Міністерство освіти й науки України
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
Заочна фізико-математична школа

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк

Рівносильність рівнянь та нерівностей

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Кіровоград – 2009

УДК 51(07)
К 96
ББК 22.1р

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк
Рівносильність рівнянь та нерівностей: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 51 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков,
кандидат фізико-математичних наук, доцент С.Д.Паращук.

У посібнику міститься основний теоретичний матеріал та приклади розв'язування задач, пов'язаних із вивченням поняття рівносильності рівнянь та нерівностей та з врахуванням змісту цього поняття при розв'язуванні математичних задач. Після викладу теоретично-практичної частини посібника запропоновані задачі для самостійного розв'язування, до яких подані відповіді та вказівки. Розробка містить предметний покажчик теоретичного матеріалу.

Посібник призначений для використання учнями заочної фізико-математичної школи фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка при розв'язуванні контрольних робіт. Може бути використаний у процесі самостійної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл до державної атестації.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 28 квітня 2009 року (протокол № 11).

Друкується в рамках розвитку проекту «Заочна фізико-математична школа КДПУ ім. Винниченка» за підтримки ректорату університету.

УДК 51(07)
К 96
ББК 22.1р

§1. Вступ. Основні поняття. Основні властивості рівносильності рівнянь та нерівностей.

Програми з математики в загальноосвітній середній школі побудовані так, що при розв'язуванні рівнянь і нерівностей основна увага звертається на конкретні прийоми, способи, алгоритми розв'язування. Тоді всі рівняння й нерівності розбиваються на певні класи, для яких відомі методи розв'язування, з наступним вивченням цих класів у лінійній послідовності. По суті здійснюється класифікація всіх рівнянь і нерівностей згідно типів, які визначаються певними конкретними методами, прийомами, алгоритмами розв'язування. Окрім того розглядаються рівняння й нерівності підвищеної складності, для кожного з яких потрібно відшукувати власний спосіб розв'язування. Такий підхід успішно формує в учнів операційні уміння й навички, деякі аналітичні здібності. Однак він занадто формалізований.

Тому потрібні інші підходи до організації розв'язування рівнянь чи нерівностей, зокрема, на основі певних евристик (підказок, орієнтувань у діях). Наш підхід до вироблення евристик полягає у тлумаченні процесу розв'язування рівнянь чи нерівностей як процесу послідовних перетворень. Тоді основним елементом (одиницею) процесу розв'язування буде певне перетворення, яке й потрібно буде досліджувати.

Метою цього посібника є дослідження процесу розв'язування рівнянь і нерівностей як процесу послідовних перетворень, кінцевим результатом яких є розв'язок. Отже всі рівняння й нерівності розглядатимуться з єдиної точки зору, єдиної позиції – процесу розв'язування рівнянь і нерівностей як процесу їх послідовних перетворень. Такий підхід об'єднує всі типи рівнянь і нерівностей в єдину сукупність, формує в учнів загальні (інтегровані) уявлення про проблему розв'язування рівнянь і нерівностей з єдиної позиції, відкриває ще один аспект вирішення названої проблеми.

Отже, *під процесом розв'язування рівнянь, нерівностей або їх систем будемо розуміти процес їх послідовних перетворень, кінцевим підсумком яких буде знаходження розв'язку.*

На жаль в школах мало звертається уваги саме на *процес* розв'язування, що спрямовує мислення учнів більше в алгоритмічний (репродуктивний), ніж у творчий аспект мислення, що, в свою чергу, сприяє формальному засвоєнню матеріалу, знижується сутнісне розуміння процесу розв'язування. Часто учні виконують певні перетворення над рівнянням чи нерівністю, не розуміючи суті та змісту цього перетворення, а, значить, і не розуміючи сутності всього процесу розв'язування. Ми пропонуємо учням більше звертати уваги на сам процес розв'язування рівнянь і нерівностей. Тоді розв'язування буде мати два аспекти: зміст (і відповідні знання) конкретних методів, прийомів, алгоритмів розв'язування та власне процес розв'язування як процес послідовних перетворень.

Як приклад елементарного нерозуміння сутності процесу розв'язування рівнянь (змісту перетворень) є розв'язування рівняння:

$$x^2 = 4 \qquad (1.1)$$

Учні з певністю відповідають, що $x = \pm 2$. Однак пояснити процес отримання розв'язку рівняння (1.1) як послідовності певних перетворень не можуть. Конкретно – не можуть відповісти на запитання: звідки беруться два знаки у відповіді? Більшість відповідає, що оскільки ми добуваємо корінь квадратний із 4, то з'являється два знаки. Проте в школі розглядають тільки арифметичне значення кореня, тобто *невід'ємне значення з невід'ємного числа.* Дехто перевіркою доводить, що і $+2$, і -2 є коренями рівняння (1.1). Однак вірно відповісти на запитання також не можуть. З погляду *процесу розв'язування* потрібно виконати послідовність таких перетворень над рівнянням (1.1), щоб отримати розв'язок:

1) добування кореня квадратного із лівої і правої сторін рівняння (1.1);

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}\,.$$

Одержуємо:

$$|x| = 2\,.$$

2) Розкриваємо знак модуля, маємо $x = \pm 2$, що і є розв'язком рівняння (1.1).

Можна було б навести ще приклади типових помилок, що допускаються учнями, як нерозуміння сутності процесу розв'язування рівняння чи нерівності в цілому, чи окремого перетворення – елементарної ланки такого процесу. Однак нашим завданням є дослідження процесу розв'язування як процесу послідовних перетворень рівнянь чи нерівностей. Отже, елементарною ланкою процесу розв'язування виступає перетворення. *Процес розв'язування рівняння чи нерівності – це виконання послідовних перетворень над рівнянням чи нерівністю за певним алгоритмом з метою отримання розв'язку*.

З процесуального погляду головною проблемою при певному перетворенні рівняння (нерівності) є проблема отримання рівносильної умови вихідному рівнянню (нерівності). Як відомо, два рівняння (нерівності) будуть рівносильними, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Виконуючи послідовність перетворень над рівнянням (нерівністю) далеко не завжди очевидним є момент втрати кореня чи, навпаки, виникнення зайвого. Тому учні часто «гублять» чи «отримують» зайві корені при розв'язуванні рівнянь (нерівностей), особливо зі складними перетвореннями. Щоб запобігти цьому ми й пропонуємо дослідити основні (типові) перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх рівносильності. До основних типів перетворень рівняння:

$$f(x)=g(x) \qquad (1.2)$$

або нерівності (беручи конкретний знак у даній нерівності ми маємо на увазі одну з чотирьох можливих нерівностей):

$$f(x)\leq g(x) \qquad (1.3)$$

можна віднести такі:

- додавання (віднімання) виразу $y(x)$ до лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- множення лівої й правої частин (1.2) чи (1.3) на вираз $y(x)$;
- ділення лівої й правої частин (1.2) чи (1.3) на вираз $y(x)$;
- піднесення до степеня з натуральним показником лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- добування кореня з лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- логарифмування лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- потенціювання лівої й правої частин (1.2) чи (1.3);
- тригонометричні перетворення над (1.2) чи (1.3);
- функціональні перетворення з (1.2) і (1.3).

Крім *типу* перетворення має ще і *зміст* вираз $y(x)$. Важливо зауважити, що:

1. Перетворення одного і того ж типу в одному прикладі може змінити множину розв’язків, а в іншому − ні.

2. В одному й тому ж прикладі два перетворення одного і того ж типу в залежності від змісту по-різному можуть впливати на множину розв’язків.

Потрібно підкреслити, що не можна класифікувати якимось чином *всі* можливі перетворення над (1.2) чи (1.3). Спроба створити якусь «закінчену» типізацію всіх можливих перетворень над (1.2) чи (1.3), скоріше, ні до чого не приведе. Та ми й не ставимо такої цілі. *Наша мета – при розв’язуванні конкретного прикладу за певним алгоритмом аналізувати кожне перетворення з тим, щоб виявити, чи може воно змінити множину розв’язків і, якщо може, то вжити певних дій, щоб не втратити розв’язків рівняння (1.2) чи нерівності (1.3) і не отримати зайвих.* Однак ми все таки наводимо приклади найбільш часто вживаних перетворень, які зустрічаються при розв’язуванні багатьох прикладів, передбачених шкільною програмою, з метою вироблення певних умінь і навичок аналізу конкретно-здійснюваного перетворення на його рівносильність, а також формування знань, умінь і навичок тих дій, які дозволили б запобігти виникненню зайвих коренів чи їх втрати.

Таким чином, в процесі навчання розв’язування рівнянь чи нерівностей ми вбачаємо принаймні три взаємозв’язаних завдання:

– створення алгоритму розв’язування у вигляді послідовності перетворень, здійснення яких приведуть до дослідження кожного розв’язку;

– аналіз кожного перетворення з метою виявлення тих, що *можуть* змінити множину розв’язків;

– вживання додаткових заходів з метою недопущення зміни множини розв'язків використовуваним перетворенням.

Потрібно зазначити, що виявлення перетворення, котре може змінити множину розв'язків, при розв'язуванні рівняння чи нерівності *ще не означає, що це перетворення обов'язково приведе до зміни множини розв'язків*. Більше того, досить складно точно *встановити у моменті застосування конкретного перетворення факт зміни множини розв'язків*. І якщо зміна розв'язків відбулася, то яка саме − ми *отримали зайві розв'язки чи втратили необхідні*? Тому «запобіжні» заходи приймаються у відповідь на перетворення, виходячи зі *знання можливості зміни* множини розв'язків тим чи іншим таким перетворенням. Таким чином, при використанні перетворення потрібно розв'язати такі питання: *чи може змінити множину розв'язків конкретного рівняння чи нерівності використовуване в даний момент перетворення*? Якщо може змінити – то воно може призвести до *виникнення сторонніх розв'язків* чи, навпаки, – *втрати розв'язків*? Відповідно до того, чи може перетворення призвести до виникнення чи втрати коренів *потрібні різні за змістом і формою «запобіжні» заходи*.

Конкретних ситуацій і причин, коли перетворення може призвести в момент його застосування до зміни множини розв'язків, безліч. Тому якимось чином їх класифікувати дуже проблематично. Серед таких ситуацій-причин можна назвати: звуження чи розширення області допустимих значень змінної рівняння (нерівності), встановлення «вірних» висновків з хибних умов (наприклад, $2\neq-2$, однак $2^2=(-2)^2$), з рівності $f(x_1)=g(x_2)$ ще не слідує, що $x_1=x_2$ та ін.

Перетворення 1-9 в різних ситуаціях можуть давати різні результати − в одних змінювати множину розв'язків, в інших – ні. Тому дослідження перетворень є *творчою*, а не *репродуктивною задачею*. З досвіду відомо, що саме *проблема використання та оцінки перетворень на предмет зміни ними множини розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем є однією з найскладніших і важко засвоюваних учнями*. На вказану проблему мало звертається уваги в шкільних програмах і, як наслідок, недостатня увага цій проблемі приділяється вчителями.

В аналізі конкретних перетворень ми будемо вказувати на можливість виникнення сторонніх розв'язків чи втрати розв'язків. Це *не раз і назавжди задані правила*, а окремі рекомендації-приклади, що вкажуть тільки на *можливість* зміни множини розв'язків в тій чи іншій ситуації. Ще раз підкреслимо, що *<u>про характер конкретного перетворення можна говорити тільки стосовно конкретної ситуації в конкретному прикладі</u>*. В іншій ситуації цього самого прикладу чи в іншому прикладі те ж саме перетворення може набути іншої (навіть протилежної) характеристики стосовно зміни множини розв'язків. Тоді цілком зрозуміло, що задача дослідження алгоритму розв'язування рівняння чи нерівності в розумінні визначення характеру перетворень є творчо-продуктивною задачею.

Наведемо такі означення:

Означення 1. *Рівняння, що мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються рівносильними (еквівалентними).*

Означення 2. *Нехай дано два рівняння:*

$$f_1(x)=g_1(x) \qquad (1.4)$$

$$f_2(x)=g_2(x) \qquad (1.5)$$

Якщо кожен корінь рівняння (1.4) є коренем рівняння (1.5), то рівняння (1.5) називається наслідком рівняння (1.4).

У подальшому викладі будемо розрізняти такі типи перетворень, що здійснюються над рівняннями:

I. Перетворення, які не змінюють множину розв'язків рівняння, нерівності чи їх системи.

II. Перетворення, що можуть привести до появи зайвих коренів рівняння, нерівності чи їх системи.

III. Перетворення, що можуть привести до втрати коренів рівняння, нерівності чи їх системи.

З означення рівносильності випливає, що замість того, щоб розв'язувати задане рівняння, можна розв'язувати рівняння, яке йому рівносильне.

Поняття рівносильності володіє властивістю транзитивності, тобто якщо рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне рівнянню $t(x)=s(x)$ і рівняння $t(x)=s(x)$ рівносильне рівнянню $m(x)=p(x)$, то рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне рівнянню $m(x)=p(x)$.

Кажуть, що рівняння рівносильне даній сукупності рівнянь, якщо множина всіх коренів рівняння співпадає з множиною всіх розв'язків сукупності рівнянь.

Приклад 1.1. Рівняння $x=1$ рівносильне рівнянню $2x-2=0$.

Приклад 1.2. Чи є рівносильними рівняння

$$x^2-6x+5$$

і сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. ?$$

Розв'язання. Є, тому що розв'язками рівняння будуть числа $x=1$ і $x=5$ і вони ж будуть розв'язком сукупності рівнянь.

Якщо замінити рівняння його наслідком, то множина розв'язків другого рівняння буде містити всі корені вихідного рівняння і окрім них може містити ще деякі числа, які називають *сторонніми коренями*.

Приклад 1.3. Рівняння

$$x-1=6-2x$$

після піднесення до квадрату замінюється рівнянням

$$(x-1)^2=(6-2x)^2,$$

яке йому не рівносильне. Дійсно, єдиний корінь вихідного рівняння – число $\frac{7}{3}$ – є коренем другого рівняння, але корінь цього рівняння – число 5 – не є розв'язком вихідного рівняння.

Розглянемо деякі <u>*властивості рівносильності рівнянь,*</u> сформулювавши їх у вигляді теорем без доведення.

<u>Теорема 1.</u> Рівняння *f(x)=g(x)* і *f(x)-g(x)=0* рівносильні.

<u>Теорема 2.</u> Рівняння *f(x)=g(x)* і *f(x)+α=g(x)+α* рівносильні для будь-якого дійсного числа α.

<u>Теорема 3.</u> Рівняння *f(x)=g(x)* і α *f(x)=αg(x)* рівносильні для будь-якого дійсного числа $\alpha \neq 0$.

<u>Теорема 4.</u> Нехай функції *f(x)* і *g(x)* невід'ємні, тоді рівняння *f(x)=g(x)* і $f^n(x)=g^n(x)$ $(n \in N)$ рівносильні.

<u>Теорема 5.</u> Нехай функція *h(x)* не перетворюється в нуль в жодній точці і її область визначення містить області визначення функцій *f(x)* і *g(x),* тоді рівняння *f(x)=g(x)* і *f(x)h(x) =g(x)h(x)* рівносильні.

Аналогічно сформулюємо без строгих доведень твердження про взаємозв'язок рівнянь та їх наслідків.

<u>Теорема 6</u>. Рівняння $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)$ $(n \in N)$ є наслідком рівняння *f(x)=g(x)*.

<u>Теорема 7</u>. Рівняння *f(x)=g(x)h(x)* є наслідком рівняння *f(x)/h(x)=g(x)*.

<u>Теорема 8</u>. Рівняння *f(x)=g(x)* є наслідком рівняння *f(x)+h(x)=g(x)+h(x)*.

<u>Теорема 9</u>. Сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$$

є наслідком рівняння *f(x)g(x)=0* .

Розглянемо поняття рівносильності нерівностей та основні властивості рівносильних нерівностей.

<u>Означення 3.</u> *Дві нерівності $f_1(x) > g_1(x)$ і $f_2(x) > g_2(x)$ називаються <u>рівносильними (еквівалентними),</u> якщо будь-який розв'язок першої нерівності є розв'язком другої нерівності, а будь-який розв'язок другої нерівності – розв'язком першої. При цьому пишуть*

$$f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x).$$

Якщо обидві нерівності не мають розв'язків, то за означенням 3 вони також вважаються рівносильними.

<u>Приклад 1.4.</u> Нерівності $x^2 > 4$ і $1+\frac{4}{x+2} > 0$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожної з цих нерівностей визначається так $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Приклад 1.5. Нерівності $x-2>0$ і $x\cdot(x-2)>0$ не є рівносильними, оскільки значення $x=-1$ є розв'язком другої нерівності, але не є розв'язком першої.

Рівносильні нерівності можуть мати різні області допустимих значень.

Приклад 1.6. Наприклад, нерівність $x>1$ рівносильна нерівності $\sqrt{x}>1$, проте ОДЗ першої нерівності є множина всіх дійсних чисел, а ОДЗ другої нерівності – множина невід'ємних чисел.

Означення 4. *Дві нерівності називаються рівносильними на множині М, якщо співпадає множина їх розв'язків, що належать цій множині М.*

Дві нерівності можуть бути нерівносильними, але можуть бути рівносильними на деякій множині.

Приклад 1.7. Наприклад, нерівності $x^2>1$ і $x>1$ рівносильні на множині додатних чисел, але не є рівносильними на множині всіх дійсних чисел.

Отже, при використанні перетворення під час розв'язування нерівностей потрібно дати відповіді на такі питання: *чи може змінити множину розв'язків конкретної нерівності використовуване в даний момент перетворення*? Якщо може змінити – то воно може призвести до *виникнення сторонніх розв'язків* чи, навпаки, – *втрати розв'язків*? Відповідно до того, чи може перетворення призвести до виникнення чи втрати коренів *потрібні різні за змістом і формою «запобіжні» заходи*.

Зі всього сказаного вище слідує, що при розв'язанні нерівностей дуже важливо знати правила переходу від однієї нерівності до рівносильної їй іншої нерівності або до рівносильної їй системи чи сукупності умов. Сформулюємо без доведень основні твердження, що стосуються рівносильності нерівностей.

Теорема 10. Нерівності $f(x)>g(x)$ і $g(x)<f(x)$ рівносильні.

Теорема 11. Нерівності $f(x)>g(x)$ і $f(x)-g(x)>0$ рівносильні.

Теорема 12. Нерівності $f(x)>g(x)$ і $f(x)+h(x)>g(x)+h(x)$ рівносильні, якщо функція $h(x)$ визначена на ОДЗ нерівності $f(x)>g(x)$.

Теорема 13. Нерівності $f(x)>g(x)$ і $f(x)+a>g(x)+a$ рівносильні для будь-якого числа a.

Теорема 14. Якщо функція $h(x)$ додатна при всіх значеннях x з ОДЗ нерівності $f(x)>g(x)$, тоді нерівність $f(x)>g(x)$ і нерівність $h(x)f(x)>h(x)g(x)$ рівносильні. Якщо функція $h(x)$ від'ємна при всіх значеннях x з ОДЗ нерівності $f(x)>g(x)$, тоді нерівність $f(x)>g(x)$ і нерівність $h(x)f(x)<h(x)g(x)$ рівносильні.

Теорема 15. Якщо a – додатне число, то нерівність $f(x)>g(x)$ рівносильна нерівності $af(x)>ag(x)$, а якщо a – від'ємне число, то нерівність $f(x)>g(x)$ рівносильна нерівності $af(x)<ag(x)$.

Теорема 16. Нерівності $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ і $f(x)g(x)>0$ рівносильні.

<u>Теорема 17.</u> Нехай функції *f(x)* і *g(x)* невід'ємні на множині *M*. Тоді на цій множині нерівності $f(x) > g(x)$ та $\left(f(x)\right)^n > \left(g(x)\right)^n$ (де $n \in N$) рівносильні.

<u>Теорема 18.</u> Нерівності $f(x) > g(x)$ та $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}$ (де $n \in N$) рівносильні.

<u>Теорема 19.</u> Нерівності $|f(x)| > |g(x)|$ та $f^{2n}(x) > g^{2n}(x)$ (де $n \in N$) рівносильні.

Розглянемо особливості різних видів перетворень рівнянь та нерівностей детальніше.

§2. Додавання до обох частин рівняння чи нерівності виразу *h(x)*

Нехай маємо деяке рівняння:

$$f(x) = g(x) \qquad (1.6)$$

Додамо до обох частин рівняння (1.6) вираз *h(x).* Отримаємо рівняння:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \qquad (1.7)$$

Проаналізуємо та дослідимо з використанням конкретних прикладів, чи може перетворення, що проведене над рівнянням (1.6), призвести до втрати коренів чи появи зайвих коренів.

<u>Приклад 2.1.</u> Нехай дано рівняння

$$-x = 1$$

Його область допустимих значень змінної – множина всіх дійсних чисел. Додамо до обох частин рівняння вираз $h(x) = \sqrt{x}$. Областю допустимих значень змінної цього виразу є проміжок $x \in [0; +\infty)$. Одержимо таке рівняння:

$$-x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$$

Перше рівняння має корінь $x = -1$, друге рівняння дійсних коренів не має. Очевидно, що це відбулося внаслідок звуження області допустимих значень змінної першого рівняння, адже областю допустимих значень змінної другого рівняння є проміжок $x \in [0; +\infty)$. Таким чином, в результаті звуження області допустимих значень змінної ми втратили корінь рівняння $x = -1$.

<u>Приклад 2.2.</u> Розглянемо обернений перехід − від другого рівняння до першого рівняння, що можна здійснити додаванням до обох частин рівняння виразу $h(x) = -\sqrt{x}$. Після виконання тотожних перетворень ми отримуємо перше рівняння, що має корінь $x = -1$. Таким чином, в результаті розширення області допустимих значень змінної ми отримали зайвий корінь рівняння $x = -1$.

<u>Приклад 2.3.</u> Розглянемо перетворення над рівнянням

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1},$$

що полягає у додаванні до обох його частин виразу $h(x) = -\frac{1}{x-1}$.

Отримаємо рівняння:

$$x^2 = 4.$$

Область допустимих значень змінної першого рівняння:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty),$$

а область допустимих значень змінної другого рівняння − це множина всіх дійсних чисел. Отже, при переході від першого рівняння до другого відбулося розширення області допустимих значень змінної, але «отримання» зайвого кореня не відбулося − обидва рівняння мають однакові корені:

$$x = -2 \text{ або } x = 2,$$

і тому згідно означення 1 є рівносильними. Це можна пояснити тим, що при переході від першого рівняння до другого область допустимих значень змінної розширюється числом 1, але цей факт не приводить до появи зайвих коренів. І навпаки, при переході від другого рівняння до першого (шляхом додавання до обох частин другого рівняння виразу $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$) з області допустимих значень змінної другого рівняння виключається число 1, що не є його розв'язком (тому не маємо втрати кореня).

Приклад 2.4. Розглянемо рівняння:

$$x^2 = 1,$$

Яке має два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Додамо до обох частин рівняння вираз $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

яке має корінь $x = -1$. Отже, рівняння не є рівносильними (перше рівняння є наслідком другого). Внаслідок чого при переході від першого рівняння до другого відбулася втрата розв'язку $x = 1$ першого рівняння? Проаналізуємо, як змінилася область допустимих значень змінної рівняння у процесі описаного перетворення. Область допустимих значень змінної першого рівняння − множина всіх дійсних чисел, а область допустимих значень змінної другого рівняння − така ж, але без числа 1. Тобто, в результаті перетворення, яке здійснене над першим рівнянням, область допустимих значень змінної цього рівняння звузилася на множину, що складається з одного елемента $x = 1$. Ми вже зустрічалися з аналогічною ситуацією у прикладі 2.3, але звуження області допустимих значень змінної там не привело до втрати коренів рівняння, так як вони не попали у область звуження. В нашій ситуації один з коренів першого рівняння ($x = 1$) якраз і попадає у звуження області допустимих значень змінної рівняння.

При дослідженні конкретних перетворень (у даному випадку − додавання до обох частин рівняння (нерівності) виразу $h(x)$) та їх застосуванні до конкретних прикладів необхідно дотримуватися таких підказок (правил):

1. Проаналізувати, чи може конкретне перетворення змінити множину розв'язків рівняння (нерівності).

2. Якщо відповідь на перше питання позитивна, то які дії потрібно виконати, щоб запобігти зміні множини розв'язків.

Розглянемо умови прикладу 2.4, але у контексті оберненого перетворення (яке і зустрічається у реальних вправах). Нехай треба розв'язати рівняння:

$$x^2+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

Віднімемо від обох частин цього рівняння вираз $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2=1,$$

яке не буде рівносильним попередньому рівнянню (причини ми вже вказали вище, але причини розуміти мало − слід знати зміст дій, що можуть запобігти появі зайвого кореня $x=1$ у процесі перетворення першого рівняння).

Розглянемо можливі варіанти дій, що могли б убезпечити від зміни множини розв'язків рівнянь (нерівностей):

1. Перевірка отриманих розв'язків рівняння завжди є ефективним засобом у тих випадках, коли ми з даного рівняння отримуємо його наслідок. Іншими словами ми лише ризикуємо отримати зайві корені рівняння, які легко можна виявити перевіркою. Цією рекомендацією і можна скористатися при розв'язування рівняння $x^2+\dfrac{1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ − елементарна перевірка показує, що розв'язок $x=1$ не є коренем цього рівняння. Але якщо ми рівняння отримуємо з його наслідку, то перевірка розв'язків ніяк не убезпечить від втрати коренів. Набагато складніше (взагалі неможливо у більшості випадків) виконувати перевірку розв'язків нерівності. Проілюструємо це на прикладі нерівності:

$$x^2+\frac{1}{x-1}\le 1+\frac{1}{x-1}.$$

Віднявши від обох частин нерівності вираз $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$, отримаємо нерівність:

$$x^2\le 1,$$

яка розв'язком має проміжок $x\in[-1;1]$. Але $x=1$ не може бути розв'язком першої нерівності, так як при цьому значенні перша нерівність не має змісту. Але це очевидний факт. А як можна бути впевненим, що не буде інших змін у множині розв'язків першої нерівності, використовуючи лише перевірку? Це нереально. Тому у більшості випадків розв'язування рівнянь (нерівностей) слід використовувати інші способи.

2. Перехід до рівносильних тверджень (умов) є досить корисним та ефективним методичними та змістовним прийомом організації формування в учнів (студентів) узагальнених умінь розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Це той випадок, коли сама математика

підказує можливі евристики для навчання та орієнтування. Проілюструємо це на прикладі згаданої нерівності:

$$x^2+\frac{1}{x-1}\le 1+\frac{1}{x-1}.$$

Проводячи згадане «небезпечне» перетворення ми маємо орієнтувати учнів на перехід не до другої нерівності, а до системи умов:

$$\begin{cases} x^2\le 1 \\ x\ne 1 \end{cases}$$

і, як наслідок, до свідомого отримання вірної відповіді до вправи:

$$x\in[-1;1).$$

<u>Приклад 2.5.</u> Розв'язати нерівність:

$$-x+\sqrt{x}>1+\sqrt{x}.$$

Звичайним віднімання від обох частин нерівності виразу $h(x)=\sqrt{x}$ ми прийдемо до нерівності

$$-x>1,$$

яка має розв'язком проміжок $x\in(-\infty;-1)$. Відповідь є хибною, так як при таких значеннях змінної перша нерівність не має змісту. Як убезпечитися від невірного розв'язування? Як пояснити, чому дане розв'язування не є вірним? Ці питання є досить важливими для забезпечення глибокого розуміння процесу перетворення, яке ми здійснюємо над нерівністю. Адже, взаємно знищуючи вирази $\sqrt{x}$ у обох частинах нерівності, ми розширюємо область допустимих значень змінної нерівності з проміжку $x\in[0;+\infty)$ до $x\in\Re$, а розв'язки нерівності-наслідку якраз і попали до області розширення. Правильно було б перейти від вихідної нерівності до системи умов:

$$\begin{cases} -x>1 \\ x\in[0;+\infty) \end{cases},$$

за допомогою якої і можна пояснити вірну відповідь до нерівності $x\in\varnothing$. Більше того, вказана система умов дасть можливість запобігти зміні множини розв'язків вихідної нерівності.

§3. Множення обох частин рівняння чи нерівності на вираз *h(x)*.

Розглянемо, як буде змінюватися множина розв'язків рівняння (1.6) якщо обидві його частини помножити на вираз $h(x)$. В результаті одержимо рівняння:

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x) \qquad (1.8)$$

В залежності від характеру функції $h(x)$ тут можуть бути різні випадки − рівняння можуть бути рівносильними, але цілком може мати місце як поява зайвих коренів, так і втрата необхідних коренів. Дослідимо такі випадки на конкретних прикладах з єдиною метою − визначити дії, пов'язані з розв'язування рівняння, нерівності чи їх системи, які гарантовано можуть дати вірний результат.

Проілюструємо ці випадки прикладами.

<u>Приклад 3.1.</u> Нехай дано рівняння:

$$x^2=9$$

Область допустимих значень його змінної складається з множини дійсних чисел, а його коренями є числа -3 та 3.. Помножимо обидві частини цього рівняння на вираз $1+x^2$. Зазначимо, що рівняння $1+x^2=0$ не має дійсних коренів, а область визначення функції $h(x)=1+x^2$ є також множина дійсних чисел, а числа -3 та 3 також є його коренями. Тому , рівняння

$$x^2\cdot 1+x^2=9\cdot 1+x^2$$

є рівносильним даному.

Розглянемо, при яких умовах вказане перетворення може змінити множину розв'язків рівняння (1.6).

<u>Приклад 3.2.</u> Помножимо тепер ліву і праву частини рівняння $x^2=9$ на вираз $\frac{1}{x-3}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2\cdot\frac{1}{x-3}=9\cdot\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

Зазначимо, що рівняння $\frac{1}{x-3}=0$ не має коренів, а областю визначення функції $h(x)=\frac{1}{x-3}$ є множина всіх дійсних чисел за виключенням числа 3. Тому такою ж буде і область допустимих значень змінної отриманого рівняння. Як наслідок, це рівняння буде мати один корінь: $x=-3$. Отже, внаслідок множення обох частин вихідного рівняння на вираз $\frac{1}{x-3}$ ми втратили корінь $x=3$ через те, що саме він попав до звуження області допустимих значень змінної вихідного рівняння.

Приклад 3.3. Помножимо обидві частини вихідного рівняння на вираз $\frac{1}{x-2}$. Рівняння $\frac{1}{x-2}=0$ не має коренів, а область визначення функції $h(x)=\frac{1}{x-2}$ складається з множини всіх дійсних чисел за виключенням числа 2. Рівняння $x^2=9$ і отримане рівняння:

$$x^2\cdot\frac{1}{x-2}=9\cdot\frac{1}{x-2}$$

будуть рівносильними, так як при переході від вихідного рівняння до отриманого рівняння з області допустимих значень виключається число 2, яке не є розв'язком рівняння $x^2=9$.

Приклад 3.4. Помножимо ліву і праву частини рівняння $x^2=9$ на вираз $x-2$. Зазначимо, що рівняння $x-2=0$ має корінь $x=2$ і функція $h(x)=x-2$ має область визначення, що складається з множини всіх дійсних чисел. Отримане рівняння:

$$x^2\cdot(x-2)=9\cdot(x-2)$$

буде мати окрім коренів вихідного рівняння $x=3$ *або* $x=-3$ і корінь $x=2$. Тому, в результаті виконання вказаного перетворення над вихідним рівнянням ми отримаємо один зайвий корінь, а отримане рівняння буде рівнянням-наслідком для вихідного рівняння.

Приклад 3.5. Помножимо обидві частини рівняння $x^2=9$ на вираз $\sqrt{x}$. Отримаємо рівняння:

$$x^2\cdot\sqrt{x}=9\cdot\sqrt{x}.$$

Звертаємо увагу, що рівняння $\sqrt{x}=0$ має корінь $x=0$ і областю визначення функції $h(x)=\sqrt{x}$ є множина всіх дійсних чисел з проміжку $x\in[0;+\infty)$. Такий же проміжок буде і областю допустимих значень змінної отриманого рівняння. Як наслідок таких змін, отримане рівняння буде мати два корені: $x=3;\ x=0$. Тобто, у результаті множення обох частин рівняння $x^2=9$ на вираз $\sqrt{x}$ ми отримали один зайвий корінь $x=0$ і втратили корінь вихідного рівняння $x=-3$, так як він попав до звуження області допустимих значень змінної рівняння $x^2=9$.

Приклад 3.6. Помножимо тепер обидві частини рівняння $x^2=9$ на вираз $\sqrt{x+4}$.Зауважимо, що рівняння $\sqrt{x+4}=0$ має один корінь $x=-4$, а область визначення функції $h(x)=\sqrt{x+4}$ складається з множини всіх дійсних чисел у проміжку $x\in[-4;+\infty)$. Отримане рівняння:

$$x^2\cdot\sqrt{x+4}=9\cdot\sqrt{x+4}$$

буде мати область допустимих значень змінної проміжок $x\in[-4;+\infty)$ і буде наслідком рівняння $x^2=9$, так як при переході від вихідного рівняння до отриманого з'являється сторонній корінь $x=-4$. Жодний корінь вихідного рівняння при цьому не втрачається, так як ці корені не входять до звуження області допустимих значень змінної рівняння $x^2 = 9$.

Отже, при множенні рівняння (1.6) на вираз $h(x)$ ми можемо отримати як рівносильне рівняння, так і нерівносильне. Якщо множник $h(x)$ (за умови, що область визначення функції $h(x)$ не вужча за область допустимих значень рівняння (1.6)) може перетворюватися в нуль при деяких допустимих значеннях змінної, то в загальному випадку рівняння (1.6) і (1.8) нерівносильні. Якщо ж область визначення функції $h(x)$ вужча за область допустимих значень рівняння (1.6), то в результаті множення обох частин рівняння (1.6) на $h(x)$ може відбутися втрата саме тих коренів рівняння (1.6), які не входять до області визначення функції $h(x)$.

Розглянемо на прикладах розв'язування рівнянь та нерівностей, які ж дії потрібно виконати, щоб запобігти зміні множини розв'язків при розв'язуванні рівнянь виду (1.8).

<u>Приклад 3.7.</u> Розв'яжемо рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-2} = 4 \cdot \frac{1}{x-2}$$

Перенесемо все до лівої частини, виконаємо дію віднімання дробів, отримаємо рівняння:

$$\frac{(x-1)^2 - 4}{x-2} = 0.$$

Скориставшись умовою рівності дробу нулеві, отримаємо систему умов:

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 4 = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Розв'язання цих умов дасть розв'язки: $x = 3;\ x = -1$. Як бачимо, множник $\frac{1}{x-2}$ не зіграв ніякої ролі при розв'язуванні рівняння, тому, взагалі кажучи, ми просто могли розділити на нього обидві частини рівняння. Але у загальному випадку цього робити не слід. І це ми продемонструємо наступними прикладами.

<u>Приклад 3.8.</u> Розв'язати нерівність:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-2} < 4 \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Очевидно, що просте ділення на $\frac{1}{x-2}$ дасть невірний результат при розв'язуванні цієї вправи. Тому здійснимо над нерівністю вже описані вище перетворення − отримаємо нерівність:

$$\frac{(x-1)^2 - 4}{x-2} < 0.$$

Розкладемо чисельник лівої частини на множники:

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)}<0.$$

Далі − або перейдемо до сукупності двох систем (дріб від'ємний тоді, коли чисельник та знаменник мають різні знаки), або використаємо відомий метод інтервалів. Отримаємо розв'язок $x \in (-\infty;-1) \bigcup (2;3)$. Порівнюючи цей розв'язок із розв'язком нерівності $(x-1)^2<4$, констатуємо правильність висновку про недопустимість ділення обох частин вихідної нерівності на вираз $\frac{1}{x-2}$.

Приклад 3.9. Розв'яжемо тепер рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot \frac{1}{x-3} = 4 \cdot \frac{1}{x-3}.$$

Шляхом аналогічних перетворень ми можемо звести це рівняння до системи умов:

$$\begin{cases}(x-1)^2-4=0 \\ x-3 \neq 0\end{cases}.$$

Очевидно, що ця система умов має розв'язок $x=-1$. Якби ж ми розділили обидві частини рівняння на вираз $\frac{1}{x-3}$, то ми б отримали такі корені рівняння $x=3;\ x=-1$. Тобто був би отриманий зайвий корінь $x=3$. А це відбулося через те, що число 3 попало до звуження області допустимих значень змінної рівняння.

Приклад 3.10. Розв'язати рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot (x-2) = 4 \cdot (x-2).$$

Розділивши обидві частини рівняння на вираз $(x-2)$, одержимо рівняння:

$$(x-1)^2 = 4.$$

Цей результат не є вірним, так як при цьому ми втратили один з розв'язків першого рівняння $x=2$.

Тому, виконавши описані у прикладі 3.7 перетворення, ми прийдемо до рівняння:

$$(x+1)(x-3)(x-2)=0,$$

розв'язування якого і дасть вірний результат: $x=-1;\ x=2;\ x=3$.

Приклад 3.11. Розв'язати рівняння:

$$(x-1)^2 \cdot \sqrt{x-2} = 4 \cdot \sqrt{x-2}.$$

Провівши відповідні перетворення, ми отримаємо рівняння:

$$(x+1)(x-3)\sqrt{x-2}=0,$$

а з нього − систему умов:

$$\begin{cases}(x+1)(x-3)(x-2)=0\\ x-2\geq 0\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи умов будуть числа 2 та 3. Очевидно, що якби ми поділили обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x-2}$, то в результаті ми б отримали два корені: −1 та 3, причому корінь −1 був би зайвим. Отже, перетворення вихідного рівняння, що полягає у діленні обох його частин на вираз $\sqrt{x-2}$, може привести до зміни множини розв'язків вихідного рівняння через те, що: а) рівняння $\sqrt{x-2}=0$ має власний розв'язок; б) ділення обох частин вихідного рівняння на вираз $\sqrt{x-2}$ приводить до розширення області допустимих значень змінної вихідного рівняння, куди і попадає корінь $x=-1$. А тому, для запобігання такій зміні множини розв'язків вихідного рівняння слід скористатися переходом до рівносильних тверджень, що і було продемонстровано на початку розв'язування цього прикладу.

Розглянемо особливості розв'язування нерівностей такого типу з точки зору використання при їх розв'язуванні переходу до рівносильних тверджень.

Приклад 3.12. Розв'язати нерівність:

$$(x-1)^2\cdot\sqrt{x-1}=4\cdot\sqrt{x-1}$$

Проведемо перетворення над нерівністю, які дадуть нам рівносильні умови. Перенесемо все до лівої частини, розкладемо на множники − отримаємо нерівність, рівносильну до вихідної:

$$(x+1)(x-3)\sqrt{x-1}>0.$$

Дана нерівність буде рівносильною такій системі умов:

$$\begin{cases}(x+1)(x-3)>0\\ x-1>0\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде проміжок $x\in(3;+\infty)$.

Пояснимо причини, через які ми не могли поділити обидві частини вихідної нерівності на вираз $\sqrt{x-1}$, отримавши при цьому нерівність $(x-1)^2>4$. Перш за все, ми мали б врахувати, що вказаний вираз при $x=1$ перетворюється в нуль, і цей випадок ми повинні розглядати окремо. Хоча, як показує подальше розв'язання, цей факт якраз і не вплине на кінцевий розв'язок. Тоді що ж саме так кардинально може змінити розв'язок вихідної нерівності (зазначимо, що розв'язок отриманої після ділення на вираз $\sqrt{x-1}$ нерівності такий: $x\in(-\infty;-1)\bigcup(3;+\infty)$)? Скорочення обох частин вихідної нерівності на вираз $\sqrt{x-1}$ розширює область допустимих значень вихідної нерівності на проміжок $x\in(-\infty;-1)$, куди й попадають «зайві» розв'язки отриманої нерівності $(x-1)^2>4$. Це і стало основною причиною допущеної помилки при такому розв'язуванні нерівності.

Отже, при розв'язуванні рівнянь та нерівностей виду (1.8) основними причинами зміни множини розв'язків можуть бути такі:

1. Множник $h(x)$ може мати власні корені, які при певних умовах (слід перевірити факт входження цих коренів до області визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$) будуть коренями рівняння (1.8).

2. Область визначення функції $h(x)$ може бути вужчою визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$, і у випадку попадання коренів рівняння (1.6) до області звуження, вони виявляться зайвими.

А тому, для запобігання такій зміні множини розв'язків вихідних рівняння чи нерівностей слід скористатися переходом до рівносильних тверджень, що і було продемонстровано на прикладах, описаних вище.

§4. Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до степеня.

Розглянемо рівняння (1.6). Ми вже відзначали у §1, що при піднесенні обох його частин до раціонального степеня можливими є різні випадки, в тому числі такі, що приводять до рівносильних рівнянь, або такі, що приводять до зміни множини розв'язків рівнянь. Конкретизуємо такі факти та причини можливої зміни розв'язків рівняння (1.6):

1) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до будь-якого непарного натурального степеня одержимо рівняння:

$$f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x) \tag{1.9}$$

яке буде рівносильним рівнянню (1.6), що доводиться в [Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В.,Мельников И. И.,Олехник С. Н., Пасиченко П. И., - М.: Наука, 1987. – 240с.];

2) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до любого парного натурального степеня одержимо рівняння:

$$f^{2n}(x) = g^{2n}(x) \tag{1.10}$$

яке буде наслідком рівняння (1.6), так як його розв'язками будуть як розв'язки рівняння (1.6), так і розв'язки рівняння:

$$f(x) = -g(x) \tag{1.11}$$

Тому таке перетворення може привести до появи зайвих коренів.

3) при піднесенні обох частин рівняння (1.6) до степеня -1 одержимо рівняння:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} \tag{1.12}$$

Область допустимих значень цього рівняння може бути вужчою, ніж область допустимих значень рівняння (1.6) (в область допустимих значень рівняння (1.12) не входять ті значення змінної, при яких $f(x)=0$ або $g(x)=0$) . Тому таке перетворення може привести до втрати саме тих коренів рівняння (1.6), при яких $f(x)=0$ або $g(x)=0$; Але в тому випадку, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ мають вигляд відповідно $1/\psi_1(x)$ і $1/\psi_2(x)$, то, навпаки, в результаті проведення такого перетворення ми розширюємо область допустимих значень рівняння (1.6) і, як наслідок, ми можемо отримати зайві корені, що задовольняють одному з рівняння: $\psi_1(x)=0$ або $\psi_2(x)=0$.

4) при добуванні від обох частин рівняння (1.6) кореня непарного степеня, отримаємо рівняння:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \tag{1.13}$$

яке буде рівносильним рівнянню (1.6), що також доводиться в [Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В.,Мельников И. И.,Олехник С. Н., Пасиченко П. И., - М.: Наука, 1987. – 240с.];

5) при добуванні з обох частин рівняння (1.6) кореня парного степеня, одержимо рівняння:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \qquad (1.14)$$

В результаті такого перетворення ми можемо втратити ті розв'язки рівняння (1.6), які задовольняють умові:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -\sqrt[2n]{g(x)} \qquad (1.15)$$

Піднесення обох частин рівняння (1.6) до любого іншого степеня вигляду $\frac{m}{n}$ можна розглядати як послідовність піднесення до вказаних у п.1) – 5) степенів з обов'язковим врахуванням зміни множини розв'язків рівнянь.

Розглянемо приклади розв'язування рівнянь та нерівностей, у яких би використовувалися такі перетворення.

<u>Приклад 4.1.</u> Розглянемо таке рівняння:

$$\sqrt[5]{x-2} = 2$$

Піднісши обидві частини рівняння до п'ятого степеня, маємо

$$x - 2 = 32$$

Ці два рівняння рівносильні, тому відповідь $x = 34$ можна записати без перевірки.

<u>Приклад 4.2.</u> Розв'яжемо рівняння:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$$

При піднесенні обох частин даного рівняння до квадрату ми отримаємо рівняння-наслідок. Тому можемо сміливо це зробити, врахувавши, що випадок одержання зайвих коренів ми виявимо, зробивши перевірку. Тому, після піднесення до другого степеня обох частин рівняння, маємо (друге рівняння):

$$x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2x+6)} + 2x + 6 = 36.$$

Або:

$$2\sqrt{2x^2 + 4x - 6} = -3x + 31$$

Піднесемо до квадрату обидві частини отриманого рівняння. Маємо (третє рівняння):

$$4(2x^2 + 4x - 6) = (-3x + 31)^2,$$

або:

$$x^2 - 202x + 985 = 0.$$

Це рівняння має корені: $x = 5,\ x = 197$. Зробимо перевірку: при $x = 5$ маємо $\sqrt{5-1} + \sqrt{2 \cdot 5 + 6} = 6$ − тому $x = 5$ є коренем заданого рівняння; при $x = 197$ маємо $\sqrt{197-1} + \sqrt{2 \cdot 197 + 6} \neq 6$ − тому $x = 197$ – зайвий корінь. Отже , рівняння має один корінь $x = 5$.

Вияснимо причину появи зайвого кореня. Бачимо, що число 197 не є коренем ні вихідного, ні другого рівнянь (це легко побачити, виконавши перевірку). Зайвий корінь 197 з'являється під час наступного піднесення до другого степеня. Справді, третє рівняння містить як корені другого рівняння, так і корені рівняння:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}=3x-31.$$

А число 197 якраз і є коренем цього рівняння.

Приклад 4.3. Розв'яжемо нерівність:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}\geq -3x+31.$$

Для запобігання зміні множини розв'язків цієї нерівності скористаємося переходом до рівносильних тверджень. Логіка тут може бути такою. Якщо вираз $-3x+31$ є невід'ємним, то обидві частини нерівності можна підносити до квадрату, зберігши при цьому знак нерівності. Якщо ж вираз $-3x+31$ буде приймати від'ємні значення, то для виконання умови нерівності достатньо, щоб підкореневий вираз лівої частини нерівності був невід'ємним. Запишемо висловлені умови у вигляді сукупності двох систем умов:

$$\begin{cases}-3x+31\geq 0\\ 4(2x^2+4x-6)\geq(-3x+31)^2\end{cases},\ \text{або}\ \begin{cases}-3x+31<0\\ 2x^2+4x-6\geq 0\end{cases}$$

В результаті елементарних перетворень ми отримаємо розв'язки: $x\in[5;+\infty)$.

Приклад 4.4. Розв'яжемо іншу нерівність:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}\leq -3x+31.$$

Для запобігання зміні множини розв'язків цієї нерівності також скористаємося переходом до рівносильних тверджень. Якщо вираз $-3x+31$ є невід'ємним, то обидві частини нерівності можна підносити до квадрату, зберігши при цьому знак нерівності. При цьому ми маємо врахувати область допустимих значень змінної нерівності − підкореневий вираз має бути невід'ємним. Якщо ж вираз $-3x+31$ буде приймати від'ємні значення, то нерівність не матиме змісту. Запишемо висловлені умови у вигляді системи вимог:

$$\begin{cases}-3x+31\geq 0\\ 4(2x^2+4x-6)\leq(-3x+31)^2\\ 2x^2+4x-6\geq 0\end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи буде проміжок: $x\in(-\infty;-3]\bigcup[1;5]$.

Підсумуємо, які ж основні ризики, що могли привести до зміни множини розв'язків, були при розв'язуванні прикладів 4.3 та 4.4.

1. Неврахування зміни послідовності розв'язування у залежності від зміни знаку правої частини нерівностей, що задані у вказаних прикладах.

2. Неврахування області допустимих значень змінної нерівностей.

3. Порушення внутрішньої логіки розв'язування нерівностей.

Використання переходу до рівносильних тверджень дало можливість запобігти випадкам зміни множини розв'язків.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{x-2}{x^2-1}.$$

Область допустимих значень змінної цього рівняння складається з множини дійсних чисел, за винятком чисел 1 та -1. Коренями його будуть числа: 2; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$;$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Піднесемо дане рівняння до степеня -1. Отримаємо:

$$\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x^2-1}{x-2}.$$

В результаті цього перетворення область допустимих значень рівняння змінилася. Вона складатиметься з множини дійсних чисел за винятком чисел 2 і -2. Відповідно і змінилася множина розв'язків рівняння: одночасно втрачається розв'язок $x=2$ і з'являється корінь $x=1$. Розглянемо розв'язування нерівностей.

<u>Приклад 4.6.</u> Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2-4}{x-1}>\frac{x-2}{x^2-1}.$$

Скористаємося переходом до рівносильних тверджень у процесі розв'язування. Перенесемо все до лівої частини, зведемо до спільного знаменника, винесемо у чисельнику за дужки $x-2$, а вираз у дужках розкладемо за коренями квадратного тричлена. Отримаємо:

$$\frac{(x-2)(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2})}{(x-1)(x+1)}>0$$

Далі, врахувавши, що $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}38;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\approx -2{,}6$ та використавши для розв'язування метод інтервалів, маємо кінцевий розв'язок: $x\in(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};-1)\cup(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};1)\cup(2;+\infty)$.

Дослідимо, як вплине на розв'язок вихідної нерівності піднесення обох її частин до степеня -1. Отримаємо нерівність:

$$\frac{x-1}{x^2-4}>\frac{x^2-1}{x-2}.$$

Виконавши над цією нерівністю аналогічні до попередніх перетворення та використавши метод інтервалів, ми отримаємо розв'язок: $x\in(-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2})\cup(-2;\frac{-3+\sqrt{5}}{2})\cup(1;2)$.

Порівнюючи два розв'язки, можна лише стверджувати, що вибрані нерівності є абсолютно різними (дарма, що відрізняються на степінь -1), тому говорити про використання вказаного перетворення при їх розв’язанні не може бути і мови. Слід однозначно використовувати перехід до рівносильних умов.

Приклад 4.7. Розв’яжемо рівняння:

$$(x-3)^3 = 8.$$

Добудемо від обох частин рівняння 3-го степеня, одержимо:

$$x-3=2.$$

Це рівняння є рівносильним даному.

Приклад 4.8. Розв’яжемо таке рівняння:

$$(x+4)^2 = 9.$$

Добудемо з обох частин рівняння арифметичний корінь 2-го степеня:

$$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{9} \quad \text{або} \quad |x+4| = 3.$$

Останнє рівняння має 2 корені: $x=-7$ *і* $x=-1$.

Приклад 4.9. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x+11} = x-1.$$

Область допустимих значень змінної цього рівняння задається умовою $x+11 \geq 0$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, виконаємо перетворення та запишемо відповідь:

$$(x+11=x^2+1-2x) \Leftrightarrow (x^2-3x-11=0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Отже, розв’язки рівняння знаходяться серед чисел 5; -2. Досить часто учні роблять помилку: знаходять корені, перевіряють їх належність області допустимих значень змінної рівняння і, відкинувши ті корені, які не входять в ОДЗ, записують відповідь. Але практика показує, що не можна обмежуватися лише перевіркою належності коренів ОДЗ рівняння. Треба перевірити, чи належать корені наслідків початковому рівнянню. Це підтверджується нашим прикладом.

Обидва корені задовольняють ОДЗ рівняння, але безпосереднє перевірка вказує, що корінь $x=5$ задовольняє вихідному рівнянню, а $x=2$ ні. Таким чином, рівняння має єдиний корінь $x=5$.

Крім відмічених, звернемо увагу на випадки втрати чи отримання зайвих коренів рівняння в результаті формального застосування деяких формул, без врахування умов їх застосування. Розглянемо рівняння виду:

$$\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$$

Областю допустимих значень змінної цього рівняння є множина всіх тих значень x, при яких виконуються умови:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ h(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0\\ g(x)\le 0\\ h(x)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Використавши формулу:

$$\sqrt{f(x)g(x)}=\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)},$$

одержимо рівняння:

$$\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=h(x),$$

область допустимих значень якого звузилась, так як складається з усіх значень *x*, для яких виконується умова:

$$\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ h(x)\ge 0\end{cases}$$

Отже в результаті такого перетворення ми можемо втратити корені. І, навпаки, при використанні оберненого перетворення ми можемо отримати зайві корені. Проілюструємо це на прикладі розв'язування рівняння та нерівності:

Приклад 4.10. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-2}=\sqrt{7}$$

Використаємо при розв'язуванні цього рівняння перехід до рівносильних умов (використавши формулу $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}(a\cdot b\ge 0)$ та врахувавши вказані умови):

$$\begin{cases}\sqrt{(x+4)(x-2)}=\sqrt{7}\\ x+4\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}.$$

Розв'язавши ці умови, ми отримуємо розв'язок $x=3$. Якби друга та третя умови системи були не враховані, то ми б отримали крім розв'язку $x=3$ ще і зайвий корінь рівняння $x=-5$. Отже формальне застосування формули:

$$\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}=\sqrt{(x+4)(x-2)}$$

привело б до розширення області допустимих значень змінної рівняння (з проміжку $x\in[2;+\infty)$ до проміжку $x\in(-\infty;-4]\bigcup[2;+\infty)$), а тому і до отримання зайвого розв'язку, який і входить до розширення ОДЗ. Але якщо при розв'язуванні рівнянь цей факт встановлюється шляхом проведення перевірки, то при розв'язуванні нерівностей такий спосіб є неможливим. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4.11. Розв’язати нерівність:

$$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-2}<\sqrt{7}.$$

Використавши подібні до попередньої вправи перетворення, матимемо систему умов:

$$\begin{cases}\sqrt{(x+4)(x-2)}<\sqrt{7}\\ x+4\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases},$$

розв’язання якої дає відповідь: $x\in[2;3)$. Якби формула $\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}=\sqrt{(x+4)(x-2)}$ була використана нами формально, то відповідь була б іншою: $x\in(-5;-4]\bigcup[2;3)$. Ніякою перевіркою розв’язків цей факт встановити неможливо.

Приклад 4.12. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$

Використаємо один цікавий спосіб розв’язування, який полягає у піднесенні обох частин рівняння до третього степеня, а потім отриманий вираз може бути суттєво спрощений з використанням підстановки. Отже, піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня. При цьому отримаємо рівносильне рівняння:

$$2x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)\cdot(x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)+x-1=1.$$

Після спрощення і підстановки замість виразу $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ числа 1 (дивіться умову вправи) ми отримаємо таке рівняння:

$$\sqrt[3]{(2x-1)\cdot(x-1)}=1-x.$$

Піднесемо отримане рівняння ще раз до кубу – отримаємо рівносильне рівняння:

$$2x^2-3x+1=1-3x+3x^2-x^3,$$

або:

$$x^3-x^2=0.$$

Звідси маємо розв’язки вихідного рівняння: $x_1=0,\ x_2=1$. Здійснивши перевірку, ми бачимо, що розв’язок $x_1=0$ не задовольняє вихідне рівняння, а отже є зайвим. Ретельно прослідкувавши процес розв’язування, ми бачимо, що цей зайвий корінь з’явився відразу після використання підстановки. Отже, рівняння має єдиний корінь $x=1$.

Приклад 4.13. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

Для розв’язування цієї вправи використаємо такий же спосіб розв’язування. Отже, піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня. При цьому отримаємо рівносильне рівняння:

$$x+1+3\sqrt[3]{(x+1)\cdot(3x+1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)+3x+1=x-1.$$

Після спрощення і підстановки замість виразу $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ вираз $\sqrt[3]{x-1}$ (дивіться умову вправи) ми отримаємо таке рівняння:

$$\sqrt[3]{(x+1)\cdot(3x+1)\cdot(x-1)}=-1-x\,.$$

Піднесемо отримане рівняння ще раз до кубу – отримаємо рівносильне рівняння:

$$(x+1)\cdot(3x+1)\cdot(x-1)+(x+1)^3=0\,.$$

Після винесення за дужки спільного множника $x+1$ та спрощення виразу, що залишився в дужках, ми отримаємо таке рівносильне до попереднього рівняння:

$$(x+1)\cdot 4x^2=0\,,$$

яке має два корені: $x=-1$ або $x=0$. Знову провівши перевірку, приходимо до висновку, що корінь рівняння $x=0$ є зайвим. Пропонуємо читачеві самостійно дослідити, у який момент перетворення вихідного рівняння цей зайвий корінь з'явився.

§5. Логарифмування та потенціювання рівнянь та нерівностей.

Розглянемо рівняння (або нерівність такого ж виду) (1.6). Прослідкуємо можливі ризики зміни множини розв'язків рівнянь та нерівностей внаслідок логарифмування (а також оберненої операції – потенціювання) та формального використання в процесі розв'язування рівнянь деяких властивостей логарифмів.

1) при логарифмуванні рівняння (1.6) ми одержимо:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (1.16)$$

де $a > 0, a \neq 1$. Область допустимих значень змінної рівняння (1.16) складається з усіх значень x , для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Тобто, ОДЗ рівняння (1.6) внаслідок такого перетворення звузилася і це може привести до втрати тих розв'язків рівняння (1.6), які не входять до ОДЗ рівняння (1.16). І, навпаки, при переході від рівняння (1.16) до рівняння (1.6) (операція потенціювання) внаслідок розширення області допустимих значень рівняння (1.16) ми можемо отримати зайві корені.

2) при формальному використанні в процесі розв'язування рівнянь формул:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (1.17)$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y \qquad (1.18)$$

можливі випадки втрати або одержання зайвих коренів.
Пояснимо цю думку. Нехай дано рівняння виду:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x) \qquad (1.19)$$

ОДЗ цього рівняння складається з усіх тих значень x, для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Використавши формулу (1.17), одержимо рівняння:

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = h(x) \qquad \textit{(1.20)}$$

ОДЗ даного рівняння взагалі кажучи є ширшою, так як задовольняє такій умові:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Тому, при переході від рівняння (1.19) до рівняння (1.20) ми можемо одержати в якості зайвих саме ті корені, для яких виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

І, навпаки, при переході від рівняння (1.20) до рівняння (1.19) може відбутися втрата тих коренів, що задовольняють умові (1.21).
Можна навести аналогічні міркування для випадку використання при розв'язуванні рівнянь формули (1.18).

3) при формальному використанні в процесі розв'язування рівнянь (чи нерівностей) формули:

$$\log x^n = n * \log x \tag{1.22}$$

Розглянемо це на прикладі розв'язування рівняння:

$$q \cdot \log_a f(x) = g(x) \tag{1.23}$$

(де $q \in N$). Формально скориставшись формулою (1.22) ми отримаємо рівняння:

$$\log_a (f(x))^q = g(x) \tag{1.24}$$

При цьому можуть виникнути такі ризики зміни множини розв'язків рівняння (1.23):

а) якщо $q = 2n+1$, де $n \in N$, то рівняння (1.23) і (1.24) будуть рівносильними точно так само, як при непарному показнику степеня будуть рівносильними рівняння (1.6) та (1.9);

б) якщо $q = 2n$, де $n \in N$, то з'являється ризик отримання зайвих коренів. Це пов'язано з розширенням ОДЗ рівняння (1.23), котра задовольняє умові $f(x) > 0$. ОДЗ рівняння (1.24) на функцію *f(x)* накладає слабшу умову: $f(x) \neq 0$. Якраз ті корені рівняння (1.24), що задовольняють умові $f(x) < 0$ і можуть стати зайвими при такому розв'язуванні рівняння (1.23).

Навпаки, при переході від рівняння (1.24) до рівняння (1.23) при $q = 2n$ може відбутися втрата коренів.

Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 5.1. Розв'язати рівняння:

$$\lg(x^2 - 30) = \lg(-3x + 10).$$

Проведемо над рівнянням операцію потенціювання. В результаті одержимо рівняння:

$$x^2 - 30 = -3x + 10,$$

коренями якого будуть числа 5 та -8. Але коренем першого рівняння є лише число -8, а корінь 5 є зайвим коренем. Яка природа його появи?

Ясно, що при використанні переходу до рівносильних умов ми б мали операцію потенціювання виконати, врахувавши область допустимих значень змінної вихідного рівняння. А тому, матимемо таку систему умов:

$$\begin{cases} x^2-30=-3x+10 \\ x^2-30>0 \\ -3x+10>0 \end{cases},$$

розв’язавши яку і отримаємо вірну відповідь $x=-8$.

Приклад 5.2. Розв’язати рівняння:

$$\log_2(x+2)+\log_2(x-4)=\log_2 7.$$

Використавши формулу (1.17) та наклавши рівносильні умови, одержимо:

$$\begin{cases} \log_2(x+2)(x-4)=\log_2 7 \\ x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases}$$

Розв’язання системи умов дасть розв’язок $x=5$. Якби умови були не враховані і формула (1.17) використана формально, то при такому перетворенні ми б одержали зайвий корінь -3, так як розширили б ОДЗ проміжком $(-\infty; -2)$.

Приклад 5.3. Розв’язати нерівність:

$$2\log_8(x-2)-\log_8(x-1)>\frac{2}{3}.$$

Для розв’язування цієї нерівності використаємо формули (1.18) та (1.22) і накладемо відповідні умови, при яких використання цих формул не буде формальним:

$$\begin{cases} \log_8\dfrac{(x-2)^2}{x-1}>\dfrac{2}{3} \\ x-2>0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

Розв’язання цієї системи умов дає результат: $x\in(4;+\infty)$. Якби формули були використані без накладання відповідних умов, то нерівність в якості зайвих розв’язків мала б ще розв’язок $x\in(1;\ 2)$. Використання переходу до рівносильних умов дало можливість уникнути невірної відповіді.

§6. Тригонометричні перетворення рівнянь та нерівностей.

В процесі розв’язування тригонометричних рівнянь також можуть виникати випадки втрати та появи зайвих коренів. Не претендуючи на повноту класифікацій, розглянемо основні ситуації, які зустрічаються досить часто.

1) при переході від рівняння (1.6) до рівняння

$$tg(f(x))=tg(g(x))$$

можуть бути як втрачені, так і одержані зайві корені. Нехай $f(x)=arcsin(x)$, $g(x)=2arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.Так як число 1 є коренем рівняння

$$arcsin\ x=2arcsin\frac{x}{\sqrt{2}},$$

але не є коренем рівняння

$$tg(arcsin\ x)=tg(2arcsin\frac{x}{\sqrt{2}})$$

то при переході від першого рівняння до другого було втрачено корінь $x=1$ (причиною втрати цього кореня є звуження області допустимих значень змінної рівняння).

Нехай тепер $f(x)=x,\ g(x)=2x$. Так, як число π є коренем рівняння $tgx=tg2x$, але не є коренем рівняння $x=2x$, то при переході від другого до першого рівняння було одержано зайвий корінь $x=\pi$ (причиною появи цього кореня є періодичність функції $tg(x)$). Аналогічні висновки можна зробити і про перехід від рівняння (1.6) до рівняння

$$ctg(f(x))=ctg(g(x))$$

2) при переході від рівняння (1.6) до рівняння

$$sin\ f(x)=cos\ g(x)$$

з’являються зайві корені. Нехай $f(x)=x,\ g(x)=2x$. Так як число 2π є коренем рівняння

$$sin\ x=sin\ 2x$$

але не є коренем рівняння $x=2x$, то при переході від рівняння $x=2x$ до рівняння $sin\ x=sin\ 2x$ з’явився новий корінь (причиною появи цього кореня є періодичність функції $sin\ x$). Аналогічні зауваження можна зробити про перехід від рівняння (1.6) до рівняння

$$cos\ f(x)=cos\ g(x)$$

3) поява зайвих коренів може відбутися в результаті використання в процесі розв’язування рівнянь тригонометричних перетворень.

Розглянемо декілька вправ.

Приклад 6.1. Розв’язати рівняння:

$$sin\ x–sin\ 2x=0$$

Використавши формулу різниці синусів, маємо:

$$\cdot(2\cos\frac{x+2x}{2}\cdot\sin\frac{x-2x}{2}=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3}{2}-x=0\\ \sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi\kappa}{3},\kappa\in Z\\ x=2\pi n,n\in Z\end{array}\right.$$

А якби ми від вихідного рівняння перейшли до рівняння $x=2x$, то мали б лише один розв'язок $x=0$.

<u>Приклад 6.2.</u> Розв'язати рівняння:

$$tg\,2x-ctg\,x=0$$

Множина всіх розв'язків рівняння (41) складається з об'єднання трьох множин:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi\kappa,\kappa\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi m,m\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,n\in Z\,.$$

Використаємо відомі тригонометричні формули для перетворення вихідного рівняння. Отримаємо рівняння:

$$\frac{2tgx}{1-tg^2x}-\frac{1}{tgx}=0$$

Серія розв'язків вихідного рівняння – $x=\frac{\pi}{2}+\pi\kappa,\kappa\in Z$ не є розв'язком другого рівняння. Це відбулося внаслідок звуження області допустимих значень рівняння після застосування формул:

$$tg2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}\text{ та }ctgx=\frac{1}{tgx}.$$

§7. Система вправ для попередження помилок, пов'язаних з втратою та появою зайвих коренів рівнянь та нерівностей.

Пропонуємо увазі читача виконати вказане нижче завдання з рівняннями та нерівностями з метою відпрацювати навички «розпізнавання підозрілих перетворень». Це дасть можливість свідомо та професійно підходити до розв'язування складніших рівнянь та нерівностей. Під час виконання завдання будьте уважні – частина рівнянь містять несподіванки. Не забудьте перевіряти кожне виконане завдання. Спочатку попрацюйте з рівняннями, потім з нерівностями.

Отже, з переліченими вправами виконати такі завдання:

1. Вияснити, яке перетворення переводить перше рівняння у друге.
2. Дати відповідь на питання, чи будуть рівносильними ці пари рівнянь? Якщо ні, то яке з двох рівнянь є наслідком другого?
3. Яким чином розв'язати кожне з рівнянь, щоб уникнути появи зайвих коренів, або втрати коренів?
4. Поставте замість знака рівності любий із знаків: $>,<,\geq,\leq$. Виконайте завдання 1-3 з нерівностями.

Перша група вправ.

а) $\frac{1}{x(x+1)}+x^4=x^2+\frac{1}{x(x+1)}$ і $x^2=x^4$;

б) $4x+1-\frac{1}{x-3}=11-x-\frac{1}{x-3}$ і $4x+1=11-x$;

в) $x^2-\frac{4}{x+3}+3x=\frac{4}{x+3}$ і $x^2+3x=0$;

г) $2x-5+\frac{1}{x-4}=4-x+\frac{1}{x-4}$ і $2x-5=4-x$;

д) $x+12+\sqrt{x}=18-x+\sqrt{x}$ і $x+12=18-x$;

Друга група вправ.

а) $7x-1=2x+1$ і $(7x-1)\sqrt{2x^2+11}=(2x+1)\sqrt{2x^2+11}$

б) $\frac{1}{2}x+6=3x-4$ і $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\cdot\left(x^2+7\right)=(3x-4)(x^2+7)$

в) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ і $x^2=4$;

г) $(x+2)(x+1)^2=3(x+1)^2$ і $x+2=3$;

г) $(x+9)(x+6)^2=3(x+6)^2$ і $x+9=3$;

д) $x^2-7x=8$ і $\sqrt{4-x^2}(x^2-7x)=8\sqrt{4-x^2}$

е) $x^2=x^3$ і $x=1$;

є) $x+2=0$ і $(x+2)(x^2+1)=0$;

ж) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}=1$ і $\sqrt{x^2}=1$

з) $\frac{x-2}{x^2-5x+6}=1$ і $x-2=x^2-5x+6$;

и) $(2x+1)\sqrt{2x^3+5}=(3x-1)\sqrt{2x^2+5}$ і $2x+1=3x-1$;

і) $(3x-2)\sqrt{1-x}=(6-x)\sqrt{1-x}$ і $3x-2=6-x$;

ї) $(x^2-1)(x+2)=0$ і $x^2-1=0$;

й) $(x^2-4)(x-2)=0$ і $x^2-4=0$;

к) $\sqrt{x-2}(x^2+3)=4x\sqrt{x-2}$ і $x^2+3=4x$;

л) $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{5-2x}{x-1}$ і $2x-3=5-2x$;

м) $(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$ і $3-x=x+2$;

н) $3-\frac{4-x}{x-2}=\frac{18}{2-x}$ і $3(x-2)-(4-x)=-18$;

о) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$ і $x^2-9=x^2-1$;

п) $\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-2}{x-2}$ і $x^2-4=(x-1)(x-2)$;

р) $\frac{x-1}{x}=\frac{x-2}{x-1}$ і $(x-1)^2=x(x-2)$;

Третя група вправ.

а) $(5x-1)^2=(3x+5)^2$ і $5x-1=3x+5$;

б) $\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x^2+2x-4}$ і $(x+2)^2=x^2+2x-4$;

в) $\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{10}$ і $x+2=\sqrt{10}$

г) $\sqrt{x^2-5x+6}=4$ і $x^2-5x+6=16$;

д) $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ і $(x+1)=2$;

е) $\sqrt{x}=1$ і $x^2=1$;

є) $x^2+2x+1=0$ і $(x+1)=0$;

ж) $\sqrt{x}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$ і $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{2}$

з) $x-1=5-2x$ і $(x-1)^2=(5-2x)^2$;

і) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3}=3$ і $\sqrt{2x^2-x-6}=3$

ї) $\sqrt{(x-1)^2(x-3)}=x-1$ і $|x-1|\sqrt{x-3}=x-1$

й) $\sqrt{x+2}=x+1$ і $x+2=(x+1)^2$;

Четверта група вправ.

а) $\log_{(x+8)^2}(2x-1)^2=0$ і $\log_{x+8}(2x-1)=0$;

б) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=1$ і $\log_2(x+2)(x+3)=1$;

в) $\log_4(x+1)^2=0$ і $2\log_4(x+1)=0$;

г) $\log_{0,5}(x-1)(x+3)=0$ і $\log_{0,5}(-x+1)+\log_{0,5}(-x-3)=0$

д) $3^{\log_3 x} = x^2$ і $x^2 = x$;
е) $log_2x(x + 1) = 1$ і $log_2x + log_2(x + 1) = 1$;
є) $\log_{x^2}(x-4)^2 = 1$ і $log_x(x - 4) = 1$;
ж) $log_2x^2 = 1$ і $2log_2x = 1$;
з) $log_2x^3 = 0$ і $3log_2x = 0$;
и) $log_2(x^2 - 6) = log_2(4x - 9)$ і $x^2 - 6 = 4x - 9$;
і) $log_2(x^2 - x) = \frac{1}{2}log_2 4$ і $x^2 - x = 2$;
ї) $log_2(x^2 + 2x + 3) = 1$ і $x^2 + 2x + 3 = 2$;
й) $\log_2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$ і $\log_2(x-\sqrt{3}) + \log_2(x+\sqrt{3}) = 0$
k) $log_2(x^3 - 3) = 0$ і $\log_2\left|x+\sqrt{3}\right| + \log_2\left|x-\sqrt{3}\right| = 0$
л) $log_3x^2 = 2$ і $2log_3x = 2$;
м) $log_2x^3 = 3$ і $3log_2x = 3$;
н) $log_3x^4 = 4$ і $4log_3x = 4$;
о) $3log_2(-x) = log_2(x^2)$ і $-x^3 = x^2$;
п) $\log_2(x(x+9)) + \log_2\frac{x+9}{x} = 0$ і $2log_2|x + 9| = 0$;

П'ята група вправ.

а) $\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x$ і $\sqrt{3}tgx = 1$;
б) $sin\, x = cos\, x$ і $sin^2 x = cos^2 x$;
в) $|sin\, x| = |cos\, x|$ і $sin^2 x = cos^2 x$;
г) $\frac{tg2x}{\cos 2x} = 0$ і $tg\, 2x = 0$;
д) $\sqrt{\cos^2 x} = 1$ і $|\cos x| = 1$;
е) $\sqrt{\sin^2 x} = 1$ і $sin\, x = 1$;
є) $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos 5x} = 0$ і $sin\, 2x = 0$

Наведемо конкретні приклади, які, безперечно, допоможуть проаналізувати наведену систему вправ.

Приклад 7.1. Розв'язати рівняння

$$x - \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} = 0$$

Помножимо обидві частини рівняння на $x+1$. Маємо:

$$x^2 + x - x^2 - 3x - 2 = 0,$$

звідки $x=-1$. Оскільки $x=-1$ не входить в ОДЗ вихідного рівняння, то воно не є його коренем. Наше перетворення розширило ОДЗ, що привело до появи стороннього кореня. Множити обидві частини рівняння можна тільки на вираз $y(x)\neq 0$. В супротивному разі можуть бути проблеми з отриманням рівносильної умови. З погляду перетворень потрібно було б записати рівносильну вихідному рівнянню систему:

$$\begin{cases} x^2 + x - x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}.$$

Розв'язком першого рівняння буде $x=-1,$ а це суперечить другій умові системи. Отже, вихідне рівняння розв'язків не має.

<u>Приклад 7.2.</u> Розв'язати рівняння:

$$x - 4 = \frac{(x-4)(x+2)}{x^2 - 3x}.$$

Наші рекомендації з розв'язування цього рівняння такі: перенести все до лівої частини, звести до спільного знаменника, в чисельнику винести спільний множник за дужки. При цьому отримаємо таке рівняння:

$$\frac{(x-4)(x^2 - 4x - 2)}{x(x-3)} = 0.$$

Розв'язування цього рівняння дасть розв'язки: $x = 4; x = 2 + \sqrt{6}; x = 2 - \sqrt{6}$.

Можна поступити інакше, врахувавши, що при діленні обох частин вихідного рівняння на $x–4$ ми втратимо розв'язок $x=4.$ Щоб не записувати відповідно до названого перетворенню рівносильну систему потрібно рівняння записати так:

$$x - 4 - \frac{(x-4)(x+2)}{x^2 - 3x} = 0$$

Винесемо $x–4$ за дужки:

$$(x-4)(1 - \frac{x+2}{x^2 - 3x}) = 0$$

Звідси одержимо сукупність двох рівнянь, рівносильних вихідному:

$$\left[\begin{array}{l} x - 4 = 0 \\ 1 - \dfrac{x-2}{x^2 - 3x} = 0 \end{array} \right.$$

Із першого рівняння сукупності маємо розв'язок x_1=4. Друге рівняння сукупності дасть такі розв'язки:

$$x_2 = 2 + \sqrt{6},\ x_3 = 2 - \sqrt{6}.$$

Отже, ми показали два різних підходи до розв'язування вихідного рівняння, але обидва підходи ґрунтувалися на переході до рівносильних тверджень.

<u>Приклад 7.3.</u> Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-2} = x - 8.$$

Враховуючи, що ми розглядаємо тільки арифметичне значення кореня, переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} x - 2 = (x-8)^2 \\ x - 8 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язками першого рівняння будуть числа $x_1=11$, $x_2=6$. Другу нерівність системи задовольняє тільки $x_1=11$, що й буде розв'язком вихідного рівняння.

Зауважимо, що є принципово два «крайні» шляхи розв'язування рівнянь за допомогою перетворень, які можуть призвести до сторонніх коренів: 1) переходити до рівносильних систем (чи сукупностей систем) з метою відшукання розв'язку системи; 2) шляхом формального розв'язування рівняння з наступною перевіркою отриманої множини значень невідомої безпосередньою підстановкою у вихідне рівняння (шлях «повної» перевірки). Всі останні шляхи знаходяться «між» цими двома «крайніми» (шляхи «частково-проміжної» перевірки). А саме: перехід до рівносильної системи; формальне розв'язування вихідного рівняння; перевірка останніх (крім рівняння) умов («частково-проміжна» перевірка), що входять в рівносильну систему, що й було зроблено нами в прикладі з ірраціональним рівнянням.

<u>Приклад 7.4.</u> Розв'язати рівняння

$$\lg(2x+3)=\lg(x+1)$$

При потенціювання можуть виникнути сторонні розв'язки. Запишемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} 2x+3=x+1 \\ 2x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$$

Розв'язком першого рівняння системи буде $x=-2$. Однак він не задовольняє останні дві умови-нерівності системи. Отже рівняння не має розв'язку.

Поширеними є помилки, що допускають учні при розв'язуванні рівнянь вигляду

$$f_1(g_1(x))=f_2(g_2(x)).$$

Часто робиться хибний висновок про те, що рівняння рівносильне рівнянню

$$g_1(x)=g_2(x).$$

При таких перетвореннях потрібно враховувати особливості функцій $f_1(x)$, $g_1(x)$, $f_2(x)$, $g_2(x)$ що входять до рівняння: області визначення, області значень, періодичність та ін.

<u>Приклад 7.5.</u> Розв'язати рівняння

$$\sin(2x-4)=\sin(4x-5).$$

Помилково вважати, що рівняння

$$2x-4=4x-5$$

рівносильне вихідному рівнянню. Тут не врахована періодичність функції $\sin(x)$.

Друге рівняння має розв'язок $x=0,5$. Розв'язок же вихідного рівняння матиме набагато складніший вигляд. Для відшукання цього розв'язку потрібно перенести в одну частину доданки й перетворити суму синусів в добуток. Отримаємо

$$2\sin(x-0{,}5)\cos(3x-4{,}5)=0,$$

або:

$$\left[\begin{array}{l}\sin(x-0{,}5)=0\\ \cos(3x-4{,}5)=0\end{array}\right.$$

Розв'язки кожного з рівнянь сукупності матимуть вигляд:

$x_1 = n\pi + 0{,}5$; $x_2 = \dfrac{m\pi + 4{,}5}{3}$, де n, m – цілі числа.

Розв'язком вихідного рівняння буде об'єднання цих двох множин $\{x_1\}$ і $\{x_2\}$. Легко переконатися, що їх перетином буде порожня множина.

Ще більші складнощі виникають при розв'язуванні нерівностей. Фактично до проблем перетворення рівнянь додаються ще додаткові проблеми. Так при множенні чи діленні нерівності на вираз $y(x)$ потрібно щоб він був одного й того ж знаку при всіх допустимих значеннях x. В супротивному разі незрозуміло як змінювати знак нерівності. При розв'язанні нерівностей (наприклад, ірраціональних) шлях «повної» чи «частково-проміжкової» перевірки взагалі неможливий, бо кількість розв'язків нерівності нескінченна (наприклад, $x>3$). При розв'язуванні логарифмічних, показникових та інших типів нерівностей потрібно враховувати характер монотонності показникової чи логарифмічної функції. Можна назвати й інші проблеми, що виникають в моментах перетворень нерівностей під час реалізації алгоритму розв'язку. Все це створює суттєві труднощі, вимагає при розв'язуванні нерівностей творчості, а не репродуктивної діяльності.

Вправи для самостійного розв'язування.

У цьому розділі ми пропонуємо вправи для контролю отриманих умінь. У лівій частині таблиці вказана умова вправи, а у правій – лише відповідь без вказівок з розв'язання. Не забувайте, що консультації з розв'язання вправ можна отримати у рамках навчання у заочній фізико-математичній школі.

Умова	**Відповідь**
1. Знайти область допустимих значень змінної рівняння:	
$\sqrt{x-1}\cdot\lg(9-2x)=0$	$x\in\left[1;\ \frac{9}{2}\right)$
$\frac{4}{x+3}+\frac{7}{\sqrt{x+3}}=\frac{1}{x^2+5x+6}$	$x\in(-3;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$
$\sqrt{x-9}-\sqrt{10-x}=1$	$x\in[9;\ 10]$
$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$	$x\in(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$
$\sqrt{x-2}\cdot\left(x^2-4x+3\right)=0$	$x\in[2;\ +\infty)$
$\sqrt{x^2\cdot(x-1)}=\lvert x\rvert$	$x\in[1;\ +\infty)$
$\sqrt{x+11}=x-1$	$x\in[1;\ +\infty)$
$\log_2 x^2=2$	$x\neq 0$
$tg2x-ctgx=0$	$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$ $x\neq\pi k,\ k\in Z$
$\sqrt{x^2+4x-5}=\sqrt{x-1}$	$x\in[1;\ +\infty)$
2. Чи є рівносильними рівняння? Чому?	
$7x-1=2x+1$ та $(7x-1)\sqrt{2x^2+11}=(2x+1)\sqrt{2x^2+11}$	Так
$(5x-1)^2=(3x+5)^2$ та $5x-1=3x+5$	Ні
$f(x)=0$ та $\sqrt{f(x)}=0$	Так
$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=0$ та $\sqrt{f(x)g(x)}=0$	Ні
$f(x)=0$ та $\sqrt[3]{f(x)}=0$	Так
$2x-3=5-2x$ та $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{5-2x}{x-1}$	Так
$\frac{1}{2}x+6=3x-4$ та $\left(\frac{1}{2}x+6\right)(x^2+7)=(3x-4)(x^2+7)$	Так
$f(x)=1$ та $\log_a f(x)=0$	Так
$f(x)=g(x)$ та $\log_a f(x)=\log_a g(x)$	Ні
$f(x)=g(x)$ та $\log_a(f(x)-g(x)+1)=0$	Так

$\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{10}$ та $x+2=\sqrt{10}$	Ні
$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2+2x-4}$ та $x^2-2=x^2+2x-4$	Так
$\log_{(x+2)^2}(2x-1)^2=0$ та $\log_{x+2}(2x-1)=0$	Ні
$\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ та $\lvert x+1\rvert=2$	Так
$\log_4(x-1)^2=0$ та $2\log_4(x-1)=0$	Ні
$\log_{0.5}(x-1)(x+3)=0$ та $\log_{0.5}(-x+1)+\log_{0.5}(-x-3)=0$	Ні
$x^2=x^3$ та $x=1$	Ні
$\sqrt{x}=1$ та $x^2=1$	Ні
$x+2=0$ та $(x^2+1)(x+2)=0$	Так
$\sqrt{x^3}/\sqrt{x}=1$ та $\sqrt{x^2}=1$	Ні
$x^2+2x+1=0$ та $x+1=0$	Так
$\sqrt{x}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$ та $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{2}$	Ні
$\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=1$ та $(x-2)=(x^2-5x+6)$	Ні
$\dfrac{1}{x(x+1)}+x^4-\dfrac{1}{x(x+1)}=x^2$ та $x^2=x^4$	Ні
$4x+1-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-3}=11-x$ та $4x+1=11-x$	Так
$(2x+1)\sqrt{2x^2+5}=(3x-1)\sqrt{2x^2+5}$ та $2x+1=3x-1$	Так
$(3x-2)\sqrt{1-x}=(6-x)\sqrt{1-x}$ та $3x-2=6-x$	Ні
$(x^2-1)(x+2)=0$ та $(x^2-1)=0$	Ні
$(x^2-4)(x-2)=0$ та $(x^2-4)=0$	Так
$x-1=5-2x$ та $(x-1)^2=(5-2x)^2$	Ні
$\lvert x-3\rvert=\lvert 1-x\rvert$ та $(x-3)^2=(1-x)^2$	Так
$\sqrt{x-2}(x^2+3)=4x\sqrt{x-2}$ та $x^2+3=4x$	Ні
$3^{\log_3 x}=x^2$ та $x^2=x$	Ні
$\log_2 x(x+1)=1$ та $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$	Ні
$\log_{x^2}(x-4)^2=1$ та $\log_x(x-4)=0$	Ні
$\log_2 x^2=1$ та $\log_2 x=\dfrac{1}{2}$	Ні
$\log_2 x^3=0$ та $3\log_2 x=0$	Так
$x-2=0$ та $(x-2)2^{\log_2(1/8-x)}=0$	Так
$x^2+\log_2 x=1+\log_2 x$ та $x^2=1$	Ні
$\log_2(x^2-6)=\log_2(4x-9)$ та $x^2-6=4x-9$	Ні
$\sin x=\cos x$ та $\sin^2 x=\cos^2 x$	Ні
$\lvert\sin x\rvert=\lvert\cos x\rvert$ та $\sin^2 x=\cos^2 x$	Так
$\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{5-2x}{x-1}$ та $2x-3=5-2x$	Так
$(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$ та $3-x=x+2$	Ні

$\frac{x^2-1}{x+1}=-2$ та $x-1=-2$	Ні
$\frac{x^2-9}{x+3}=6+2x$ та $x-3=6+2x$	Так
$\frac{x^2-4}{x-2}=4$ та $x+2=4$	Ні
$\frac{x^2-1}{x-1}=5$ та $x+1=5$	Так
$\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}-\sqrt{2}=1$ та $x=1$	Так
$x^3=9x^2/x$ та $x^3=9x$	Ні
$2x-5+\frac{1}{x-4}=4-x+\frac{1}{x-4}$ та $2x-5=4-x$	Так
$x+12+\sqrt{x}=18-x+\sqrt{x}$ та $x+12=18-x$	Так
$\frac{2x-5}{x^2+4}=0$ та $2x-5=0$	Так
$\frac{x^2+5x+6}{x+3}=0$ та $x^2+5x+6=0$	Ні
$\log_2(x^2-x)=\frac{1}{2}\log_2 4$ та $x^2-x=2$	Так
$\log_2(x^2+2x+3)=1$ та $x^2+2x+3=2$	Так
$\log_2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$ та $\log_2(x+\sqrt{3})+\log_2(x-\sqrt{3})=0$	Ні
$\log_2(x^2-3)=0$ та $\log_2\lvert x+\sqrt{3}\rvert+\log_2\lvert x-\sqrt{3}\rvert=0$	Так
$3-\frac{4-x}{x-2}=\frac{18}{2-x}$ та $3(x-2)-(4-x)=-18$	Так
$\log_2 x^3=3$ та $3\log_2 x=3$	Так
$x^2-x-1=1$ та $\log_2(x^2-x-1)=\log_2 1$	Так
$\log_2(x^2+2x+2)=\log_2 1$ та $x^2+2x+2=1$	Так
$\sqrt{(x-1)^2(x-3)}=x-1$ та $\lvert x-1\rvert\sqrt{x-3}=x-1$	Так
$x+\log_2 x+\log_2\frac{1}{x}=1$ та $x^3-1=0$	Так
3. Яке з двох рівнянь є наслідком? Чому?	
$f(x)g(x)=a$ та $f(x)=a/g(x)$	Перше
$f(x)=0$ та $\sin f(x)=0$	Друге
$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_3(x)}{f_4(x)}$ та $f_1(x)f_4(x)=f_2(x)f_3(x)$	Друге
$f(x)=1$ та $f^2(x)=1$	Друге
$f(x)=\pi/4$ та $tgf(x)=1$	Друге
$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ та $x^2=4$	Друге
$x^2-\frac{4}{x+3}+\frac{4}{x+3}+3x=0$ та $x^2+3x=0$	Друге

$\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=\sqrt{30}$ та $\sqrt{(x+3)(x-4)}=\sqrt{30}$	Друге
$\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos^2 x$ та $\sqrt{3}tgx=1$	Перше
$\lvert x^2-4\rvert=x+2$ та $4-x^2=x+2$	Перше
$(x+2)(x+1)^2=3(x+1)^2$ та $x+2=3$	Перше
$x^2-7x=8$ та $\sqrt{4-x^2}(x^2-7x)=8\sqrt{4-x^2}$	Друге
$x^2=16$ та $x^2\lg(x-5)=16\lg(x-5)$	Друге
$\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=1$ та $\log_2((x+2)(x+3))=1$	Друге
$\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$ та $(x-3)(x+3)=(x+1)(x-1)$	Друге
$\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-2}{x-2}$ та $(x+2)(x-2)=(x-1)(x-2)$	Друге
$\frac{x-1}{x}=\frac{x-2}{x-1}$ та $(x-1)^2=x(x-2)$	Друге
$\log_3 x^2=2$ та $2\log_3(-x)=2$	Перше
$\log_3 x^4=4$ та $4\log_3 x=4$	Перше
$\sqrt{x-2}\sqrt{2x+3}=3$ та $\sqrt{2x^2-x-6}=3$	Друге
$3\log_2(-x)=\log_2 x^2$ та $-x^3=x^2$	Друге
$\sqrt{x+2}=x+1$ та $x+2=(x+1)^2$	Друге
$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}(x^3-4x)=0$ та $x^3-4x=0$	Друге
$\log_2(x^2+3x+2)=\log_2(x+1)$ та $x^2+3x+2=x+1$	Друге
$\log_2(x(x+9))+\log_2\frac{x+9}{x}=0$ та $2\log_2\lvert x+9\rvert=0$	Друге
$\frac{tg2x}{\cos 2x}=0$ та $tg2x=0$	Перше і друге
$\sqrt{\cos^2 x}=1$ та $\lvert\cos x\rvert=1$	Перше і друге
$\sqrt{\sin^2 x}=1$ та $\sin x=1$	Перше
$\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos 5x}=0$ та $\sin 2x=0$	Перше і друге
4. Чи є рівносильними нерівності? Чому?	
$2x-3-\frac{1}{x-5}<x-4-\frac{1}{x-5}$ та $2x-3<x-4$	Так
$x+3-\frac{1}{x+7}<2-\frac{1}{x+7}$ та $x+3<2$	Ні
$\frac{3}{5}(2x-1)<\frac{3}{5}(x+2)$ та $2x-1<x+2$	Так
$\frac{-1}{4}(1-x)<\frac{-1}{4}(4x-3)$ та $1-x<4x-3$	Ні
$\frac{-5}{2}(x-x^2-1)(x+4)<\frac{-5}{2}(x-x^2-1)(3x+1)$ та $x+4<3x+1$	Так
$(18+x-x^2)(4x+8)<(18+x-x^2)(1-x)$ та $4x+8<1-x$	Ні

$3x-1<(x+3)$ та $(3x-1)^2<(x+3)^2$	Ні
$\frac{2}{\sqrt{x}+1}<0$ та $\left(\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)^2<0$	Так
$x^3<-1$ та $x<-1$	Так
$x^2<1$ та $x<1$	Ні
$\frac{-3}{x+4}<-5$ та $\frac{-3+5(x+4)}{x+4}<0$	Так
$\frac{x+5}{x-1}<0$ та $(x+5)(x-1)<0$	Так
$\frac{x-3}{5-x}\le 0$ та $(x-3)(5-x)\le 0$	Ні
$\frac{x+3}{(x-3)^2}<0$ та $x+3<0$	Так
$\frac{x-8}{(x+7)^2}<0$ та $x-8<0$	Ні
$\frac{1}{2x^2+x+1}<\frac{1}{x^2+1}$ та $(x^2+1)<(2x^2+x+1)$	Так
$\frac{2}{9-x^2}<\frac{2}{4x^2-4x}$ та $4x^2-4x<9-x^2$	Ні
$\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}<1/2$ та $2\sqrt{(x+3)(x-3)}<1$	Ні
$x-4+\frac{1}{x+11}>6+\frac{1}{x+11}$ та $x-4>6$	Так
$x+1+\frac{1}{x+5}<8+\frac{1}{x+5}$ та $x+1<8$	Ні
$\frac{137}{4}(x+1)>\frac{137}{4}(2x+1)$ та $x+1>2x+1$	Так
$\frac{-17}{3}(2x-3)>\frac{-34}{3}(3x+1)$ та $2x-3>2(3x+1)$	Ні
$-3(x-5-x^2)(x-1)>-3(x-5-x^2)(x-2)$ та $x-1>x-2$	Так
$(x+7-x^2)(3x+4)>(x+7-x^2)(1-x)$ та $3x+4>1-x$	Ні
$x-4>2x-3$ та $(x-4)^2>(2x-3)^2$	Ні
$\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ та $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>0$	Так
$x^3>1$ та $x>1$	Так
$x^2>1$ та $x>1$	Ні
$\frac{2}{x-4}>3$ та $\frac{2-3(x-4)}{x-4}>0$	Так
$\frac{x-2}{3-x}>0$ та $(x-2)(3-x)>0$	Так
$\frac{x+1}{x-3}\ge 0$ та $(x+1)(x-3)\ge 0$	Ні
$\frac{x-2}{(x+1)^2}>0$ та $x-2>0$	Так

$\frac{x-3}{(x-4)^2}>0$ та $x-3>0$	Ні
$\frac{2}{x^2+4x+10}>\frac{2}{x^2-x+1}$ та $x^2-x+1>x^2+4x+10$	Так
$\frac{1}{x^2-4}>\frac{1}{x^2-4x}$ та $x^2-4x>x^2-4$	Ні
$\sqrt{x-4}\sqrt{x-3}>1/2$ та $2\sqrt{(x-4)(x-3)}>1$	Ні
$x^2\geq x$ та $x\geq 1$	Ні
$x^4\geq x^2$ та $x^2\geq 1$	Ні
$1/x\leq 1$ та $1\leq x$	Ні
$\sqrt{1-x}\leq x$ та $1-x\leq x^2$	Ні
$\sqrt{(1-x)}\sqrt{(x+2)}\geq 9/4$ та $\sqrt{(1-x)(x+2)}\geq 9/4$	Так
$\sqrt{(x+1)(x-2)}\geq x$ та $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}\geq x$	Ні
$\log_2 x^2\leq 2$ та $\log_2 x\leq 1$	Ні
$\log_2\frac{x+1}{x}+\log_2(x(x+1))\leq 2$ та $\log_2(x+1)^2\leq 2$	Ні
$\log_2((x+2)(x-5))\leq 3$ та $\log_2(x-2)+\log_2(x-5)\leq 3$	Ні
$\log_2\frac{x-1}{2x}+\log_2\frac{2x}{x-1}\leq 1$ та $x\geq 1$	Ні
$\sqrt{x+2}\geq -1$ та $x+2\geq 0$	Так
$\sqrt{3x-1}\leq 3$ та $3x-1\leq 9$	Ні
$\sqrt{2x-7}\geq 1$ та $x\geq 4$	Так
$\sqrt{-3x-5}\leq 2$ та $-3x-5\leq 4$	Ні
$\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}}\leq 3$ та $\frac{1-x}{2x-5}\leq 9$	Ні
$\sqrt{4x-3}\geq\sqrt{21-2x}$ та $4x-3\geq 21-2x$	Ні
$x^2\leq x$ та $x\leq 1$	Ні
$x^4\leq x^2$ та $x^2\leq 1$	Так
$\frac{1}{x}\geq 1$ та $x\leq 1$	Ні
$\sqrt{1-x}\geq x$ та $1-x\geq x^2$	Так
$\sqrt{(1-x)(x+2)}\leq 9/4$ та $\sqrt{1-x}\sqrt{x+2}\leq 9/4$	Так
$\sqrt{(1-x)(x+2)}\geq 2$ та $\sqrt{(1-x)}\sqrt{x+2}>2$	Так
$\log_2 x^2\geq 1$ та $2\log_2\lvert x\rvert\geq 1$	Так
$\log_{1/2}\frac{(x-1)}{x}+\log_{1/2}(x(x-1))\geq 3$ та $\log_{1/2}(x-1)^2\geq 3$	Так
$\log_{2/5}(x+5)(x-2)\geq 2$ та $\log_{2/5}(x+5)+\log_{2/5}(x-2)\geq 2$	Так
$\log_{2/5}\frac{x-1}{x+3}+\log_{2/5}\frac{x+3}{x-1}\leq 1$ та $x\leq 1$	Ні
$\sqrt{x+2}\leq -7$ та $x+2\leq 49$	Ні
$\sqrt{3x-2}\geq 4$ та $3x-2\geq 16$	Так

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \ge 2$ та $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \ge 2$	Так
$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} \le 1$ та $\dfrac{x-2}{x+3} \le 1$	Ні
$\sqrt{3-x^2} \le \sqrt{4-x^2}$ та $3-x^2 \le 4-x^2$	Ні
$\sqrt{x-1}\sqrt{x-1} \ge 1$ та $x \ge 2$	Так
$x+\sqrt{x} > \sqrt{x}-2$ та $x > -2$	Ні
$x+\sqrt{1-x} > \sqrt{1-x}-3$ та $x > -3$	Ні
$\dfrac{x^2-1}{x^2-x+1} > 1$ та $x^2-1 > x^2-x+1$	Так
$x-x^2 \le 2$ та $(x-x^2)(x+4x^2+5) \le 2(x+4x^2+5)$	Так
$\dfrac{\sqrt{x^2+5}(x+1)}{x+2} \ge 0$ та $\dfrac{x+1}{x+2} \ge 0$	Так
$\sqrt{x^2-14}(x^2+x-2) \ge 0$ та $x^2+x-2 \ge 0$	Ні
$x^3-8 < 0$ та $x < 2$	Так
$\dfrac{x+4}{x-1} \ge 0$ та $(x+4)(x-1) \ge 0$	Ні
$\sqrt{x+1}/\sqrt{x} > 1$ та $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$	Ні
$\sqrt{(x+1)/x} > 1$ та $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$	Ні
$x^3+\dfrac{1}{x+2} > 1+\dfrac{1}{x+2}$ та $x^3 > 1$	Так
$x^3+\dfrac{1}{x-3} > -\dfrac{1}{x-3}$ та $x^3 > -1$	Ні
$\sqrt{x}(x+2)/\sqrt{x} > 1$ та $x+2 > 1$	Ні
$\sqrt{x+2}(x-4)/\sqrt{x+2} > 2$ та $x-4 > 2$	Так
$(2-x)^2(x+1) > 3(2-x)^2$ та $x+1 > 3$	Так
$(1-x)^2(x+7) > 2(1-x)^2$ та $x+7 > 2$	Ні
$(3-x)^2 x \ge 5(3-x)^2$ та $x \ge 5$	Так
$\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$ та $x+1 > 0$	Ні
$\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$ та $x-3 > 0$	Так
$\sqrt{(x-7)^2(x+3)} \ge 0$ та $x+3 \ge 0$	Ні
$\sqrt{(x+8)^2(x-2)} \ge 0$ та $x-2 \ge 0$	Так
$(x+1)^2 < x^2$ та $\lvert x+1\rvert < \lvert x\rvert$	Так
$\sqrt{(x+2)^2} < \sqrt{x^2}$ та $\lvert x+2\rvert < \lvert x\rvert$	Так
$(x^2+1)(\sqrt{x}+3) > x(\sqrt{x}+3)$ та $x^2+1 > x$	Ні
$(x^2-x+4)(\sqrt{x}+2) \le (\sqrt{x}+2)$ та $x^2-x+4 \le 1$	Ні
$3x^{-2} > (x+2)^{-2}$ та $3(x+2)^2 > x^2$	Ні
5. Чи є рівносильними нерівність та система умов? Поясніть.	

$\lvert x\rvert(x+4)/\sqrt{x^2}>2$ та $\begin{cases} x\neq 0 \\ x+4>2 \end{cases}$	Так
$\sqrt{x^2-25}<x+1$ та $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-25<(x+1)^2 \end{cases}$	Ні
$\sqrt{x^2-16}(x^2-80)\leq\sqrt{x^2-16}$ та $\begin{cases} x^2-16\geq 0 \\ x^2-80\leq 1 \end{cases}$	Так
$\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}}>0$ та $\begin{cases} x+3>0 \\ x+4>0 \end{cases}$	Так
$\sqrt{x^2-1}/x\geq 0$ та $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x>0 \end{cases}$	Ні
$\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-2}\leq 0$ та $\begin{cases} x-2<0 \\ x^2-16\geq 0 \end{cases}$	Ні
$\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}\geq -1$ та $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases}$	Так
$\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{(x+5)}<0$ та $\begin{cases} x\neq -3 \\ \dfrac{x-2}{x+5}<0 \end{cases}$	Так
$\dfrac{\sqrt{25-x^2}(x+4)^2}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}>0$ та $\begin{cases} 25-x^2>0 \\ x^2-1>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$	Ні
$\dfrac{x^2-1}{x-1}<3$ та $\begin{cases} x+1<3 \\ x\neq 1 \end{cases}$	Так
$\sqrt{6+x-x^2}>2x-1$ та $\begin{cases} 6+x-x^2\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \\ (6+x-x^2)>(2x-1)^2 \end{cases}$	Ні
$(x-2)^2\sqrt{16-x^2}/x>0$ та $\begin{cases} 16-x^2>0 \\ x\neq 2 \\ x>0 \end{cases}$	Так
$x+\sqrt{x-1}>\sqrt{x-1}$ та $\begin{cases} x>0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$	Так
$\sqrt{x^2-16}\geq x$ та $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-16\geq x^2 \end{cases}$	Ні
$\sqrt{x^2-9}(x^2-25)\geq\sqrt{x^2-9}$ та $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ x^2-25\geq 0 \end{cases}$	Ні
$\dfrac{x+4}{x-3}\geq 0$ та $\begin{cases} (x+4)(x-3)\geq 0 \\ x\neq 3 \end{cases}$	Так
$(4-x)^2(x+2)>(4-x)^2$ та $\begin{cases} x\neq 4 \\ x+2>1 \end{cases}$	Так

$(x+7)^2(x+3) \ge 2(x+7)^2$ та $\begin{cases} x \ne -7 \\ x+3 \ge 2 \end{cases}$	Ні
$\sqrt{(x-5)^2(x+1)} > 0$ та $\begin{cases} x \ne 5 \\ x+1 > 0 \end{cases}$	Так
$\sqrt{x+3}/\sqrt{x} \ge 1$ та $\begin{cases} x \ne 0 \\ \sqrt{x+3} \ge \sqrt{x} \end{cases}$	Так
$\sqrt{x-1}(x+5)/\sqrt{x-1} > 1$ та $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+5 > 1 \end{cases}$	Так
$(x^2+1)(\sqrt{x}+4) > x(\sqrt{x}+4)$ та $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+1 > x \end{cases}$	Так
6. Чи є рівносильними нерівність та сукупність систем умов? Поясніть.	
$\lg\left\|(x-4)\right\| > 2$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-4 > 0 \\ \lg(x-4) > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < 0 \\ \lg(4-x) > 2 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\log_2\left\|3x-14\right\| \le 1$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-14 > 0 \\ \log_2(3x-14) \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-14 < 0 \\ \log_2(14-3x) \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\left\|\log_3(x-4)\right\| < 1$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3(x-4) \ge 0 \\ \log_3(x-4) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(x-4) \le 0 \\ -\log_3(x-4) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\left\|\log_2 x\right\| \ge 5$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x \ge 0 \\ \log_2 x \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x \le 0 \\ -\log_2 x \ge 5 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\left\|4-\log_2 x\right\| > 2$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-\log_2 x \ge 0 \\ 4-\log_2 x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-\log_2 x \le 0 \\ \log_2 x - 4 > 2 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\log_x \frac{3x+5}{x-3} > \log_x 2$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \frac{3x+5}{x-3} < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3x+5}{x-3} > 2 \end{cases} \end{array}\right.$	Так

$\log_x \frac{4x+5}{6-5x} \ge \log_x \frac{1}{x}$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \frac{4x+5}{6-5x} \le \frac{1}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ \frac{4x+5}{6-5x} \ge \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\log_{x+3}(x^2-4x+3) \le \log_{x+3} 1$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+3 < 1 \\ x^2-4x+3 \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 1 \\ 0 < x^2-4x+3 \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$	Так
$\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2$ та $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ 2+x > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 > x+2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	Так

Предметний покажчик.

Зміст.

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Рівносильність рівнянь та нерівностей

Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів

Василь Андрійович Кушнір
Григорій Андрійович Кушнір
Ренат Ярославович Ріжняк