остачі на 5.*

Якщо $n \equiv 0 \pmod 5$, то $m = 15$. Якщо $n \equiv 1 \pmod 5$, то $m = 9$. Якщо $n \equiv 2 \pmod 5$, то $m = 3$. Якщо $n \equiv 3 \pmod 5$, то $m = 12$. Якщо $n \equiv 4 \pmod 5$, то $m = 21$.

Міркувати можна так: всі цілі числа, що діляться на 3, мають вигляд:

$$\left.\begin{array}{ll} m_1 = 15k & \equiv 0(\mathrm{mod}5),\ k \in Z \\ m_2 = 15k+3 & \equiv 3(\mathrm{mod}5),\ k \in Z \\ m_3 = 15k+6 & \equiv 1(\mathrm{mod}5),\ k \in Z \\ m_4 = 15k+9 & \equiv 4(\mathrm{mod}5),\ k \in Z \\ m_5 = 15k+12 & \equiv 2(\mathrm{mod}5),\ k \in Z \end{array}\right\} \text{ є повна система лишків по модулю 5;}$$

$$\text{Нехай}\ \begin{array}{l} n_1 = 1+5t,\ t \in Z \\ n_2 = 2+5t,\ t \in Z \\ n_3 = 3+5t,\ t \in Z, \\ n_4 = 4+5t,\ t \in Z \\ n_5 = 5+5t,\ t \in Z \end{array} \ \text{тоді}\ \begin{array}{l} \exists m_4;\ (n+m_4) \vdots 5 \\ \exists m_2;\ (n+m_2) \vdots 5 \\ \exists m_5;\ (n+m_5) \vdots 5. \\ \exists m_3;\ (n+m_3) \vdots 5 \\ \exists m_1;\ (n+m_1) \vdots 5 \end{array}$$

11 (2 бали). *Знайти які-небудь два натуральні значення* n*, при яких дріб* $\frac{5n+7}{3n+12}$ *можна скоротити.*

Наприклад при $n=1$ і 4, (і 7, 10,…), дріб можна скоротити на 3.

11 (4 бали). *Довести, що ні при яких натуральних значеннях* n *дріб* $\frac{3n+7}{5n+12}$ *не можна скоротити.*

Використовуючи алгоритм Евкліда, маємо: $(5n+12;3n+7)=(3n+7;2n+5)=(2n+5;n+2)=(n+2;1)=1$. Дані числа завжди взаємно прості.

9 (4 бали). *Довести: якщо* $3a+7b+8c=0$ *для деяких цілих чисел* a,b,c *і число* $4b+c$ *без остачі ділиться на 5, то число* $24a-4b-c$ *без остачі ділиться на 25.*

<u>1 спосіб</u>: 1) так як $3a+7b+8c=0$, то $0=3a+7b+8c \ \vdots 25 \quad \big| \cdot 8$

$0=24a+56b+64c \ \vdots 25$.

2) Оскільки $4b+c \ \vdots 5$, то $5(4b+c)=20b+5c \ \vdots 25$, а тоді потроєний результат $(60b+15c) \ \vdots 25$.

$$\underbrace{24a+56b+64c}_{\vdots 25} - \underbrace{(60b+15c)}_{\vdots 25} = \underbrace{24a-4b+49c}_{\vdots 25} = (24a-4b-c) + \underbrace{50c}_{\vdots 25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (24a-4b-c) \vdots 25.$$

<u>2 спосіб</u>. Оскільки $3a+7b+8c=0$, то $3a=-7b-8c$,

$24a-4b-c=8(-7b-8c)-4b-c=-60b-65c=-15(4b+c)-50c \vdots 25$, адже $4b+c \vdots 5$.

11 (7 балів). *Знайти усі такі натуральні числа n і m, щоб $m+6$ без остачі ділилось на n, а $n+4$ без остачі ділилося на m.*

Розглянемо два випадки:

1) $m \geq n$. Якщо $n=1$, то $5 \vdots m$, $m=1$ або 5. Якщо $n=2$, то $6 \vdots m$, $m=1,2,3,6$, з яких підходять лише 2 і 6. Аналогічно міркуючи, маємо пару (n,m): $(4;2)$. При $n \geq 5$: $\frac{n+4}{m} \leq \frac{n+4}{n} = 1+\frac{4}{n} < 2$, звідки $n+4=m$, $\frac{m+6}{n} = \frac{n+10}{n} = 1+\frac{10}{n}$, тобто $n=1,2,5,10$, звідки перевіркою отримаємо: $(5;9)$, $(10;14)$.

2) $n \geq m$. Як і в попередньому випадку перебираємо $m=1,2,...,6$ і отримаємо пари (n,m): $(1,1)$, $(7,1)$, $(2,2)$, $(4,2)$, $(8,2)$, $(1,5)$, $(11,5)$, $(2,6)$. Якщо $m>6$, то $\frac{m+6}{n} \leq \frac{m+6}{m} = 1+\frac{6}{m} < 2$, $m+6=n$, $\frac{n+4}{m} = \frac{m+10}{m} = 1+\frac{10}{m}$, $m=1,2,5,10$. Маємо ще пару $(16;10)$.

Отже, маємо наступні пари (n,m): $(1,1)$, $(7,1)$, $(2,2)$, $(4,2)$, $(8,2)$, $(1,5)$, $(11,5)$, $(2,6)$, $(16;10)$, $(5;9)$, $(10;14)$.

10 (4 бали). *Нехай a,b,c - сторони трикутника і справджується рівність $a+5b+3c=6\sqrt{2bc}$. Довести, що $a<b$ і $a<c$.*

Враховуючи нерівність Коші для двох чисел отримаємо: $a+5b+3c=6\sqrt{2bc} \leq 3(2b+c)$, звідки $a \leq b$. З іншого боку, $a+5b+3c=6\sqrt{b \cdot 2c} \leq 3(b+2c)$, $3a \leq a+2b \leq 3c$, тобто $a \leq c$. Рівність $a=b$ можлива лише коли $2b=c$, тобто $a+b=2b=c$, що суперечить нерівності трикутника. Аналогічно, нерівність $a<c$ строга.

9 (2 бали). *Нехай a,b - катети, c - гіпотенуза прямокутного трикутника. Довести, що $a^3+b^3<c^3$.*

З теореми Піфагора $a^2+b^2=c^2$, помноживши на c, отримаємо $a^2c+b^2c=c^3$. Враховуючи, що $a<c \Rightarrow a^3<a^2c$ і аналогічно, $b^3<b^2c$, отримаємо: $a^3+b^3<a^2c+b^2c=c^3$.

10 (2 бали). *Знайти найменше додатне просте число p, для якого $N=p^2+3p+11$ – теж просте число.*

$p=2,\ N=21$ – не просте число; $p=3,\ N=9+9+11=29$ – просте;

Відповідь: $p=3,\ N=29$.

11 (4 бали). *Знайти усі додатні прості числа p, для яких $N=p^2+3p+11$*

– *теж просте число.*

$p = 2,\ N = 21$ – не просте число; $p = 3,\ N = 9 + 9 + 11 = 29$ – просте;

$p > 3,\ N = \underbrace{(p^2 - 1)}_{\vdots 3} + \underbrace{(3p + 12)}_{\vdots 3}$ – не може бути простим, оскільки ділиться на 3.

Зауваження: добуток $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)\vdots 3$ як добуток трьох послідовних цілих чисел, крім того, p - просте, $p > 3$; p не може ділитися на три, тому на три ділиться або $(p-1)$ або $(p+1)$, а тому $(p^2-1)\vdots 3,\ p > 3$.

Відповідь: $p = 3,\ N = 29$.

10 (2 бали). *Знайти кількість пар цілих додатних чисел* $(x; y)$*, для яких* $2x + 3y = 2007$.

Так як $2007 \vdots 3$, то один розв'язок маємо одразу: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 669 \end{cases}$, а тоді усі цілочисельні розв'язки $\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 669 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathrm{Z}$. Враховуючи умову $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, отримуємо значення для t: $\begin{cases} 3t > 0 \\ 669 - 2t > 0 \end{cases}$, $t \in \mathrm{Z}$, звідки $1 \le t \le 334,\ t \in Z$.

Відповідь: 334 пари.

11 (4 бали). *Знайти всі невід'ємні* n*, при яких розв'язки рівняння* $x^2 - 10x + n = 0$ *є натуральними числами.*

Застосуємо до діофантового рівняння метод локалізації і перебору: $x^2 - 10x + n = 0$, $\frac{D}{4} = 25 - n \ge 0$, $\begin{cases} n \le 25 \\ n \in N \end{cases}$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - n}}{1}$, $\sqrt{25-n} < 5$, а тоді $\sqrt{25-n} \in \{0;1;2;3;4\}$ і $n \in \{9;16;21;24;25\}$.

$n = 9$; $x = 5 \pm 4$, $x_1 = 1,\ x_2 = 9$.

$n = 16$; $x = 5 \pm 3$, $x_1 = 2,\ x_2 = 8$.

$n = 21$; $x = 5 \pm 2$, $x_1 = 3,\ x_2 = 7$.

$n = 24$; $x = 5 \pm 1$, $x_1 = 4,\ x_2 = 6$.

$n = 25$; $x_1 = x_2 = 5$.

Відповідь: $n \in \{9,16,21,24,25\}$.

10 (7 балів). *Знайти усі пари натуральних чисел* $(m; n)$*, для яких* $\frac{1}{m} + \frac{3}{n} = \frac{1}{12}$.

Зведемо до спільного знаменника: $\frac{n+3m}{mn}=\frac{1}{12}$; $12n+36m=mn \Rightarrow mn \,\vdots\, 12$. Розв'яжемо діофантове рівняння способом розкладання на множники. $mn-12n-36m=0$, додамо до лівої і правої частини $12\cdot 36$, отримаємо $(m-12)(n-36)=12\cdot 36=2^4\cdot 3^3$, звідки $m>12, n>36$ (якщо одночасно $m<12, n<36$, їхній добуток не може бути рівним $12\cdot 36$). Розглянувши усі варіанти, отримаємо 20 можливостей (кількість натуральних дільників числа $2^4\cdot 3^3$ визначається за формулою $\tau(p_1^{\alpha}\cdot p_2^{\beta}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma})=(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+1)$ і дорівнює $\tau(2^4\cdot 3^3)=(4+1)\cdot(3+1)=20$):

$\begin{cases} m-12=1 \\ n-36=12\cdot 36=432 \end{cases}$ $\begin{cases} m=13 \\ n=13\cdot 36=468 \end{cases}$ (Перевірка: $\frac{1}{13}+\frac{3}{13\cdot 36}=\frac{12+1}{13\cdot 12}=\frac{1}{12}$);

$\begin{cases} m-12=2 \\ n-36=2^3\cdot 3^3=216 \end{cases}$ $\begin{cases} m=14 \\ n=252 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=3 \\ n-36=2^4\cdot 3^2=144 \end{cases}$ $\begin{cases} m=15 \\ n=180 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=2^2 \\ n-36=2^2\cdot 3^3=108 \end{cases}$ $\begin{cases} m=16 \\ n=144 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=6 \\ n-36=2^3\cdot 3^2=72 \end{cases}$ $\begin{cases} m=18 \\ n=108 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=8 \\ n-36=54 \end{cases}$ $\begin{cases} m=20 \\ n=90 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=9 \\ n-36=48 \end{cases}$ $\begin{cases} m=21 \\ n=84 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=12 \\ n-36=36 \end{cases}$ $\begin{cases} m=24 \\ n=72 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=16 \\ n-36=27 \end{cases}$ $\begin{cases} m=28 \\ n=63 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=18 \\ n-36=24 \end{cases}$ $\begin{cases} m=30 \\ n=60 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=24 \\ n-36=18 \end{cases}$ $\begin{cases} m=36 \\ n=54 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=27 \\ n-36=16 \end{cases}$ $\begin{cases} m=39 \\ n=52 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=36 \\ n-36=12 \end{cases}$ $\begin{cases} m=48 \\ n=48 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=48 \\ n-36=9 \end{cases}$ $\begin{cases} m=60 \\ n=45 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=54 \\ n-36=8 \end{cases}$ $\begin{cases} m=66 \\ n=44 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=72 \\ n-36=6 \end{cases}$ $\begin{cases} m=84 \\ n=42 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=108 \\ n-36=4 \end{cases}$ $\begin{cases} m=120 \\ n=40 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=144 \\ n-36=3 \end{cases}$ $\begin{cases} m=156 \\ n=39 \end{cases}$; $\begin{cases} m-12=216 \\ n-36=2 \end{cases}$ $\begin{cases} m=228 \\ n=38 \end{cases}$;

$\begin{cases} m-12=432 \\ n-36=1 \end{cases}$ $\begin{cases} m=444 \\ n=37 \end{cases}$.

9 (7 балів). *Знайти пари натуральних чисел, що задовольняють систему*

$$\begin{cases} m+4n^2<6n+12; \\ 3m+4n>12. \end{cases}$$

$\begin{cases} m+4n^2<6n+12; \,|\cdot(-3) \\ 3m+4n>12; \end{cases}$ $\begin{cases} -3m-12n^2>-18n-36; \\ 3m+4n>12; \end{cases}$ додамо почленно: $-12n^2+4n>-18n-24$ або $6n^2-11n-12<0$, для відповідного квадратного рівняння маємо $D=121+24\cdot 12=409$, $n_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{409}}{12}\approx\frac{11\pm 20,...}{12}$, розв’язком нерівності $6n^2-11n-12<0$ є проміжок (n_1,n_2); врахуємо, що $n\in N$, маємо $n\in\{1,2\}$.

$n=1$, $\begin{cases} m<14; \\ 3m>8; \end{cases}$ $n=2$, $\begin{cases} m<8; \\ 3m>4; \end{cases}$ звідки $n=1,\ m\in\{3,4,...,13\}$; $n=2,\ m\in\{2,...,7\}$.

9 (4 бали). *Нехай n - натуральне число і остання цифра числа n^2+6n дорівнює 6. Знайти передостанню цифру числа n^2+6n.*

Число n може давати остачі $0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\ 5$ при діленні на 10, тоді $n^2+6n\equiv(-3)^2+6\cdot(-3)\equiv 9-18\equiv -9\equiv 1(\mathrm{mod}10)$ при $n\equiv -3(\mathrm{mod}10)$. Аналогічно, перебираючи всі варіанти приходимо до висновку, що $n\equiv 2(\mathrm{mod}10)$. $n=10k+2,\ \ k\in N_0$.

$n^2+6n=100k^2+40k+4+60k+12=100(k^2+k)+16$, тобто передостання цифра 1.

9 (7 балів). *Знайти усі пари цілих чисел (x,y), для яких $\sqrt{xy}-\sqrt{x}=\sqrt{141-6\sqrt{y}}$.*

Піднісши обидві частини до квадрата маємо: $xy-2x\sqrt{y}+x=141-6\sqrt{y}$, $xy+x-141=(2x-6)\sqrt{y}$. Якщо $x=3$, то $3y-138=0$, $y=46$. Якщо $x\neq 3$, то $\sqrt{y}=\frac{xy+x-141}{2x-6}\in Q$, тому $\sqrt{y}=k\in \mathrm{Z}_+$. $\sqrt{x}(k-1)=\sqrt{141-6k}$. Перевіркою переконуємося, що $k\neq 0,1$, $x\neq 0$, тому $\sqrt{141-6k}=\sqrt{x}(k-1)\geq k-1$, $141-6k\geq k^2-2k+1$, $k^2+4k-140\leq 0$, звідси $k=1,2,...,9,10$. $x=\frac{141-6k}{(k-1)^2}$. Якщо k - непарне, то $(k-1)$ – парне число і тому $x\notin \mathrm{N}$, таким чином, $k=2,4,6,8,10$. Перевіркою, крім розв’язку $(3;46)$, знаходимо ще: $(129;4)$, $(17;16)$, $(1;100)$.

9 (7 балів). *Довести, що число* $\underbrace{11...1}_{n}20\underbrace{22...2}_{n-1}409$ *є квадратом цілого числа.*

Маємо: $\underbrace{11...1}_{n}20\underbrace{22...2}_{n-1}409 = \underbrace{11...1}_{n} \cdot 10^{n+4} + 2 \cdot 10^{n+3} + \underbrace{22...2}_{n-1} \cdot 10^3 + 409 =$

$$= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^{n+4} + 2 \cdot 10^{n+3} + 2 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} \cdot 10^3 + 409 = \frac{1}{9} \cdot \left(10^{2n+4} - 10^{n+4} + 18 \cdot 10^{n+3} + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot 10^{n+2} - 2000 + 3681\right) = \frac{1}{9}\left(10^{2n+4} + 82 \cdot 10^{n+2} + 1681\right) = \left(\frac{10^{n+2} + 41}{3}\right)^2.$$

Зазначимо, що число $\left(10^{n+2} + 41\right) \vdots 3$, адже сума його цифр $6 \vdots 3$.

9 (7 балів). *Яким має бути число* x, *щоб проміжок* $\left(2 - x - x^2; x^2 + x - 2\right)$ *містив єдине ціле число.*

Маємо проміжок $\left(-\left(x^2 + x - 2\right); x^2 + x - 2\right)$, який містить число 0. Щоб інших цілих чисел він не містив необхідно і достатньо, щоб $0 < x^2 + x - 2 \le 1$. Звідки розв'язуючи відповідні нерівності отримаємо:

$$x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right].$$

10 (4 бали). *Знайти всі цілі* x *та* y, *для яких справджуються обидва співвідношення:* $\begin{cases} 10x - 11y^2 + 83 \ge 0, \\ 7x - 3y^2 + 47 \le 0. \end{cases}$.

$$\begin{cases} 10x - 11y^2 + 83 \ge 0, \\ 7x - 3y^2 + 47 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{11y^2 - 83}{10}, \\ x \le \dfrac{3y^2 - 47}{7}, \end{cases} \Rightarrow \frac{11y^2 - 83}{10} \le \frac{3y^2 - 47}{7}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 77y^2 - 581 \le 30y^2 - 470 \Leftrightarrow 47y^2 \le 111 \Leftrightarrow y^2 < 3$$

Враховуючи, що $y \in Z$, маємо $y \in \{0; \pm 1\}$. Маємо $(x \in Z)$, :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ 10x + 83 \ge 0, \\ 7x + 47 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 1, \\ 10x + 72 \ge 0, \\ 7x + 44 \le 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ -8{,}3 \le x \le -6\dfrac{5}{7}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 1, \\ -7{,}2 \le x \le -6\dfrac{2}{7}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x \in \{-8; -7\}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 1, \\ x = -7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $(-8; 0), (-7; 0), (-7; -1), (-7; 1)$.

11 (4 бали). *Знайти усі трійки цілих* (x, y, z)*, для яких справджуються обидва співвідношення:* $\begin{cases} x+2y+xz=2, \\ x+3y-yz=3. \end{cases}$.

Дослідимо, чи можуть невідомі (x, y, z) набувати значень, рівних нулю:

$x=0$ $\begin{cases} 2y=2 \\ 3y-yz=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1; \\ z=0; \end{cases}$ (0; 1; 0). При $y=0$ $\begin{cases} x+xz=2, \\ x=3; \end{cases}$ розв'язки не є цілими. При $z=0$ отримуємо розв'язок, який вже мали: (0; 1; 0).

Нехай невідомі відмінні від нуля. Виключимо невідомі (x, y) по черзі з рівнянь, матимемо:

$\begin{cases} x=\dfrac{2z}{z^2-2z-1}, \\ y=\dfrac{-3z-1}{z^2-2z-1}. \end{cases}$ Першу умову можна переписати як $x(z^2-2z-1)-2z=0$

або $x=xz^2-2xz-2z$; права частина рівності ділиться на z, а тому $x \vdots z$, тобто частка $\dfrac{x}{z} \in Z$. З першої умови системи маємо: $\dfrac{x}{z}=\dfrac{2}{z^2-2z-1} \in Z$, або $2 \vdots (z^2-2z-1)$, це можливо, якщо вираз z^2-2z-1 набуває значень $\pm 1; \pm 2$.

Перебираючи усі можливі варіанти: $\left[\begin{array}{l} z^2-2z-1=-1, \\ z^2-2z-1=1, \\ z^2-2z-1=-2, \\ z^2-2z-1=2, \end{array}\right.$ матимемо (цілочисельні)

розв'язки: (–4; 7; 2); (–1; 2; 1); (–1; 1; – 1); (3; – 5; 3).

Відповідь: (0; 1; 0); (–4; 7; 2); (–1; 2; 1); (–1; 1; – 1); (3; – 5; 3).

9 (7 балів). *Знайти всі значення параметра* a*, для яких обидва корені рівняння* $x^2-(a-5)x+3a=0$ *є цілими числами.*

Запишемо теорему Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=a-5, \\ x_1 \cdot x_2=3a. \end{cases}$ З першої рівності з того, що $x_1, x_2 \in Z$ випливає, що і $a \in Z$. Виразимо x_1 через x_2: $\begin{cases} x_1=a-5-x_2, \\ (a-5-x_2)\cdot x_2=3a, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=a-5-x_2, \\ (x_2-3)\cdot a={x_2}^2+5x_2. \end{cases}$ Маємо: $x_2 \neq 3:\ 0 \cdot a \neq 6$, а тому:

$$a=\frac{x_2^{\,2}+5x_2}{x_2-3}=x_2+8+\frac{24}{x_2-3}\in Z\Rightarrow 24\,\vdots\,(x_2-3).$$

Ділимо $x_2^{\,2}+5x_2$ на x_2-3 «кутом» або за схемою Горнера:

$$\begin{array}{r|cc|l} & \underline{1} & \underline{5} & \underline{0} \\ 3 & 1 & 8 & 24 \end{array}.$$

Всього натуральних дільників числа $24=2^3\cdot 3^1$ є $\tau(24)=(3+1)\cdot(1+1)=8$, цілих – вдвічі більше $\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 8,\pm 12,\pm 24\}$.

Якщо $x_2-3=-1,\ x_2=2,\ a=-14;$ якщо $x_2-3=1,\ x_2=4,\ a=36;$ $x_2-3=-2,\ x_2=1,\ a=-3;$ $x_2-3=2,\ x_2=5,\ a=25;$ $x_2-3=-3,\ x_2=0,\ a=0;$ $x_2-3=3,\ x_2=6,\ a=22;$ $x_2-3=-4,\ x_2=-1,\ a=1;$ $x_2-3=4,\ x_2=7,\ a=21;$ (а далі усі значення a повторюються: двічі – для коренів x_1 та x_2).

Відповідь: $a\in\{-14,-3,0,1,21,22,25,36\}$.

10 (4 бали). *Чи кожне натуральне число, кратне чотирьом, можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел? Скількома способами можна подати в такому вигляді число 48?*

Нескладно помітити, що $(k+1)^2-(k-1)^2=4k\,\vdots\,4$, але (за умовою) $(k+1);(k-1)$ мають бути натуральними. Очевидно, що $(k-1)\notin N,\ k=1$. А тому – єдине натуральне число, кратне чотирьом, не можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел – це число 4.

$48=m^2-n^2\Leftrightarrow(m-n)\cdot(m+n)=48$. Маємо діофантове рівняння. Оскільки $48=2^4\cdot 3^1$, число натуральних дільників числа $\tau(48)=(4+1)\cdot(1+1)=10$, то є 10 можливостей для 48: $48=1\cdot 48,\ 48=2\cdot 24,\ 48=3\cdot 16$ і т.д.

Зауважимо, що з умови $(m-n)\cdot(m+n)=48$ і того, що $m,n\in N$ випливає, що $(m+n)\in N$, а тоді і $(m-n)\in N$. Крім того, $m-n<m+n$ та $m-n$ і $m+n$ - числа однієї парності. А тому відпадають варіанти типу $1\cdot 48,\ 3\cdot 16$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-n=2,\\ m+n=24,\end{cases}\\ \begin{cases}m-n=4,\\ m+n=12,\end{cases}\\ \begin{cases}m-n=6,\\ m+n=8,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=13,\\ n=11,\end{cases}\\ \begin{cases}m=8,\\ n=4,\end{cases}\\ \begin{cases}m=7,\\ n=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: 48 можна зобразити у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел трьома способами $48=13^2-11^2$, $48=8^2-4^2$, $48=7^2-1^2$.

10 (4 бали). *Чи кожне непарне число можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел? Скількома способами можна подати в такому вигляді число 45?*

Нескладно помітити, що $(k+1)^2-k^2=2k+1$, але $2k+1\geq 3, \forall k\in N$. Очевидно, що цю умову не задовольняє єдине непарне натуральне число – один. А тому – єдине натуральне число, яке не можна подати як різницю квадратів двох натуральних чисел – це число 1.

$45=m^2-n^2 \Leftrightarrow (m-n)\cdot(m+n)=48$. Маємо діофантове рівняння.

$45=3^2\cdot 5^1$, $\tau(45)=(2+1)\cdot(1+1)=6$, є 6 можливостей: $45=1\cdot 45,\ 45=3\cdot 15,\ 45=5\cdot 9,\ 45=9\cdot 5$ і т.д.

Маємо $(m+n)\in N$, $(m-n)\in N$, $m-n<m+n$. А тому відпадають варіанти $9\cdot 5, 15\cdot 3, 45\cdot 1$. Маємо 3 можливості:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-n=1,\\ m+n=45,\end{cases}\\ \begin{cases}m-n=3,\\ m+n=15,\end{cases}\\ \begin{cases}m-n=5,\\ m+n=9,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=23,\\ n=22,\end{cases}\\ \begin{cases}m=9,\\ n=6,\end{cases}\\ \begin{cases}m=7,\\ n=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: 45 можна зобразити у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел трьома способами $45=23^2-22^2$, $45=9^2-6^2$, $45=7^2-2^2$.

<u>9 (7 балів).</u> *Довести, що існує нескінченна кількість натуральних чисел n, для одне з чисел 2^n+5 або 2^n+17 ділиться без остачі на 7.*

Розглянемо, які остачі дають при діленні на 7 різні степені двійки:

$2^1\equiv 2(\mathrm{mod}\,7); 2^2\equiv 4(\mathrm{mod}\,7);\ 2^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,7);$ а тоді

$2^{3n+1}\equiv 2(\mathrm{mod}\,7); 2^{3n+2}\equiv 4(\mathrm{mod}\,7);\ 2^{3n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7);$ розглянемо 2^n+5 та 2^n+17:

$2^{3n+1}+5\equiv 2+5\equiv 0(\mathrm{mod}\,7);\quad 2^{3n+2}+17\equiv 21\equiv 0(\mathrm{mod}\,7).$

Отже, всі числа виду $\left(2^{3n+1}+5\right)\vdots\, 7;\ \left(2^{3n+2}+17\right)\vdots\, 7$, $n\in N$.

10 (7 балів). *Довести, що існує нескінченна кількість натуральних чисел* n*, для одне з чисел* 2^n+6 *або* 2^n+19 *ділиться без остачі на 7.*

Дивись попередню задачу, $2^{3n+1}\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,7); 2^{3n+2}\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,7);$ $2^{3n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7);$ і тоді $2^{3n}+6\equiv 1+6\equiv 0(\mathrm{mod}\,7);$ $2^{3n+1}+19\equiv 21\equiv 0(\mathrm{mod}\,7).$

Відповідь: всі числа виду $\left(2^{3n}+6\right)\vdots\, 7;$ $\left(2^{3n+1}+19\right)\vdots 7,$ $n\in N.$

11 (7 балів). *Довести, що для довільного* $n\in N$ *існує* $m\in N$*, для якого* $\left(2^m+1\right)\vdots\, 3^n$.

1. Аналіз розв'язання задачі та висунення робочої гіпотези.

Оскільки $n\in N$, починаємо з $n=1$. Очевидно, існує $m=1$ таке, що $\left(2^1+1\right)\vdots\, 3^1$ і умова задачі виконується; $n=2$, прагнемо підібрати m так, щоб $\left(2^m+1\right)\vdots\, 3^2$. Оскільки $2^3+1=9\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)$, то $m=3$. Нехай $n=3$: вираз $\left(2^m+1\right)$ має ділитися вже на 3^3, тобто на 27, а для цього він повинен ділитися спочатку на 3^2 (сума цифр має ділитися на 9). Розглядаємо: $2^4=16;\ 16\equiv 7(\mathrm{mod}9);\ 2^4+1\equiv 8(\mathrm{mod}\ 9);$ 2^4+1 не ділиться на 9, а тим більше на 27; отже $m\neq 4$;

$2^5=32;\ 32\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 9);\ 2^5+1\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 9);\quad m\neq 5;$

$2^6=64;\ 64\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 9);\ 2^6+1\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 9);\quad m\neq 6;$

$2^7=128;\ 128\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 9);\ 2^7+1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 9);\quad m\neq 7;$

$2^8=256;\ 256\equiv 4(\mathrm{mod}\ 9);\ 2^8+1\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 9);\quad m\neq 8;$

$2^9=512;\ 512\equiv 8\ (\mathrm{mod}9);\ 2^9+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}9);\ \left(2^9+1\right)\vdots\, 9;$ тепер перевіряємо подільність на 27: $\left(2^9+1\right)\vdots 27,\ 513=27\cdot 19$, тому $m=9$. Отже, для $n=3$ існує $m=9$ таке, що умова задачі виконується. Порівнюючи три отримані результати (для $n=1$ маємо $m=1=3^0$; для $n=2$ існує $m=3=3^1$; для $n=3$, відповідно, $m=9=3^2$), висуваємо гіпотезу: $\left(\forall n\in N\right)\left(\exists m=3^{n-1}\in N\right)$ $\left(2^m+1\right)\vdots\, 3^n$.

2. Доведення (чи спростування) робочої гіпотези. $\left(\forall n\in N\right)\left(2^{3^{n-1}}+1\right)\vdots\, 3^n$.

Із означення подільності маємо: $\left(2^{3^{n-1}}+1\right)\vdots\, 3^n\Leftrightarrow 2^{3^{n-1}}+1=A\cdot 3^n,\ A\in Z$, або (що те ж саме) $2^{3^{n-1}}=A\cdot 3^n-1,\ A\in Z$. Доведення (індукція по n).

1. База індукції $n=1$ (перевірена при висуненні робочої гіпотези).

2. Індукційне припущення: $(\forall k \in N)$, що $\left(2^{3^{k-1}}+1\right) \vdots\ 3^k$ або $2^{3^{k-1}} = A\cdot 3^k - 1,\ A\in Z$.

3. Індукційний крок: покажемо, що для $(k+1)$ твердження виконується, тобто що $\left(2^{3^k}+1\right) \vdots\, 3^{k+1}$, або $2^{3^k}+1 = B\cdot 3^{k+1},\ B\in Z$ чи $2^{3^k} = B\cdot 3^{k+1}-1,\ B\in Z$.

$$2^{3^k} = 2^{3^{k-1}\cdot 3} = \left(2^{3^{k-1}}\right)^3 = (A\cdot 3^k-1)^3 = \underbrace{(A\cdot 3^k)^3 - 3\cdot(A\cdot 3^k)^2 + 3\cdot(A\cdot 3^k)}_{\vdots\, 3^{k+1}} - 1.$$

Вираз, що містить перші три доданки ділиться націло на 3^{k+1}, тобто дорівнює цілому числу *B*, помноженому на 3^{k+1}. А тоді $2^{3^k} = B\cdot 3^{k+1}-1,\ B\in Z \ \Leftrightarrow \left(2^{3^k}+1\right) \vdots\, 3^{k+1}$. А тому твердження має місце для усіх натуральних n.

<u>11 (7 балів).</u> *Довести, що для довільного $n\in N$ існує $m\in N$, для якого* $\left(7^m-1\right) \vdots\ 3^{n+2}$.

Доведення. Очевидно, що задачу можна розв’язати аналогічно до попередньої. Наведемо інше доведення.

При діленні на 3^{n+2} всі натуральні числа дають 3^{n+2} остач (скінченне число): $0, 1, 2, \ldots, 3^{n+2}-2, 3^{n+2}-1$. Оскільки натуральних чисел виду 7^m нескінченно багато, то за принципом Діріхле $\exists m_1, m_2 \in N$, $m_1 \neq m_2$ такі, що 7^{m_1} та 7^{m_2} дають однакові остачі при діленні на 3^{n+2} (не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $m_1 > m_2$). А тоді різниця $7^{m_1}-7^{m_2} \ \vdots\ 3^{n+2}$. Очевидно, що $7^{m_1}-7^{m_2} \ \vdots\ 3^{n+2} \Leftrightarrow 7^{m_2}(7^m-1) \vdots\ 3^{n+2}$, де $m = m_1 - m_2$. Оскільки найбільший спільний дільник $(3,7)=1$, то і будь-які їхні натуральні степені також взаємно прості, тобто $(3^{n+2}, 7^{m_2}) = 1$. А тоді $\left(7^m-1\right) \vdots\ 3^{n+2}$.

10 (4 бали). *Довести, що для $\forall m\in Z\ \exists n\in Z$, для якого* $\left(n^4+4n+m\right) \vdots\ 7$.

Позначимо через $A(n) = n^4+4n$ та розглянемо $A(0) = 0^4 + 4\cdot 0 = 0 \equiv 0 \pmod 7$;

$A(1) = 1^4 + 4\cdot 1 = 5 \equiv 5 \pmod 7$; $\quad A(2) = 2^4 + 4\cdot 2 = 24 \equiv 3 \pmod 7$;

$A(3) = 3^4 + 4\cdot 3 = 93 \equiv 2 \pmod 7$; $\quad A(4) = 4^4 + 4\cdot 4 = 272 \equiv 6 \pmod 7$;

$A(5) = 5^4 + 4\cdot 5 = 645 \equiv 1 \pmod 7$; $\quad A(6) = 6^4 + 4\cdot 6 \equiv (-1)^4 + 24 \equiv 4 \pmod 7$.

Очевидно, що коли $n \equiv 0 \pmod 7$, то $A(n) \equiv A(0) \equiv 0 \pmod 7$; при $n \equiv 1 \pmod 7$ $A(n) \equiv 5 \pmod 7$, при $n \equiv 2 \pmod 7$ $A(n) \equiv 3 \pmod 7$ і т.д., тобто, коли n пробігає повну систему лишків за модулем 7, вираз $A(n)$ також пробігає повну систему лишків за модулем 7.

А це в свою чергу означає, що яким би не було число $m \in Z$, для нього завжди знайдеться таке число n, що вираз $A(n)+m$ буде ділитися націло на 7. Наприклад, якщо $m \equiv 1 \pmod 7$, існує $n \equiv 4 \pmod 7$ таке, що $\left(n^4+4n+m\right) \equiv A(n)+m \equiv 6+1 \equiv 0 \pmod 7$, тобто $\left(n^4+4n+m\right) \vdots\, 7$.

9 (7 балів). *Довести, що ні при якому* $n \in N$ *числа* $2^n+1,\ 2^n+123,\ 2^n+125$ *одночасно не можуть бути простими.*

1. Очевидно, що при $n=1$ друге число $2^n+123=125 \vdots 5$, а тому не є простим, отже $n \neq 1$.

2. Якщо показник n має непарні дільники виду $2k+1,\ k \in N$, тобто $n=(2k+1)\cdot t,\ \ k,t \in N$, тоді перше число

$2^n+1=2^{(2k+1)\cdot t}+1=\left(2^t\right)^{2k+1}+1^{2k+1} \vdots \left(2^t+1\right)$ – не є простим, тому n не може мати непарних дільників.

3. Лишився один випадок, коли n – парне натуральне число, що не має непарних дільників, тобто $n=2^k$. Покажемо, що і за цих обставин три числа $2^{2^k}+1,\ 2^{2^k}+123,\ 2^{2^k}+125$ не можуть бути одночасно простими.

Пошуки ідеї та висунення робочої гіпотези: $k=1,\ 2^{2^1} \equiv 1 \pmod 3$; $k=2,\ 2^{2^2} \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 3$; $k=3,\ 2^{2^3} \equiv 2^8 \equiv 16^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$; гіпотеза: $2^{2^k} \equiv 1 \pmod 3$. Доведення: база індукції (перевірена); індукційне припущення: має місце для $k \in N$: $2^{2^k} \equiv 1 \pmod 3$. Покажемо істинність для $k+1$: $2^{2^{k+1}}=2^{2^k\cdot 2}=\left(2^{2^k}\right)^2$, з урахуванням індукційного припущення маємо $2^{2^{k+1}}=\left(2^{2^k}\right)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$. А тоді третє число $2^n+125 \equiv 1+2 \equiv 0 \pmod 3$ – ділиться на 3, а тому не є простим. Твердження доведено.

9 (4 бали). *Для скількох пар цілих чисел* m,n *справджується рівність* $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{845}$.

Виразимо $\sqrt{m} = \sqrt{845} - \sqrt{n}$, а тоді $m = 845 + n - 2\sqrt{845n}$, так як $m \in Z$, то $\sqrt{845n} \in Z$. Так як $845 = 13^2 \cdot 5$, то $n = 5k^2$, де $k \in N_0$. Аналогічно $\sqrt{n} = \sqrt{845} - \sqrt{m}$, $n = 845 + m - 2\sqrt{845m}$, тоді $m = 5t^2$, де $t \in N_0$.

Тоді $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{845} \Leftrightarrow k\sqrt{5} + t\sqrt{5} = 13\sqrt{5} \Leftrightarrow k + t = 13,\ k, n \in N_0$. Очевидно, 14 пар цілих невід'ємних k, n задовольняють останню умову.

Перевірка: при $k = 0, t = 13$ $m = 845,\ n = 0$;
$k = 1, t = 12$ $m = 720,\ n = 5$ $\sqrt{720} + \sqrt{5} = 12\sqrt{5} + \sqrt{5} = 13\sqrt{5} = \sqrt{845}$ і т.д.

Відповідь: 14 пар.

10 (4 бали). *Для скількох пар цілих чисел m,n справджується рівність* $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{320}$.

Аналогічно: $320 = 64 \cdot 5$, $\sqrt{m} + \sqrt{n} = 8\sqrt{5}$, $m = 320 + n - 2\sqrt{320n}$ і $n = 5k^2$, $k \in N_0$; $n = 845 + m - 2\sqrt{320m}$ і $m = 5t^2$, $t \in N_0$.

Тоді $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{320} \Leftrightarrow k\sqrt{5} + t\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \Leftrightarrow k + t = 8,\ k, n \in N_0$.

Відповідь: 9 пар.

11 (4 бали). *Знайти усі трійки простих чисел* $(p; q; r)$, *для яких справджується рівність* $pqr = p^2 + q^2 + r^2$.

Припустимо, що числа p, q, r не діляться на три, тоді p, q, r мають вигляд $(3k \pm 1)$, а тоді p^2, q^2, r^2 мають вигляд $(3k \pm 1)^2 \equiv 1(\bmod 3)$; ліва частина рівності не ділиться на три, а права частина при діленні на три дає остачу нуль: $1 + 1 + 1 \equiv 0(\bmod 3)$, тобто ділиться на три. Неможливо. Тому одне з чисел (наприклад, p) ділиться на три (і є простим), отже $p = 3$.

Маємо $p = 3$, $pqr = p^2 + q^2 + r^2$, звідки $3qr = 9 + q^2 + r^2$. Нехай числа q, r не діляться на три, аналогічно: q^2, r^2 мають вигляд $(3k \pm 1)^2 \equiv 1(\bmod 3)$; тепер ліва частина рівності ділиться на три, а права частина при діленні на три дає остачу два: $0 + 1 + 1 \equiv 2(\bmod 3)$, тобто не ділиться на три. Неможливо. Тому одне з чисел (наприклад, q) ділиться на три, є простим, отже $q = 3$.

З рівності $pqr = p^2 + q^2 + r^2$ маємо $\underbrace{9r}_{\vdots 9} = \underbrace{18}_{\vdots 9} + r^2$, звідки $r \vdots 3 \Rightarrow r = 3$.

Відповідь: 1 пара $(3;3;3)$.

10 (4 бали). *Знайти всі пари простих натуральних чисел* n, m, *для яких виконується умова* $n^2 - 19n = m^2 - 29m + 120$.

Запишемо дану умову як квадратне рівняння відносно m:

$m^2 - 29m + \left(120 - n^2 + 19n\right) = 0$, знайдемо його корені

$D = (29)^2 - 4\left(120 - n^2 + 19n\right) = (2n)^2 - 2 \cdot 2n \cdot 19 + 361 = (2n - 19)^2$,

$$m_{1,2} = \frac{29 \pm (2n - 19)}{2} \text{ або } \left[\begin{array}{l} m_1 = n + 5, \\ m_2 = 24 - n. \end{array}\right.$$

Аналіз першого розв'язку $m_1 = n + 5$ дозволяє зробити висновок, що при $n = 2$ маємо пару простих $(2; 7)$, якщо n просте і $n > 2$, n - непарне, тоді $m_1 = n + 5$ - парне (не рівне двом), отже не може бути простим.

З другого розв'язку $m_2 = 24 - n$ отримаємо (перебором) пари простих $(5; 19)$, $(7; 17)$, $(11; 13)$, $(13; 11)$, $(17; 7)$, $(19; 5)$.

Відповідь: $(2; 7)$, $(5; 19)$, $(7; 17)$, $(11; 13)$, $(13; 11)$, $(17; 7)$, $(19; 5)$.

10 (4 бали). Довести: якщо $mn + pq$ ділиться на $m - p$, то і $mq + np$ ділиться на $m - p$, де *m, n, p, q* – цілі числа.

За умовою, $\dfrac{mn + pq}{m - p} = t$ – ціле число. Розглянемо дріб $\dfrac{mq + np}{m - p}$ та віднімемо від нього ціле число *t*:

$$\frac{mq + np}{m - p} - t = \frac{mq + np}{m - p} - \frac{mn + pq}{m - p} = \frac{q(m - p) - n(m - p)}{m - p} = q - n.$$

Звідки $\dfrac{mq + np}{m - p} = q - n + t$ – ціле число.

9 (4 бали). Довести, що $m^5 - m \,\vdots\, 30$, де m – натуральне число.

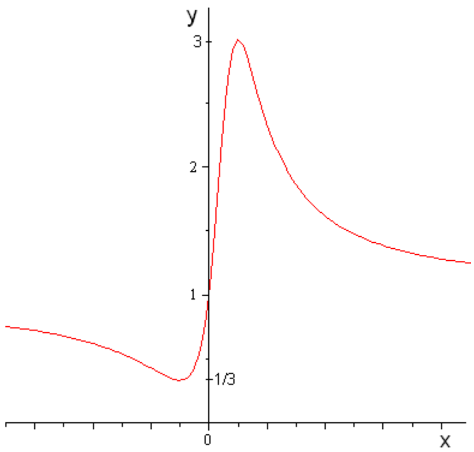
Розв'язання: $m^5 - m = (m-1)m(m+1)(m^2+1) = (m-1)m(m+1)\cdot[(m^2-4)+5] =$

$= (m-2)\,(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2) + 5\,(m-1)\,m\,(m+1)$.

Кожен доданок отриманої суми ділиться на *30*, тому що, добуток *k* послідовних чисел натурального ряду ділиться на *k*! Перший доданок ділиться на *5*!*=120,* другий – на *30*, тому і сума ділиться на *30*.

10 (2 бали). *Знайти множину значень функції* $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

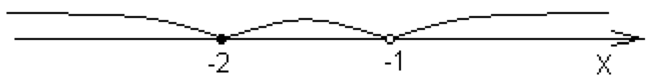
$D(y) = R$. Обчисливши похідну, встановлюємо проміжки її знакосталості та критичні точки, маємо: на проміжку $x \in (-\infty; -1)$ функція спадає: при $x \to -\infty$ $y \to 1^-$; $y(-1) = \dfrac{1}{3}$; на проміжку $x \in (-1; 1)$ функція зростає: від $y(-1) = \dfrac{1}{3}$ до $y(1) = 3$; на проміжку $x \in (1; \infty)$ функція спадає: $y(1) = 3$; при $x \to \infty$ $y \to 1^+$; таким чином, маємо $y_{\min}(-1) = \dfrac{1}{3}$; $y_{\max}(1) = 3$.

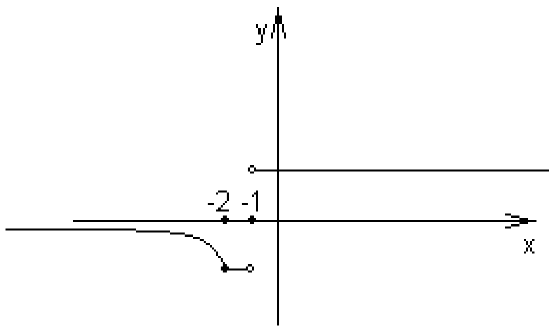


Відповідь: $E(y) = \left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

9 (7 балів). *Побудувати графік функції* $y = \dfrac{|x+2| + x}{|x+1|}$.

$x \neq -1$



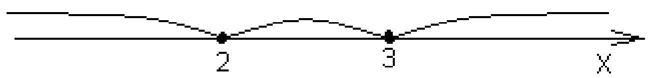


Маємо:

$$y = \begin{cases} \dfrac{-x-2+x}{-x-1} = \dfrac{2}{x+1}; & x \in (-\infty; -2], \\ \dfrac{x+2+x}{-(x+1)} = -2; & x \in (-2; -1), \\ \dfrac{x+2+x}{x+1} = 2; & x \in (-1; +\infty). \end{cases}$$

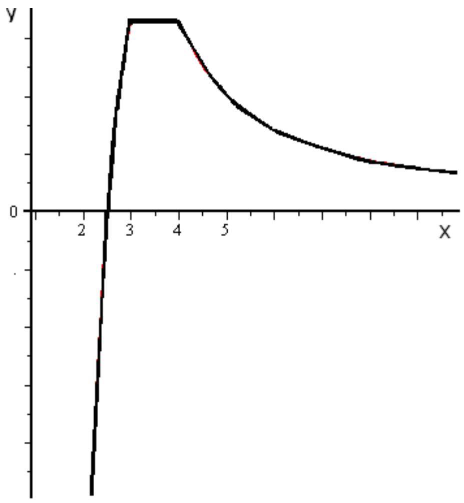
11 (4 бали). *Побудувати графік функції* $y = \dfrac{\log_2(|x-2| - |x-3| + 1)}{|x-1| + |x-4|}$.

ОДЗ: Знаменник не дорівнює нулю ні при яких значеннях аргументу.



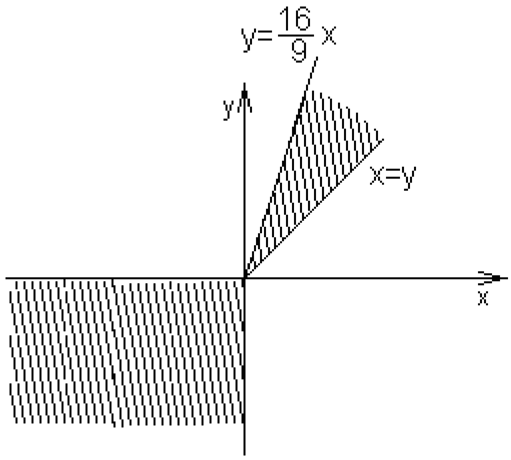
У чисельнику: при $x \in (-\infty; 2]$ $|x-2| - |x-3| + 1 = -x + 2 + x - 3 + 1 = 0 > 0$ неможливо; при $x \in (2; 3)$ $|x-2| - |x-3| + 1 = x - 2 + x - 3 + 1 = 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

виконується для усіх x проміжку; при $x \in [3;\infty)$ $|x-2|-|x-3|+1 = x-2-x+3+1 = 2>0$ виконується для усіх $x \in [3;\infty)$. Тому ОДЗ: $x \in (2;\infty)$. Маємо:



$$y = \begin{cases} \dfrac{\log_2(2x-4)}{x-1-x+4} = \dfrac{\log_2(2x-4)}{3}; & x \in (2;3], \\ \dfrac{\log_2 2}{x-1-x+4} = \dfrac{1}{3}; & x \in (3;4), \\ \dfrac{\log_2 2}{x-1+x-4} = \dfrac{1}{2x-5}; & x \in [4;\infty). \end{cases}$$

на першому проміжку – зростаюча функція (основа логарифма $2>1$): при $x \to 2^+$ $y \to -\infty$; $y(2{,}5)=0$; $y(3)=\dfrac{1}{3}$; на другому проміжку – стала функція (відрізок прямої); на третьому – спадна функція (частина гілки гіперболи): $y(4)=\dfrac{1}{3}$; при $x \to \infty$; $y \to 0$.



9 (4 бали). *Зобразити на площині Oxy множину точок (x,y), для координат яких справджується нерівність* $4x+3y \le 7\sqrt{xy}$.

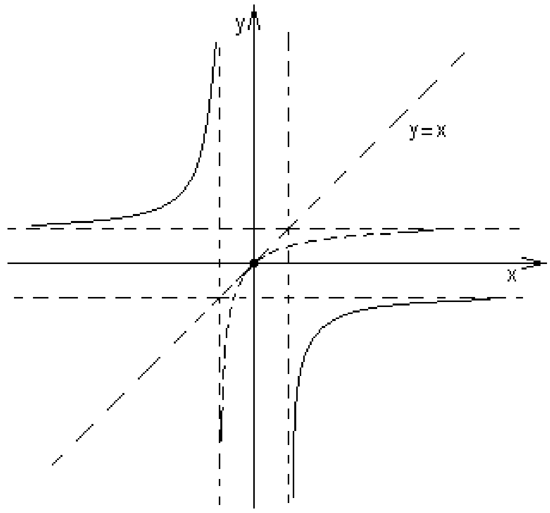
Числа x і y однакового знаку, тому нехай $y>0$, тоді $x>0$. Маємо першу чверть:

$$4x+3y \le 7\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(4\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) \le 0 \Leftrightarrow x \le y \le \frac{16}{9}x.$$

Якщо $x \le 0$, $y \le 0$, ліва частина нерівності – недодатна, а права – невід'ємна, умова виконується для усіх точок $(x;y)$ третьої чверті і точки $(0;0)$. Тому маємо множину точок:

9 (4 бали). *На координатній площині Oxy зобразити множину точок (x,y), для яких* $|x-y|+xy=0$.

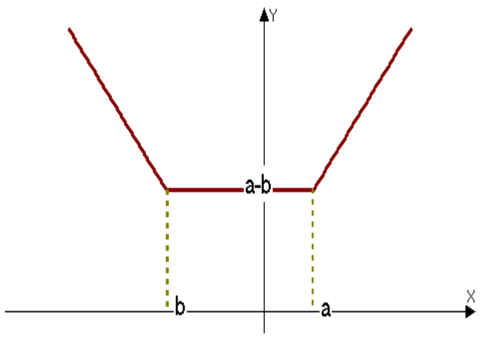
Як легко переконатися, що разом з точкою $A(x,y)$, яка належить даній множині, дана множина містить точку $A'(y,x)$. Тому побудуємо дану множину при умові $y \ge x$ і отриману фігуру відобразимо симетрично відносно прямої $y = x$. При $y \ge x$: $y - x + yx = 0$, $y = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. Шукана множина є точка $(0{,}0)$ і 2 гілки, виділені суцільною лінією.



11 (2 бали). *Скільки розв'язків має рівняння:* $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2 + x - x^2} = \sqrt{2} - \sqrt{x}$.

$x \ge 0$, адже в рівнянні є вираз $\sqrt{x}$, $x \ge 2$, адже $x^2 - 2x \ge 0$. Звідки $\sqrt{2} - \sqrt{x} \le \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, але $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2 + x - x^2} \ge 0$. Отже, $x = 2$. Перевіркою переконуємося, що $x = 2$ задовольняє рівняння.

10 (4 бали). *Знайти усі трійки* (a,b,c), *для яких рівняння* $|x-a| + |x-b| = c$ *має єдиний розв'язок.*



Якщо $a = b$, то $2|x-a| = c$, $x - a = \pm\frac{c}{2}$ (при $c \ge 0$). У цьому випадку ми маємо один розв'язок лише тоді, коли $c = 0$. Нехай $a \ne b$, для певності нехай $a > b$. Розглянемо функції $y = |x-a| + |x-b|$ і $y = c$. Розглянувши першу функцію на проміжках $x \in (-\infty; b]$, $x \in [b; a]$, $x \in [a; +\infty)$, легко побудувати її графік. Як видно з рисунка, ми маємо один розв'язок, коли $a = b$. Цей випадок розглянутий. Отже, $a = b$, $c = 0$.

Відповідь: $(a,a,0)$, $a \in R$.

9 (4 бали). *Розв'язати рівняння* $(x+1)(x+2)(x+6)(x+7) = 24$.

$$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+6)\cdot(x+7) = 24 \Leftrightarrow \big((x+1)\cdot(x+7)\big)\cdot\big((x+2)\cdot(x+6)\big) = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 7)\cdot(x^2 + 8x + 12) = 24.$$

Виконаємо заміну: $x^2+8x=t;$ отримаємо:
$(t+7)\cdot(t+12)=24 \Leftrightarrow t^2+19t+60=0 \Leftrightarrow (t+15)\cdot(t+4)=0$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x=-15, \\ x^2+8x=-4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)\cdot(x+5)=0, \\ (x+4)^2=12, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=-3, \\ x_3=-4-2\sqrt{3}, \\ x_4=-4+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{-4-2\sqrt{3},\ -5, -3,\ -4+2\sqrt{3}\}$.

10 (4 бали). *Розв'язати рівняння:* $(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-6)=4$.
$(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-6)=4 \ \Leftrightarrow \big((x-2)\cdot(x-6)\big)\cdot\big((x-3)\cdot(x-5)\big)=4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-8x+12)\cdot(x^2-8x+15)=4$; заміна $x^2-8x=t;$ отримаємо:
$(t+12)\cdot(t+15)=4 \Leftrightarrow (t-11)\cdot(t-16)=0$.

Відповідь: $x \in \{4-\sqrt{5},\ 4,\ 4+\sqrt{5}\}$, $x=4$ є двократним коренем.

Розв'яжіть самостійно:

1. Розв'язати рівняння: $(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-9)=-20$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{11}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2},\ 4,\ 7,\ \frac{11}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\}$.

2. Розв'язати рівняння: $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\cdot(x+8)=24$.

Відповідь: $x \in \left\{-5-2\sqrt{3},\ -6,\ -4, -5+2\sqrt{3}\right\}$.

3. Розв'язати рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\cdot(x+9)=45$.

Відповідь: $x \in \left\{-5-\sqrt{19},\ -6,\ -4, -5+\sqrt{19}\right\}$.

4. Розв'язати рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+7)=9$.

Відповідь: $x \in \left\{-4-\sqrt{10},\ -4, -4+\sqrt{10}\right\}$, $x=-4$ є двократним коренем.

5. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x+6)=144$.

Відповідь: $x \in \left\{-7, -2,\ 3\right\}$, $x=-2$ є двократним коренем.

6. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-6)=12$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right\}$.

11 (4 бали). *Розв'язати рівняння:* $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot(x-12)=6x^2$.

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot(x-12)=6x^2 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big((x-1)\cdot(x-12)\big)\cdot\big((x-2)\cdot(x-6)\big)=6x^2 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2+12-13x)\cdot(x^2+12-8x)=6x^2.$$

Перевіряємо: $x=0$ не є коренем, тому

$$(x^2+12-13x)\cdot(x^2+12-8x)=6x^2 \Leftrightarrow \left(\left(x+\frac{12}{x}\right)-13\right)\cdot\left(\left(x+\frac{12}{x}\right)-8\right)=6.$$

Виконаємо заміну: $\left(x+\dfrac{12}{x}\right)=t$, отримаємо:

$(t-13)\cdot(t-8)=6 \Leftrightarrow t^2-21t+98=0 \Leftrightarrow (t-7)\cdot(t-14)=0$, а тоді

$$\left[\begin{aligned} &x+\frac{12}{x}=7,\\ &x+\frac{12}{x}=14, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2-7x+12=0,\\ &x^2-14x+12=0, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(x-3)\cdot(x-4)=0,\\ &(x-7)^2=37, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_1=3,\\ &x_2=4,\\ &x_3=7-\sqrt{37},\\ &x_4=7+\sqrt{37}. \end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x\in\{7-\sqrt{37},\ 3,\ 4,\ 7+\sqrt{37}\}.$.

Розв'яжіть самостійно:

1. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot(x-12)=-6x^2$.

Відповідь: $x\in\left\{\dfrac{11}{2}\pm\dfrac{\sqrt{73}}{2},\ 5\pm\sqrt{13}\right\}.$

2. Розв'язати рівняння: $(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)\cdot(x-12)=-3x^2$.

Відповідь: $x\in\left\{\dfrac{13}{2}\pm\dfrac{\sqrt{73}}{2};\ 3;\ 8\right\}.$

3. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x-4)=10x^2$.

Відповідь: $x\in\{-4;-1;\ 3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}\}.$

4. Розв'язати рівняння: $(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)\cdot(x-12)=-4x^2$.

Відповідь: $x\in\{6\pm2\sqrt{3}\}$, корені двократні.

5. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x-6)=-20x^2$.

Відповідь: $x\in\{2;\ 3\}.$

6. Розв'язати рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+12)=315x^2$.

Відповідь: $x\in\{-14\pm2\sqrt{46};2;6\}.$

10 (4 бали). *Розв'язати рівняння:* $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$.

<u>1 спосіб</u>. (Метод Феррарі): Виокремлюємо доданки четвертого і третього степенів: $x^4-x^3=3x^2-5x+10$ та виділяємо повний квадрат у лівій частині:

$$\left(x^2\right)^2-2x^2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=3x^2-5x+10+\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{13}{4}x^2-5x+10.$$

Додамо в лівій частині у дужках деяке число $\frac{\lambda}{2}$, щоб вираз у правій частині перетворився на повний квадрат, отримаємо: $\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\frac{13}{4}x^2-5x+10+\lambda\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+\frac{\lambda^2}{4}$ або

$$\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{4}+\lambda\right)x^2+\left(-5-\frac{1}{2}\lambda\right)x+\left(10+\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Квадратний тричлен у правій частині перетвориться на повний квадрат, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$D=\left(5+\frac{\lambda}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{13}{4}+\lambda\right)\cdot\left(10+\frac{\lambda^2}{4}\right)=0$; звідки

$25+5\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-4\cdot\left(\frac{65}{2}+10\lambda+\frac{13\lambda^2}{16}+\frac{\lambda^3}{4}\right)=0$ або $\lambda^3+3\lambda^2+35\lambda+105=0$ - маємо кубічну резольвенту. Знайдемо один (будь-який) корінь цього рівняння, наприклад, за схемою Горнера; доцільно (раціональні) корені шукати серед дільників вільного члена, крім того, у нашому випадку у зв'язку з тим, що всі коефіцієнти рівняння додатні, корені можуть бути тільки від'ємними. Тому перевіряємо лише від'ємні дільники числа 105:

	1	3	35	105
−3	1	0	35	0

. Отже $\lambda=-3$ є коренем, тому з рівняння $\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{4}+\lambda\right)x^2+\left(-5-\frac{1}{2}\lambda\right)x+\left(10+\frac{\lambda^2}{4}\right)$ маємо:

$\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}x^2+\left(-\frac{7}{2}\right)x+\left(\frac{49}{4}\right)$ або $\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\right)^2$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \\ x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=-\left(\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+2=0 \\ x^2-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0,\ x\in\varnothing \\ x_{1,2}=\pm\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

<u>2 спосіб</u>. Метод невизначених коефіцієнтів. Переконуємося, що рівняння не має раціональних коренів (якщо старший коефіцієнт дорівнює нулю, їх шукаємо серед дільників вільного члена): $\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$. Тоді прагнемо розкласти многочлен у добуток двох многочленів другого степеня:

$$x^4-x^3-3x^2+5x-10=\left(x^2+ax+b\right)\cdot\left(x^2+cx+d\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях (вже врахували те, що найвищий степінь входить з коефіцієнтом 1):

$\begin{cases} -1 = a + c, \\ -3 = d + ac + b, \\ 5 = ad + bc, \\ -10 = bd, \end{cases}$ Якщо з першого рівняння виразити невідому $a = -c - 1$, з четвертого рівняння $b = -\dfrac{10}{d}$ і підставити у друге та третє рівняння, отримаємо систему двох нелінійних рівнянь, з яких виключити третю невідому, отримаємо рівняння високого степеня, яке має раціональні корені:

$\begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 0, \\ d = -5, \end{cases}$ насправді коренів декілька $a = -1 \vee a = 0$ (зауважимо, що який-небудь розв'язок можна було отримати і шляхом підбору), але розклад на множники отримаємо однозначний

$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = \left(x^2 - x + 2\right)\cdot\left(x^2 - 5\right),$ а тоді отримаємо

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 2 = 0 \\ x^2 - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}.$

Відповідь: $x \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

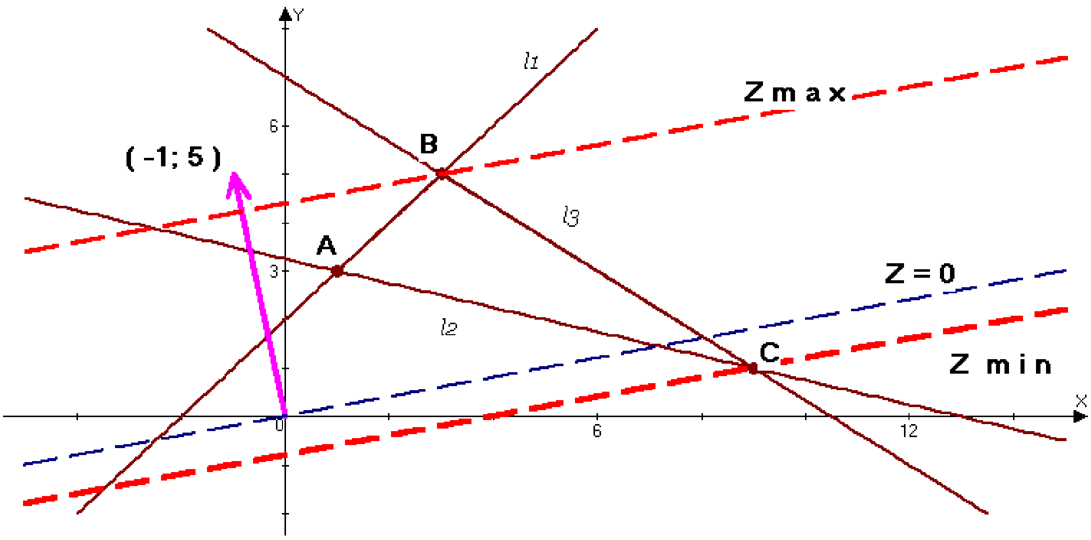
10 (4 бали). *Нехай числа* x, y *задовольняють умови* $\begin{cases} x - y + 2 \ge 0, \\ x + 4y - 13 \ge 0, \\ 2x + 3y - 21 \le 0. \end{cases}$

Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = -x + 5y$.

Побудуємо прямі $l_1 :\ x - y + 2 = 0,\ l_2 :\ x + 4y - 13 = 0,\ l_3 :\ 2x + 3y - 21 = 0,$ визначимо область, що задовольняє усі нерівності, це є ΔABC разом з внутрішньою частиною. Зобразимо на рисунку пряму $z = 0;\ -x + 5y = 0$ (проходить через початок координат), тоді множина $z = -x + 5y$ є сім'я паралельних між собою прямих, напрям зростання функції вказує нормальний вектор $\overline{(-1;5)}$. Тоді найменшого значення функція досягає в точці *C*, найбільшого – в точці *B*. Визначимо координати точок *B* і *C*, розв'язавши відповідно, системи рівнянь:

$$B = l_1 \cap l_3 : \begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + 3y - 21 = 0, \end{cases} \Rightarrow B(3;\ 5).$$

$$C = l_2 \cap l_3 : \begin{cases} x + 4y - 13 = 0, \\ 2x + 3y - 21 = 0, \end{cases} \Rightarrow C(9;\ 1).$$



А тоді $z_{\max} = z(B) = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 22;\ z_{\min} = z(C) = -1 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = -4.$

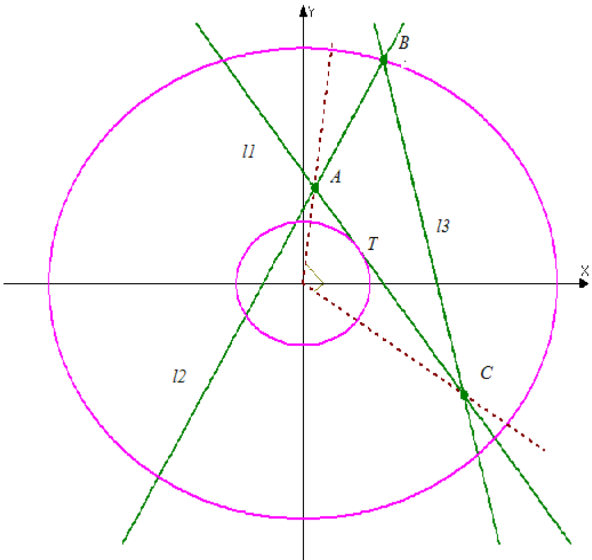
11 (4 бали). *Нехай числа* x, y *задовольняють умови* $\begin{cases} 3x + 2y - 6 \ge 0, \\ 2x - y + 2 \ge 0, \\ 9x + 2y - 30 \le 0. \end{cases}$

Знайдіть всі значення, яких можуть приймати

а) x, y*;* *б)* $x^2 + y^2$*;* *в)* $\dfrac{y}{x}$ *(3 задачі).*

Побудуємо прямі $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \\ 9x + 2y - 30 = 0 \end{cases}$ та вкажемо частини площини, що задовольняють усі умови задачі.

Нескладно показати, що це є трикутник ABC, разом з внутрішньою частиною. Координати точок вершин трикутника ABC знайдемо, розв'язавши системи:



$$A = l_1 \cap l_2 \ : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{2}{7}; 2\frac{4}{7}\right);$$

$$B = l_3 \cap l_2 \ : \begin{cases} 9x + 2y - 30 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow B(2;\ 6);$$

$$C = l_1 \cap l_3 \ : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ 9x + 2y - 30 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow C(4; -3).$$

а) Невідома x змінюється від абсциси точки A до абсциси точки C, тобто $x \in \left[\frac{2}{7}; 4\right]$; аналогічні міркування приводять до висновку: $y \in [-3; 6]$.

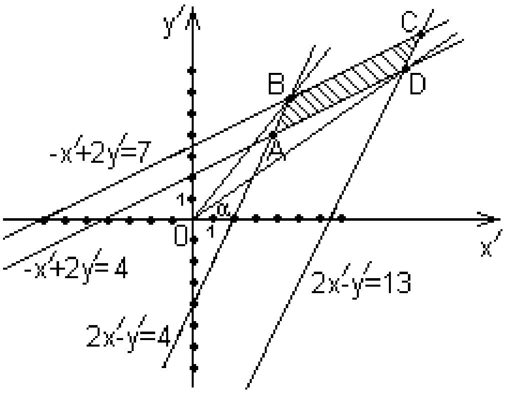
б) Щоб взнати межі зміни невідомої $x^2 + y^2$ ($x^2 + y^2 = c^2$ є коло з центром в початку координат та радіусом c), знайдемо точки площини трикутника ABC, що розташовані найближче і найдалі від центру кола, т. O);

рівняння $AC: 3x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$, тоді кутовий коефіцієнт прямої OT, що перпендикулярна до AC – $k_1 = \frac{2}{3}$ $\quad (k \cdot k_1 = -1 \Rightarrow l \perp l_1)$, рівняння OT: $y = \frac{2}{3}x$. Тоді $T = l_1 \cap (OT): \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ 2x - 3y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow T\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right)$, звідки $OT = \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{6}{13}\sqrt{13} = \frac{6}{\sqrt{13}}$ - а тоді найменше значення $x^2 + y^2 = c^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{36}{13}$. Найбільше значення $x^2 + y^2$ досягає в точці B і дорівнює $x^2 + y^2 = 2^2 + 6^2 = 40$; $x^2 + y^2 \in \left[\frac{36}{13}; 40\right]$.

Зауваження. Відстань від прямої $AC: 3x + 2y - 6 = 0$ до початку координат можна було простіше, не обчислюючи точки T, якщо записати рівняння $AC: ax + by = c$ у нормальному вигляді $AC: \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, причому права частина (вільний член) обов'язково має бути додатним, він і показує відстань до початку координат $AC: 3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

в) $\frac{y}{x} = c = const \Rightarrow y = cx$ є рівняння прямої, що проходить через початок координат, кутовий коефіцієнт дорівнює c. Очевидно, кутовий коефіцієнт є найменшим для прямої OC, $C(4; -3)$: $\frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$ і найбільшим для прямої OA, $A\left(\frac{2}{7}; \frac{18}{7}\right)$: $\frac{y}{x} = \frac{18}{7} : \frac{2}{7} = 9$. А тому $\frac{y}{x} \in \left[-\frac{3}{4}; 9\right]$.

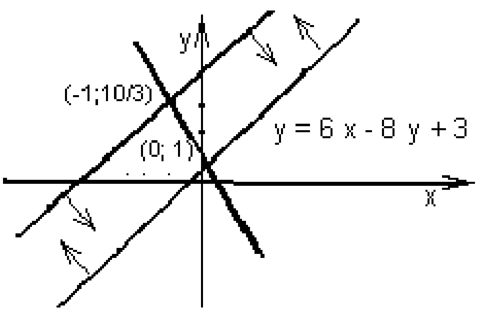
9 (7 балів). *Знайти найбільше і найменше значення виразу* $L = \frac{2x + y - 4}{x + 2y - 3}$, *якщо* $\begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ 2 \le y \le 5. \end{cases}$



Нехай $\begin{cases} y' = 2x + y - 4, \\ x' = x + 2y - 3, \end{cases}$ виразимо x і y, отримаємо $\begin{cases} 3x = -x' + 2y' + 5, \\ 3y = 2x' - y' + 2. \end{cases}$ Врахуємо обмеження, дані в умові, матимемо: $\begin{cases} 9 \le -x' + 2y' + 5 \le 12, \\ 6 \le 2x' - y' + 2 \le 15, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} 4 \le -x' + 2y' \le 7, \\ 4 \le 2x' - y' \le 13. \end{cases}$ Побудуємо відповідну множину точок в системі $X'OY'$: Отримаємо паралелограм $ABCD$. Врахувавши, що $L = \dfrac{y'}{x'}$ - тангенс кута нахилу прямої, що проходить через точки $(0;0)$; $(x';y')$, маємо, що L набуває найменшого значення в точці D, що є точкою перетину прямих $\begin{cases} 2x' - y' = 13, \\ -x' + 2y' = 4, \end{cases}$ звідси $D(10;7)$; $\begin{cases} x' = 10, \\ y' = 7, \end{cases}$ $L = \dfrac{y'}{x'}$; $L_{\min} = \dfrac{7}{10}$; L досягає найбільшого значення в точці B: $\begin{cases} -x' + 2y' = 7, \\ 2x' - y' = 4, \end{cases}$ $B(5;6)$; $L_{\max} = \dfrac{6}{5}$.

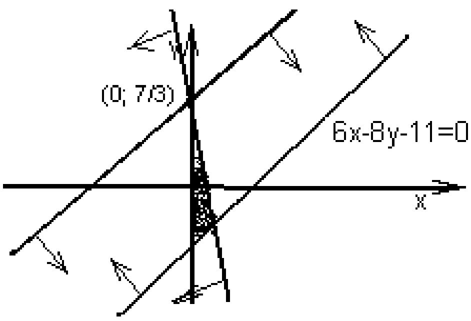
9 (7 балів). *Знайти всі значення a, для кожного з яких існує скінченна кількість точок (x, y) з цілими невід'ємними координатами x і y, що $ax - 3y + a + 10 \ge 0$ і $-6x + 8y - 3 \ge 0$.*

Проаналізуємо, які півплощини задано в умові: $-6x + 8y - 3 \ge 0$ -



півплощина з межею $6x - 8y + 3 = 0$, що не містить початок координат. Межею іншої півплощини слугує пряма $(a+1)x - 3y + 10 = 0$, що для усіх значень параметра a проходить через точку $\left(-1; \dfrac{10}{3}\right)$. Очевидно, якщо пряма $a(x+1) - 3y + 10 = 0$ займає положення, паралельне до прямої $6x-8y+3=0$, кутовий коефіцієнт якої відповідно $k=\frac{3}{4}$, то система нерівностей містить нескінченну множину розв'язків першої координатної чверті, у тому числі з цілими невід'ємними координатами x і y; якщо $k_1>\frac{3}{4}$ утворюється необмежена область, що містить нескінченну кількість цілочисельних точок, тому кутовий коефіцієнт прямої $ax-3y+a+10=0$ $k_1<\frac{3}{4}$; $k_1=\frac{a}{3}<\frac{3}{4}$ з іншого боку, якщо пряма $ax-3y+a+10=0$ проходить через точку (0;1), тобто $a\cdot 0-3\cdot 1+a+10=0 \Leftrightarrow a=-7$, систему нерівностей задовольняє єдина точка з цілими невід'ємними координатами (0;1). Тому маємо $a\in\left[-7;\frac{9}{4}\right)$.

10 (4 бали). *Знайти всі значення а, для кожного з яких існує скінченна кількість точок* (x,y) *з цілими невід'ємними координатами* x *і* y, *що* $ax-3y+7\ge 0$ *і* $-6x+8y+11\ge 0$.



З умови: $-6x+8y+11\ge 0$ - півплощина з межею $6x-8y-11=0$, що містить початок координат. Межею іншої півплощини слугує пряма $ax-3y+7=0$, що для усіх значень параметра a проходить через точку $\left(0;\frac{7}{3}\right)$. Зауважимо, що за будь-яких від'ємних значень параметра a обидві нерівності задовольняє цілочисельна точка (0; 0). З іншого боку, якщо пряма $ax-3y+7=0$, кутовий коефіцієнт якої $k=\frac{a}{3}$, займає граничне положення, паралельне до прямої $6x-8y-11=0$, кутовий коефіцієнт якої $k=\frac{3}{4}$, то система нерівностей містить нескінченну множину розв'язків з цілими невід'ємними координатами x і y, тому кутовий коефіцієнт прямої $ax-3y+a+10\ge 0$ $k_1<\frac{3}{4}$. Тому маємо $a\in\left(-\infty;\frac{9}{4}\right)$.

10 (7 балів). *Скільки всього шестицифрових чисел, у запису яких є як цифра 1, так і цифра 2, але немає цифри 0?*

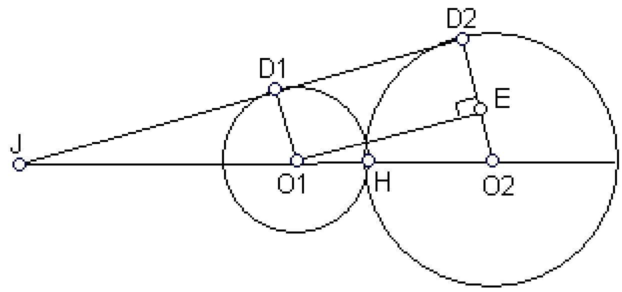
1 спосіб. Оскільки цифри 1 і 2 є обов'язково, то спочатку виберемо місця для них. Цифру 1 на 6 місць можна поставити 6-ма способами, цифру 2 – на 5 місць, що залишилися, п'ятьома способами. Отже. цифри 1 і 2 на шість місць можна поставити за правилами добутку 5·6=30 способами. Тепер у кожному з 30 способів виберемо ще 4 цифри. Обирати їх будемо з 9-елементної множини {1; 2; 3; …; 9}, оскільки 0 не може бути, 1 і 2 можуть повторюватися. На кожне з 4-ох місць, що залишилися, цифру можна обрати 9-ма способами. Тоді за правилом добутку чотири цифри одночасно можна обрати $9\cdot9\cdot9\cdot9=9^4=6561$ способом. Отже, маємо 30 способів поставити цифри 1 і 2, які є обов'язково, і у кожному з 30 способів є можливість інші чотири цифри обрати 6561 способом. Тоді за правилом суми (30 доданків по 6561) всього 6-цифрових чисел, що нас цікавлять, буде 30·6561=196830.

2 спосіб. Цифри 1 і 2 можна розставити на 6 місць $A_6^2=\dfrac{6!}{4!}=30$ способами. У кожному з 30 способів інші чотири цифри з множини $\{1; 2; 3; \ldots; 9\}$ можна обрати $\overline{A}_9^4=9^4=6561$ способом. Остаточно, всього шестицифрових чисел, що нас цікавлять, $A_6^2\cdot\overline{A}_9^4=196830$.

Автори вдячні Войналович Наталії Михайлівні, кандидату пед. наук, доценту кафедри математики КДПУ ім. В. Винниченка, вчителеві-методисту, вчителеві математики Педагогічного ліцею м. Кіровограда за наведені розв'язання задачі.

Геометричні задачі

9 (2 бали) *Два кола дотикаються зовні. Знайти довжину їхньої спільної зовнішньої дотичної, якщо радіуси кіл рівні 16 см і 25 см.*



1 спосіб

$O_1D_1 \perp OD_1,\ O_2D_2 \perp OD_1$.

Побудуємо точку E на O_2D_2, так що $O_1ED_2D_1$ – прямокутник, тоді $O_2E = R_2 - R_1 = 9$ (см);

$O_1O_2 = R_2 + R_1 = 41$ (см).

ΔO_1O_2E: $(\angle E = 90°)$: $O_1E = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{100 \cdot 16} = 40(см) = D_1D_2$.

2 спосіб.

Нехай точка $J = D_1D_2 \cap O_1O_2$, тоді гомотетія $H_J^k(\Delta JD_1O_1) = \Delta JD_2O_2$;

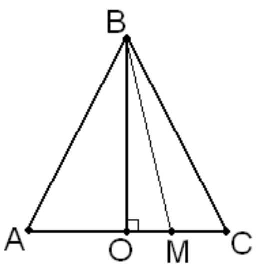
$k = \frac{16}{25}$; $\frac{JO_1}{JO_2} = \frac{16}{25}$; $\frac{JO_1}{JO_1 + 41} = \frac{16}{25}$; $25 \cdot JO_1 = 16 \cdot JO_1 + 656$; $JO_1 = \frac{656}{9}$ (см).

З прямокутного трикутника

ΔJO_1D_1: $JD_1 = \sqrt{\left(\frac{656}{9}\right)^2 - 16^2} = \sqrt{\frac{656^2 - 144^2}{9^2}} = \frac{\sqrt{800 \cdot 512}}{9} = \frac{640}{9}$ (см). З теореми Фалеса: $\frac{JO_1}{JD_1} = \frac{O_1O_2}{D_1D_2} \Rightarrow D_1D_2 = \frac{JD_1 \cdot O_1O_2}{JO_1}$;

$$D_1D_2 = \frac{\frac{640}{9} \cdot 41}{\frac{656}{9}} = \frac{640 \cdot 41}{16 \cdot 41} = \frac{640}{16} = 40(см).$$

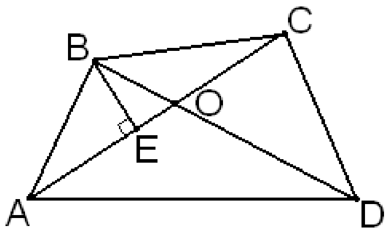
9 (2 бали). *Нехай M – довільна точка на основі AC рівнобічного трикутника ABC. Довести, що $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.*



Нехай O – середина основи AC, тоді, враховуючи теорему Піфагора, маємо:

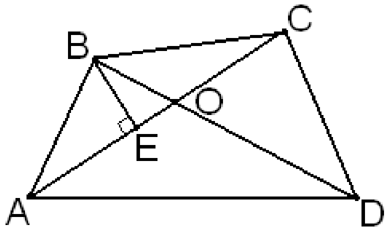
$$BC^2 - BM^2 = \left(BO^2 + OC^2\right) - \left(BO^2 + OM^2\right) =$$
$$= OC^2 - OM^2 = (OC - OM) \cdot (OC + OM) =$$
$$= (OC - OM) \cdot (AO + OM) = CM \cdot AM.$$

10 (2 бали). *Діагоналі чотирикутника розбивають його на чотири трикутника з рівними площами. Довести, що чотирикутник є паралелограм.*



Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник,
O – точка перетину його діагоналей,
E – проекція точки B на діагональ AC.
Маємо: $\frac{1}{2}BE \cdot AO = S_{AOB} = S_{BOC} = \frac{1}{2}BE \cdot OC$, звідки $AO = OC$. Аналогічно, $BO = OD$, а тому $ABCD$ – паралелограм.

9 (4 бали). *Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що площі $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOA$ виражаються натуральними числами. Чи може добуток цих чисел дорівнювати 2008?*



Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник,
O – точка перетину його діагоналей,
E – проекція точки B на діагональ AC.
Маємо $S_1 = S_{AOB} = \frac{1}{2}BE \cdot AO; S_2 = S_{BOC} = \frac{1}{2}BE \cdot OC$, звідки $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$. Аналогічно, $S_3 = S_{COD} = \frac{1}{2}h \cdot CO; S_4 = S_{DOA} = \frac{1}{2}h \cdot OA$ і $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$, а тому $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} \Rightarrow S_1S_3 = S_2S_4 \Rightarrow S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 = (S_1 \cdot S_3)^2$, звідки $(S_1 \cdot S_3)^2 = 2008$, що неможливо, оскільки S_1, S_3 виражаються натуральними числами, 2008 не є повним квадратом.

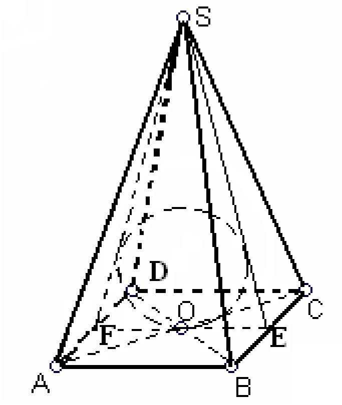
9 (2 бали). *Чи можна накрити фігуру, що має форму трикутника зі сторонами 13см, 14см і 15см, кругом радіусом 8см? Відповідь обґрунтувати.*

$p = 21$ см; $S_\Delta = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ см^2.

$R = \frac{abc}{4S_\Delta} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$ (см) – радіус описаного круга. За умовою $r_{кр} = 8 < R$.

Відповідь: не можна.

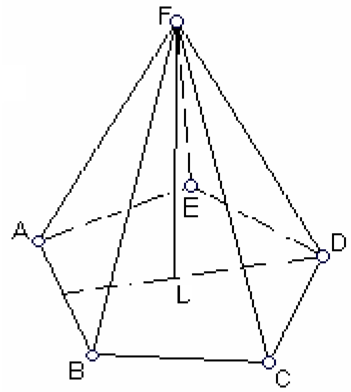
11 (2 бали). *Чи можна розмістити кулю радіуса 2см всередині правильної чотирикутної піраміди з основою 8см і апофемою 5см? Відповідь пояснити.*



Розв'язання: ΔSEF рівнобедрений $SE = SF = 5$ (см), $FE = 8$ (см)$\Rightarrow OE = 4$ (см), ΔSOE - єгипетський: $SO = 3$ (см), тоді $S_{\Delta SEF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (см^2); $p = \frac{5+5+8}{2} = 9$ (см); визначимо радіус вписаного кола в ΔSEF із співвідношення: $S = pr \Rightarrow r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} < 2$ (см).

Відповідь: не можна.

10 (2 бали). *Довести, що у правильній п'ятикутній піраміді для кожного ребра знайдеться інше ребро піраміди, перпендикулярне до початкового.*

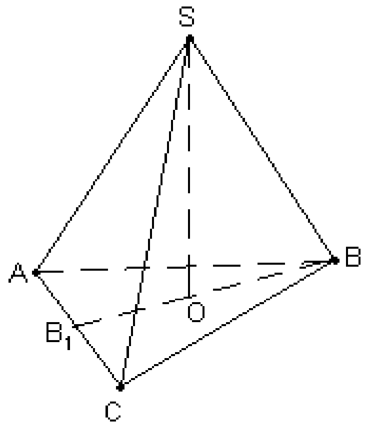


Нехай FL – висота піраміди.

1) $FD \perp AB$, так як $FL \perp (ABCD)$, $DL \perp AB$; DL – проекція FD, за теоремою про три перпендикуляри $FD \perp AB$.

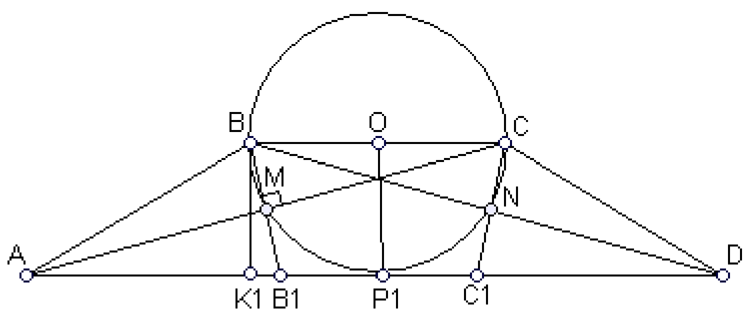
2) Аналогічно $FE \perp BC$, $FC \perp AE$ і т.д.

11 (4 бали). *Бічне ребро правильної трикутної піраміди нахилене під кутом* $45°$ *до основи. Знайти сторони основи піраміди, якщо її об'єм дорівнює* 18.



Нехай $SO = x$ (SO - висота), з ΔBOS ($\angle SBO = 45°$) маємо: $OB = OS = x$, тоді $OB_1 = \frac{x}{2}$, $BB_1 = \frac{3x}{2}$. З ΔBB_1C: $CB_1 = \frac{\sqrt{3}x}{2}$, $BC = \sqrt{3}x$. Звідси $AC = \sqrt{3}x$, $18 = V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \sqrt{3}x$, $x^3 = \frac{72}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

9 (4 бали). *Менша основа* BC *трапеції* $ABCD$ *є діаметром кола, яке проходить через середини обох діагоналей трапеції і дотикається до більшої основи* AD. *Знайти внутрішні кути трапеції.*



Нехай O – центр кола, M, N – середини діагоналей AC і BD.

$\angle BMC = 90°$ (вписаний кут, BC – діаметр); $BM \perp AC$, $AM = MC \Rightarrow AB = BC = 2R$.

Аналогічно $\angle CNB = 90°$, $BN = ND \Rightarrow BC = CD = 2R$, а тому трапеція рівнобічна.

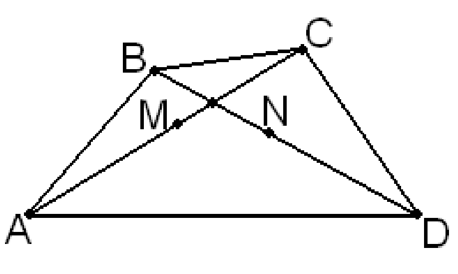
ΔABK_1: $BK_1 \perp AD$: $BK_1 = OP_1 = R$, $AB = 2R$; отже, BK_1 – катет, що дорівнює половині гіпотенузи, тому кут $\angle BAK_1 = 30^0$; звідси маємо: $\angle A = \angle D = 30°$; $\angle B = \angle C = 150°$.

9 (4 бали). *В прямокутному* ΔABC, *площа якого* S, r *– радіус вписаного кола,* R *– радіус описаного кола. Довести, що* $r = \sqrt{S + R^2} - R$.

Нехай a, b – катети, c – гіпотенуза трикутника. Для доведення досить використати відомі формули $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $S = \dfrac{ab}{2}$, $R = \dfrac{c}{2}$.

$$\sqrt{S + R^2} - R = \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}} - \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} - \frac{c}{2} = \frac{a+b-c}{2} = r.$$

10 (7 бали) *В опуклому чотирикутнику сума квадратів двох довільних сторін, що мають спільну вершину, дорівнює квадратові діагоналі, що проходить через цю ж вершину. Знайти кути чотирикутника.*

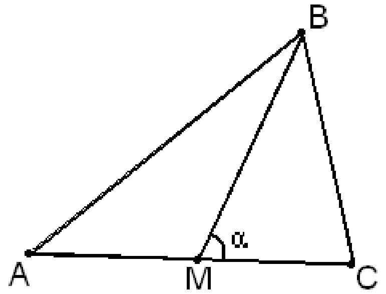


Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, M і N – середини діагоналей AC та BD відповідно. Враховуючи відому формулу довжини медіани $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, маємо для медіан трикутників ΔANC, ΔABD, ΔBCD:

$$MN^2=\frac{1}{4}\left(2AN^2+2CN^2-AC^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2AB^2+2AD^2-BD^2}{2}+\frac{2BC^2+2CD^2-BD^2}{2}-AC^2\right)=$$

$=\frac{1}{4}\left(AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2\right)$ – ця формула належить Ейлеру. За умовою $AB^2+BC^2=BD^2$, $DC^2+DA^2=BD^2$, $BC^2+CD^2=AC^2$, $AB^2+AD^2=AC^2$. Додавши всі ці рівності, легко отримати: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$. З формули Ейлера отримуємо: $MN^2=0$, тобто точки M і N співпадають і $ABCD$ – паралелограм, тому $AB=CD$, $AC^2=BC^2+CD^2=BC^2+AB^2=BD^2$, $AC=BD$. $ABCD$ – прямокутник, всі кути прямі.

Зауваження. Формулу довжини медіани $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ нескладно отримати, записавши двічі теорему косинусів для ΔBMC, BC^2 та ΔBMA, BA^2:



$$BC^2=BM^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2-2BM\cdot\frac{AC}{2}\cdot Cos\,\alpha;$$

$$AB^2=BM^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2-2BM\cdot\frac{AC}{2}\cdot Cos(180^0-\alpha);$$

та почленно додавши отримані рівності.

9 (4 бали) *Чи обов'язково будуть рівними два трикутники, якщо висоти одного із них дорівнюють висотам іншого? Відповідь обґрунтуйте.*

Нехай S,a,b,c – площа і сторони першого трикутника, S_1,a_1,b_1,c_1 – відповідно другого. З умови маємо: $\frac{2S}{a}=h_a=h_{a_1}=\frac{2S_1}{a_1}$, $\frac{a_1}{a}=\frac{S_1}{S}$, аналогічно отримаємо: $\frac{b_1}{b}=\frac{S_1}{S}$, $\frac{c_1}{c}=\frac{S_1}{S}$, а тому $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$, тому дані трикутники подібні з деяким коефіцієнтом k, а тоді площі відносяться як k^2, маємо $k^2=k$, тобто $k=1$. Трикутники рівні.

9 (7 балів). *Визначити площу трикутника за трьома висотами* h_a, h_b, h_c.

Запишемо формули для площі трикутника: $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, $S=\frac{1}{2}b\cdot h_b$, $S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$; $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$;

маємо п'ять рівнянь і п'ять невідомих, виразимо сторони через висоти та виключимо сторони: $a \cdot h_a = c \cdot h_c$; $b \cdot h_b = c \cdot h_c$,

а тоді: $a = c \cdot \dfrac{h_c}{h_a}$; $b = c \cdot \dfrac{h_c}{h_b}$ і півпериметр: $p = \dfrac{1}{2}\left(c \cdot \dfrac{h_c}{h_a} + c \cdot \dfrac{h_c}{h_b} + c \right) =$

$= \dfrac{1}{2} c \cdot h_c \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \right)$, $p = S \cdot \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \right)$; виразимо $p - a,\ p - b,\ p - c$:

$p - a = \dfrac{a + b + c}{2} - a = \dfrac{b + c - a}{2}$; $p - a = \dfrac{1}{2}\left(c \cdot \dfrac{h_c}{h_b} + c - c \cdot \dfrac{h_c}{h_a} \right) = \dfrac{1}{2} c \cdot h_c \left(\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} \right)$

або $p - a = S \cdot \left(\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} \right)$; аналогічно: $p - b = S \cdot \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b} \right)$;

$p - c = S \cdot \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} \right)$; підставимо у формулу Герона, отримаємо:

$$S = \sqrt{S \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \cdot S \cdot \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right) \cdot S \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \right) \cdot S \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)};$$

$S = S^2 \sqrt{\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \right) \cdot \left(\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} \right) \cdot \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b} \right) \cdot \left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} \right)}$; звідки площа

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \cdot \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)}} \text{ (кв.од.).}$$

9 (2 бали). *Чи обов'язково будуть рівними два трикутника, якщо висоти одного з них дорівнюють висотам іншого?*

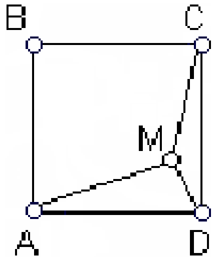
За умовою трикутники мають рівні висоти $(h_a)_1 = (h_a)_2 = h_a$, $(h_b)_1 = (h_b)_2 = h_b$, $(h_c)_1 = (h_c)_2 = h_c$, тому вони мають однакові площі $S_1 = S_2 = S$ (дивись попередню задачу), а тоді $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow a = \dfrac{2S}{h_a}$; $b = \dfrac{2S}{h_b}$; $c = \dfrac{2S}{h_c}$; сторони трикутників рівні, а отже і трикутники рівні за трьома сторонами.

9 (2 бали). *Знайти всі сторони трикутника з площею 12, якщо дві з них дорівнюють 5 і 6.*

За умовою $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2S}{a \cdot b}$; $\sin\gamma = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{3}{5}$, а тоді за теоремою косинусів отримуємо третю сторону:

$$c^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot \left(\pm \frac{3}{5} \right) = 61 \mp 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = \sqrt{55} \\ c_2 = \sqrt{67} \end{array} \right. .$$

9 (7 балів). *Точка M знаходиться в площині квадрата $ABCD$ і $MA = 6$ см, $MC = 4$ см, $MD = \sqrt{2}$ см. Знайти площу квадрата.*



Використаємо метод координат: нехай початок координат співпадає з точкою A, вісь абсцис напрямлена від точки A до D, вісь ординат – від точки A до B і нехай сторона квадрата дорівнює a см, тоді координати точок $A(0;0); B(0;a)$; $C(a;a); D(a;0)$; координати точки $M(x;y)$. Врахуємо умову задачі, отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ (x-a)^2 + y^2 = 2, \qquad \Big| \cdot (-1) \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ 2xa - a^2 = 34, \\ 2ya - a^2 = -14, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a^2 + 34}{2a}, \\ y = \dfrac{a^2 - 14}{2a}, \\ \left(\dfrac{a^2 + 34}{2a} \right)^2 + \left(\dfrac{a^2 - 14}{2a} \right)^2 = 36, \end{cases}$$

$$\left(a^2 + 34\right)^2 + \left(a^2 - 14\right)^2 + 36 \cdot 4a^2 = 0,$$

$$a^4 + 68a + 1156 + a^4 - 28a + 196 - 144a^2 = 0,$$

$$2a^4 - 104a + 1352 = 0,$$

$$a^4 - 52a + 676 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 26)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 26 .$$

Відповідь. Площа квадрата дорівнює 26 см^2.

10 (7 балів). *Точка M знаходиться в площині квадрата $ABCD$ і $MA = \sqrt{27}$ см, $MC = \sqrt{3}$ см, $MD = \sqrt{6}$ см. Знайти площу квадрата.*

Див. попередню задачу. Площа квадрата дорівнює 15 см^2.

10 (7 балів). *Точка M знаходиться в площині квадрата $ABCD$ і $MA = 5$ см, $MC = 3$ см, $MD = \sqrt{2}$ см. Знайти площу квадрата.*

Відповідь. Площа квадрата дорівнює 17 см^2.

10 (2 бали). *Знайти площу трикутника з вершинами в точках* $A(1;1);\ B(4;5);\ C(3;6)$.

1 спосіб: обчислити довжини сторін:

$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5;\ AC=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29};\ BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; далі скористатися формулою Герона, що не зовсім раціонально.

2 спосіб: обчислити довжини сторін та скористатися теоремою косинусів:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot Cos\,\angle BAC \ \Rightarrow\ Cos\,\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC},$$

$$Cos\,\angle BAC=\frac{25+29-2}{2\cdot5\cdot\sqrt{29}}=\frac{26}{5\cdot\sqrt{29}} \quad\Rightarrow\quad Sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{26}{5\cdot\sqrt{29}}\right)^2}=\frac{7}{5\cdot\sqrt{29}};$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{29}\cdot\left(\frac{7}{5\cdot\sqrt{29}}\right)=3{,}5 \text{ (кв.од.).}$$

3 спосіб: обчислити вектори сторін ΔABC: $\overline{AB}=(3;4)$; $\overline{AC}=(2;5)$;

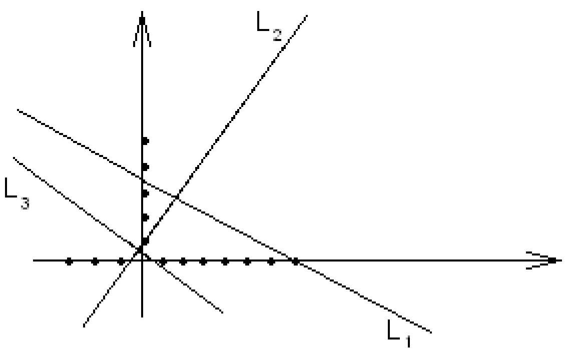
тоді площа трикутника є половина модуля визначника координат векторів сторін ΔABC:

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{mod}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(15-8)=\frac{7}{2}=3{,}5 \text{ (кв.од.).}$$

(Визначник 2-го порядку обчислюється за правилом: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c$).

9 (4 бали). *Знайти площу трикутника, вершини якого – точки перетину прямих* $x+2y=7;\quad y-2x=1;\quad 3y+2x=1$.

Запишемо рівняння прямих у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, тоді a,b –відрізки, які відтинає пряма на осях абсцис і ординат, відповідно. Побудуємо прямі:



$$\frac{x}{7}+\frac{y}{7/2}=1;\quad \frac{x}{-1/2}+\frac{y}{1}=1;\quad \frac{x}{1/2}+\frac{y}{1/3}=1$$ та

знайдемо координати вершин ΔABC:

$$l_1\cap l_2:\begin{cases}x+2y=7, & \cdot 2\\ -2x+y=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}5y=15,\\ x=7-2y,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}\quad A(1;3);$$

$$l_2 \cap l_3: \quad \begin{cases} -2x+y=1, \\ 2x+3y=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y=2, \\ x=\dfrac{1-3y}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{4}, \\ y=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad B\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right);$$

$$l_1 \cap l_3: \quad \begin{cases} x+2y=7, & \cdot(-2) \\ 2x+3y=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -y=-13, \\ x=7-2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-19, \\ y=13, \end{cases} \qquad C(-19;13).$$

Обчислимо вектори, на яких побудовано ΔABC: $\overline{AB}=\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)-(1;3)=\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{4}(1;2)$;

$\overline{AC}=(-19;13)-(1;3)=(-20;10)=10(-2;1)$, тоді площа трикутника є половина модуля визначника координат векторів сторін ΔABC:

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{50}{8}\cdot(1+4)=\frac{125}{4}=31\frac{1}{4} \text{ (кв.од.).}$$

Зауваження: обчислення площі за формулою Герона більш громіздке, але дає той же результат.

Площу можна обчислити без формули Герона, знайшовши за теоремою косинусів косинус одного з кутів та, скориставшись основною тригонометричною тотожністю, обчислити синус кута і далі – площу.

<u>2 спосіб</u>: Якщо рівняння прямої (AB): $ax+by+c=0$; координати точки $C(x_0;y_0)$, то відстань від точки C до прямої (AB) обчислюється за формулою: $\rho(C;AB)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Рівняння прямої (AB): $2x-y+1=0$; координати точок $A(1;3)$, $B\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, відстань $|AB|=\frac{5}{4}\sqrt{5}$ (од.) – довжина сторони; висотою слугує відстань від третьої вершини $C(-19;13)$ до прямої (AB):

$$\rho(C;AB)=\frac{|2\cdot(-19)-1\cdot 13+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{50}{\sqrt{5}}; \quad S=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)\cdot\frac{50}{\sqrt{5}}=\frac{250}{8}=\frac{125}{4} \text{(кв.од.).}$$

<u>3 спосіб</u>: Запишемо рівняння прямих у вигляді $y=kx+b;\ k=tg\,\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої. Маємо: $(AB): y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$; (AC): $y=2x+1$; (BC): $y=-\frac{2}{3}x+1$; аналіз кутових коефіцієнтів – добуток дорівнює (-1) – дозволяє зробити висновок, що прямі $(AB)\perp(AC)$; ΔABC – прямокутний, причому $\angle A=90^0$, а тому його площа дорівнює півдобутку катетів

$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC|$. Маючи координати точок A, B, C, знаходимо потрібні відстані і отримуємо площу.

9 (4 бали) *Нехай a, b, c – сторони трикутника і справджується рівність $a + 5b + 3c = 6\sqrt{2bc}$. Довести, що $a < b$ і $a < c$.*

Доведення (від супротивного): $a, b, c > 0$ (як сторони трикутника).

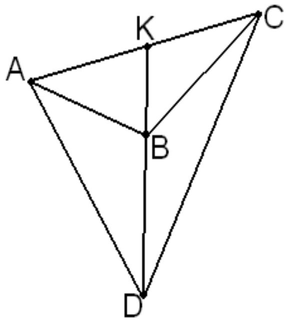
1) Нехай $a \ge b$, тоді $a + 5b + 3c = \sqrt{72bc}$ (за умовою).

$$\sqrt{72bc} = a + 5b + 3c \ge 6b + 3c \ge \left| \begin{matrix} \text{середнє арифметичне} \ge \\ \ge \text{середнього геометричного} \end{matrix} \right| 2\sqrt{6b \cdot 3c} = \sqrt{72bc}.$$

Знак рівності можливий, якщо $b = c = a$, але тоді $a + 5b + 3c = 9b \ne 6\sqrt{2b \cdot b} = 6\sqrt{2}b$ – суперечить умові. Отже $a < b$.

2) Нехай $a \ge c$, тоді $\sqrt{72ab} = a + 5b + 3c \ge 5b + 4c \ge 2\sqrt{5b \cdot 4c} = \sqrt{80bc}$, що неможливо. Отже, $a < c$.

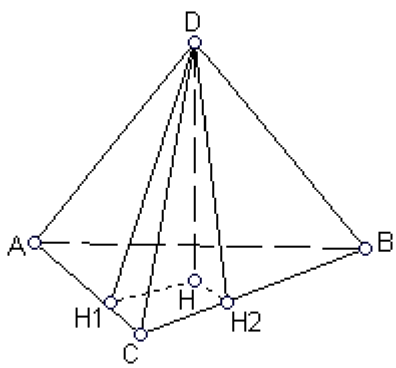
10 (4 бали) *Нехай $ABCD$ – неопуклий чотирикутник на площині, α – кут між прямими AC і BD. Довести, що площа S чотирикутника може бути обчислена за формулою $2S = AC \cdot BD \sin\alpha$.*



Нехай K – точка перетину прямих AC і BD. Враховуючи, що $\sin x = \sin(180° - x)$, маємо:

$$2S = 2S_{ABD} + 2S_{BCD} = 2\left(S_{AKD} - S_{AKB}\right) + 2\left(S_{KCD} - S_{KCB}\right) =$$
$$= AK \cdot KD \sin\alpha - AK \cdot KB \sin\alpha + KC \cdot KD \sin\alpha - KC \cdot KB \sin\alpha =$$
$$= AK \cdot BD \sin\alpha + KC \cdot BD \sin\alpha = AC \cdot BD \sin\alpha$$

11 (7 балів). *Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 12$, $AD = 15$, $BD = 14$, $CD = 16$.*



<u>1 спосіб</u>. ΔACB – прямокутний, бо $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $13^2 = 5^2 + 12^2$; $169 = 169$; нехай DH – висота піраміди.

Нехай DH_1 – висота грані ACD: $DH_1 \perp AC$, DH_2 – висота грані DCB: $DH_2 \perp CB$. Так як усі ребра піраміди відомі, то для кожної грані ми можемо обчислити (якщо потрібно) площу, висоти і ін.:

1) $S_{\Delta ACD}=\begin{pmatrix} a=5 & P=36 \\ b=15 & p=18 \\ c=16 & \end{pmatrix}=\sqrt{18\cdot 2\cdot 3\cdot 13}=6\sqrt{39}$ (кв.од.); обчислимо висоту

грані: $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot DH_1 \Rightarrow DH_1=\frac{2S_{\Delta ACD}}{AC}=\frac{2\cdot 6\sqrt{39}}{5}=\frac{12\sqrt{39}}{5}$ (од.);

$CH_1=\sqrt{DC^2-DH_1^2}=\sqrt{16^2-\frac{144\cdot 39}{25}}=\frac{28}{5}$ (од.).

2) $S_{\Delta CDB}=\begin{pmatrix} a=12 & P=42 \\ b=14 & p=21 \\ c=16 & \end{pmatrix}=\sqrt{21\cdot 9\cdot 7\cdot 5}=\sqrt{7\cdot 9\cdot 7\cdot 15}=21\sqrt{15}$ (кв.од.);

$DH_2=\frac{2S_{\Delta CDB}}{CB}=\frac{2\cdot 21\sqrt{15}}{12}=\frac{7\sqrt{15}}{2}$ (од.); $\qquad CH_2=\sqrt{16^2-\left(\frac{7\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{17}{2}$ (од.).

3) $DH_1\perp AC$; $DH\perp ABC$; HH_1 – проекція DH_1, а отже $HH_1\perp AC$.

Аналогічно $HH_2\perp CB$; H_1HH_2C – прямокутник $\Rightarrow$ $HH_2=CH_1=\frac{28}{5}$ (од.);

4) ΔDHH_2: $\angle H=90°$; $\quad DH=\sqrt{DH_2^2-HH_2^2}$;

$DH=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{15}}{2}\right)^2-\left(\frac{28}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{15239}{100}}=\frac{7\sqrt{311}}{10}(\approx 12{,}3446)$ (од.).

5) $V_{тр}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$; $\qquad S_{осн}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CB=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$ (кв.од.).;

$V_{тр}=\frac{1}{3}\cdot 30\cdot\frac{7\sqrt{311}}{10}=7\sqrt{311}\approx 123{,}44634$ (куб.од.).

<u>2 спосіб</u>. Об'єм піраміди $V_{тр}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. Використаємо метод координат ($\angle ACB=90^0$): нехай початок координат співпадає з точкою C, вісь абсцис напрямлена від точки C до A, вісь ординат – від точки C до B, вісь аплікат – перпендикулярно до площини ABC, тоді координати точок $C(0;0;0)$; $A(5;0;0)$; $B(0;12;0)$; $D(x;y;z)$; $|z|$ – відстань від точки D до площини ABC, а тому є висотою піраміди. Врахуємо умову задачі, отримаємо:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16^2, & \Big|\cdot(-1) \\ (x-5)^2+y^2+z^2=15^2, & \\ x^2+(y-12)^2+z^2=14^2, & \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16^2, \\ -10x=-56, \\ -24y=-204, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{28}{5}, \\ y=\frac{17}{2} \\ z=\pm\sqrt{16^2-x^2-y^2}, \end{cases}$$

звідки знаходимо $z = \pm\frac{7}{10}\sqrt{311}$. А тоді висота $H = |z| = \frac{7}{10}\sqrt{311}$ (од.), площа основи (прямокутного трикутника) $S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = 30$ (кв.од.).; і об'єм $V_{тр} = \frac{1}{3}\cdot 30\cdot\frac{7\sqrt{311}}{10} = 7\sqrt{311} \approx 123{,}44634$ (куб.од.).

11 (7 балів). *Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 13$, $AC = 12$, $AD = 15$, $BC = 5$, $BD = 6$, $CD = 9$.*

Розв'язання: (метод координат) див. попередню задачу. $\begin{cases} x = 0, \\ y = 7, \\ z = \pm 4\sqrt{2}, \end{cases}$

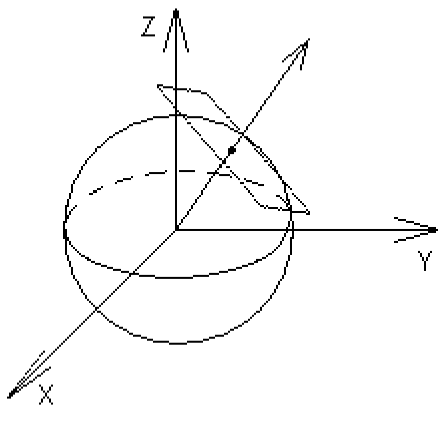
Відповідь: $V_{тр} = \frac{1}{3}\cdot 30\cdot 4\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$ (куб.од.).

11 (7 балів). *Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 13$, $AC = 5$, $AD = 19$, $BC = 12$, $BD = 20$, $CD = 16$.*

У позначеннях попередньої задачі. $\begin{cases} x = -8, \\ y = 0, \\ z = \pm 8\sqrt{3}, \end{cases}$

Відповідь: $V_{тр} = \frac{1}{3}\cdot 30\cdot 8\sqrt{3} = 80\sqrt{3}$ (куб.од.).

10 (4 бали). *Нехай $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Знайти найбільше і найменше значення виразу $x + 2y + 4z$.*



<u>1 спосіб</u>: Рівняння прямої l, що проходить через початок координат і перпендикулярна до сім'ї площин $x + 2y + 4z = c$: $l: \begin{cases} x = 0 + 1t, \\ y = 0 + 2t, \\ z = 0 + 4t. \end{cases}$

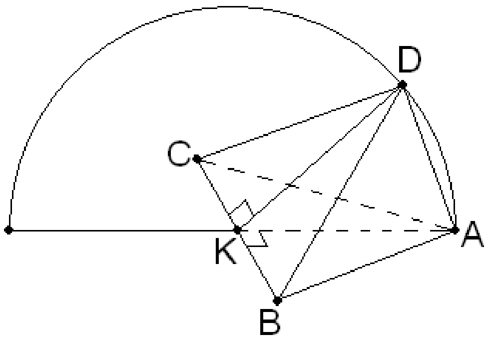
Параметри перетинів зі сферою $(t)^2 + (2t)^2 + (4t)^2 = 1$, звідки $21t^2 = 1$ або

$t = \pm\sqrt{\frac{1}{21}}$. Мінімум отримуємо при $t = -\frac{1}{\sqrt{21}}$ в точці $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{21}}, \\ y = -\frac{2}{\sqrt{21}}, \\ z = -\frac{4}{\sqrt{21}}, \end{cases}$

$(x + 2y + 4z)_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{21}} + 2(-\frac{2}{\sqrt{21}}) + 4(-\frac{4}{\sqrt{21}}) = -\frac{21}{\sqrt{21}} = -\sqrt{21}$. Максимум – при $t = \frac{1}{\sqrt{21}}$, в точці $\left(\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ $(x + 2y + 4z)_{\max} = \sqrt{21}$.

<u>2 спосіб</u>: Використаємо нерівність Коші-Буняковського: $|x + 2y + 4z| = \left|\overline{(1,2,4)} \cdot \overline{(x,y,z)}\right| \le \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{21} \cdot 1 = \sqrt{21}$, а тоді $-\sqrt{21} \le x + 2y + 4z \le \sqrt{21}$. Максимум $\sqrt{21}$ досягається, якщо $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k \ge 0$, звідки маємо систему $\begin{cases} x = 1k, \\ y = 2k, \\ z = 4k. \end{cases}$ А тоді вираз $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ перетворюється у $(k)^2 + (2k)^2 + (4k)^2 = 1$. Звідки $k = +\sqrt{\frac{1}{21}}$ і точка, в якій досягається максимум, – $\left(\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$. Аналогічно, мінімум $-\sqrt{21}$ отримаємо, якщо $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k \le 0$, а тоді $k = -\sqrt{\frac{1}{21}}$ і точка, в якій досягається мінімум ,– $\left(-\frac{1}{\sqrt{21}};-\frac{2}{\sqrt{21}};-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$.

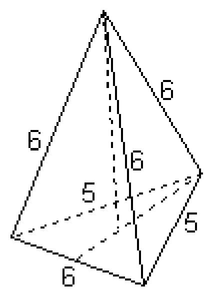
10 (7 балів). *П'ять ребер трикутної піраміди однакові і дорівнюють 2 см. Якого найбільшого значення може набувати об'єм такої піраміди?*



Нехай всі ребра, крім AD, мають фіксовану величину 2 см, K – середина BC. DK і AK $\perp BC$, $DK = AK = \sqrt{3}$. Отже, якщо провести через точку K площину α, перпендикулярну до ребра

BC, і побудувати в ній коло ω, то найбільша відстань від точки D до площини ABC дорівнює $\sqrt{3}$, коли $DK \perp AK$. Тому, $V_{\max} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 1$ (см^3).

11 (4 бали). *Основою трикутної піраміди є трикутник зі сторонами 6см, 5см і 5см. Знайти висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 6см.*

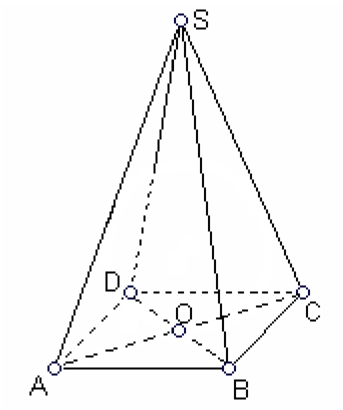


Оскільки всі бічні ребра однакові, то висота проектується в центр описаного кола.

В основі – рівнобедрений трикутник (сторони 6, 5, 5), висота, проведена до основи 6 см: $h_{осн} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см); $S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$ (см^2); $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{5\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 12} = \frac{25}{8}$ (см).

$$h_{пір} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{(6\cdot 8)^2 - 25^2}{8^2}} = \frac{\sqrt{23\cdot 73}}{8} \text{ (см).}$$

11 (4 бали). *Основа піраміди – паралелограм, сторони якого 16 і 22. Відстань від вершини піраміди до центра основи 4. Знаючи, що довжини бічних ребер виражаються непарними послідовними числами, знайдіть довжини бічних ребер піраміди.*



Нехай $AB = 16$; $AD = 22$; $SO = 4$.

За теоремою косинусів:

$\Delta ABD: BD^2 = 16^2 + 22^2 - 2\cdot 16\cdot 22\cdot Cos\angle A$;

$\Delta ADC: AC^2 = 16^2 + 22^2 - 2\cdot 16\cdot 22\cdot Cos\angle D$ або

$AC^2 = 16^2 + 22^2 + 2\cdot 16\cdot 22\cdot Cos\angle A$. Звідки

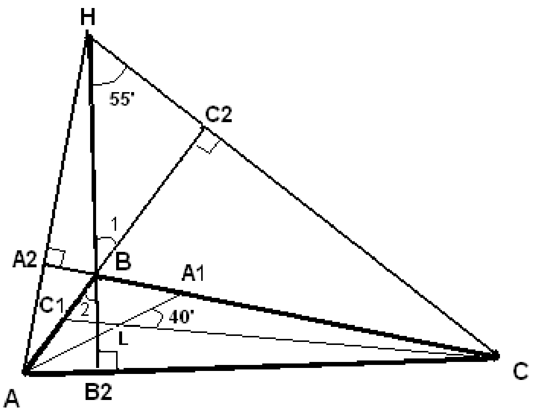
$BD^2 + AC^2 = 2\cdot\left(16^2 + 22^2\right) = 1480$.

SO – медіана ΔBSD і ΔASC, $m_a^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(2\left(b^2 + c^2\right) - a^2\right)$. Тоді $4^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\left(BS^2 + SD^2\right) - BD^2\right)$ та $4^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\left(AS^2 + SC^2\right) - AC^2\right)$. Додавши почленно та спростивши, матимемо: $128 + \left(BD^2 + AC^2\right) = 2\cdot\left(BS^2 + SD^2 + AS^2 + SC^2\right)$. Врахуємо, що $BD^2 + AC^2 = 1480$, а тоді $BS^2+SD^2+AS^2+SC^2=\frac{128+1480}{2}=804$. За умовою бічні ребра виражаються послідовними непарними числами, тому маємо: $(2n-3)^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=804$, а тоді $16n^2=784 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1=-7, \\ n_2=7. \end{array}\right.$

Умову задачі задовольняє $n=7$, а тоді бічні ребра – $2n-3;\ 2n-1;\ 2n+1;\ 2n+3$ дорівнюють $11;\ 13;\ 15;\ 17$.

10 (7 балів). *Прямі, на яких лежать дві бісектриси внутрішніх кутів трикутника утворюють кут 40°, а прямі, на яких лежать дві його висоти, утворюють кут 55°. Знайти всі внутрішні кути трикутника..*

Нехай прямі $AA_1; CC_1$ - бісектриси, L - точка перетину бісектрис. Тоді кут ALC не може бути 40°, бо з ΔALC сума двох інших кутів трикутника була б рівною 140°, а тоді сума двох кутів $\angle A; \angle C\ \Delta ABC$ була б рівною 280°. Тому кут $\angle A_1LC=40^0$. Для ΔALC цей кут є зовнішнім, а тому $\angle LAC+\angle LCA=40^0 \Rightarrow \angle BAC+\angle BCA=80^0$, а тоді $\angle ABC=100^0$.



Нехай прямі $AA_2; BB_2; CC_2$ - висоти ΔABC, H - точка перетину висот. Тоді в чотирикутнику HA_2BC_2 кути $\angle A_2=\angle C_2=90^0$, кут $\angle A_2BC_2=100^0$ як кут, вертикальний до $\angle ABC$. Звідси маємо: $\angle A_2HC_2=80^0$ (сума кутів 4-кутника 360°). А це є кут між висотами AA_2 і CC_2, тому кут між іншими двома висотами дорівнює 55° (за умовою задачі). Нехай це кут $\angle C_2HB=55^0$. Тоді з прямокутного трикутника C_2HB визначаємо кут $\angle 1=180^0-90^0-55^0=35^0$, тоді кут $\angle 2=35^0$ як вертикальний йому і з прямокутного ΔABB_2: $\angle BAB_2=180^0-90^0-35^0=55^0$, а тоді останній кут ΔABC: $\angle BCA=180^0-100^0-55^0=25^0$ (або $\angle BCA=80^0-\angle BAC=25^0$).

Відповідь: $25^0; 55^0; 100^0$.

9 (2 бали). *Довжини сторін прямокутного трикутника є натуральними числами. Довести, що принаймні одне з них ділиться на 3.*

<u>1 спосіб</u>. Усі натуральні числа є числа виду: $3k;\, 3k+1;\, 3k-1$. Розглянемо всі випадки:

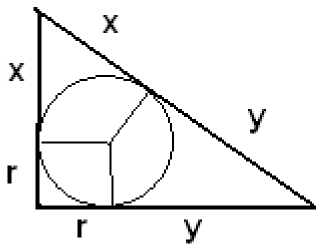
1) $c = 3k$ – найпростіший, адже гіпотенуза ділиться на 3.

2) $c = 3k \pm 1;\; b = 3l \pm 1;\;\; a^2 = (c-b)(c+b) = (3k \pm 1 - 3l \mp 1)(3k \pm 1 + 3l \pm 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 \vdots 3 \wedge a \in N \Rightarrow a \vdots 3;$

3) $c = 3k \pm 1; b = 3l \mp 1;\;\; (c-b)(c+b) = (3k \pm 1 - 3l \pm 1)(3k \pm 1 + 3l \mp 1)) \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 \vdots 3 \wedge a \in N \Rightarrow a \vdots 3.$

<u>2 спосіб</u>. Нехай усі сторони є натуральними числами, що не діляться на три. Тоді вони мають вигляд $3k+1;\, 3k-1$ (тобто при діленні на три дають остачу 1 або 2). Оскільки в такому випадку сума квадратів катетів при діленні на три дає остачу 2:
$a^2 + b^2 = (3k \pm 1)^2 + (3l \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k + 3l^2 \pm 2l) + 2 \equiv 2\ (\mathrm{mod} 3)$, а квадрат гіпотенузи – 1: $c^2 = (3m \pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1 \equiv 1\ (\mathrm{mod} 3)$, приходимо до суперечності, а тому принаймні одне з чисел ділиться на три.

9 (2 бали). *Довести, що сума катетів прямокутного трикутника дорівнює сумі діаметрів описаного і вписаного в цей трикутник кола.*



Введемо позначення (дивись рисунок), тоді катети $a = x + r;\; b = y + r;$ гіпотенуза $c = x + y;$ діаметр описаного кола дорівнює гіпотенузі $2R = c$, з цих співвідношень отримуємо: $a + b = x + r + y + r = (x + y) + 2r \Rightarrow a + b = 2R + 2r.$

9 (4 бали). *Визначити кути прямокутного трикутника, якщо* $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, *де* r, R *– відповідно радіуси вписаного та описаного кіл.*

<u>1 спосіб.</u> $R = \frac{1}{2}c = \frac{5}{2}r \Rightarrow \begin{cases} c = 5r \\ r = \dfrac{a+b-c}{2} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b - c = 2r \\ r = \dfrac{1}{5}c \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a + b = \dfrac{7}{5}c \end{cases}$

$$\begin{cases}(a+b)^2=\dfrac{49}{25}c^2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}\qquad \begin{cases}2ab=\dfrac{24}{25}c^2\\ a+b=\dfrac{7}{5}c\end{cases}\qquad \begin{cases}ab=\dfrac{12}{25}c^2\\ a+b=\dfrac{7}{5}c\end{cases},$$

скористаємося теоремою Вієта, тоді a,b – корені квадратного рівняння:

$$t^2-\left(\frac{7}{5}c\right)t+\left(\frac{12}{25}c^2\right)=0,\qquad D=\frac{49}{25}c^2-\frac{48}{25}c^2=\frac{c^2}{25},\qquad t_{1,2}=\frac{7/5\,c\pm 1/5\,c}{2};$$

$$t_1=\frac{4}{5}c;\ t_2=\frac{3}{5}c;$$

$$\begin{cases}\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{4}{5};\\ \sin B=\dfrac{3}{5}.\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}\sin A=\dfrac{3}{5};\\ \sin B=\dfrac{4}{5}.\end{cases}\qquad \text{Кути } \arcsin\frac{3}{5};\ \arcsin\frac{4}{5}.$$

<u>2 спосіб.</u> $R=\dfrac{c}{2}$; $r=\dfrac{a+b-c}{2}$; $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{2}{5}$; так як $\dfrac{a}{c}=\sin\alpha$; $\dfrac{b}{c}=\cos\alpha$, матимемо $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{c}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha-1=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$.

Розв’яжемо тригонометричне рівняння, поділивши на $\sqrt{2}$ ліву і праву частини, врахуємо, що $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}$, отримаємо

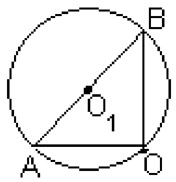
$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Зауваження: отримали, на перший погляд, іншу відповідь. Покажемо, що вони однакові:

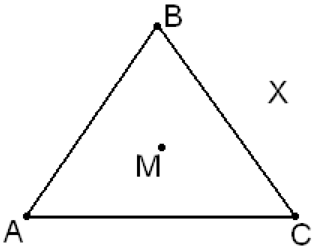
$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{7}{10}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}$$ (відповідь співпадає з відповіддю першого способу розв’язання).

11 (4 бали). *Написати рівняння кола, описаного навколо трикутника, утвореного прямою* $3x-y+6=0$ *та осями координат.*



$A(-2{,}0)$; $O(0{,}0)$; $B(0{,}6)$ – координати вершин трикутника. Центр кола лежить на середині гіпотенузи AB трикутника і має такі координати: $O_1(-1{,}3)$, тоді $R = O_1O = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$. Звідси отримаємо рівняння кола $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$.

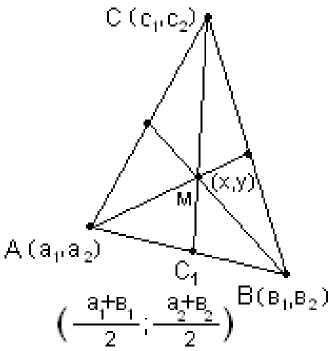


9 (4 бали). *В площині ΔABC знайти точку, сума квадратів відстаней якої до вершин трикутника є найменшою.*

1 спосіб. Як відомо, точка перетину медіан є центром мас трикутника. Нехай M – точка перетину медіан ΔABC, тоді $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$, звідси для довільної точки X:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = \left(\overline{XM} + \overline{MA}\right)^2 + \left(\overline{XM} + \overline{MB}\right)^2 + \left(\overline{XM} + \overline{MC}\right)^2 = 3XM^2 +$$
$$+ 2\overline{XM}\left(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right) + MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Сума $MA^2 + MB^2 + MC^2$ є сталою і не залежить від положення точки X у площині, тому вираз набуває найменшого значення, коли перший доданок перетворюється в нуль, тобто $X \equiv M$, отже, $XA^2 + XB^2 + XC^2$ набуває найменшого значення, коли X – точка перетину медіан.



2 спосіб (метод координат). Допоміжна вправа: дано координати вершин трикутника ABC: $A(a_1;a_2), B(b_1;b_2), C(c_1;c_2)$. Визначити координати точки M перетину медіан.

Вказівка: запишіть координати середини відрізка AB – точки C_1 і скористайтесь тим фактом, що точка M ділить відрізок CC_1 у відношенні $2:1$.

Відповідь: $M\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}; \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

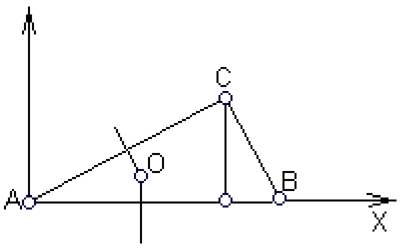
Розв’язання. Виберемо прямокутну систему координат, нехай координати точок $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3), M(x;y)$. Тоді потрібно знайти найменше значення $d = MA^2 + MB^2 + MC^2$;

$$d=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=$$
$$=3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3y^2-2y(y_1+y_2+y_3)+\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=$$
$$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+q(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3),$$ де

$q(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)$ - деякий вираз, що не залежить від вибору точки M, а тільки від заданих точок $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$. Очевидно d набуває найменшого значення, якщо перші два доданки дорівнюють нулю, а тоді:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}. \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$ - точка перетину медіан ΔABC.

10 (7 балів). *Довести, що центр описаного кола O, ортоцентр H (точка перетину висот) і точка перетину медіан M будь-якого трикутника лежать на одній прямій (прямій Ейлера).*



$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(x_0;y_0)$, $y_0\neq 0$. Тоді $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. $M\left(\frac{1+x_0}{3};\frac{y_0}{3}\right)$ – точка перетину медіан.

Серединний перпендикуляр до AB: $x=\frac{1}{2}$, тоді $O\left(\frac{1}{2};y'\right)$.

$$\begin{cases} AO^2=\dfrac{1}{4}+y'^2; \\ CO^2=\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y_0-y')^2. \end{cases} \qquad \left(x_0^2-x_0+\frac{1}{4}\right)+\left(y_0^2-2y_0y'+y'^2\right)=\frac{1}{4}+y'^2;$$

$y'=\dfrac{x_0^2+y_0^2-x_0}{2y_0}$. Тоді $O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{x_0^2+y_0^2-x_0}{2y_0}\right)$.

Оскільки H – лежить на перпендикулярі до $\overrightarrow{AB}=(1;0)$, що проходить через $C(x_0;y_0)$, то $1\cdot(x-x_0)+0\cdot(y-y_0)=0 \Rightarrow x=x_0$. Оскільки H – лежить на перпендикулярі до $\overrightarrow{AC}=(x_0;y_0)$, що проходить через $B(1;0)$, то $x_0\cdot(x-1)+y_0\cdot(y-0)=0$; $x_0^2-x_0+y_0\cdot y=0$; $y=\dfrac{x_0-x_0^2}{y_0}$. Тоді $H\left(x_0;\dfrac{x_0-x_0^2}{y_0}\right)$.

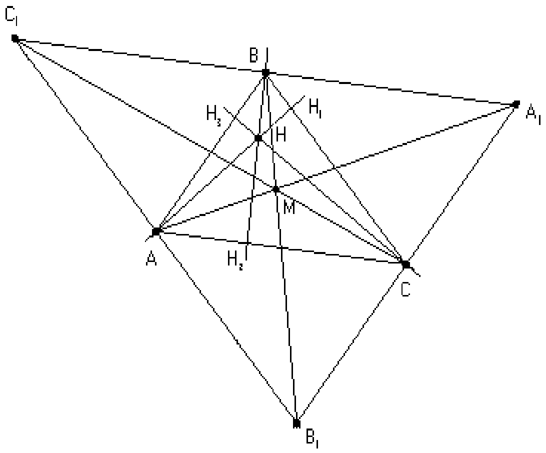
$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1+x_0}{3}-\frac{1}{2};\frac{y_0}{3}-\frac{x_0^2+y_0^2-x_0}{2y_0}\right)=\left(\frac{2x_0-1}{6};\frac{-y_0^2-3x_0^2+3x_0}{6y_0}\right);$$

$$\overrightarrow{MH}=\left(x_0-\frac{1+x_0}{3};\frac{x_0-x_0^2}{y_0}-\frac{y_0}{3}\right)=\left(\frac{2x_0-1}{3};\frac{-y_0^2-3x_0^2+3x_0}{3y_0}\right);$$

$$\overrightarrow{OH}=\left(x_0-\frac{1}{2};\frac{x_0-x_0^2}{y_0}-\frac{x_0^2+y_0^2-x_0}{2y_0}\right)=\left(\frac{2x_0-1}{2};\frac{-y_0^2-3x_0^2+3x_0}{2y_0}\right).$$

Координати векторів пропорційні, а отже точки лежать на одній прямій.

2 спосіб.: Розглянемо наступні вправи.



Вправа 1. Доведемо, що висоти трикутника перетинаються в одній точці. Нехай дано: ΔABC, $AH_1\perp BC$; $BH_2\perp AC$; $CH_3\perp AB$.

Довести: $AH_1\cap BH_2\cap CH_3=H$.

Через вершини трикутника *ABC* проведемо прямі, паралельні його сторонам, які попарно перетинаються в точках A_1, B_1, C_1. Розглянемо чотирикутники $CBAB_1$ і CBC_1A. Це паралелограми (за побудовою $BC||B_1C_1$; $AC||A_1C_1$; $AB||A_1B_1$. Оскільки $BC=AC_1$ і $BC=AB_1$, то $AC_1=AB_1$ (за транзитивністю), а звідси випливає, що точка А ділить відрізок B_1C_1 навпіл. Аналогічно точки *B* і *C* ділять навпіл відповідно відрізки A_1C_1 і A_1B_1. Прямі, яким належать висоти трикутника *ABC*, перпендикулярні до сторін трикутника $A_1B_1C_1$ в їх серединах. Отже, вони мають спільну точку – центр кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Ця точка, спільна для висот трикутника *ABC*, є *ортоцентром H*.

Вправа 2. Довести, що коли через вершини трикутника *ABC* провести прямі, паралельні його сторонам, то утворений трикутник $A_1B_1C_1$ буде гомотетичний трикутнику *ABC* з центром гомотетії в точці *M* перетину медіан трикутника *ABC* і коефіцієнтом $k=-2$.

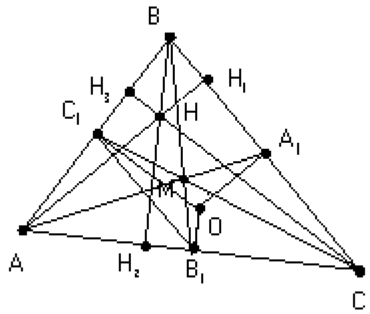
Доведення: Оскільки $B_1A=AC_1$; $C_1B=BA_1$; $A_1C=CB_1$ (дивись попередню вправу), то B_1B, A_1A *і* C_1C – медіани трикутника $A_1B_1C_1$.Тому $\overline{MA_1}=-2\overline{MA}$;

$\overline{MB_1} = -2\overline{MB}$; $\overline{MC_1} = -2\overline{MC}$; і трикутник $A_1B_1C_1$ буде гомотетичний трикутнику ABC з центром гомотетії в точці M перетину медіан трикутника ABC.

Вправа 3. Довести, що у будь-якому трикутнику ABC центр O описаного кола, точка M перетину медіан і ортоцентр H належать одній прямій (*пряма Ейлера*), причому $2OH=MH$.

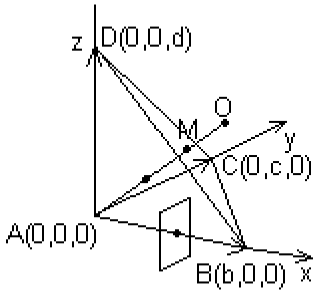
Оскільки точка H є центром кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$, то точки O і H відповідно гомотетичні при гомотетії з центром M і коефіцієнтом $k=-2$, тому лежать на одній прямій.

3 спосіб. Нехай B_1 і C_1 - середини сторін AC та AB, відповідно, O - центр



описаного кола, M - точка перетину медіан, H - ортоцентр. Оскільки $OC_1 \perp AB$ і $CH \perp AB$, тому $OC_1 \parallel CH$. Аналогічно, $OB_1 \parallel BH$, крім того $B_1C_1 \parallel BC$, бо B_1C_1 - середня лінія ΔABC. Звідси випливає, що ΔB_1C_1O гомотетичний ΔBCH. Прямі BB_1, CC_1, OH перетинаються в одній точці, а саме точці M (BB_1, CC_1 - медіани). Звідси $\frac{OM}{MH} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{2}$.

11 (4 бали). *Ребра AB, AC, AD чотирикутної піраміди $ABCD$ – взаємно-перпендикулярні. Довести, що центр сфери, описаної навколо $ABCD$, лежить на прямій, що з'єднує вершину A з точкою перетину медіан трикутника BCD.*



Нехай $A(0,0,0)$; $B(b,0,0)$; $C(0,c,0)$; $D(0,0,d)$. M – точка перетину медіан трикутника BCD. Тоді вона має такі координати $M\left(\frac{b+0+0}{3}; \frac{0+c+0}{3}; \frac{0+0+d}{3}\right)$, $M\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}; \frac{d}{3}\right)$.

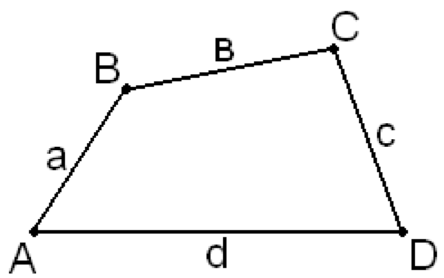
Визначимо координати центра сфери: запишемо рівняння площини Π_1, перпендикулярної до AB, що проходить через середину відрізка AB: $A(0,0,0)$; $B(b,0,0)$ ($\Pi_1 \parallel ACD$; $x=0$), тоді середина AB: $\left(\frac{b+0}{2};0;0\right)$, рівняння площини Π_1: $x = \frac{b}{2}$;

$\Pi_2: \; y=\dfrac{c}{2}$ ($\perp AC$, *через середину* AC); $\Pi_3: \; z=\dfrac{d}{2}$ ($\perp AD$, *через середину* AD), а

тому центр сфери $O\left(\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2};\dfrac{d}{2}\right)$.

А, отже, точки $\begin{cases} A\ (0,0,0); \\ M\left(\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3},\dfrac{d}{3}\right); \\ O\left(\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2},\dfrac{d}{2}\right). \end{cases}$ – лежать на одній прямій.

10 (7 балів). *Площа чотирикутника дорівнює 1м², а периметр – 4м. Довести, що чотирикутник обов'язково є квадратом.*

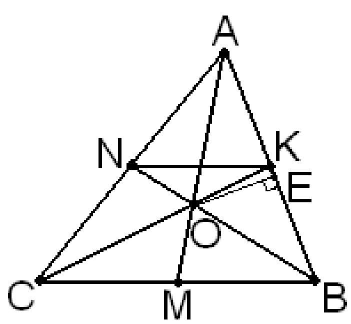


Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

З нерівності $(x-y)^2 \ge 0$ легко видно, що $xy \le \dfrac{1}{4}(x+y)^2$.

$$1=S=\frac{1}{2}ab\sin\angle B+\frac{1}{2}cd\sin\angle D \le \frac{ab+cd}{2}.$$

Аналогічно, $1 \le \dfrac{bc+ad}{2}$. Додавши дві останні нерівності отримаємо: $2 \le \dfrac{(a+c)(b+d)}{2} \le \dfrac{1}{8}\big((a+c)+(b+d)\big)^2 = \dfrac{16}{8}=2$. Рівність можлива, по-перше, коли всі кути прямі, а також при умові, що $a+c=b+d$, але $a=c$ і $b=d$, тому $2a=2b$, $a=b$, тобто маємо прямокутник, у якого всі сторони рівні, тобто квадрат.

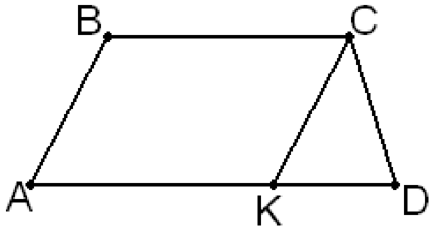


10 (4 бали). *Нехай O – точка на медіані AM трикутника ABC. Прямі BO і CO перетинають сторони AC і AB у точках N і K відповідно. Відомо, що площі трикутників OCN і OKA однакові. Довести, що O – точка перетину медіан трикутника ABC.*

Прямі AM, BN, CK перетинаються в одній точці, тому за теоремою Чеви: $\dfrac{AN}{NC}\cdot\dfrac{CM}{MB}\cdot\dfrac{BK}{KA}=1$, але

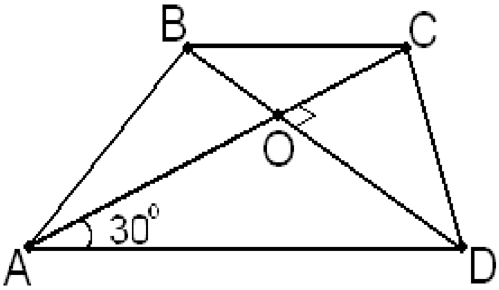
$CM = MB$, тому $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AK}{KB}$, звідки $NK \| AB$. Нехай h – відстань між прямими NK та AB, тоді $S_{OKB} = \dfrac{1}{2} h \cdot NK = S_{OCN} = S_{OAK}$, $\dfrac{1}{2} OE \cdot KB = \dfrac{1}{2} OE \cdot AK$, $KB = AK$, де через E позначено проекцію точки O на пряму AB. Отже, CK – медіана, а тому O – точка перетину медіан.

10 (4 бали). *Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см? Відповідь обґрунтуйте.*



Нехай $ABCD$ – дана трапеція. $AD = 11$, $AB = 8$, $BC = 9$, $CD = 6$. Побудуємо на основі точку K так, що $CK \| AB$, тоді $ABCK$ – паралелограм, $DK = AD - AK = AD - BC = 11 - 9 = 2$, оскільки, $CK = AB = 8$, $CD = 6$, то для ΔCDK порушується нерівність трикутника $CK < DK + CD$. Тобто такої трапеції не існує.

11 (4 бали). *Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Одна з них дорівнює 6, а інша утворює кут* $30°$ *з основою. Знайти довжину середньої лінії трапеції.*

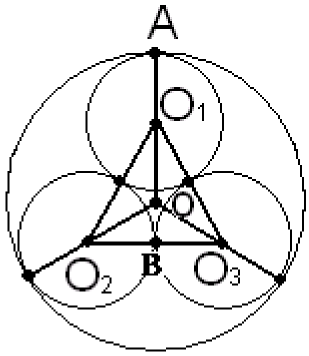


Нехай $ABCD$ – дана трапеція, O – точка перетину діагоналей, $\angle BCA = 30°$, адже $BC \| AD$. $BC = 2BO$, $AD = 2DO$, звідки довжина середньої лінії: $\dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{2BO + 2DO}{2} = BO + DO = BD = 6$.

9 (4 бали). *Довжина кожної сторони трикутника не перевищує 1. Довести, що квадрат його площі не перевищує* $\dfrac{3}{16}$. *Коли досягається знак рівності?*

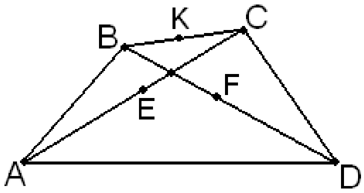
Нехай α - найменший кут трикутника. Тоді $\alpha \le \dfrac{180^0}{3} = 60^0$ і площа трикутника: $S = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \le \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S^2 \le \dfrac{3}{16}$. Знак рівності досягається при $\begin{cases} b = c = 1; \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ - рівносторонній із сторонами 1.

9 (4 бали). *Дано коло радіуса R. В нього вписано три однакових кола, кожне з яких дотикається до двох інших. Знайти радіуси цих кіл.*



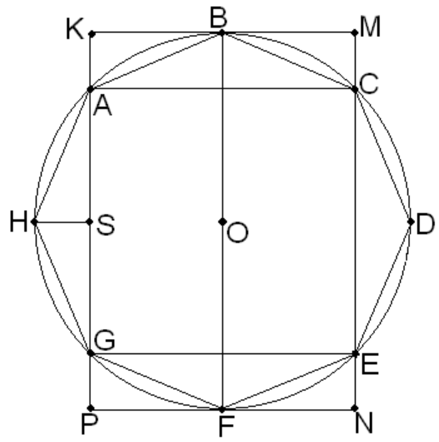
Нехай x – радіус цих кіл. $OO_1 = OA - AO_1 = R - x$ – радіус описаного кола для рівностороннього $\Delta O_1O_2O_3$. Оскільки $O_2O_3 = O_2B + O_3B = 2x$, маємо $O_1O = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$, звідси $\frac{2\sqrt{3}x}{3} = R - x \Rightarrow x = \frac{3R}{3+2\sqrt{3}}$.

11 (4 бали). *Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні між собою. Довести, що прямі AB і CD утворюють рівні кути з прямою, що з'єднує середини BD і AC.*



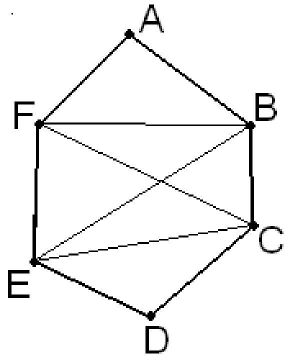
Нехай E, F, K – середини відрізків AC, BD, BC, відповідно. Оскільки $EK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = KF$, то $\angle KEF = \angle KFE$, але $EK \parallel AB$, $KF \parallel CD$, звідси випливає потрібне твердження.

10 (4 бали). *Довести, що площа правильного восьмикутника дорівнює добуткові його найкоротшої і найдовшої діагоналей.*



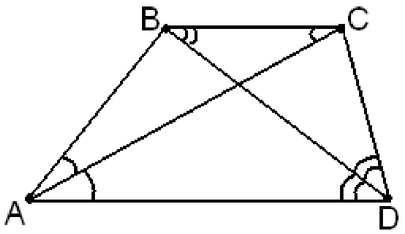
Враховуючи осьову симетрію легко бачити, що $BF \perp AC$, $AG \parallel BF$ ($AB = GF$), побудуємо дотичні до описаного кола восьмикутника в точках F і B і в перетині з прямими AG і EC побудуємо прямокутник $KMNP$. Нехай S – проекція точки H на пряму AG. $\Delta GPF = \Delta HSG$ ($HG = GF$, $SG = \frac{AG}{2} = \frac{AC}{2} = PF$). Звідки легко видно, що площа восьмикутника дорівнює площі прямокутника $KMNP$, тобто $ME \cdot PN = BF \cdot AC$.

11 (4 бали). *Чи можуть всі діагоналі опуклого шестикутника бути рівними за довжиною.*



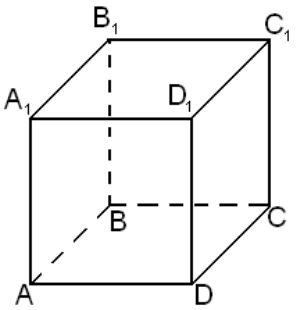
Припустимо, що це можливо, тоді рівнобедрені трикутники FCE та FBE рівні (FE – спільна сторона, $FB = BE = FC = EC$), але тоді $\angle BFE = \angle CFE$, $B \equiv C$ – суперечність. Ні, не можливо.

10 (4 бали). *В яких межах може змінюватись периметр трапеції, у якої діагоналі – бісектриси кутів при більшій основі, а одна з бічних сторін дорівнює 2.*



Враховуючи властивість різносторонніх кутів, маємо: $\angle BCA = \angle CAD = \angle BAC$, $BC = AB = 2$. Аналогічно $CD = 2$. $AD > BC = 2$, тому $P > 4 \cdot 2 = 8$. За нерівністю многокутника: $AD < AB + BC + CD = 6$, $P < 3 \cdot 2 + 6 = 12$.

Отже, $P \in (8;12)$. «Лівий» кінець досягається коли «зсувати» точки A та D до граничного положення, коли $AD = 2$. Для правого кінця потрібно «розсувати» точки A та D до граничного положення, коли $B, C \in AD$.



11 (4 бали). *Довести, що сума відстаней від довільної точки простору до всіх вершин одиничного куба не менша від* $4\sqrt{3}$.

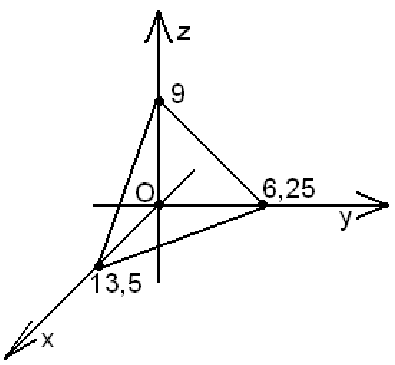
Обчислимо діагональ куба:

$$AC_1 = \sqrt{AD^2 + DC^2 + CC_1^{\,2}} = \sqrt{3}.$$

Розглянемо суму відстаней від довільної точки простору X до усіх вершин одиничного куба та врахуємо нерівність трикутника, отримаємо:

$$\left(XA + XC_1\right) + \left(XB + XD_1\right) + \left(XC + XA_1\right) + \left(XD + XB\right)_1 \geq AC_1 + BD_1 + CA_1 + DB_1 = 4\sqrt{3}.$$

11 (4 балів). *Поверхня кулі дотикається координатних площин та площини* $2x + 4y + 3z - 27 = 0$. *Знайти центр вписаної кулі.*



Нехай $Q(x, x, x)$ – центр вписаної кулі. Точки Q і O лежать по один бік від площини $2x + 4y + 3z - 27 = 0$, причому $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = -27 < 0$, враховуючи відому формулу відстані від точки до площини отримаємо: $x=-\frac{2x+4x+3x-27}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}}=\frac{27-9x}{\sqrt{29}}$, $x=\frac{27}{\sqrt{29}+9}$, $Q\left(\frac{27}{\sqrt{29}+9};\frac{27}{\sqrt{29}+9};\frac{27}{\sqrt{29}+9}\right)$.

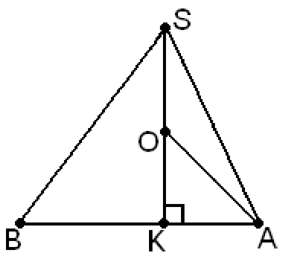
11 (7 балів). *Довести, що* $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$*, якщо* a,b,c *– довжини сторін трикутника.*

За нерівністю трикутника: $|a-b|<c$, $|b-c|<a$, $|a-c|<b$. Піднісши ці нерівності до квадрату, та додавши, отримаємо:

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)<a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow$$

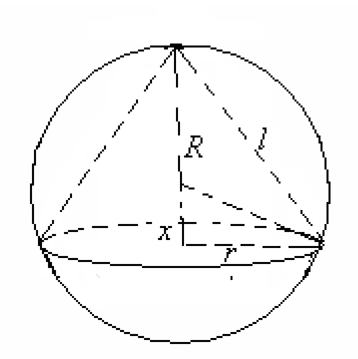
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac).$$

11 (7 балів). *Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса* R.



Нехай висота дорівнює x. Розглянемо переріз, який проходить через вершину S і центр кулі O. З ΔAOK: $AK^2=OA^2-OK^2=R^2-(R-x)^2=2xR-x^2$, звідки $V=\frac{4}{3}\pi(2xR-x^2)x$. У випадку коли ΔASB – тупокутний, вираз для об'єму такий самий (перевірте!). $V(0)=V(2R)=0$, $x\in[0;2R]$, $V'(x)=\frac{4}{3}\pi(4xR-3x^2)$, $V'(x)=0$ при $x=0$ або $x=\frac{4R}{3}$, тоді $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{8R^2}{3}-\frac{16R^2}{9}\right)=\frac{32\pi}{27}R^2$, це значення є максимальним.

11 (7 балів). *В сферу радіуса* R *вписано конус найбільшого з можливих об'єму. Визначте площу поверхні цього конуса.*



Нехай R – радіус кулі, r – радіус основи конуса, висота конуса дорівнює $R+x$. Об'єм $V=\frac{1}{3}\pi r^2(R+x)$;

$r=\sqrt{R^2-x^2}$, а тоді

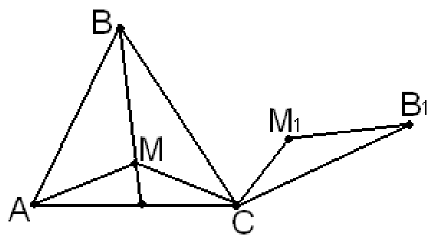
$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)=\frac{\pi}{3}(-x^3-x^2R+xR^2+R^3);$$

похідна

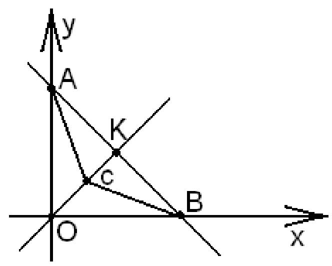
$V_x' = \frac{1}{3}\pi\left(-3x^2 - 2xR + R^2\right)$; $V_x' = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{3}$. Так як при $x \in \left(0; \frac{R}{3}\right)$ $V_x' > 0$ і при $x \in \left(\frac{R}{3}; R\right)$ $V_x' < 0$, то при $x = \frac{R}{3}$ V_x досягає максимуму. Висота конуса дорівнює $R + x = \frac{4R}{3}$, радіус основи $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{2R}{3}\sqrt{2}$. Тоді площа поверхні конуса $S = \pi r(r + l)$, де твірна $l = \sqrt{(R+x)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{4R}{3}\right)^2 + \frac{8R^2}{9}} = \frac{2R}{3}\sqrt{6}$, а тоді площа

$$S = \pi \cdot \frac{2R}{3}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2R}{3}\sqrt{2} + \frac{2R}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{8\pi R^2}{9}\left(1 + \sqrt{3}\right) \text{ (кв.од.).}$$

9 (7 балів). *Початок координат і точка перетину прямої $y = -x + 2$ з осями координат визначають ΔAOB. Знайти точку, для якої сума відстаней до вершин цього трикутника була б найменшою.*

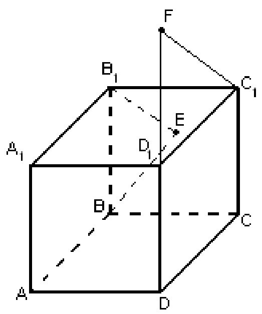


Розв'яжемо задачу для довільного трикутника, всі кути якого менші за $120°$. Повернемо ΔBMC за годинниковою стрілкою навколо точки C на кут $60°$, отримаємо точки M_1 та B_1. Тоді $MM_1 = MC$, $M_1B_1 = BM$, тому $AB_1 \le AM + MM_1 + M_1B_1 = AM + MC + MB$, причому рівність можлива лише коли $M, M_1 \in AB_1$, $\angle BMC = \angle CM_1B_1 = 180° - 60° = 120°$, $\angle AMC = 180° - 60° = 120°$, а тому $\angle AMB = 120°$. Така точка M носить назву точки Торічеллі і визначається однозначно.



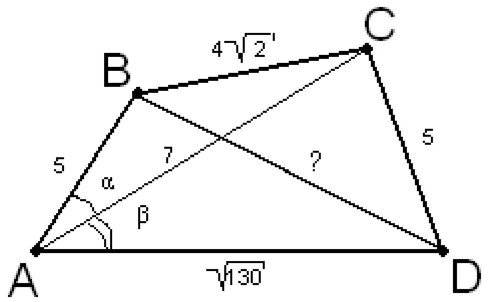
У нашому випадку маємо рівнобедрений прямокутний трикутник AOB, $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(2;0)$, нехай K – проекція точки O на пряму AB. Відкладемо на відрізку OK точку C так, щоб $\angle CBK = 30°$, тоді $\angle OCB = 90° + \angle ABC = 120°$, $\angle OCB = 120°$, C – точка Торічеллі для ΔAOB. $OK = \sqrt{2}$, $CK = \frac{\sqrt{3}}{3}KB = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $OC = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Нехай $C(x;x)$, тоді $x\sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $C\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.



11 (7 балів). *Довести, що існує пряма, яка перетинає усі три прямі, на яких лежать ребра* AB, B_1C_1, DD_1 *куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Побудуємо точки E і F так, щоб $\overline{BE} = \overline{AB}, \overline{FD_1} = \overline{D_1D}$, тоді $\overline{B_1E} = \overline{B_1B} + \overline{BE} = \overline{D_1D} + \overline{D_1C_1} = \overline{FC_1}$, адже $\overline{B_1B} = \overline{D_1D}$, $\overline{AB} = \overline{D_1C_1}$. Отже, B_1EC_1F - паралелограм, тобто діагоналі EF належить середина відрізка B_1C_1.

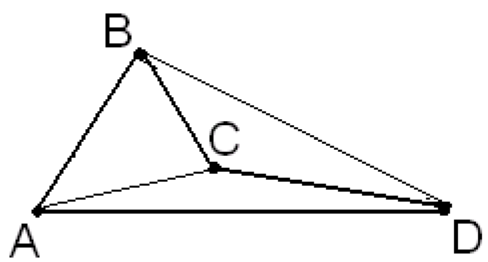


10 (7 балів). *Нехай* A, B, C, D *- такі точки на площині, що* $AB = 5$ *см,* $BC = 4\sqrt{2}$ *см,* $CD = 5$ *см,* $AD = \sqrt{130}$ *см,* $AC = 7$ *см. Знайти довжину* BD.

Розглянемо ΔABC: покладемо $\angle BAC = \alpha$ і запишемо теорему косинусів:
$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC},$$
$\cos\alpha = \dfrac{5^2 + 7^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{3}{5}$ (кут α гострий, бо $\cos\alpha > 0$), тоді $\sin\alpha > 0,\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Розглянемо ΔDAC: нехай $\angle DAC = \beta$, з теореми косинусів: $\cos\beta = \dfrac{AD^2 + AC^2 - DC^2}{2 \cdot AD \cdot AC}$, $\cos\beta = \dfrac{\left(\sqrt{130}\right)^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{130} \cdot 7} = \dfrac{11}{\sqrt{130}} > 0$ (кут β гострий), тоді $\sin\beta > 0,\ \ \sin\beta = \dfrac{3}{\sqrt{130}}$.

Розглянемо ΔDAB: тоді $\angle DAB = \alpha + \beta$, застосуємо теорему косинусів, попередньо отримавши $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\cos\angle DAB = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{11}{\sqrt{130}} - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{130}} = \dfrac{21}{5\sqrt{130}} > 0$ (кут $\angle DAB$ гострий), тоді $DB^2 = \left(\sqrt{130}\right)^2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{130} \cdot 5 \cdot \dfrac{21}{5\sqrt{130}} = 113 \Rightarrow DB = \sqrt{113}$ (см) (відповідь).



Перевірка: проаналізувавши сторони усіх трикутників, робимо висновки про вигляд трикутників: ΔABC - гострокутний (квадрат найбільшої сторони менший за суму квадратів двох інших сторін), ΔACD - тупокутний,

ΔDAB - гострокутний, ΔBCD - тупокутний. А тому перевіркою є те, що сума площ трикутників ΔABC; ΔACD; ΔDCB дорівнює площі ΔDAB. Перевірте самостійно: $S_{\Delta ABC} = 14$ (см^2), $S_{\Delta ADC} = 10{,}5$ (см^2), $S_{\Delta DCB} = 2$ (см^2), $S_{\Delta ABD} = 26{,}5$ (см^2).

9 (7 балів). *Нехай A, B, C, D - такі точки на площині, що $AB = 13$ см, $BC = \sqrt{145}$ см, $CD = 5\sqrt{2}$ см, $AD = 7\sqrt{2}$ см, $AC = 6$ см. Знайти довжину BD.*

Відповідь: $DB = \sqrt{365}$ (см).

11 (4 бали). *Нехай A, B, C, D - такі точки на площині, що $AB = 5$ см, $BC = \sqrt{17}$ см, $CD = \sqrt{10}$ см, $AD = 5\sqrt{2}$ см, $AC = 4$ см. Знайти довжину BD.*

Відповідь: $DB = \sqrt{41}$ (см).

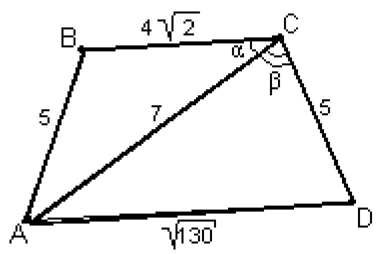
10 (4 бали). *Нехай A, B, C, D - такі точки на площині, що $AB = 4$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $CD = \sqrt{21}$ см, $AD = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 3\sqrt{3}$ см. Знайти довжину BD.*

Відповідь: $DB = 2\sqrt{7}$ (см).

11 (4 бали). *Нехай A, B, C, D - такі точки на площині, що $AB = 3$ см, $BC = \sqrt{11}$ см, $CD = \sqrt{10}$ см, $AD = 2\sqrt{2}$ см, $AC = 3\sqrt{2}$ см. Знайти довжину BD.*

Відповідь: $DB = \dfrac{7 + 2\sqrt{10}}{3}$ (см).

11 (7 балів). *Нехай $ABCD$ - опуклий чотирикутник. З'ясувати, чи можливо, щоб $AB = 5см$, $BC = 4\sqrt{2}см$, $CD = 5см$, $AC = 7см$.*

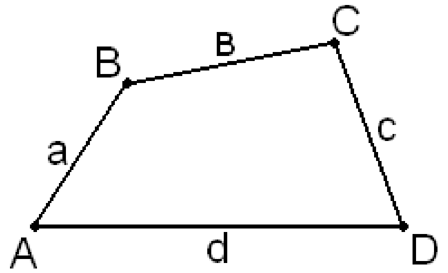


Нехай $\angle BCA = \alpha$, $\angle ACD = \beta$. Враховуючи теорему косинусів, маємо: $32 + 49 - 56\sqrt{2}\cos\alpha = 25$, тоді $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; $49 + 25 - 70\cos\beta = 130$, а тоді $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$. Врахуємо основну тригонометричну тотожність, отримаємо $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$.

А тоді $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right) < 0$.

Отже, $\alpha + \beta > 180°$, $ABCD$ – не є опуклим чотирикутником.

9 (7 балів). *Вписано-описаним називатимемо чотирикутник, у який можна вписати коло і навколо якого можна описати коло. Довести: якщо три* *послідовні сторони одного вписано-описаного чотирикутника дорівнюють відповідно трьом послідовним сторонам іншого, то такі чотирикутники рівні.*

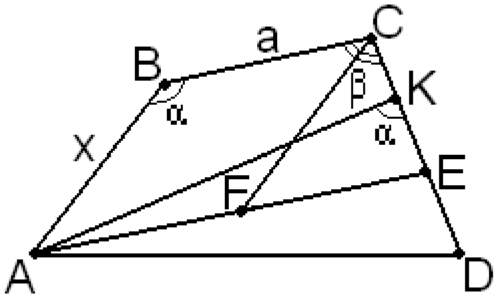


$ABCD$ – описаний, тому $AB+CD=BC+AD$, тобто $a+c=b+d$, $d=a+c-b$. Нехай $\angle ABC=\alpha$, тоді $\angle ADC=180^\circ-\alpha$, адже $ABCD$ – вписаний. За теоремою косинусів:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = AC^2 = c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\alpha) = c^2+d^2+2cd\cos\alpha,$$

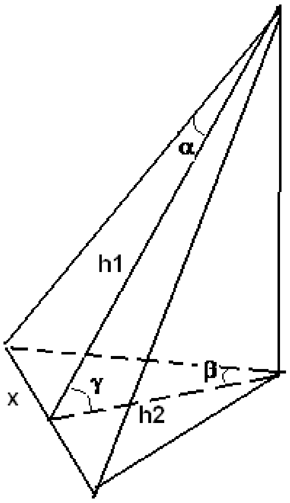
звідки $\cos\alpha=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$, тепер можна знайти AC, тобто чотирикутник однозначно визначається за сторонами a,b,c, що і доводить потрібне твердження.

10 (7 балів). *Вписано-описаним називатимемо чотирикутник, у який можна вписати коло і навколо можна описати коло. Довести, якщо сторона і два прилеглі кути одного вписано – описаного чотирикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим кутам іншого, то такі чотирикутники рівні.*



Нехай для певності $\beta>\alpha$. Через точку A проведемо пряму паралельну BC. Нехай вона перетинає відрізок CD (у іншому випадку міркування аналогічні) у точці E. Через точку C проведемо пряму паралельну до AB. Нехай вона перетинає відрізок AE (у іншому випадку міркування аналогічні) у точці F. Нехай $AB=x$, тоді $CF=x$, $\angle CEA=180^\circ-\beta$, $\angle CFE=180^\circ-\alpha$. З теореми синусів для ΔCFE маємо: $EF=\dfrac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$, $CE=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}x$. Оскільки $\angle ADE=180^\circ-\alpha$ ($ABCD$ – вписаний), $\angle AED=\beta$, то $\angle EAD=\beta-\alpha$. З теореми синусів для ΔAED маємо: $AD=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\left(\dfrac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}+a\right)$, $DE=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\left(\dfrac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}+a\right)$. Тепер, знаючи DE, можна знайти $CD=CE-ED$. Підставивши у рівність $AB+CD=BC+AD$ ($ABCD$ – описаний) відомі значення AB, BC, CD, AD, тому отримаємо лінійне відносно x рівняння (перевірте!), з якого знайшовши x, можна однозначно відновити чотирикутник $ABCD$, що і доводить твердження задачі.

11 (4 бали). *Рівнобедрений трикутник з кутом при вершині* $arctg\frac{8}{15}$ *ортогонально проектується на площину, яка проходить через його основу. Проекцією є рівнобедрений трикутник з кутом* $arctg\frac{4}{3}$ *при вершині. Знайти кут між площиною початкового трикутника і площиною проекцій.*



Позначимо через $2x$ основу рівнобедреного трикутника, спільну для трикутника і його проекції, через $h_1; h_2$ - висоти, $2\alpha, 2\beta$ - кути при вершині початкового трикутника і його проекції відповідно. Тоді з прямокутних трикутників матимемо: $tg\,\alpha = \frac{x}{h_1}$, $tg\,\beta = \frac{x}{h_2}$. З урахуванням даних в умові кутів та формул тригонометричних функцій половинного кута отримаємо:

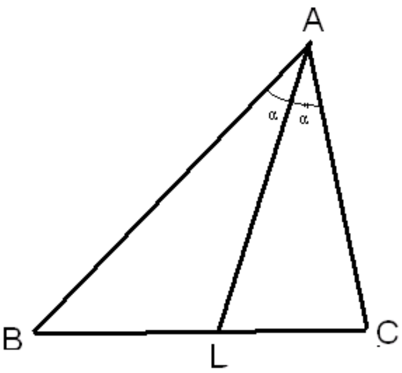
$$\frac{x}{h_1} = tg\alpha = tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{8}{15}\right) = \frac{\sin\left(arctg\frac{8}{15}\right)}{1+\cos\left(arctg\frac{8}{15}\right)} = \frac{8/17}{1+15/17} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{x}{h_2} = tg\beta = tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{4}{3}\right) = \frac{\sin\left(arctg\frac{4}{3}\right)}{1+\cos\left(arctg\frac{4}{3}\right)} = \frac{4/5}{1+3/5} = \frac{1}{2}.$$ А тоді $\cos\gamma = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$, і

кут між площиною трикутника і площиною проекцій $\gamma=60^0$.

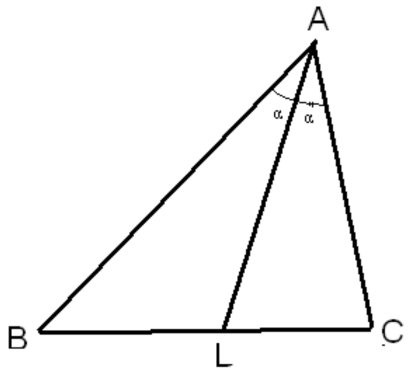
10 (4 бали). *Довжини сторін трикутника 10 см та 15 см. Довести, що довжина бісектриси кута між ними не більша від 12 см. Чи існує трикутник з бісектрисою 12 см?*

Розглянемо ΔABC: $AB=a$; $BC=b$; $\angle BAC=2\alpha$; $AL=l$ - бісектриса кута $\angle BAC$.



Тоді з рівності площ $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABL} + S_{\Delta ALC}$ маємо $\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = \frac{1}{2}al\sin\alpha + \frac{1}{2}bl\sin\alpha$, а тоді $2ab\cos\alpha = (a+b)l$, звідки $l = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b} < \frac{2ab}{a+b}$. Звернемо увагу, що для трикутника знак нерівності строгий, бо рівність можлива тільки коли $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0^0$. А тому $l < \frac{2\cdot 10\cdot 15}{10+15} = 12$.

Відповідь: $l<12$. Не існує трикутника, сторони якого 10 см, 15 см і бісектриса кута між ними 12 см.



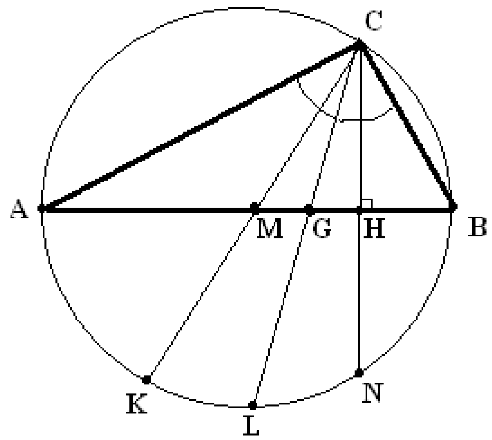
10 (4 бали). *Довжини сторін трикутника 10 см та 15 см. В яких межах може змінюватись довжина бісектриси кута між ними?*

Вказівка до розв'язання: дивись попередню задачу: $l = \dfrac{2ab\cos\alpha}{a+b}, \alpha \in (0^0; 90^0)$, а тоді $\cos\alpha \in (0; 1)$ і $0 < l < \dfrac{2ab}{a+b} \Rightarrow l \in (0; 12)$.

Відповідь: $l \in (0; 12)$.

9 (4 бали). *Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини цього кута, навпіл.*

Доведення: Нехай у ΔABC: кут $\angle C = 90^0$, CM, CG, CH - медіана, бісектриса і висота, відповідно. Побудуємо коло, описане навколо прямокутного ΔABC, тоді M - центр кола, $M \in CK$, нехай точки перетину прямих CM, CG, CH з колом - K, L, N, відповідно. AB, CK - діаметри.



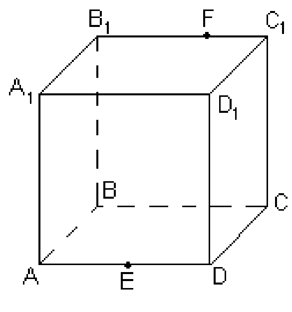
1. З рівності прямокутних трикутників $\Delta CHB = \Delta NHB$ маємо рівність дуг CB і BN.

2. З рівності рівнобедрених трикутників $\Delta CMB = \Delta KMA$ маємо рівність дуг CB і KA. А тому рівні дуги KA і BN.

3. CL - бісектриса, тому рівні дуги LA і LB.

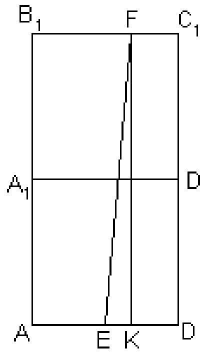
4. З п.2 і п.3 випливає рівність дуг KL і LN. Звідки слідує рівність кутів $\angle KCL$ і $\angle LCN$ між медіаною і бісектрисою та бісектрисою і висотою.

11 (7 балів). *Знайти довжину найкоротшого шляху по поверхні одиничного куба, що з'єднує середину ребра куба з точкою протилежного ребра, яка ділить це ребро у відношенні* $1:2$.



1 спосіб. «Розвернемо» грані AA_1D_1D і $A_1B_1C_1D_1$ таким чином, щоб вони лежали в одній площині. Найкоротший шлях між двома точками, як відомо, лежить по прямій. Нехай K - проекція точки F на прямій AD. $EK = ED - DK = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$, $FK = 2$,

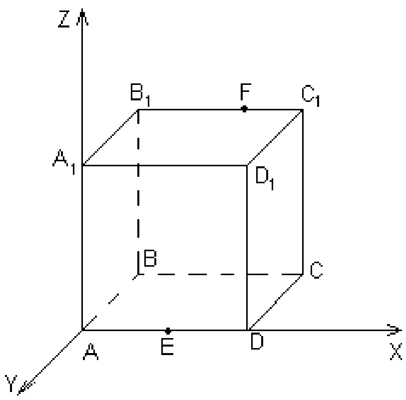
тому довжина найкоротшого шляху: $EF = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{145}}{6}$.



2 спосіб. Введемо прямокутну систему координат. Тоді $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $F\left(\frac{2}{3},-1,1\right)$. Нехай K - точка, яка відповідає мінімальному маршруту EKF, $K(x,0,1)$. Тоді нам потрібно оцінити вираз

$$EK + KF = f(x) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + 1}.$$

Досліджувати цю функцію ($0 \le x \le 1$) звичайними методами диференціального числення досить важко, тому підемо іншим шляхом і використаємо метод Лагранжа. Нехай $x - \frac{1}{2} = a$, $\frac{3}{2} - x = b$, розглянемо функцію



$f(a,b) = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}$ при умові $a + b = x - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - x = \frac{1}{6}$, $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} \le b \le \frac{2}{3}$ (адже $0 \le x \le 1$). Функція Лагранжа: $f(a,b) = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}$, де λ - множник Лагранжа.

$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$, тому $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \lambda, \\ \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} = \lambda. \end{cases}$ Розглянемо функцію

$g(y) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, вона непарна $\left(g(-y) = -g(y)\right)$ і зростає на проміжку $[0,+\infty)$, $g(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}$ ($\frac{1}{y}$ спадає при зростанні y і т.д.). Тому, маємо: $g(a) = \lambda = g(b)$,

$a = b$ і з умови $a + b = \frac{1}{6}$, отримаємо: $a = b = \frac{1}{12}$. $f\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right) = \frac{\sqrt{145}}{6}$. Залишилося дослідити функцію $f(a,b)$ на межі, тобто коли $a = -\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$, або фактично $x = 0$ або 1 для функції $f(x)$. Оскільки $f(0)$ і $f(1)$ більші за $\frac{\sqrt{145}}{6}$, то $\frac{\sqrt{145}}{6}$ - шукана величина.

Задачі, наведені у даній роботі, розглядалися під час роботи з учнями секції «Математика» Кіровоградського територіального відділення Малої академії наук.

Вибрані теоретичні питання

1. **Розв'язування рівнянь вищих порядків**.

<u>1.</u> Рівняння четвертого степеня довільного виду $ax^4+bx^3+cx^2+dx+f=0$, де $a,b,c,d,f\in R,\ a\neq 0$ може бути розв'язане методом Феррарі: у лівій частині залишаємо множники четвертого і третього степенів та виділяємо повний квадрат:

$$ax^4+bx^3=-cx^2-dx-f\Leftrightarrow x^4+\frac{b}{a}x^3=-\frac{c}{a}x^2-\frac{d}{a}x-\frac{f}{a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{b}{2a}x\right)^2=\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)x^2-\frac{d}{a}x-\frac{f}{a}.$$

Додамо у дужках лівої частини деяке число $\frac{\lambda}{2}$, щоб вираз у правій частині перетворився на повний квадрат, та урівняємо праву частину, отримаємо: $\left(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}+\lambda\right)x^2+\left(\frac{b\lambda}{2a}-\frac{d}{a}\right)x+\left(-\frac{f}{a}+\frac{\lambda^2}{4}\right)$. (*)

Квадратний тричлен у правій частині перетвориться на повний квадрат, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$D=\left(\frac{b\lambda}{2a}-\frac{d}{a}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}+\lambda\right)\cdot\left(-\frac{f}{a}+\frac{\lambda^2}{4}\right)=0$; звідки отримуємо рівняння третього степеня відносно невідомої λ (кубічну резольвенту)

$-\lambda^3+\frac{c}{a}\lambda^2+\lambda\cdot\left(\frac{4f}{a}-\frac{bd}{a^2}\right)+\left(\frac{d^2}{a^2}-\frac{4cf}{a^2}+\frac{b^2f}{a^3}\right)=0$. Знаходимо один (будь-який) корінь цього рівняння і підставляємо у рівняння (*). Якщо обчислення виконано вірно, отримаємо і у лівій частині, і у правій – повні квадрати, звідки отримаємо рівність модулів, а тоді - сукупність двох квадратних рівнянь, розв'язавши які матимемо корені початкового рівняння.

Приклад. *Розв'язати рівняння:* $x^4+5x^3+9x^2+8x+2=0$.

Виокремлюємо доданки четвертого і третього степенів і виділяємо повний квадрат:

$$\left(x^2\right)^2+2x^2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}x\right)^2=\left(\frac{25}{4}-9\right)x^2-8x-2\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)^2=-\frac{11}{4}x^2-8x-2.$$

$\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(-\frac{11}{4}+\lambda\right)x^2+\left(-8+\frac{5\lambda}{2}\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-2\right)$. Дискримінант:

$D=\left(-8+\frac{5\lambda}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{11}{4}+\lambda\right)\cdot\left(\frac{\lambda^2}{4}-2\right)=0$, звідки $-\lambda^3+9\lambda^2-32\lambda+42=0$ - кубічна резольвента. Корені шукаємо серед дільників вільного члена 42:

$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 9 & -32 & 42 \\ \hline 3 & -1 & 6 & -14 & \mid 0 \end{array}$. Отже, $\lambda=3$ є коренем. З рівняння

$\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(-\frac{11}{4}+\lambda\right)x^2+\left(-8+\frac{5\lambda}{2}\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-2\right)$ маємо:

$\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ або $\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+2=0 \\ x^2+3x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\cdot \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

2. Рівняння четвертого степеня виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$, де $a,b,c,d,k\in R$ і вільні члени задовольняють умову $a+b=c+d$, зводиться до квадратного рівняння після об'єднання попарно множників $\big((x+a)(x+b)\big)\cdot\big((x+c)(x+d)\big)=k$, розкриття дужок $\left(x^2+(a+b)x+ab\right)\cdot\left(x^2+(c+d)x+cd\right)=k$, та заміни $x^2+(a+b)x=t$: $(t+ab)\cdot(t+cd)=k$. Звідки отримуємо $t_{1,2}$ та, повертаючись до заміни $x^2+(a+b)x=t_{1,2}$, маємо розв'язки вихідного рівняння.

Приклад. *Розв'язати рівняння:* $(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-6)\cdot(x-7)=12$.

Вільні члени задовольняють умову: $-2+(-7)=-3+(-6)=-9$,

$(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-6)\cdot(x-7)=12 \Leftrightarrow \big((x-2)\cdot(x-7)\big)\cdot\big((x-3)\cdot(x-6)\big)=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-9x+14)\cdot(x^2-9x+18)=12$; заміна $x^2-9x=t$; отримаємо: $(t+14)\cdot(t+18)=12 \Leftrightarrow (t+12)\cdot(t+20)=0$. Повертаємося до заміни: $x^2-9x=t$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9x=-20, \\ x^2-9x=-12, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-4)\cdot(x-5)=0, \\ \left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{33}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=5, \\ x_3=\frac{9-\sqrt{33}}{2}, \\ x_4=\frac{9+\sqrt{33}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\left\{\frac{9-\sqrt{33}}{2},\ 4,\ 5,\ \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right\}.$

3. Рівняння четвертого степеня виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=kx^2$, де $a,b,c,d,k\in R$ і вільні члени задовольняють умову $a\cdot b=c\cdot d$, зводиться до квадратного рівняння після об'єднання попарно множників $\left((x+a)(x+b)\right)\cdot\left((x+c)(x+d)\right)=kx^2$, розкриття дужок $\left(x^2+ab+(a+b)x\right)\cdot\left(x^2+cd+(c+d)x\right)=kx^2$, ділення на $x^2\neq 0$ (попередньо показуємо, що $x^2\neq 0$): $\left(x+\frac{ab}{x}+(a+b)\right)\cdot\left(x+\frac{cd}{x}+(c+d)\right)=k^2$ та заміни $x+\frac{ab}{x}=t$: $\left(t+a+b\right)\cdot\left(t+c+d\right)=k^2$. Звідки отримуємо $t_{1,2}$ та, повертаючись до заміни $x+\frac{ab}{x}=t_{1,2}\Leftrightarrow x^2-t_{1,2}x+ab=0$, маємо розв'язки вихідного рівняння.

Приклад. *Розв'язати рівняння:* $(x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+6)\cdot(x+12)=672x^2$.

Вільні члени задовольняють умову: $2\cdot 12=4\cdot 6=24$;

$\left((x+2)\cdot(x+12)\right)\cdot\left((x+4)\cdot(x+6)\right)=672x^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((x^2+24)+14x)\cdot((x^2+24)+10x)=672x^2$. $x=0$ не є коренем, тому $\left(\left(x+\frac{24}{x}\right)+14\right)\cdot\left(\left(x+\frac{24}{x}\right)+10\right)=672$. Заміна: $\left(x+\frac{24}{x}\right)=t$, отримаємо:

$(t+14)\cdot(t+10)=672\Leftrightarrow\ t^2+24t-532=0\Leftrightarrow(t+38)\cdot(t-14)=0$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{24}{x}=-38,\\ x+\frac{24}{x}=14,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+38x+24=0,\\ x^2-14x+24=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x+19)^2=337,\\ (x-7)^2=25,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=-19-\sqrt{337},\\ x_2=-19+\sqrt{337},\\ x_3=2,\\ x_4=12.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\left\{-19-\sqrt{337},\ -19+\sqrt{337},\ 2,12\right\}$..

4. Симетричні рівняння парного степеня (наприклад, четвертого) мають вигляд: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a,b,c\in R,\ a\neq 0$ - коефіцієнти такого рівняння, рівновіддалені від початку і кінця, - рівні.

Якщо $\hat{x}$ є коренем такого рівняння, то і обернене число є коренем рівняння. Заміна $\left(x+\frac{1}{x}\right)=t$ приводить до розв'язання такого рівняння. Оскільки $x=0$ не є коренем рівняння, то поділимо на x^2 (бо центральний член – рівновіддалений від початку і кінця – має степінь x^2).

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$. Заміна: $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, а тоді $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \Leftrightarrow a\left(t^2-2\right)+bt+c=0$ – маємо квадратне рівняння відносно невідомої t, розв'язавши яке, повертаємось до заміни і знаходимо значення невідомої x.

Зауваження: відомо, що $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$, причому знак рівності досягається при $x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\pm 1$ (для $x>0$ сума двох взаємно обернених чисел не менше двох: $x+\frac{1}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0$ - доведено; $x<0$: $-\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\geq 0$, а тоді $-x;-\frac{1}{x}>0$ і знову маємо суму двох взаємно обернених додатних чисел, ми довели вище, що вона не менше двох). А тому, якщо отримуємо, що $t\in(-2;2)$, то рівняння $\left(x+\frac{1}{x}\right)=t$ дійсних коренів не має.

Приклад. *Розв'язати рівняння:* $7x^4+24x^3+23x^2+24x+7=0$.

$(7x^4+7)+(24x^3+24x)+23x^2=0$, поділимо на x^2, матимемо: $7\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\frac{1}{x}\right)+23=0$. Заміна: $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, а тоді $7\left(t^2-2\right)+24t+23=0 \Leftrightarrow 7\left(t+3\right)\left(t+\frac{3}{7}\right)=0$.

Маємо: $x+\frac{1}{x}=-3 \Rightarrow x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, друге значення $t_2=-\frac{3}{7}\in(-2;2)$, рівняння $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{7}$ дійсних розв'язків не має. Маємо 2 дійсних кореня.

Приклад. *Розв'язати рівняння:*

$$5x^6+13x^5-54x^4-19x^3-54x^2+13x+5=0.$$

Згрупуємо доданки $\left(5x^6+5\right)+\left(13x^5+13x\right)-\left(54x^4+54x^2\right)-19x^3=0$, поділимо на x^3, матимемо: $5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+13\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-54\left(x+\frac{1}{x}\right)-19=0$. Заміна: $x+\frac{1}{x}=t$, тоді $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$,

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, звідки $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$. Маємо

кубічне рівняння $5\left(t^3-3t\right)+13\left(t^2-2\right)-54t-19=0 \Leftrightarrow 5t^3+13t^2-69t-45=0$.
Шукаємо раціональні корені у вигляді дробу $\frac{p}{q}$, де p - дільник вільного члена (-45), q - дільник старшого коефіцієнта 5:

	5	13	−69	−45
3	5	28	15	0
−5	5	3	0	
−3/5	5	0		

, маємо $\left[\begin{array}{l} t_1=-5; \\ t_2=-\dfrac{3}{5}; \\ t_3=3. \end{array}\right.$ Значення $t=-\dfrac{3}{5}$ не дасть дійсних коренів початкового рівняння, тому: $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-5; \\ x+\dfrac{1}{x}=3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-5\mp\sqrt{21}}{2}; \\ x_{3,4}=\dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

5. Симетричні рівняння непарного степеня (наприклад, п'ятого) мають вигляд: $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a, b, c \in R,\ a \neq 0$. Такі рівняння завжди мають коренем $x=-1$. Поділивши на $(x+1)$, отримаємо симетричний многочлен парного степеня.

Приклад. *Розв'язати рівняння:*

$$x^7+7x^6-31x^5-217x^4-217x^3-31x^2+7x+1=0.$$

$x_1=-1$ - корінь. Поділимо на $(x+1)$:

	1	7	−31	−217	−217	−31	7	1
−1	1	6	−37	−180	−37	6	1	0

Маємо розклад: $x^7+7x^6-31x^5-217x^4-217x^3-31x^2+7x+1=$
$=(x+1)(x^6+6x^5-37x^4-180x^3-37x^2+6x+1)$ -
многочлен-частка є симетричний многочлен парного степеня:
$(x^6+1)+(6x^5+6x)-(37x^4+37x^2)-180x^3=0 \quad \Big| : x^3$

$\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-37\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-180=0$. Заміна: $x+\dfrac{1}{x}=t$, тоді $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$ (дивись попередній приклад). Маємо кубічне рівняння $\left(t^3-3t\right)+6\left(t^2-2\right)-37t-180=0 \Leftrightarrow t^3+6t^2-40t-192=0$. Шукаємо цілі корені серед дільників вільного:

	1	6	−40	−192
−4	1	2	−48	0
6	1	8	0	
−8	1	0		

, маємо $\left[\begin{array}{l} t_1=-8; \\ t_2=-4; \\ t_3=6. \end{array}\right.$ А тому: $\left[\begin{array}{l} x_{2,3}=-4\mp\sqrt{15}; \\ x_{4,5}=-2\mp\sqrt{3}; \\ x_{6,7}=3\mp2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Відповідь: $x \in \{-1; -4 \mp \sqrt{15}; -2 \mp \sqrt{3}; 3 \mp 2\sqrt{2}\}$.

Зауваження. Рівняння виду $x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ відрізняються від симетричних знаками (через один), вони розв'язуються за допомогою підстановки $t = x - \frac{1}{x}$ (обмежень на різницю, таких, як ми отримали для суми: $\left| x + \frac{1}{x} \right| \ge 2$, немає).

$$(x^6 - 1) + (3x^5 + 3x) - (4x^4 - 4x^2) - 9x^3 = 0 \quad \Big| : x^3$$

$\left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 4\left(x - \frac{1}{x} \right) - 9 = 0$, заміна $t = x - \frac{1}{x}$, обчислимо t^2 і t^3:

$$t^2 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2;$$

$t^3 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) - 3\left(x - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t;$ маємо:

$$\left(t^3 + 3t \right) + 3\left(t^2 + 2 \right) - 4t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}; \quad x_{5,6} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

2. Симетричні многочлени

Вирази $\delta_1 = x + y,\ \delta_2 = xy$ називаються елементарними симетричними многочленами другого порядку. Позначимо $S_n = x^n + y^n$. Легко переконатися в правильності наступної рекурентної рівності: $S_{n+1} = \delta_1 S_n - \delta_2 S_{n-1}$. Аналогічно, $\delta_1 = x + y + z,\ \delta_2 = xy + yz + zx,\ \ \delta_3 = xyz$ – елементарні симетричні многочлени третього порядку. Позначивши $S_n = x^n + y^n + z^n$, маємо: $S_{n+1} = \delta_1 S_n - \delta_2 S_{n-1} + \delta_3 S_{n-2}$, при цьому також враховуємо, що $S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2,\ S_3 = \delta_1 \cdot \left(\delta_1^2 - 3\delta_2 \right) + 3\delta_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3$ (перевірте!).

Приклад. *Розв'язати систему рівнянь*: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$

Маємо: $\delta_1 = 3,\ 3 = S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2$, звідки $\delta_2 = 3$. Оскільки $3 = S_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3 = 27 - 3 \cdot 3 + 3\delta_3$, то $\delta_3 = 1$. За теоремою Вієта x, y, z є коренями рівняння $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0,\ (t-1)^3 = 0, t = 1$. Тому $x = y = z = 1$.

3. Метод Лагранжа

При доведенні деяких нерівностей ефективно використовувати так званий метод Лагранжа. Розглянемо деякі поняття. Вираз $f = x^2 + y^2 + z^2$ можна розглядати як функцію від змінних x, y, z. По аналогії можна розглядати функцію довільної кількості змінних. Функцію розглядають на деякій множині. Наприклад, функцію f можна розглядати на множині $A = \{(x, y, z)| \ x + y + z = 3, \ x, y, z \geq 0\}$. Функція на цій множині є визначеною і диференційованою по кожній змінній. Ця множина є обмеженою, адже, як легко переконатися, змінні x, y, z не можуть бути як завгодно великими (за модулем) числами, точніше: $0 \leq x, y, z \leq 3$. Ця множина є замкненою, адже в умові фігурують нестрогі нерівності. Обмежена і замкнена множина називається компактом. Отже, A − компакт. Розглядають часткові похідні, наприклад: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, при цьому використовують звичайні правила диференціювання, але вважають змінні y, z сталими. Розглянемо поняття межі множини. Наприклад, при $x = 1$ маємо: $y + z = 0$, але $y,z \geq 0$,тому y=z=0. Якщо ж взяти $x = 0$, маємо межу: $B = \{(y, z)| \ y + z = 3, \ y, z \geq 0\}$. Аналогічно для змінних y,z.

Приклад. *Для додатних чисел* x, y, z *таких, що* $x + y + z = 3$*, довести нерівність:* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

Доведемо нерівність для більш сильної умови , коли x, y, z невід’ємні. Розглянемо функцію $f = x^2 + y^2 + z^2$ на компакті $A = \{(x, y, z)| \ x + y + z = 3, \ x, y, z \geq 0\}$ (у випадку додатних чисел x, y, z A не була б компактом). Розглянемо так звану функцію Лагранжа $F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x + y + z - 3)$, де λ - стала Лагранжа. Прирівняємо до нуля часткові похідні функції Лагранжа: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, маємо $2x + \lambda = 2y + \lambda = 2z + \lambda = 0$, звідки $x = y = z$. Враховуючи умову $x + y + z = 3$, маємо: $x = y = z = 1$.

Розглянемо ситуацію на межі: $x = 3$, тоді $y = z = 0$. При $x = 0$ маємо межу: $B = \{(y, z)| \ y + z = 3, \ y, z \geq 0\}$ і знову використовуємо метод Лагранжа, але для функції $f = y^2 + z^2$. Об’єднуючи все зроблене, знаходимо значення в критичних точках і на межі: $f(1;1;1) = 3$, $f(3;0;0) = 9$, $f(1{,}5;1{,}5;0) = 5{,}5$. Оскільки мінімальне з цих чисел 3, маємо: $f = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$, що і потрібно.

4. Послідовності

Послідовність виду $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ називається арифметичною прогресією, де a_1 − перший член, d − різниця прогресії. Характеристична властивість цієї послідовності: $\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n$. Правильне і обернене твердження.

Послідовність виду: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ називається геометричною прогресією, де b_1 − перший член, q − знаменник прогресії. Характеристична властивість: $\sqrt{b_{n+1} b_{n-1}} = b_n$. Правильне і обернене твердження.

Часто розглядаються послідовності, задані рекурентно: $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta$, де α, β − деякі числа. Існує алгоритм для знаходження загального члена цієї послідовності.

Приклад. *Нехай послідовність задана рекурентно:* $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 4$*, де* $a_1 = 5$. *Записати загальний член цієї послідовності*.

Розглянемо так зване характеристичне рівняння послідовності: $\lambda = 2 \cdot \lambda - 4$ (a_{n+1} та a_n ми замінили на λ), звідки $\lambda = 4$. Введемо допоміжну послідовність $b_n = a_n - \lambda \Rightarrow a_n = b_n + \lambda$. Тоді $a_{n+1} = b_{n+1} + \lambda$; $a_{n+1} = 2a_n - 4 = 2(b_n + \lambda) - 4$ звідки $b_{n+1} + \lambda = 2b_n + 2\lambda - 4$; з урахуванням характеристичного рівняння маємо: $b_{n+1} = 2b_n$, де $b_1 = a_1 - \lambda$, $b_1 = 1$, звідки $b_n = 2^{n-1}$ і тому $a_n = 2^{n-1} + 4$.

Використана і рекомендована література

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметрами. – Київ: Факт, 2008. - 324 с.
2. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Геометрія старшокласникам і абітурієнтам. – Київ: Факт, 2006. - 88 с.
3. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. Москва: Наука, 1975. - 112с.
4. Васильева Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – Москва: Наука, 1985. – 288 с.
5. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Задачі з математики. - Київ: Вища школа, 1985. – 264 с.
6. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. - Київ: ТВіМС, 2000. – 320 с.
7. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. - Київ: Вища школа, 2001. – 432 с.
8. Вороний О.М. Вибрані задачі шкільної математики. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – 232 с.
9. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – Москва: Просвещение, 1986. – 303 с.
10. Зарубежные математические олимпиады /Под ред. И.Н. Сергеева.– Москва: Наука, 1987.– 416 с.
11. Збірник конкурсних і олімпіадних задач з математики / За ред. О.К. Закусила. – Київ: «Діалектика», 1995. – 192 с.
12. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики. – К.: Рад. школа, 1987. – 128 с.
13. Лейфура В, Литвиненко О. XLVI Міжнародна математична олімпіада // Математика в школі. – 2006. – №1. – с. 6-14.
14. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. - 1999. – 128 с.
15. Литвиненко І. Мітельман І. XLVI Всеукраїнська олімпіада юних математиків // Математика в школі. – 2006. – №5. – с.12-21.
16. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків. – К.: Радянська школа, 1985. – 88 с.
17. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги. Пособие для учащихся.– М.: Просвещение, 1976.– 288 с.

18. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1971.–254 с.
19. Олімпіади з математики / Вишенський В.А., Нагорний В.Н., Перестюк М.О., Плахотник В.В. – Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2003. – 163 с.
20. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1982. – 96 с.
21. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, ч. I. – М.: Наука, 1986. – 272 с.
22. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, ч. II. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
23. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – Житомир: ЖДПУ, 2000. – 298 с.
24. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин Е.Д., Норин В.П. и др. - Москва: Айрис-пресс, 2003. – 624 с.
25. Українські математичні олімпіади / Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І. та ін. – Київ: Вища школа, 1993. – 488 с.
26. Ясінський В.А. Геометричні задачі: навчально-методичний посібник. – Львів: Каменяр, 2003. – 76 с.
27. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». – Київ: ФДП НТУУ «КПІ», 2007. – 368 с.
28. Ясінський В.В. Олімпіадні задачі з геометрії: навчально-методичний посібник. – Київ: Шк.світ, 2008. – 127 с.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Розв'язування задач з математики
третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту
науково-дослідницьких робіт учнів-членів
Малої академії наук України

Методичний посібник

для підготовки до контрольних робіт з математики

учнів 9-11 класів Малої академії наук

Людмила Володимирівна Ізюмченко

Олег Петрович Макарчук

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № **1537** від **22.10.2003 р.**

Підп. до друку 02.12.2008. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф.
Ум. др. арк. 5,2. Тираж 550. Зам. № 5407.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ

Кіровоградського державного педагогічного

університету імені Володимира Винниченка

25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1

Тел.: (0522) 24-59-84.

Fax.: (0522) 24-85-44.

E-Mail: mails@kspu.kr.ua