Міністерство освіти й науки України
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
Заочна фізико-математична школа

Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк

Раціональні рівняння та нерівності

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Кіровоград – 2009

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк
Раціональні рівняння та нерівності: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 84 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков,
кандидат фізико-математичних наук, доцент С.Д.Паращук.

У посібнику міститься основний теоретичний матеріал, способи та приклади розв'язування раціональних рівнянь та нерівностей. Після кожної частини викладу запропоновані задачі для самостійного розв'язування, до яких подані відповіді та вказівки. Розробка містить предметний покажчик теоретичного матеріалу.

Посібник призначений для використання учнями заочної фізико-математичної школи фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка при розв'язуванні контрольних робіт. Може бути використаний у процесі самостійної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл до державної атестації.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 28 квітня 2009 року (протокол № 11).

Друкується в рамках розвитку проекту «Заочна фізико-математична школа КДПУ ім. В.Винниченка» за підтримки ректорату університету.

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

§1. Вступ. Означення основних понять.

Нехай задано дві функції $f(x)$ і $g(x)$ від однієї змінної x.

Означення 1.1. Рівність $f(x)=g(x)$ називається *рівнянням.*

Означення 1.2. *Раціональним рівнянням* називається рівняння виду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0,$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени (означення многочлена дивіться у посібнику «Многочлени» (автори Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк)).

Примітка. Тут і далі у тексті з метою економії місця та часу ми будемо посилатися на ті методичні посібники для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів з серії «Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи», які вже вийшли у друк раніше. Повні бібліографічні дані цих посібників дивіться на четвертій сторінці обкладинки.

Означення 1.3. Число x_0 називається *розв'язком або коренем рівняння*, якщо при підстановці його в рівняння замість змінної x одержується правильна числова рівність, тобто тотожність (означення числової рівності, тотожності дивіться у посібнику «Вирази та тотожні перетворення» (автори Л.В.Ізюмченко, Л.І.Лутченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк)).

Примітка. Очевидно, що раціональними рівняннями можна вважати і рівняння виду:

$$P_n(x)=0,\ P_n(x)=R_l(x),\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{R_l(x)}{T_s(x)},$$

де $P_n(x)$, $R_l(x)$, $Q_m(x)$, $T_s(x)$ – многочлени.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені, або довести, що їх не існує.

Процес розв'язання рівняння, як правило, полягає в послідовній заміні рівняння більш простим рівнянням або в заміні його сукупністю рівнянь. Виконуючи деякі перетворення в одній або в обох частинах рівняння, одержуємо нове рівняння, яким заміняємо вихідне. Тому виникає питання: чи співпадають корені вихідного рівняння з коренями одержаного рівняння? Ми прийшли до поняття рівносильності рівнянь, яке вже викладене у посібнику «Рівносильнільні перетворення рівнянь та нерівностей» (автори В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк).

Приклад 1.1. Рівняння $x^2=1$, $x^2\cdot\frac{1}{x-3}=9\cdot\left(\frac{1}{x-3}\right)$, $\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{x-2}{x^2-1}$, $(x-3)^3=8$, $x^2-3x-11=0$, $x^2-30=-3x+10$, $\frac{x-2}{x^2-5x+6}=1$ є раціональними рівняннями, а рівняння $x^2\sqrt{x}=9\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x-2}=2$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$,

$\sqrt{x+11}=x-1$, $lg(x^2-30)=lg(-3x+10)$, $arcsin\ x=2arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$, $sinx-sin2x=0$ раціональними рівняннями не будуть, але деякі з перелічених рівнянь можуть бути зведені до раціональних (вкажіть, які саме).

Вправи до § 1

1.1. Які із наведених рівнянь є раціональними: $\frac{x^4-x^2-12}{x+2}=0$; $\sqrt[3]{x^3+2x-4}+\sqrt{x+2}=4$; $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)=12$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=0$; $\log_3(\log_2(x-3))=\frac{1}{2}$; $3\sqrt{1-x}+4\sqrt{x}=5$; $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+x+2\right)=2$; $21tgx+ctgx-16\sqrt{3}\sin x=0$?

1.2. Які із наведених у вправі 1.1 рівнянь не є раціональними рівняннями, проте можуть бути зведені до раціональних?

1.3. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x^2+x-2}{x^2+1}=-1$; $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=3$. Доведіть, що під час розв'язування рівняння не з'явились сторонні корені.

1.4. Доведіть, що рівняння не має коренів: $\frac{x^2-4x+3}{x-3}=2$; $\frac{x^4-x^2-12}{x^2-4}=0$, $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x^2+2x-3}=0$.

Вказівка. Скористайтеся фактом: дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник – не дорівнює нулю.

1.5. Розв'яжіть рівняння та покажіть, що під час розв'язування рівняння з'явились сторонні корені: $\frac{x^2+3x-10}{x-2}=2x+10$; $\frac{x^2-8x+7}{x^2+2x-3}=0$. Обґрунтуйте їх появу.

1.6. Зведіть рівняння до раціонального та розв'яжіть у множині дійсних чисел: $\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{21x-36}$.

Вказівка. Скористайтеся фактом: при піднесенні до кубу не з'являються сторонні корені.

Відповідь: $x\in\left\{\frac{52}{29};2;3\right\}$.

§2. Лінійні, квадратні і тричленні рівняння

2.1. Лінійні рівняння

<u>Означення 2.1.</u> Рівняння виду

$$ax + b = 0, \qquad (2.1)$$

де a і b – дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається *<u>лінійним рівнянням</u>.* Рівняння (2.1) має єдиний корінь, що дорівнює $-\frac{b}{a}$.

<u>Приклад 2.1.</u> Розв'язати рівняння:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{6} = 1 - \frac{x}{3}.$$

Розв'язання. Вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 1 + \frac{1}{6}$$

Звідси $x = \frac{7}{6}$.

<u>Приклад 2.2.</u> Розв'язати рівняння:

$$(a-1)x + 2 = a + 1.$$

Розв'язання. При $a \neq 1$ дане рівняння є лінійним і тому має єдиний розв'язок $x = \frac{a-1}{a-1} = 1$. При $a=1$ рівняння набуває вигляду $0 \cdot x + 2 = 2$, тому будь-яке дійсне число є його розв'язком.

Змінимо умову задачі. Нехай треба розв'язати рівняння:

$$(a+1)x + 2 = a + 1.$$

Міркуючи аналогічно, маємо, що при $a \neq -1$ маємо єдиний розв'язок $x = \frac{a-1}{a+1}$. При $a = -1$ рівняння розв'язків не має. Справді: $0 \cdot x + 2 \neq 0$.

2.2. Квадратні рівняння

<u>Означення 2.2.</u> Рівняння виду:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (2.2)$$

де a, b, c – дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається *<u>квадратним рівнянням</u>.*

Нагадаємо, що $D = b^2 - 4ac$ називається *<u>дискримінантом</u>* квадратного тричлена. Якщо $D>0$, то рівняння (2.2) має два різних дійсних кореня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

і тоді:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Якщо $D=0$, то рівняння (2.2) має два кореня, що співпадають:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

і тоді:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

Якщо $D<0$, то рівняння (2.2) дійсних коренів не має. З посібника «Цілі та комплексні числа» (автори Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк) вам відомо, що в такому випадку рівняння (2.2) має два комплексних спряжених кореня:

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a},$$

нагадаємо, що в цьому випадку $\sqrt{D}=\sqrt{-|D|}=\sqrt{i^2|D|}=i\sqrt{|D|}$, де $i^2=-1$.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння:

$$x^2-9x+8=0.$$

Розв'язання. Оскільки $D=9^2-4\cdot 8=49>0$, то квадратне рівняння має два дійсних кореня: $x_1=\frac{9+7}{2}=8$ і $x_2=\frac{9-7}{2}=1$.

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння:

$$x^2-4x+4=0$$

Розв'язання. Оскільки $D=4^2-4\cdot 4=0$, то квадратне рівняння має два дійсних кореня, що співпадають: $x_1=x_2=2$.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння

$$x^2-4x+9=0.$$

Розв'язання. Оскільки $D=4^2-4\cdot 9=-20<0$, то квадратне рівняння має два спряжених комплексних кореня:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{20}i}{2}=2\pm\sqrt{5}i.$$

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння

$$ax^2-4x+2=0.$$

Розв'язання. При $a=0$ одержимо лінійне рівняння $2x-1=0$, яке має єдиний розв'язок $x=\frac{1}{2}$.

При $a\neq 0$ рівняння є квадратним і його дискримінант $D=4^2-8a=16-8a$. При $a>2$ дискримінант $D<0$, тому рівняння має два спряжених комплексних кореня:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm i\sqrt{8a-16}}{2a}=\frac{2\pm i\sqrt{2a-4}}{a}.$$

При $a=2$ дискримінант $D=0$, тому дане рівняння має два кореня, що співпадають:

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{4} = 1.$$

При $a < 2,\ a \neq 0$, дискримінант $D > 0$, і, відповідно, дане рівняння має два різних дійсних кореня:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 8a}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{a},\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 8a}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4 - 2a}}{a}.$$

Нагадаємо теорему Вієта. Всю інформацію про цю теорему ви можете взяти з посібника «Многочлени» (автори Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк).

<u>**Теорема 2.1. (Вієта).**</u> Якщо x_1 і x_2– корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і $a \neq 0$,то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

<u>Приклад 2.7.</u> Знайти суму квадратів і суму кубів коренів рівняння:

$$x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Розв'язання. Дискримінант даного рівняння $D = 7^2 - 4 \cdot 4 = 33 > 0$ і тому рівняння має два різні дійсні корені. За теоремою Вієта маємо $x_1 + x_2 = 7$ і $x_1 \cdot x_2 = 4$. Подамо суму квадратів і суму кубів відповідно у вигляді:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2).$$

Звідси знаходимо:

$$x_1^2 + x_2^2 = 7^2 - 2 \cdot 4 = 49 - 8 = 41,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 7 \cdot (7^2 - 3 \cdot 4) = 7 \cdot (49 - 12) = 7 \cdot 37 = 259.$$

<u>Зауваження.</u> Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ і $S_n = x_1^n + x_2^n \quad (n \geq 2,\ n \in N)$. Тоді справедлива <u>*рекурентна формула Ньютона*</u>:

$$S_{n+1} = -pS_n - qS_{n-1}, \qquad S_1 = -p, \qquad S_2 = p^2 - 2q.$$

Дійсно, так як x_1 і x_2– корені рівняння, то:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0,$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

Помноживши першу рівність на x_1^{n-1}, а другу на x_2^{n-1} і додавши потім одержані рівності, отримуємо рекурентну формулу.

<u>Приклад 2.8.</u> Скласти квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.

Розв'язання. Нехай $x^2+px+q=0$ (де p і q – раціональні числа) – шукане рівняння. Позначимо $x_1=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=6+\sqrt{35}$, тоді, очевидно, другий корінь рівняння $x_2=6-\sqrt{35}$. За теоремою Вієта знайдемо:

$$p=-(x_1+x_2)=-(6+\sqrt{35}+6-\sqrt{35})=-12,$$
$$q=x_1\cdot x_2=(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})=36-35=1.$$

Отже, прикладом шуканого рівняння служить квадратне рівняння $x^2-12x+1=0$.

Приклад 2.9. Довести, що два квадратних рівняння

$$x^2+p_1x+q_1=0 \quad \text{і} \quad x^2+p_2x+q_2=0\ ,$$

дискримінанти яких невід'ємні, мають хоча б один спільний корінь тоді і тільки тоді, коли:

$$(q_2-q_1)^2=(p_2-p_1)(p_1q_2-q_1p_2).$$

Розв'язання. Нехай $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$, $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ і числа x_1, x_2 є коренями рівняння $f_1(x)=0$. Для того, щоб рівняння $f_1(x)=0$ та $f_2(x)=0$ мали хоча б один спільний корінь, необхідно і достатньо, щоб $f_2(x_1)\cdot f_2(x_2)=0$, тобто щоб

$$(x_1^2+p_2x_1+q_2)(x_2^2+p_2x_2+q_2)=0.$$

Подамо останню рівність у вигляді:

$$(x_1^2+p_1x_1+q_1+(p_2-p_1)x_1+q_2-q_1)(x_2^2+p_1x_2+q_1+(p_2-p_1)x_2+q_2-q_1)=0,$$

Оскільки $x_1^2+p_1x_1+q_1=0$ і $x_2^2+p_1x_2+q_1=0$, звідси маємо:

$$((p_2-p_1)x_1+(q_2-q_1))((p_2-p_1)x_2+(q_2-q_1))=0,$$

Тобто:

$$(p_2-p_1)^2x_1x_2+(q_2-q_1)(p_2-p_1)(x_1+x_2)+(q_2-q_1)^2=0.$$

За теоремою Вієта $x_1+x_2=-p_1$ і $x_1x_2=q_1$, тому:

$$(p_2-p_1)^2q_1-(q_2-q_1)(p_2-p_1)p_1+(q_2-q_1)^2=0,$$

або:

$$(q_2-q_1)^2=(p_2-p_1)((q_2-q_1)p_1-(p_2-p_1)q_1)=$$
$$=(p_2-p_1)(q_2p_1-q_1p_1-p_2q_1+p_1q_1)=(p_2-p_1)(q_2p_1-p_2q_1),$$

що і потрібно було довести.

Приклад 2.10. Знайти всі значення параметра a, для яких квадратні рівняння

$$(1-2a)x^2-6ax-1=0 \ \text{і}\ ax^2-x+1=0$$

мають принаймні один спільний дійсний корінь.

Розв'язання. Скористаємося результатом попереднього прикладу, в якому одержали необхідну і достатню умову існування щонайменше одного спільного кореня двох рівнянь. При $a \neq 0$ і $1-2a \neq 0$ повинно виконуватись співвідношення:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-2a}\right)^2=\left(-\frac{1}{a}+\frac{6a}{1-2a}\right)\left(-\frac{6a}{1-2a}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{1-2a}\cdot\frac{1}{a}\right),$$

яке після перетворення набуває вигляду:

$$(1-a)^2=-(6a^2+2a-1)(6a+1).$$

Розв'яжемо дане рівняння відносно a:

$$a(36a^2+19a-6)=0.$$

За умовою $a \neq 0$. Тому з рівності $36a^2+19a-6=0$ знаходимо $a_1=\frac{2}{9}$ і $a_2=-\frac{3}{4}$. Оскільки при $a=\frac{3}{4}$ дискримінанти обох рівнянь додатні, то спільний корінь буде $x=-2$. При $a=\frac{2}{9}$ дискримінанти обох рівнянь також додатні і спільний корінь при цьому буде $x=3$.

2.3. Тричленні рівняння

<u>Означення 2.3</u>. Рівняння виду

$$ax^{2n}+bx^n+c=0, \quad \textit{де } a \neq 0, \quad n \geq 2, \quad n \in N, \qquad \textit{(2.3)}$$

називається *<u>тричленним рівнянням</u>,* при $n=2$ тричленне рівняння (2.3) називається *<u>біквадратним</u>.*

Покладаючи $y=x^n$, рівняння (2.3) можна записати у вигляді $ay^2+by+c=0$. Якщо y_1 і y_2 – два різних дійсних кореня останнього рівняння, то рівняння (2.3) еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^n=y_1, \\ x^n=y_2. \end{array}\right.$$

Якщо $y_1=y_2$, то рівняння (2.3) еквівалентне рівнянню $x^n=y_1$. Якщо рівняння $ay^2+by+c=0$ має комплексні корені, то коренями рівняння (2.3) будуть також комплексні числа.

<u>Приклад 2.11.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^8-17x^4+16=0.$$

Розв'язання. Позначивши $x^4=y$, одержимо рівняння $y^2-17y+16=0$, звідки знайдемо $y_1=1$ і $y_2=16$. Таким чином, дане рівняння еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^4=1, \\ x^4=16, \end{array}\right.$$

розв'язуючи яку знаходимо $x^2=1$, $x^2=-1$, $x^2=4$ і $x^2=-4$, звідки $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm i$, $x_{5,6}=\pm 2$ і $x_{7,8}=\pm 2i.$

Зауваження 2.3.1: Рівняння більш загального вигляду:

$$a\left[f(x)\right]^2+b\left[f(x)\right]+c=0, \quad a\neq 0,$$

де $f(x)$ – задана функція від невідомої x, розв'язуються заміною $f(x)=y.$

Приклад 2.12. Розв'язати рівняння

$$(x-1)^{\frac{4}{3}}-10(x-1)^{\frac{2}{3}}+9=0.$$

Розв'язання. Позначивши $(x-1)^{\frac{2}{3}}=y$, одержимо рівняння $y^2-10y+9=0$, звідки $y_1=9$ і $y_2=1$. Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}(x-1)^{\frac{2}{3}}=9,\\ (x-1)^{\frac{2}{3}}=1.\end{array}\right.$$

З першого рівняння одержимо $(x-1)^2=9^3$, або $|x-1|=27$. Отже, коренями даного рівняння є числа $x_1=28$ і $x_2=-26.$ З другого рівняння одержимо $(x-1)^2=1^3$, або $|x-1|=1$. Коренями другого рівняння сукупності є числа $x_3=2$ і $x_4=0.$ Отже, рівняння має 4 корені: $x_1=28$, $x_2=-26$, $x_3=2$, $x_4=0.$

Приклад 2.13. *Р*озв'яжіть рівняння:

$$2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння у множині дійсних чисел. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$2(x^2-3x+6)+\sqrt{x^2-3x+6}-10=0$$

та зробимо заміну $y=\sqrt{x^2-3x+6}$ (очевидно, $y\geq 0$). Отримуємо рівняння відносно змінної y:

$$2y^2+y-10=0$$

розв'язавши яке, маємо:

$$y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2}.$$

Другий корінь не задовольняє умові $y\geq 0$, тому початкове рівняння рівносильне такому:

$$\sqrt{x^2-3x+6}=2,$$

розв'язавши яке, маємо:

$$x_1=2,\ x_2=1.$$

Приклад 2.14. *Р*озв'яжіть рівняння:

$$2x^2+3x\sqrt{x+1}=5(x+1).$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння у множині дійсних чисел. Перенесемо $5(x+1)$ у ліву частину і розділимо обидві частини рівняння на $x+1$ (легко бачити, що $x=-1$ не є розв'язком рівняння). Отримаємо:

$$2\frac{x^2}{x+1}+3\frac{x}{\sqrt{x+1}}-5=0.$$

Вводимо заміну $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Тоді маємо рівняння відносно y:

$$2y^2+3y-5=0,$$

Яке має корені $y_1=1,\ y_2=-\dfrac{5}{2}$. Зробимо зворотну заміну:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=1\\[2mm] \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$$

Розв'язуємо ці рівняння по черзі. З першого рівняння маємо:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Перевіркою виясняємо, що другий корінь є стороннім. Тому з першого рівняння маємо: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. З другого рівняння:

$$x_3=\frac{25+5\sqrt{41}}{8},\ x_4=\frac{25-5\sqrt{41}}{8}.$$

Перевіркою виясняємо, що корінь x_3 є стороннім. Отже, розв'язками рівняння будуть:

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\[2mm] x=\dfrac{25-5\sqrt{41}}{8}\end{array}\right..$$

2.4.Рівняння, що зводяться до лінійних, квадратних та тричленних рівнянь

Означення 2.4. Рівняння виду:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0,\ \text{де } a\neq 0, \qquad (2.4)$$

називається *симетричним рівнянням третього степеня.*

Зауваження 2.4.1. Оскільки:

$$ax^3+bx^2+bx+a=(x+1)(ax^2+(b-a)x+a),$$

то рівняння (2.4) рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ ax^2+(b-a)x+a=0. \end{array}\right.$$

<u>Приклад 2.15.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^3+6x^2+6x+1=0.$$

Розв'язання. Оскільки $x^3+6x^2+6x+1=(x+1)(x^2+5x+1)$, то вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2+5x+1=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо корені вихідного рівняння:

$$x_1=-1, \quad x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

<u>Означення 2.5.</u> Рівняння виду:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \qquad (2.5)$$

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0, \qquad (2.6)$$

де $a\neq 0$, називаються *<u>симетричними рівняннями четвертого степеня</u>.*

<u>Зауваження 2.4.2.</u> Поділивши обидві частини рівняння (2.5) на x^2 (очевидно, що $x=0$ не є його коренем), одержимо еквівалентне йому рівняння:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \qquad (2.7)$$

Аналогічно для рівняння (2.6) одержимо еквівалентне йому рівняння:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0. \qquad (2.8)$$

Для розв'язання рівнянь (2.7) і (2.8) позначимо відповідно $y=x+\dfrac{1}{x}$ і $z=x-\dfrac{1}{x}$. Оскільки:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \quad \text{і} \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2,$$

то одержуємо для рівнянь (2.7) та (2.8) відповідно:

$$a(y^2-2)+by+c=0, \qquad (2.9)$$

$$a(z^2+2)+bz+c=0. \qquad (2.10)$$

Таким чином, якщо y_1, y_2 – корені рівняння (2.9), а z_1, z_2 – корені рівняння (2.10), то вихідні рівняння (2.5) і (2.6) еквівалентні відповідно сукупностям рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=y_1, \\ x+\dfrac{1}{x}=y_2, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=z_1, \\ x-\dfrac{1}{x}=z_2. \end{array}\right.$$

<u>Приклад 2.16.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^4-9x^3+10x^2-9x+1=0.$$

Розв'язання. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то поділивши обидві частини на x^2, одержимо рівняння:

$$x^2-9x+10-9\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

Звідки:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0.$$

Поклавши $x+\dfrac{1}{x}=y$, одержимо рівняння $y^2-9y+8=0$. Звідси знаходимо $y_1=8$ і $y_2=1$. Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=8, \\ x+\dfrac{1}{x}=1, \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x+1=0, \\ x^2-x+1=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи ці рівняння у множині дійсних чисел, одержимо корені вихідного рівняння:

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{60}}{2}=4\pm\sqrt{15}.$$

Якби ми розв'язували вихідне рівняння у множині комплексних чисел, то розв'язки рівняння ми б записали так:

$$x_{1,2}=4\pm\sqrt{15} \quad \text{і} \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

<u>Приклад 2.17.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^4-3x^3-26x^2-3x+1=0.$$

Розв'язання. Використаємо спосіб, описаний у прикладі 2.16. Оскільки $x=0$ не є коренем рівняння, то розділимо x^2. Отримаємо:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-26=0 \text{ або } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-28=0.$$

Тоді, зробивши заміну $y=1+\dfrac{1}{x}$ і, розв'язавши рівняння $y^2-3\cdot y-28=0$, отримаємо: $y_1=7$, $y_1=-4$. Повернемося до змінної x:

$$\left[\begin{aligned} x+\frac{1}{x}=7 \\ x+\frac{1}{x}=-4 \end{aligned}\right., \text{ звідси } x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3},\ x_{3,4}=\frac{7\pm5\sqrt{5}}{2}.$$

Зауваження 2.4.3. Перед тим, як ділити обидві частини рівняння на x^2, ми перевірили, що $x=0$ не є коренем рівняння. Це необхідно робити, для того щоб уникнути втрати коренів: так, наприклад, поділивши обидві частини рівняння $\left(x^2-4x\right)^2=9\cdot x^2$ на x^2 і отримавши рівняння $(x-4)^2=9$, ми втрачаємо корінь $x=0$. І навпаки, при розв'язуванні сукупності рівнянь

$$\left[\begin{aligned} x+\frac{1}{x}=7 \\ x+\frac{1}{x}=-4 \end{aligned}\right.$$

ми помножимо обидві їх частини на x. Тут можуть з’явитися сторонні корені (порівняйте рівняння $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4+\frac{1}{x^2}$ та $\left(x^2-1\right)^2=4\cdot x^2+1$), тому необхідно добавити обмеження $x\neq 0$. Без нього перехід не буде рівносильним.

Приклад 2.18. Розв’язати рівняння:

$$(x^2+x+1)(x^2+x-4)=24.$$

Розв’язання. Поклавши $x^2+x=y$, одержимо $(y+1)(y-4)=24$, або $y^2-3y-28=0$, звідси $y_1=7$ і $y_2=-4$. Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} x^2+x=7, \\ x^2+x=-4. \end{aligned}\right.$$

У множині дійсних чисел коренями цих рівнянь, а отже, і вихідного рівняння, є числа:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2},$$

А у множині комплексних чисел до вказаних двох коренів вихідного рівняння добавляться комплексні корені другого рівняння сукупності:

$$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}.$$

Приклад 2.19. Розв’язати рівняння:

$$(3x^2+2x+1)\cdot(3x^2-3x+1)=6x^2.$$

Розв'язання. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то поділивши обидві його частини на x^2, одержимо рівняння

$$\left(3x+2+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(3x-3+\frac{1}{x}\right)=6.$$

Покладемо $3x+\frac{1}{x}=y$, отримаємо рівняння:

$$(y+2)\cdot(y-3)=6.$$

Розв'язками цього рівняння є числа $y_1=4,\ y_2=-3$. Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 3x+\dfrac{1}{x}=4, \\ 3x+\dfrac{1}{x}=-3. \end{array}\right.$$

Розв'язавши цю сукупність у множині дійсних чисел, отримаємо такі корені вихідного рівняння: $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{3}$, а при розв'язуванні рівняння у множині комплексних чисел будемо мати такі корені:

$$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{6}.$$

<u>Зауваження 2.4.4.</u> Рівняння виду:

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)=A,$$

де $a<b<c<d,\ b-a=d-c$, можна розв'язувати, користуючись заміною змінної:

$$y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4}=x-\frac{a+b+c+d}{4}.$$

<u>Приклад 2.20.</u> Розв'язати рівняння

$$(12x-1)\cdot(6x-1)\cdot(4x-1)\cdot(3x-1)=5.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\left(x-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3\cdot4\cdot6\cdot12}.$$

Так як $\frac{1}{12}<\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,то введемо нову змінну:

$$y=\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{1}{12}\right)+\left(x-\frac{1}{6}\right)+\left(x-\frac{1}{4}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]=x-\frac{5}{24}.$$

Підставляючи $x=y+\frac{5}{24}$ у вихідне рівняння, отримаємо:

$$\left(y+\frac{3}{24}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{24}\right)\cdot\left(y-\frac{1}{24}\right)\cdot\left(y-\frac{3}{24}\right)=\frac{5}{3\cdot4\cdot6\cdot12},$$

або $\left[y^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2\right]\cdot\left[y^2-\left(\frac{3}{24}\right)^2\right]=\frac{5}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 12}$.

Звідси знаходимо : $y^2=\frac{49}{24^2}$ і $y^2=-\frac{39}{24^2}$, тобто у множині дійсних чисел маємо розв'язки: $y_1=\frac{7}{24}$, $y_2=-\frac{7}{24}$. Відповідні корені вихідного рівняння дорівнюють $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{12}$.

Зауваження 2.4.5. Рівняння виду:

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)=A,$$

де $a<b<c<d$, $b-a=d-c$, можна розв'язати по іншому, перемноживши першу дужку з четвертою, а другу − з третьою, вводячи при цьому відповідну заміну. Розглянемо це на іншому прикладі.

Приклад 2.21. Розв'язати рівняння:

$$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)=120.$$

Розв'язання. Групуючи в лівій частині перший множник з останнім, а другий − з третім, отримаємо рівняння:

$$(x^2+5\cdot x+4)\cdot(x^2+5\cdot x+6)=120.$$

Позначивши $y=x^2+5\cdot x+5$, отримаємо рівняння відносно змінної y:

$(y-1)\cdot(y+1)=120$ або $y^2=121$, звідси $y_1=11$, $y_2=-11$.

Зробимо зворотну заміну і розв'яжемо вихідне рівняння у множині дійсних чисел:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5\cdot x+5=11 \\ x^2+5\cdot x+5=-11 \end{array}\right.$$

Перше рівняння має корені $x_1=-6$, $x_2=1$, а друге рівняння сукупності дійсних коренів не має.

Зауваження 2.4.6. Рівняння виду:

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)=Ax^2,$$

де $a<b<c<d$, $ad=bc$, зводиться до розв'язання сукупності двох квадратних рівнянь за допомогою заміни $y=x+\frac{ad}{x}$.

Приклад 2.22. Розв'язати рівняння:

$$(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+12)=7x^2.$$

Розв'язання .Відмітимо, що $(-1)\cdot(-12)=(-3)\cdot(-4)$. Перемноживши в лівій частині рівняння першу і четверту дужки, а також другу і третю, отримаємо:

$$(x^2+13x+12)\cdot(x^2+7x+12)=7x^2.$$

Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, поділимо обидві його частини на x^2. Отримаємо рівняння:

$$(x+13+\frac{12}{x})\cdot(x+7+\frac{12}{x})=7,$$

рівносильне вихідному. Зробимо заміну змінної $x+\frac{12}{x}=y.$ Тоді отримаємо рівняння $(y+13)\cdot(y+7)=7$ або $y^2+20y+84=0,$ звідси $y_1=-14, y_2=-6.$ Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{12}{x}=-14 \\ x+\frac{12}{x}=-6 \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} x^2+14x+12=0, \\ x^2+6x+12=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи сукупність, отримуємо відповідь вихідного рівняння:

$$x_{1,2}=-7\pm\sqrt{37}.$$

Зауваження 2.4.7. Рівняння виду:

$$(x-a)^4+(x-b)^4=A$$

можна розв'язати, виконуючи заміну $y=x-\frac{a+b}{2}.$

Приклад 2.23. Розв'язати рівняння:

$$(x-1)^4+(x+3)^4=82.$$

Розв'язання. Дане рівняння після заміни змінної $y=\frac{x-1+x+3}{2}=x+1$ зводиться до вигляду:

$$(y-2)^4+(y+2)^4=82,$$

або після використання формули:

$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$$

та спрощення лівої частини рівняння маємо:

$$y^4+24y^2-25=0.$$

Провівши заміну змінної $t=y^2$ і розв'язавши рівняння відносно змінної t, отримаємо $t_1=1,\ t_2=-25$. Зробивши обернену заміну, розв'язавши сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} y^2=1 \\ y^2=-25 \end{array}\right.$$

та перейшовши до змінної x, маємо такі розв'язки вихідного рівняння у множині дійсних чисел: $x_1=0,\ x_2=-2$. При знаходженні розв'язків рівняння у множині комплексних чисел мали б такий результат:

$$x_1=0,\ x_2=-2,\ x_{3,4}=-1\pm 5i.$$

Вправи до § 2

2.1. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $3+\sqrt{2}$.

Розв'язання. Нехай $x^2+px+q=0$, $p,q \in Q$, $x_1=3+\sqrt{2}$, $x_2=3-\sqrt{2}$, за теоремою Вієта: $p=-(x_1+x_2)=-6$, $q=x_1\cdot x_2=7$. Тоді шукане рівняння $x^2-6x+7=0$.

2.2. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $5-\sqrt{5}$.

Відповідь: $x^2-10x+20=0$.

2.3. Розв'язати рівняння: $x^8-85x^4+324=0.$

Розв'язання. Позначимо $x^4=y$, одержимо рівняння $y^2-85y+324=0 \Leftrightarrow (y-4)(y-81)=0$, звідки $y_1=4$ і $y_2=81$. Маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^4=4, \\ x^4=81, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x^2-2\right)\cdot\left(x^2+2\right)=0, \\ \left(x^2-9\right)\cdot\left(x^2+9\right)=0, \end{array}\right.$$

звідки $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\,i$, $x_{5,6}=\pm3$ і $x_{7,8}=\pm3i.$

2.4. Розв'язати рівняння: $x^4+37x^2+36=0.$

Відповідь: $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=\pm6i$.

2.5. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^2-6\sqrt{x^2+7}+15=0.$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+7}=y$, тоді вихідне рівняння $\left(x^2+7\right)-6\sqrt{x^2+7}+8=0$ перетворюється на рівняння виду $y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow (y-2)(y-4)=0$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+7}=2, \\ \sqrt{x^2+7}=4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-3, \\ x^2=9, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm\sqrt{3}\,i, \\ x_{3,4}=\pm3. \end{array}\right.$$

Відповідь: дійсні розв'язки рівняння $x=\pm3$.

2.6. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^3-4\sqrt{x^3+1}+4=0.$

Вказівка. Виконайте заміну: $y=\sqrt{x^3+1}$. Порівняйте рівняння, отримане після спрощення: $y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow (y-1)(y-3)=0.$

Відповідь: $x_1=0, x_2=2.$

2.7. Розв'язати рівняння $x-4\sqrt{x+5}+8=0$ у множині дійсних чисел:

Вказівка. Виконайте заміну: $y=\sqrt{x+5}$.

Відповідь: $x_{1,2}=\pm4.$

2.8. Розв'язати рівняння $x^2+x+6-4\sqrt{x^2+x+2}=0$ у множині дійсних чисел:

Вказівка. Виконайте заміну: $y=x^2+x+2$.

Відповідь: $x_1 = -2, x_2 = 1.$

2.9. Розв'язати рівняння $(x+1)(x+2)(x+6)(x+7) = 24.$

Розв'язання. Згрупуємо множники

$\big((x+1)\cdot(x+7)\big)\cdot\big((x+2)\cdot(x+6)\big) = 24 \Leftrightarrow (x^2+8x+7)\cdot(x^2+8x+12) = 24$.

Виконаємо заміну: $x^2+8x = y;$ отримаємо:

$(y+7)\cdot(y+12) = 24 \Leftrightarrow y^2+19y+60 = 0 \Leftrightarrow (y+15)\cdot(y+4) = 0$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x=-15, \\ x^2+8x=-4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)\cdot(x+5)=0, \\ (x+4)^2=12, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=-3, \\ x_3=-4-2\sqrt{3}, \\ x_4=-4+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \left\{-4-2\sqrt{3},\ -5, -3,\ -4+2\sqrt{3}\right\}.$

2.10. Розв'язати рівняння: $(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-6) = 4.$

Вказівка. Згрупуйте множники: $(x-2)\cdot(x-6)$ та $(x-3)\cdot(x-5)$.

Відповідь: $x \in \left\{4-\sqrt{5},\ 4,\ 4+\sqrt{5}\right\},$ $x = 4$ є двократним коренем.

2.11. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot(x-12) = 6x^2$.

Розв'язання. Згрупуємо множники

$\big((x-1)\cdot(x-12)\big)\cdot\big((x-2)\cdot(x-6)\big) = 6x^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x^2+12-13x)\cdot(x^2+12-8x) = 6x^2$.

Оскільки $x = 0$ не є коренем, тому

$(x^2+12-13x)\cdot(x^2+12-8x) = 6x^2 \Leftrightarrow \left(\left(x+\dfrac{12}{x}\right)-13\right)\cdot\left(\left(x+\dfrac{12}{x}\right)-8\right) = 6$.

Виконаємо заміну: $\left(x+\dfrac{12}{x}\right) = y$, отримаємо:

$(y-13)\cdot(y-8) = 6 \Leftrightarrow y^2-21y+98 = 0 \Leftrightarrow (y-7)\cdot(y-14) = 0$, а тоді

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{12}{x}=7, \\ x+\dfrac{12}{x}=14, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+12=0, \\ x^2-14x+12=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)\cdot(x-4)=0, \\ (x-7)^2=37, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=4, \\ x_3=7-\sqrt{37}, \\ x_4=7+\sqrt{37}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \left\{7-\sqrt{37},\ 3,\ 4,\ 7+\sqrt{37}\right\}.$

2.12. Розв'язати рівняння: $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x-4) = 10x^2$.

Вказівка. Згрупуйте множники: $(x-1)\cdot(x-4)$ та $(x+2)\cdot(x+2)$ і виконайте заміну: $\left(x+\dfrac{4}{x}\right) = y$.

Відповідь: $x \in \left\{-4;\ -1;\ 3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}\right\}.$

2.13. Знайти принаймні один многочлен $f(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ з раціональними коефіцієнтами a,b,c,d, щоб число $\sqrt[4]{2}-3\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}$ було коренем рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Розв'язання. Нехай $x = \sqrt[4]{2} - 3\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}$, тоді $\left(x + 3\sqrt[4]{4}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}\right)^2$, $x^2 + 6\sqrt{2}\,x + 18 = \sqrt{2} + 4 + \sqrt{8}$, звідки $x^2 + 14 = 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\,x$, або $x^2 + 14 = (3 - 6x)\sqrt{2}$; піднесемо до квадрата, отримаємо: $x^4 + 28x^2 + 196 = 72x^2 - 72x + 18$, звідки $x^4 - 44x^2 + 72x + 178 = 0$.

2.14. Розв'язати рівняння: $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0.$

Вказівка. Поділіть на x^2, виконайте заміну: $y = x + \dfrac{1}{x}$. Порівняйте рівняння, отримане після спрощення: $y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y-5) = 0.$

Відповідь: $x_{1,2} = 1$ і $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

2.15. Розв'язати рівняння: $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$ і $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

2.16. Розв'язати рівняння: $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 6) = 20$.

Вказівка. Виконайте заміну: $y = x^2 + 2x$. Порівняйте рівняння, отримане після спрощення: $y^2 - 4y - 32 = 0 \Leftrightarrow (y-8)(y+4) = 0.$

Відповідь: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ і $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$.

2.17. Розв'язати рівняння: $(x^2 + 8x - 7)(x^2 + 8x - 2) = 14$.

Відповідь: $x_1 = -9$, $x_2 = -8$, $x_3 = 0$ і $x_4 = 1$.

2.18. Розв'язати рівняння: $(x-4)^4 + (x+2)^4 = 626$ у множині дійсних чисел.

Вказівка. Виконайте заміну: $y = x + 1$. Порівняйте рівняння, отримане після спрощення: $(y-3)^4 + (y+3)^4 = 626 \Leftrightarrow y^4 + 54y^2 - 232 = 0.$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

2.19. Розв'язати рівняння: $(x-6)^4 + (x-4)^4 = 272$ у множині дійсних чисел.

Вказівка. Виконайте заміну: $y = x - 5$. Порівняйте рівняння, отримане після спрощення: $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 272 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 135 = 0.$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

2.20. Розв'язати рівняння у множині дійсних чисел $(24x-1)\cdot(12x-1)\cdot(6x-1)\cdot(2x-1) = 105.$

Відповідь: $x_1 = -\dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

2.21. Розв'язати рівняння у множині дійсних чисел $(24x-3)\cdot(8x-3)\cdot(6x-3)\cdot(4x-3) + 9 = 0.$

Відповідь: $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{17}}{16}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $x_3 = \dfrac{5}{8}$, $x_4 = \dfrac{7+\sqrt{17}}{16}$.

2.22. Розв'язати рівняння $2x + 5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{2x^2+5x+4} = \text{-}2$.

Вказівка. Виконайте заміну: $y = \dfrac{x}{2x^2+5x+4}$.

Відповідь: $x_{1,2} = -2,\ x_{3,4} = -1$.

2.23. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2+5x+4}{x+1} + \dfrac{2(x+1)}{x^2+5x+4} = 3$.

Вказівка. Розкладіть чисельник на множники, спростіть вираз $\dfrac{x^2+5x+4}{x+1}$ та отримайте квадратне рівняння.

Відповідь: $x_1 = -3,\ x_2 = -2$.

2.24. Розв'язати рівняння $\dfrac{3x^2-4x+2}{x-2} + \dfrac{4(x-2)}{3x^2-4x+2} + 5 = 0$.

Вказівка. Виконайте заміну: $y = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-2}$.

Відповідь: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$.

2.25. Розв'язати рівняння: $2x^2 + \dfrac{2}{x^2} - 3x - \dfrac{3}{x} - 16 = 0$.

Вказівка. Виконайте заміну $y = x + \dfrac{1}{x}$, тоді $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Відповідь: $x_1 = -2,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}, x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

2.26. Розв'язати рівняння: $9\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 92 = 0$.

Відповідь: $x_1 = -3,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}, x_{3,4} = \dfrac{11 \pm \sqrt{85}}{6}$.

2.27. Вказати максимальне значення суми $x + \dfrac{1}{x}$, якщо x є дійсним коренем рівняння: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 4 = 0$. Вказати значення коренів.

Розв'язання. Покладемо $y = x + \dfrac{1}{x}$, $y^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$, і

$\left(y^2 - 2\right) + 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y+1) = 0$, а тоді $\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = -2 \\ x + \dfrac{1}{x} = -1 \end{array}\right.$. Аналізуючи умову, помічаємо, що x має бути дійсним коренем рівняння. Розв'язуючи кожне із рівнянь, отримуємо, що друге рівняння дійсних коренів не має, а перше – має. Тому найбільшу суму маємо: $x+\frac{1}{x}=-2$, корені $x_{1,2}=-1$.

Відповідь: $x+\frac{1}{x}=-2$, $x_{1,2}=-1$.

§3. Розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих степенів

3.1.Корені многочленів

Сформулюємо без доведення основну теорему алгебри.

<u>**Теорема 3.1.**</u> ***Алгебраїчне рівняння n-го степеня:***

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

має рівно n комплексних коренів, якщо $a_0 \neq 0$.

Для знаходження цих коренів використовують розклад лівої частини даного рівняння на множники. Для цього застосовують операцію ділення многочлена на многочлен або двочлен. Всю інформацію про ділення многочленів ви можете взяти з посібника «Многочлени» (автори Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк). Це стосується ділення многочленів у стовпчик та ділення з використанням схеми Горнера. Розглянемо ще один спосіб ділення многочленів, який називається <u>*методом невизначених коефіцієнтів*</u>.

Нагадаємо з посібника «Многочлени» таку інформацію: якщо многочлен $P_n(x)$ ділиться з остачею на многочлен $Q_m(x)$, то існує єдина пара многочленів $S_l(x)$ і $R_k(x)$ таких, що:

$$P_n(x) = Q_m(x)S_l(x) + R_k(x),$$

причому $l = n - m,\ 0 \leq k < m,$ многочлен $S_l(x)$ називається часткою, а многочлен $R_k(x)$ – остачею. Якщо остача дорівнює нулю, то кажуть, що многочлен $P_n(x)$ націло ділиться на многочлен $Q_m(x)$.

Цілу частину та остачу можна знайти *методом невизначених коефіцієнтів.* Нехай задані многочлени:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

n - го степеня і:

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

m – го степеня $(m \leq n)$. Візьмемо частку:

$$S_{n-m} = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}$$

і остачу:

$$R_k(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1},$$

де $0 \leq k \leq m-1,$ числа $c_1, c_2, \ldots c_{n-m}$ і $d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ невизначені. Напишемо тотожну рівність:

$$P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x). \qquad (3.1)$$

Перемноживши многочлени $Q_m(x)$ і $S_{n-m}(x)$ та звівши подібні, в правій частині рівності (3.1) отримаємо многочлен *n*–го степеня *.* Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x цього многочлена і многочлена

$P_n(x)$, отримаємо систему з n рівнянь, розв'язавши яку, знайдемо числа $c_1, c_2, ... c_{n-m}$ і $d_0, d_1, ..., d_{m-1}$.

Приклад 3.1. Поділити многочлен $2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ на многочлен $x^2 - x$.

Розв'язання. Знайдемо частку від ділення многочленів у вигляді многочлена $S_2(x) = 2x^2 + c_1 x + c_2$, а остачу у вигляді многочлена $R_1(x) = d_0 x + d_1$. Маємо тотожність:

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = (x^2 - x) \cdot (2x^2 + c_1 x + c_2) + d_0 x + d_1.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні, маємо:

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = 2x^4 + (c_1 - 2) \cdot x^3 + (-c_1 + c_2) \cdot x^2 + (d_0 - c_2) \cdot x + d_1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, маємо систему:

$$\begin{cases} c_1 - 2 = 1, \\ c_2 - c_1 = -5, \\ d_0 - c_2 = -1, \\ d_1 = 1, \end{cases}$$

звідки $c_1 = 3,\ c_2 = -2,\ d_0 = -3,\ d_1 = 1.$ Отже:

$$Q_2(x) = 2x^2 + 3x - 2,\ R_1(x) = -3x + 1,$$

тобто:

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = (x^2 - x) \cdot (2x^2 + 3x - 2) - 3x + 1.$$

Нагадаємо ще деякі теоретичні твердження, якими ми будемо у подальшому викладі користуватися, але зміст яких було повністю висвітлено у посібнику «Многочлени». Саме тому тут ми подамо лише їх формулювання. Наступна теорема дозволяє знайти остачу від ділення многочлена на двочлен, не знаходячи частки.

Теорема 3.2 (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює значенню многочлена $P_n(x)$ при $x = \alpha$, тобто $P_n(\alpha)$.

Під час розв'язування алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами використовується така теорема.

Теорема 3.3. Для того, щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ був коренем рівняння:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0, \text{ де } a_0 \neq 0, \qquad (3.2)$$

з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб число p було дільником вільного члена a_n, а число q – дільником старшого коефіцієнта a_0.

<u>Наслідок 3.1.</u> Якщо рівняння (3.2) має цілі коефіцієнти, а старший коефіцієнт дорівнює одиниці (тобто $a_0 = 1$), то раціональними коренями цього рівняння можуть бути тільки цілі числа, які є дільниками вільного члена a_n.

3.2. Метод пониження степеня

Під час розв'язання алгебраїчних рівнянь типу:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0\ , \quad a_0 \neq 0, \qquad (3.3)$$

можна використовувати <u>*метод пониження степеня рівняння*</u>, який ґрунтується на теоремі Безу і діленні многочлена $P(x)$ на двочлен $x - \alpha$, де α – корінь рівняння $P(x) = 0$. Суть цього методу пояснимо на прикладах.

<u>Приклад 3.2.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти даного рівняння – цілі числа, то спробуємо знайти хоча б один цілий корінь. Використаємо наслідок 3.1 із теореми 3.3. Дільниками вільного члена є числа *1, -1, 5, -5*. Знайдемо значення многочлена $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$ в цих точках:

$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0;$$

$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0;$$

$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0;$$

$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Многочлен $P_4(x)$ має цілий корінь $x_1 = 1$, а числа 5, -5, -1 не є його коренями. Згідно теореми Безу, можна стверджувати, що знайдеться многочлен $P_3(x)$ такий, що:

$$P_4(x) = (x - 1) \cdot P_3(x),$$

де $P_3(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ – деякий многочлен третього степеня. Коефіцієнти a_0, a_1, a_2, a_3 цього многочлена можна знайти, використовуючи, наприклад, метод невизначених коефіцієнтів. Отримаємо:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1) \cdot \left(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3\right),$$

або:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = a_0 x^4 + \left(a_1 - 1\right) \cdot x^3 + \left(a_2 - a_1\right) \cdot x^2 + \left(a_3 - a_2\right) \cdot x - a_3.$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 - 1 = 2 \\ a_2 - a_1 = -2 \\ a_3 - a_2 = -6 \\ a_3 = -5 \end{cases}$$

Звідси ми маємо:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x-1)\cdot\left(x^3 + 3x^2 + x - 5\right).$$

Знайдемо корені рівняння:

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0.$$

Дільниками його вільного члена є числа 1, -1, 5, -5. Немає необхідності шукати значення многочлена в точках -1, 5, -5, так як ці числа не є коренями рівняння $P_4(x) = 0$, а отже, і рівняння $P_3(x) = 0$. Тому перевіримо тільки число 1 – маємо $P_3(1) = 0$. Поділивши аналогічно до попереднього випадку многочлен $P_3(x)$ на $x - 1$ (можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів, або ділення в стовпчик, або схему Горнера), отримаємо:

$$P_3(x) = (x-1)\cdot\left(x^2 + 4x + 5\right).$$

Квадратне рівняння $x^2 + 4x + 5 = 0$ розв’язків у множині дійсних чисел не має, тому вихідне рівняння має двократний корінь $x = 1$.

3.3. Симетричні рівняння

Метод пониження степеня алгебраїчного рівняння застосовується для розв’язування симетричних рівнянь.

<u>Означення 3.1.</u> Алгебраїчне рівняння n-го степеня називається *<u>симетричним</u>*, якщо у нього рівні коефіцієнти при x^k і x^{n-k}, тобто воно має вигляд:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ , де } a_0 \neq 0$$

<u>Зауваження 3.3.1.</u> Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $x = -1$ є коренем симетричного рівняння непарного степеня. Поділивши симетричне рівняння непарного степеня на $x + 1$, ми отримаємо симетричне рівняння парного степеня.

<u>Зауваження 3.3.2.</u> Симетричні рівняння парного степеня заміною $y = x + \dfrac{1}{x}$ зводяться до рівнянь у два рази меншого порядку.

Перевіримо висловлені зауваження. Розглянемо симетричні рівняння третього степеня і п’ятого степеня, тобто рівняння виду:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{3.4}$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{3.5}$$

Оскільки $x=-1$ є коренем цих рівнянь, то рівняння (3.4) і (3.5) рівносильні відповідно рівнянням

$$\left(x+1\right)\cdot\left(ax^2+\left(b-a\right)\cdot x+a\right)=0 \qquad (3.6)$$

$$\left(x+1\right)\cdot\left(ax^4+\left(b-a\right)\cdot x^3+\left(a-b+c\right)\cdot x^2+\left(b-a\right)\cdot x+a\right)=0 \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.6) рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ ax^2+(b-a)x+a=0, \end{array}\right.$$

а рівняння (3.7) – сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a=0\ , \end{array}\right. \qquad (3.8)$$

В сукупності (3.8) друге рівняння є симетричним рівнянням четвертого степеня, яке після заміни $y=x+\frac{1}{x}$ або $y=x-\frac{1}{x}$ зводиться до розв'язання квадратних рівнянь.

Приклад 3.3. Розв'язати рівняння:

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0\cdot$$

Розв'язання. Дане рівняння має корінь $x_1=-1$,так як це – симетричне рівняння непарного степеня. Розклавши ліву частину на множники за формулою (3.7), отримаємо:

$$(x+1)\ (2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на x^2 (так як $x=0$ не є коренем), отримаємо:

$$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0 \text{ або } 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0$$

Після заміни $x+\frac{1}{x}=y,$ отримаємо рівняння $2y^2+3y-20=0,$ коренями якого є числа $y_1=-4$ і $y_2=\frac{5}{2.}$. Таким чином, ми отримали сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-4, \\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+1=0, \\ 2x^2-5x+2=0. \end{array}\right. \qquad (3.9)$$

Розв'язуючи рівняння (3.9), знайдемо корені: $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$. Таким чином, коренями вихідного рівняння будуть числа $1, -2 \pm \sqrt{3}, 2, \frac{1}{2}$.

3.4. Зворотні рівняння

<u>Означення 3.2.</u> Рівняння виду

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+...+a_nx^{n+1}+\lambda a_nx^n+\lambda^3a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0\lambda^{2n+1}=0, \quad (3.10)$$

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+...+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+\lambda^2a_{n-2}x^{n-2}+...+\lambda^na_0=0, \quad (3.11)$$

де $a_0 \neq 0$ і λ – деяке число, відмінне від нуля, називаються *<u>зворотними алгебраїчними рівняннями</u>*.

При $\lambda = 1$ рівняння (3.10) і (3.11) є симетричними рівняннями. Наприклад, рівняння:

$$2x^5+6x^4-2x^3+4x^2-48x-64=0$$

є зворотним $(\lambda = -2)$, і рівняння:

$$4x^6+5x^5-3x^4+10x^3-9x^2+45x+108=0$$

є зворотним $(\lambda = 3)$.

<u>Зауваження 3.4.1.</u> Зворотне рівняння непарного степеня завжди має корінь $x = -\lambda$, так як рівняння можна переписати у вигляді:

$$a_0(x^{2n+1}+\lambda^{2n+1})+a_1x(x^{2n-1}+\lambda^{2n-1})+...+a_nx^n(x+\lambda)=0,$$

і при $x = -\lambda$, кожний вираз в дужках лівої частини цього рівняння перетворюється в нуль.

Виділивши в лівій частині рівняння (3.10) множник $x + \lambda$, отримуємо, що рівняння (3.10) рівносильне сукупності, яка складається із рівняння $x = -\lambda$ і зворотного рівняння парного степеня.

Розв'язання зворотного рівняння парного степеня проілюструємо на наступному прикладі.

<u>Приклад 3.4.</u> Розв'язати рівняння:

$$2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+32=0.$$

Розв'язання. Це зворотне рівняння восьмого степеня, у якого $\lambda = 2$, так як його можна переписати у вигляді:

$$2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-33\cdot 2x^3+20\cdot 2^2x^2-9\cdot 2^3x+2\cdot 2^4=0.$$

Поділивши обидві частини рівняння на x^4 ($x = 0$ не є його коренем) і згрупувавши члени, отримаємо рівняння, еквівалентне даному:

$$2\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)+20\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-33\left(x+\frac{2}{x}\right)+46=0$$

Покладемо $y=x+\frac{\lambda}{x}=x+\frac{2}{x}$. Тоді:

$$x^2+\frac{4}{x^2}=y^2-4,\ x^3+\frac{8}{x^3}=y^3-6y,\ x^4+\frac{16}{x^4}=y^4-8y^2+8,$$

і вихідне рівняння набуває вигляду:

$$2y^4-9y^3+4y^2+21y-18=0.$$

Використовуючи метод відшукання раціонального кореня та метод пониження степеня (див. п. 3.1 та п. 3.2), отримаємо корені цього рівняння: $y_1=1,\ y_2=2,\ y_3=3,\ y_4=-\frac{3}{2}$.

Таким чином, дане рівняння рівносильне сукупності, яка складається із чотирьох рівнянь:

$$x+\frac{2}{x}=1,\quad x+\frac{2}{x}=2,\quad x+\frac{2}{x}=3,\quad x+\frac{2}{x}=-\frac{3}{2}.$$

Розв'язуючи цю сукупність, знайдемо корені вихідного рівняння (зробимо це у множині комплексних чисел):

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2},\quad x_{3,4}=1\pm i,\quad x_5=1,\quad x_6=2,\quad x_{7,8}=\frac{-3+i\sqrt{23}}{4}.$$

Спробуйте визначити, які з цих коренів слід вказати як розв'язки вихідного рівняння у множині дійсних чисел?

3.5. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо ліву частину алгебраїчного рівняння можна розкласти на множники, то розв'язання рівняння зводиться до розв'язання сукупності алгебраїчних рівнянь менших степенів. Для того, щоб розкласти ліву частину рівняння на множники, іноді застосовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння

$$x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$$

Розв'язання. Ліва частина рівняння є многочленом четвертого степеня. Цей многочлен розкладається у добуток двох квадратних многочленів: x^2+px+q і x^2+bx+c. Задача полягає в тому, щоб знайти коефіцієнти p,q,b,c. Маємо:

$$x^4-4x^3-x^2+16x-12=\left(x^2+px+q\right)\cdot\left(x^2+bx+c\right).$$

Многочлени, що стоять в лівій і правій частинах цієї рівності тотожно рівні. Прирівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p+b=-4, \\ c+q+pb=-1, \\ pc+qb=16, \\ qc=-12. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Спробуємо знайти деякий цілочисельний розв'язок цієї системи. З останнього рівняння системи випливає, що для q (як і для c) можливі наступні цілі значення: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Нехай $q=1,\ c=-12$. В цьому випадку друге і третє рівняння в (3.12) дають систему:

$$\begin{cases} pb=10, \\ -12p+b=16, \end{cases}$$

звідки для b отримуємо квадратне рівняння, яке не має цілих коренів. Тому цілочисельних розв'язків при $q=1,\ c=-12$ система (3.12) не має. Нехай $q=-2,\ c=6$. В цьому випадку друге і третє рівняння в (3.12) дають систему:

$$\begin{cases} pb=-5, \\ 6p-2b=16, \end{cases}$$

Виключаючи b, одержимо для p рівняння:

$$3p^2-8p+5=0,$$

яке має цілий корінь $p=1$, тоді $b=-5$. Перше рівняння системи (3.12) також задовольняють значення $p=1$ и $b=-5$. Отже маємо

$$x^4-4x^3-x^2+16x-12=\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2-5x+6\right)$$

Таким чином, задане рівняння еквівалентне сукупності квадратних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0, \\ x^2-5x+6=0, \end{array}\right.$$

розв'язуючи яку, знаходимо числа $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$, які є коренями вихідного рівняння.

Розглянемо на прикладах інші методи розкладання на множники многочлена, який стоїть в лівій частині алгебраїчного рівняння.

Приклад 3.6. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2-3x+1\right)^2+3(x-1)\cdot\left(x^2-3x+1\right)-4(x-1)^2=0 \qquad (3.13)$$

Розв'язання. Ліва частина даного рівняння є квадратним тричленом відносно виразу x^2-3x+1. Позначимо його через y і розглянемо вираз $y^2+3(x-1)y-4(x-1)^2$. Оскільки:

$$y^2+3(x-1)y-4(x-1)^2=(y-x+1)\cdot(y+4x-4),$$

то рівняння (3.13) рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} y-x+1=0, \\ y+4x-4=0, \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=0, \\ x^2+x-3=0. \end{array}\right.$$

Знайдемо корені кожного рівняння, а відповідно, і вихідного рівняння. З першого рівняння маємо $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$, а з другого рівняння – $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Дане рівняння можна розв'язати іншим способом, розділивши все рівняння на $(x-1)^2$, так як є очевидним, що $x=1$ не є коренем вихідного рівняння. Маємо:

$$\left(\frac{x^2-3x+1}{x-1}\right)^2+3\cdot\left(\frac{x^2-3x+1}{x-1}\right)-4=0$$

Введемо заміну $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$. Тоді рівняння $y^2+3x-4=0$ має корені $y_1=-4,\ y_2=1$. Робимо зворотну заміну і розв'язуємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=-4 \\ \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=1 \end{array}\right..$$

З першого рівняння аналогічно до першого способу розв'язування маємо $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, а з другого рівняння – $x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}$.

Приклад 3.7. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння:

$$\left(1+a^2\right)\cdot x^2+2(x-a)\cdot(1+ax)+1=0 \qquad (3.14)$$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники. Для цього розкриємо всі дужки та згрупуємо. Маємо:

$$\left(1+a^2\right)\cdot x^2+2(x-a)\cdot(1+ax)+1=x^2+x^2\cdot a^2+2x+2ax^2-2a-2a^2x+1=$$
$$=x^2\cdot(1+a)^2+2\cdot(1+a)\cdot(1-a)\cdot x+(1-a)^2+\left(1-2a-(1-a)^2\right)=$$
$$=\left(x(1+a)+(1-a)\right)^2-a^2=\left(x(1+a)+1-2a\right)\cdot\left(x(1+a)+1\right).$$

Звідси, рівняння (3.14) рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x(a+1)-2a+1=0, \\ x(a+1)+1=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи цю сукупність, знаходимо: при $a=-1$ рівняння (3.14) не має коренів; при $a\neq-1$ числа $x_1=\dfrac{2a-1}{a+1}$ та $x_2=\dfrac{-1}{a+1}$ є коренями рівняння (3.14).

3.6. Однорідні рівняння

Означення 3.3. Рівняння виду:

$$a_0 p^n(x) + a_1 p^{n-1}(x)\cdot q(x) + ... + a_{n-1} p(x)\cdot q^{n-1}(x) + a_n q^n(x) = 0$$

де $n>1$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $p(x)$ і $q(x)$ – деякі функції, називається *однорідним рівнянням*.

Зауваження 3.6.1. Розв'язання такого рівняння зводиться до розв'язання сукупності, що складається із системи:

$$\begin{cases} p(x) = 0, \\ q(x) = 0, \end{cases}$$

та рівнянь $p(x)=y_1\, q(x)$, $p(x)=y_2\, q(x), ..., p(x)= y_n\, q(x)$, де $y_1, y_2\ ..., y_n$ – всі корені рівняння:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_{n-1} y + a_n = 0.$$

Так, рівняння з прикладу 3.6 є однорідним, причому:

$$p(x) = x^2 - 3x + 1,\ q(x) = x - 1$$

І другий спосіб його розв'язування повністю ілюструє висловлене зауваження.

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння:

$$2\cdot\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 7\cdot(x-1)^2 = 13\cdot\left(x^3 - 1\right) \qquad (3.15)$$

Розв'язання. Розкриємо справа різницю кубів та запишемо рівняння у вигляді:

$$2\cdot\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 13\cdot(x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right) - 7\cdot(x-1)^2 = 0$$

Дане рівняння є однорідним відносно двох многочленів:

$$p(x) = x^2 + x + 1,\ q(x) = x - 1.$$

Поділивши обидві частини рівняння на $(x-1)$ (очевидно, що $x=1$ не є коренем рівняння (3.15)) , отримаємо рівносильне рівняння:

$$2\cdot\left(\frac{x^2 + x + 1}{x-1}\right)^2 - 13\cdot\left(\frac{x^2 + x + 1}{x-1}\right) - 7 = 0.$$

Поклавши $y = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x-1}\right)$ та розв'язавши рівняння $2y^2 - 13y - 7 = 0$, знайдемо: $y_1 = 7,\ y_2 = -\frac{1}{2}$. Таким чином, рівняння (3.15) рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x^2 + x + 1}{x-1} = 7 \\ &\frac{x^2 + x + 1}{x-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right..$$

З першого рівняння у множині дійсних чисел маємо:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \text{, або } x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

З другого:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \text{, або } x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = -1.$$

Отже, маємо розв’язки рівняння: $x \in \left\{2;\ 4;\ -\frac{1}{2};\ -1\right\}$.

3.7. Метод заміни змінних

Часто при розв’язуванні рівнянь чи нерівностей виявляється зручним зробити заміну та перейти до нової заміни, відносно якої рівняння буде мати більш простий вигляд. В багатьох задачах правильно підібрана заміна може суттєво спростити розв’язання.

Розв'язання рівняння за допомогою заміни змінної здійснюється наступним чином. Припустимо, маємо рівняння виду $g(f(x)) = 0$, де $f(x)$ – деяка функція (усе сформульоване нижче може відноситися і до нерівностей – це ми детально розглянемо у наступних параграфах). Зробивши заміну $f(x) = y$, отримаємо нове рівняння, вже відносно змінної y:

$$g(y) = 0.$$

Заміну, по можливості, потрібно підбирати таким чином, щоб отримане рівняння відносно y досить легко розв’язувалось. Припустимо, нам це вдалося, і: $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ – корені рівняння $g(y) = 0$. Тепер, повертаючись до змінної x, розв'язуємо рівняння $f(x) = y_1$, $f(x) = y_2$, …, $f(x) = y_n$. Розв’язок початкового рівняння складається з розв’язків всіх цих рівнянь. Відмітимо, що якщо рівняння $g(y) = 0$ не має розв'язків, то і початкове рівняння також не має їх.

Універсального алгоритму, який дозволяє розв'язувати будь-які рівняння за допомогою заміни змінної, не існує. Інколи дуже важко побачити необхідну заміну, яка приведе задачу до простого та зручного для розв'язання вигляду. Часто для цього потрібно виконати деякі перетворення (наприклад, групування доданків); в деяких задачах необхідно робити заміну не один раз. Не дивлячись на це, існують декілька стандартних замін, які використовуються досить часто. Наведемо основні типи стандартних замін.

<u>Зауваження 3.7.1.</u> Рівняння типу:

$$a\left[f^q(x)\right]^2 + b\left[f^q(x)\right] + c = 0, \quad a \neq 0,\ q \text{ – раціональне число,}$$

розв’язуються з використанням заміни $y = f^q(x)$ (детальніше дивіться пункт 2.3 цього посібника та приклади 2.11, 2.12, 2.13).

<u>Зауваження 3.7.2.</u> Рівняння типу:

$$f(P(x)) = 0,\ P(x) \text{ – многочлен,}$$

розв'язуються з використанням заміни $y = P(x)$ (детальніше дивіться приклади з цього посібника 2.18 та 2.21).

Зауваження 3.7.3. Рівняння типу:

$$f\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = 0, \; P(x) \text{ та } Q(x) \text{– многочлени,}$$

розв'язуються з використанням заміни $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (детальніше дивіться приклади з цього посібника 2.14, 3.6 та 3.8).

Зауваження 3.7.4. Рівняння типу:

$$f\left(ax + \frac{b}{x}\right) = 0,$$

розв'язуються з використанням заміни $y = ax + \dfrac{b}{x}$ або (частіше) $y = x + \dfrac{1}{x}$ (детальніше дивіться приклади з цього посібника 2.16, 2.17, 2.19, 2.22, 3.3 та 3.4).

Зауваження 3.7.5. Рівняння виду:

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d) = A,$$

де $a < b < c < d, \; b - a = d - c$, розв'язуються з використанням заміни:

$$y = \frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4} = x - \frac{a+b+c+d}{4}.$$

(детальніше дивіться приклад 2.20 з цього посібника).

Зауваження 3.7.5. Рівняння виду:

$$(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$$

розв'язуються з використанням заміни: $y = x - \dfrac{a+b}{2}$ (детальніше дивіться приклад 2.23 з цього посібника).

Зауваження 3.7.6. Рівняння виду:

$$\frac{a_1}{x+b_1} + \frac{a_2}{x+b_2} + \dots + \frac{a_K}{x+b_K} = A$$

при деякій накладеній на числа $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k, \; A$ умові (дивись нижче приклад 3.12), може бути розв'язане так. Групуючи члени рівняння по два і додаючи кожну пару, потрібно отримати в чисельниках многочлени першого чи нульового степеня, які відрізняються один від одного тільки числовими множниками, а в знаменниках − квадратні тричлени з однаковими двома членами, які містять x. Тоді після заміни змінної отримане рівняння буде або мати такий самий вид, але з меншим числом доданків, або буде рівносильне об'єднанню двох рівнянь, одне з яких буде першого степеня, а друге буде рівняння даного виду, але з меншим числом доданків.

Розглянемо деякі із сформульованих зауважень на прикладах.

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння:

$$\left(x^2-2x+4\right)\cdot\left(x^2-7x+12\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)=108 \qquad (3.16)$$

Розв'язання .Так як

$$\left(x^2-7x+12\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)=\left(x-3\right)\cdot\left(x-4\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x+2\right)=$$
$$=\left(x^2-2x-3\right)\cdot\left(x^2-2x-8\right),$$

то рівняння (3.16) можна переписати у вигляді:

$$\left(x^2-2x+4\right)\cdot\left(x^2-2x-3\right)\cdot\left(x^2-2x-8\right)=108. \qquad (3.17)$$

Для розв'язання рівняння (3.17) зробимо заміну змінних $y=x^2-2x$ (дивись зауваження 3.7.2). Тоді відносно y одержимо рівняння:

$$\left(y+4\right)\cdot\left(y-3\right)\cdot\left(y-8\right)=108$$

або:

$$y^3-7y^2-20y-12=0. \qquad (3.18)$$

Скористаємося наслідком 3.1 теореми 3.3 і знайдемо цілий корінь цього рівняння серед дільників вільного члена –12. Легко бачити, що $y_1=-1$ є коренем цього рівняння. Поділивши ліву частину рівняння (3.18) на $y+1$, перепишемо його у вигляді:

$$\left(y+1\right)\cdot\left(y^2-8y-12\right)=0$$

і знаходимо ще два кореня рівняння:

$$y_{2,3}=4\pm2\sqrt{7}.$$

Таким чином, рівняння (3.17), а отже, і рівняння (3.16) рівносильне сукупності трьох квадратних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=4+2\sqrt{7} \\ x^2-2x=4-2\sqrt{7} \end{array}\right..$$

Розв'язавши цю сукупність, знаходимо корені рівняння (3.16) у множині дійсних чисел:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{5+2\sqrt{7}} \\ x=1\pm\sqrt{2\sqrt{7}-5} \end{array}\right..$$

Пропонуємо читачам перевірити цей факт.

Приклад 3.10. Знайти дійсні корені рівняння:

$$\left(6-x\right)^4+\left(8-x\right)^4=16.$$

Розв'язання. Використаємо заміну, яка рекомендована у зауваженні 3.7.5: $y=7-x$. Вихідне рівняння буде рівносильним такому рівнянню:

$$\left(y-1\right)^4+\left(y+1\right)^4=16.$$

Після піднесення виразів у дужках до 4-го степеня та спрощення лівої частини ми прийдемо до біквадратного рівняння:

$$y^4 + 6y^2 - 7 = 0,$$
яке буде рівносильним сукупності рівнянь:
$$\left[\begin{array}{l} y^2 = -7 \\ y^2 = 1 \end{array}\right..$$
Так як в умові було задано знайти дійсні корені рівняння, то маємо, що $y_1 = -1,\ y_2 = 1$, а тому $x_1 = 8,\ x_2 = 6$.

Вихідне рівняння можна розв'язати іншим способом, використавши таку підстановку:
$$\left[\begin{array}{l} 6 - x = u \\ 8 - x = v \end{array}\right..$$
Тоді вихідне рівняння буде рівносильним такій системі умов:
$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 16 \\ u - v = -2 \end{cases},$$
розв'язання якої дасть результат (пропонуємо читачеві самостійно його перевірити):
$$u_1 = 0,\ v_1 = 2;\ u_2 = -2,\ v_2 = 0\ ,$$
а тому $x_1 = 8,\ x_2 = 6$.

<u>Приклад 3.11.</u> Розв'язати рівняння:
$$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0 \qquad (3.20)$$
Розв'язання. Покладемо $\sqrt{2} = a$ і розглянемо рівняння з параметром:
$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$
Розв'язуючи його як квадратне рівняння відносно a, маємо:
$$a^2 - a \cdot \left(2x^2 + 1\right) + x^4 - x = 0$$
а тому:
$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - x \\ a = x^2 + x + 1 \end{array}\right..$$
Зробивши зворотну заміну, матимемо, що рівняння (3.20) рівносильне сукупності двох рівнянь:
$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = \sqrt{2} \\ x^2 + x + 1 = \sqrt{2} \end{array}\right.$$
множина всіх розв'язків яких, а відповідно, і вихідного рівняння, складається з чисел:
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}\ ,\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}.$$
<u>Приклад 3.12.</u> Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0.$$

Розв'язання. Скористаємося методом розв'язування, описаним у зауваженні 3.7.6. Згрупуємо доданки лівої частини рівняння так:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0.$$

Виконавши дії в дужках, отримаємо:

$$\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0.$$

Так як $x=-2$ не є коренем рівняння, то поділимо обидві його частини на $2(x+2)$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2\left(x^2+4x+4\right)}=0.$$

Проведемо заміну $y=(x+2)^2$, отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{y-4}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{2y}=0$$

Після перетворення лівої частини рівняння ми прийдемо до умови:

$$\frac{5y^2-15y+4}{2y\cdot(y-4)\cdot(y-1)}=0.$$

Звідси маємо, що $y_{1,2}=\dfrac{15\ \pm\ \sqrt{145}}{10}$ (якщо вам не зрозуміло, як ми знайшли розв'язки цього рівняння – зупиніться і почитайте пункт 3.8. Раціональні рівняння). Перейдемо до зворотної заміни – отримаємо умову:

$(x+2)^2=\dfrac{15\pm\sqrt{145}}{10}$, або $x=-2\pm\dfrac{\sqrt{150\pm10\sqrt{145}}}{10}$ та $x=-2\pm\dfrac{\sqrt{150\mp10\sqrt{145}}}{10}$

Останній запис і буде розв'язком вихідного рівняння.

<u>Зауваження 3.7.7.</u> Рівняння виду:

$$\frac{c_1\cdot x+d_1}{p_1\cdot x+q_1\cdot x+r_1}+\frac{c_2\cdot x+d_2}{p_2\cdot x^2+q_2\cdot x+r_2}+....+\frac{c_K x+d_K}{p_K x^2+q_K x+r_K}=B$$

зводяться до вигляду:

$$\frac{a_1}{x+b_1}+\frac{a_2}{x+b_2}+....+\frac{a_n}{x+b_n}=A$$

якщо кожен доданок розкласти в суму найпростіших дробів:

$$\frac{c_m\cdot x+d_m}{p_m\cdot x^2+q_m\cdot x+r_m}=\frac{e}{x+g}+\frac{f}{x+h}$$

Приклади розв'язування таких рівнянь ми покажемо у наступному пункті.

Приклад 3.13. Розв’язати рівняння:

$$\frac{\left(x^{2}+1\right)x}{\left(x^{2}-x+1\right)^{2}}=\frac{10}{9}.$$

Розв’язання. Проведемо певну підготовчу роботу з даним рівнянням, а саме – розділимо чисельник та знаменник лівої частини рівняння на x^2 (це зробити можна, так як 0 не є коренем цього рівняння). Очевидно, що ця операція дасть можливість скористатися рекомендацією зауваження 3.7.4 щодо введення заміни $y=x+\frac{1}{x}$. Проілюструємо це.

$$\frac{\frac{\left(x^{2}+1\right)\cdot x}{x^{2}}}{\left(\frac{x^{2}-x+1}{x}\right)^{2}}=\frac{10}{9}, \text{ або } \frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^{2}}=\frac{10}{9}.$$

Ввівши вищевказану заміну, отримаємо:

$$\frac{y}{(y-1)^{2}}=\frac{10}{9},$$

звідки $y_1=\frac{5}{2},\ y_2=\frac{2}{5}$. Провівши обернену заміну, отримаємо сукупність рівнянь, що рівносильна вихідному рівнянню:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \end{array}\right..$$

З першого рівняння отримаємо два розв’язки $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}$, а друге рівняння дійсних коренів не має. Отже, знайдені розв’язки першого рівняння сукупності і будуть розв’язками вихідного рівняння у множині дійсних чисел.

Проілюструємо інший спосіб розв’язування цього рівняння. Так як $x^2-x+1\neq 0$, то, помноживши обидві частини рівняння на $9\cdot\left(x^2-x+1\right)^2$, ми можемо записати дане рівняння у вигляді:

$$10\cdot\left(x^{2}-x+1\right)^{2}=9x\cdot\left(x^{2}+1\right).$$

Після виконання елементарних операції, зведення подібних доданків ми отримаємо симетричне рівняння парного степеня:

$$10x^{4}-29x^{3}+30x^{2}-29x+10=0,$$

для розв'язання якого скористаємося рекомендаціями зауваження 3.3.2, провівши заміну $y = x + \dfrac{1}{x}$. Отримаємо рівняння:

$$10y^2 - 29y + 10 = 0,$$

коренями якого будуть $y_1 = \dfrac{5}{2},\ y_2 = \dfrac{2}{5}$. Повернувшись до змінної x, отримаємо розв'язки вихідного рівняння $x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 3.14. Розв'язати рівняння:

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27.$$

Розв'язання. У лівій частині рівняння стоїть сума двох квадратів. Спробуємо доповнити її до квадрата різниці. Отримаємо:

$$x^2 - \frac{6x^2}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27 - \frac{6x^2}{x+3}, \text{ або } \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27 - \frac{6x^2}{x+3},$$

$$\text{або } \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 = 27 - \frac{6x^2}{x+3}.$$

Використаємо заміну $y = \dfrac{x^2}{x+3}$ (дивись зауваження 3.7.2). Отримаємо рівняння $y^2 + 6y - 27 = 0$, яке має корені $y_1 = -9,\ y_2 = 3$. Перейшовши до змінної x, маємо:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x^2}{x+3} = -9 \\ &\frac{x^2}{x+3} = 3 \end{aligned}\right..$$

Перше рівняння сукупності у множині дійсних чисел розв'язків не має, а з другого рівняння отримаємо розв'язки вихідного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Приклад 3.15. Розв'язати рівняння:

$$x\sqrt{3-x} - 5x = 1 + \sqrt{3-x}.$$

Розв'язання. Позначимо $y = \sqrt{3-x}$, тоді очевидно, що $y \ge 0,\ x = 3 - y^2$. З врахуванням заміни вихідне рівняння набуде вигляду:

$$\left(3 - y^2\right)\cdot y - 5\cdot\left(3 - y^2\right) = 1 + y, \text{ або } y^3 - 5y^2 - 2y + 16 = 0.$$

Розкладемо ліву частину отриманого кубічного рівняння на множники. Раціональний корінь многочлена лівої частини рівняння (якщо він є) є дільником його вільного члена (дивись наслідок 3.1 з теореми 3.3). Тому, підставляючи числа $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ замість y в ліву частину рівняння, знайдемо корінь $y_1 = 2$. Отже, ліва частина рівняння розкладається на множники, один з яких дорівнює $y-2$. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$(y-2)\cdot\left(y^2-3y-8\right)=0.$$

Знайдемо два інші корені рівняння:

$$y_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Зробимо зворотну заміну:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3-x}=2 \\ \sqrt{3-x}=\dfrac{3+\sqrt{41}}{2} \\ \sqrt{3-x}=\dfrac{3-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. .$$

З першого рівняння сукупності маємо розв'язок вихідного рівняння: $x_1 = -1$, з другого: $x_2 = -\dfrac{19+3\sqrt{41}}{2}$, третє рівняння сукупності розв'язків не має, так як $\dfrac{3-\sqrt{41}}{2} < 0$.

Вправи до § 3

3.1. Розв'язати рівняння: $x^6 - x^5 - 2x^4 - x^2 + x + 2 = 0$.

Розв'язання. Перевіримо, чи має рівняння раціональні корені. Старший коефіцієнт дорівнює одиниці, тому якщо є раціональні корені, то вони обов'язково цілі і їх слід шукати серед дільників вільного члена: перевіримо числа ±1, ±2:

$P(1) = 1-1-2-1+1+2 = 0$, отже $x_1 = 1$ є коренем;

$P(-1) = 1+1-2-1-1+2 = 0$, отже $x_2 = -1$ є коренем;

Виконаємо ділення многочлена на двочлени $(x-1)$ та $(x+1)$ за схемою Горнера чи «кутом», отримаємо:

	1	-1	-2	0	-1	1	2
1	1	0	-2	-2	-3	-2	0
-1	1	-1	-1	-1	-2	0	

Після ділення на двочлени $(x-1)$ та $(x+1)$ отримали многочлен четвертого степеня (коефіцієнти беремо зі схеми Горнера)

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$. Сума коефіцієнтів не рівна нулеві, тому $x = 1$ не є коренем цього многочлена, перевіряємо (-1) та ±2:

	1	-1	-1	-1	-2
-1	1	-2	1	-2	0
2	1	0	1	0	

Після ділення на двочлени $(x+1)$ та $(x-2)$ отримали многочлен другого степеня (x^2+1), корені якого отримаємо, розв'язавши рівняння $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$.

Зауваження: Розклад многочлена на множники можна виконати, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Відповідь: $x \in \{-1; 1; 2; \pm i\}$, корінь $x = -1$ є двократним.

3.2. Розв'язати рівняння: $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$.

Вказівка. Перевірте дільники вільного члена та перейдіть від рівняння п'ятого степеня до рівняння другого степеня.

Відповідь: $x \in \{-1; 1; 3; \pm 2i\}$.

3.3. Розв'язати рівняння: $6x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 8x + 3 = 0$.

Вказівка. Перевірте дроби $\frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ – нескоротний дріб, p – дільник вільного члена, q – дільник старшого коефіцієнта та перейдіть від рівняння п'ятого степеня до рівняння другого степеня.

Відповідь: $x \in \left\{-1; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; \pm i\right\}$.

3.4. Використовуючи спосіб невизначених коефіцієнтів, розкласти на множники та розв'язати рівняння: $x^4 + 5x^3 - x^2 - 16x + 10 = 0$.

Вказівка. Скористайтесь прийомом, описаним у пункті 3.5.

Відповідь: $(x^2 + 3x - 5)(x^2 + 2x - 2) = 0$, $x \in \left\{-1 \pm \sqrt{3}; -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}\right\}$.

3.5. Використовуючи спосіб невизначених коефіцієнтів, розкласти на множники та розв'язати рівняння: $x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 36x + 8 = 0$.

Відповідь: $(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 8x - 2) = 0$, $x \in \left\{1 \pm \sqrt{5}; 4 \pm 3\sqrt{2}\right\}$.

3.6. Використовуючи спосіб невизначених коефіцієнтів, розкласти на множники та розв'язати рівняння: $x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 16x - 2 = 0$.

Відповідь: $(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 4x - 2) = 0$, $x \in \left\{-2 \pm \sqrt{6}; 3 \pm 2\sqrt{2}\right\}$.

3.7. Використовуючи прийом, описаний у прикладі 3.15, розв'язати рівняння у дійсних числах: $x\sqrt{2+x} - 5x + 8 - \sqrt{2+x} = 0$.

Відповідь: $x \in \left\{2; \frac{23}{2} + \frac{9\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3.8. Розв'язати рівняння у дійсних числах:

$x\sqrt{6+x}-4x+6-\sqrt{6+x}=0$.

Відповідь: $x\in\left\{3;\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\}$.

3.9. Розв'язати рівняння у дійсних числах:

$x\sqrt{7+x}-4x+5-\sqrt{7+x}=0$.

Відповідь: $x\in\left\{2;\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3.10. Розв'язати рівняння у дійсних числах:

$x\sqrt{x-9}-5x+29-\sqrt{x-9}=0$.

Відповідь: $x\in\{25\}$.

3.11. Розв'язати однорідне рівняння:

$2(x^2+2x+3)^2+5(x^2+2x+3)\cdot(3x-5)-3(3x-5)^2=0$.

Вказівка. Скористайтесь прийомом, описаним у пункті 3.6: встановіть, що $x=\frac{5}{3}$ не є коренем рівняння, поділіть ліву і праву частини на $(3x-5)^2$, виконайте заміну $y=\frac{x^2+2x+3}{3x-5}$ та перейдіть до квадратного рівняння: $2y^2+5y-3=0\Leftrightarrow(y+3)\cdot(2y-1)=0$ і поверніться до заміни.

Відповідь: $x\in\left\{-12;1;-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{87}}{4}i\right\}$.

3.12. Розв'язати однорідне рівняння:

$3(x^2-6x+7)^2+7(x^2-6x+7)(2x+1)-6(2x+1)^2=0$.

Відповідь: $x\in\left\{1;\frac{19}{3};\pm\sqrt{10}\,i\right\}$.

3.13. Розв'язати однорідне рівняння:

$2(2x^2-6x+5)^2-9(2x^2-6x+5)(4x+1)+7(4x+1)^2=0$.

Відповідь: $x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2};5\pm\frac{\sqrt{97}}{2}\right\}$.

§ 4. Нерівності

Нерівності – одна з найважливіших тем в шкільному курсі математики. Дуже багато завдань пов'язано з розв'язуванням нерівностей. У цьому параграфі ми розглянемо детально розв'язання раціональних нерівностей та нерівностей, що зводяться до раціональних, нерівностей з модулем, систем нерівностей, сукупностей нерівностей і нерівностей з параметром.

<u>Означення 4.1.</u> *Числовою нерівністю* називають нерівність, що зв'язує числові і буквені вирази, вірна при всіх допустимих або при спеціально підібраних значеннях змінних, що входять до неї.

<u>Приклад 4.1.</u> Числова нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$ вірна при будь-яких дійсних значеннях a і b. А числова нерівність $\sqrt{a} \geq 0$ вірна лише при $a \geq 0$.

Сформулюємо без доведення основні властивості числових нерівностей:

1. Якщо $a > b$, тоді $b < a$.
2. Якщо $a > b$ і $b > c$, тоді $a > c$.
3. Якщо $a > b$ і $c \in R$, тоді $a + c > b + c$.
4. Якщо $a > b$ і $c > 0$, тоді $ac > bc$.
5. Якщо $a > b$ і $c < 0$, тоді $ac < bc$.
6. Якщо $a > b$ і $c > d$, тоді $a + c > b + d$.
7. Якщо $a > b > 0$ і $c > d > 0$, тоді $ac > bd$.
8. Якщо $a > b > 0$, тоді $a^n > b^n,\ n \in \mathrm{N}$.
9. Якщо $a > 0,\ b > 0$ і $a^n > b^n,\ n \in \mathrm{N}$, тоді $a > b$.
10. Якщо $a > b > 0$, тоді $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

4.1. Нерівності і системи нерівностей з однією змінною

<u>Означення 4.2.</u> *Нерівностями з однією змінною* називають нерівності виду:

$$f(x) > g(x), \text{ або } f(x) \geq g(x), \text{ або } f(x) < g(x), \text{ або } f(x) \leq g(x), \qquad (4.1)$$

де $f(x),\ g(x)$ – деякі функції від змінної x.

<u>Означення 4.3.</u> *Розв'язком нерівності* називається значення змінної, при якій дана нерівність стає вірною числовою нерівністю. Сукупність всіх розв'язків нерівності називається *множиною розв'язків нерівності*.

<u>Примітка.</u> При розв'язуванні нерівностей ми будемо шукати лише ті їх розв'язки, що належать множині дійсних чисел.

<u>Означення 4.4.</u> *Областю допустимих значень* (ОДЗ) *змінної нерівності* (типу (4.1)), називається перетин (або спільна частина) областей визначення функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, тобто множина всіх числових значень змінної x, при яких одночасно визначені і ліва, і права частини нерівності. При цьому будь-яке число x з ОДЗ нерівності називається *допустимим значенням для даної нерівності*.

Приклад 4.2. Наприклад, областю допустимих значень нерівності:

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1}$$

є відрізок $[1;\ 2]$, так як цей відрізок є перетином (спільною частиною) області визначення функції $y = \sqrt{2-x}$ ($x \in [-\infty;\ 2]$), що стоїть в лівій частці нерівності, і області визначення функції $y = \sqrt{x-1}$ ($x \in [1;\ +\infty]$, що стоїть в її правій частині.

Зрозуміло, що число x може бути розв'язком нерівності лише тоді, коли воно належить ОДЗ нерівності. Звідси – очевидний висновок: розв'язання нерівності слід шукати лише в області допустимих значень нерівності.

Зауваження 4.1.1. Досить часто приходиться одночасно розв'язувати не одну нерівність, а декілька нерівностей, пов'язаних між собою деякою умовою. Якщо n нерівностей мають виконуватися одночасно (всі без виключення), то кажуть, що в цьому випадку треба розв'язати *систему n нерівностей*, яку записують, наприклад, так:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) > g_n(x) \end{cases}$$

При цьому *загальний розв'язок цієї системи* <u>*має задовольняти кожну з нерівностей системи*</u>. Щоб його знайти, треба знайти розв'язок кожної з нерівностей системи і визначити перетин (або спільну частину) цих розв'язків.

Зауваження 4.1.2. Якщо n нерівностей мають виконуватися не одночасно (має виконуватися хоча б одна з них), то кажуть, що в цьому випадку треба розв'язати *сукупність n нерівностей*, яку записують, наприклад, так:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) > g_n(x) \end{array}\right.$$

При цьому *загальний розв'язок цієї системи* <u>*має задовольняти хоча б одну з нерівностей сукупності*</u>. Щоб його знайти, треба знайти розв'язок кожної з нерівностей сукупності і визначити об'єднання цих розв'язків.

Зауваження 4.1.3. Зрозуміло, що для того, щоб знайти *область допустимих значень змінної системи нерівностей*, треба знайти перетин (або спільну частину) областей допустимих значень змінної всіх нерівностей системи. А для знаходження *області допустимих значень змінної сукупності нерівностей*, треба знайти об'єднання областей допустимих значень змінної всіх нерівностей сукупності.

4.2. Раціональні нерівності

Означення 4.5. *Раціональними нерівностями* називаються нерівності виду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0, \text{ або } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0, \text{ або } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \ge 0, \text{ або } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \le 0, \qquad (4.2)$$

де $P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлени.

Примітка. Очевидно, що раціональними нерівностями можна вважати і нерівності виду (запишемо їх лише для знаку більше):

$$P_n(x) > 0,\ P_n(x) > R_l(x),\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > \frac{R_l(x)}{T_s(x)},$$

де $P_n(x),\ R_l(x),\ Q_m(x),\ T_s(x)$ – многочлени.

Серед раціональних нерівностей виду $P_n(x) > 0$ розрізняють лінійні нерівності (степінь многочлена $P_n(x)$ дорівнює одиниці), квадратичні нерівності (степінь многочлена $P_n(x)$ дорівнює два), нерівності вищих степенів ($n > 2,\ n \in \mathrm{N}$) та власне раціональні нерівності, які ще називають дробово-раціональними.

Означення 4.5. *Лінійними нерівностями* називаються нерівності вигляду:

$$ax + b > 0, \text{ або } ax + b < 0, \text{ або } ax + b \ge 0, \text{ або } ax + b \le 0,$$

де $a \ne 0,\ a,\ b$ – дійсні числа.

Зауваження 4.1.4. При $a > 0$ нерівність $ax + b > 0$ має розв'язки $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, а при $a < 0$ ця нерівність має розв'язки $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$. Пропонуємо читачеві самостійно записати у загальному вигляді розв'язки інших лінійних нерівностей при різних значеннях a.

Означення 4.6. *Квадратичними нерівностями* називаються нерівності вигляду:

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ або } ax^2 + bx + c < 0,$$
$$\text{або } ax^2 + bx + c \ge 0, \text{ або } ax^2 + bx + c \le 0,$$

де $a \ne 0,\ a,\ b,\ c$ – дійсні числа.

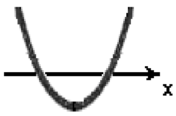
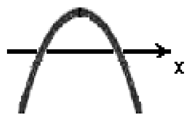
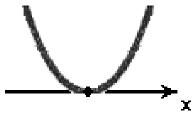
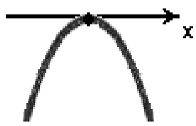
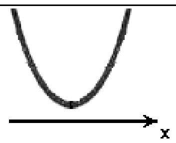
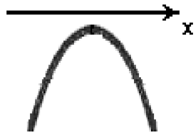
Зауваження 4.1.5. Розглянемо у загальному вигляді розв'язування нерівності $ax^2 + bx + c > 0$. У лівій частині нерівності знаходиться квадратний тричлен. Нагадаємо (див. пункт 2.2), що дискримінант квадратного тричлена $D = b^2 - 4ac$. Якщо $D>0$, то квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має два різних дійсних кореня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Покладемо, не втрачаючи загальності, що $x_1 < x_2$. Якщо $D=0$, то тричлен $ax^2 + bx + c$ має два співпадаючих кореня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0.$$

Пригадавши матеріал курсу математики 9 класу про положення графіка квадратичної функції та її властивості в залежності від дискримінанта D та коефіцієнта a, представимо у вигляді таблиці 1 варіанти загального виду розв'язків нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ в залежності від D та a:

	$a>0$	$a<0$
$D>0$	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	 $x \in (x_1; x_2)$
$D=0$	 $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	 $x \in \varnothing$
$D<0$	 $x \in R$	 $x \in \varnothing$

Таблиця 1. Схема розв'язування нерівності $ax^2 + bx + c > 0$.

Пропонуємо читачеві самостійно скласти такі ж таблиці для інших варіантів квадратичних нерівностей, вказаних в означенні 4.6.

<u>Означення 4.7.</u> *Нерівностями n-го степеня* називаються нерівності вигляду:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n > 0,$$

$$\text{або } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n < 0,$$

$$\text{або } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \geq 0,$$

$$\text{або } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \leq 0,$$

де $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – дійсні числа.

<u>Зауваження 4.1.6.</u> Для розв'язування нерівностей n-го степеня нам знадобиться інформація з пунктів 3.1 та 3.2 щодо знаходження коренів многочленів та розкладу многочленів на множники. Нагадаємо, що коли

многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ має k $(k<n)$ дійсних коренів, то ліву частину нерівності $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n>0$ можна подати у вигляді:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_k)\cdot S_{n-k}(x), \qquad (4.3)$$

де $x_1, x_2,..., x_k$ – дійсні корені многочлена $P_n(x)$, а многочлен $S_{n-k}(x)$ не має дійсних коренів і є або додатнім, або від'ємним для всіх $x\in R$. Очевидно, що таким же чином можна представити ліву частину будь-якої з нерівностей, вказаних в означенні 4.7.

Зауваження 4.1.7. Приймемо без доведення такі твердження. Раціональна нерівність $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ є рівносильною нерівності $P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$ (аналогічне твердження можна сформулювати для нерівності із знаком менше). Раціональна нерівність $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0$ є рівносильною системі умов:

$$\begin{cases} P_n(x)\cdot Q_m(x)\ge 0 \\ Q_m(x)\ne 0 \end{cases}.$$

Аналогічно – нерівність $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0$ рівносильна системі умов:

$$\begin{cases} P_n(x)\cdot Q_m(x)\le 0 \\ Q_m(x)\ne 0 \end{cases}.$$

Цей прийом зведення дробово-раціональних нерівностей до нерівностей n-го степеня нам стане у пригоді при їх розв'язуванні.

Приклад 4.3. Розв'язати нерівність:

$$10x^2-9x+2>0.$$

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $10x^2-9x+2=0$, отримаємо $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{2}{5}$. Коефіцієнт при старшому члені додатний, тому графіком лівої частини нерівності є парабола, вітки якої направлені вгору, існування двох дійсних коренів (зазначимо, що $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$) дає можливість стверджувати, що парабола перетинає вісь Ox в двох точках. Отже, використовуючи таблицю 1, можемо стверджувати, що розв'язком нерівності є множина $x\in\left(-\infty;\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Приклад 4.4. Розв'язати нерівність:

$$-3x^2+5x+2>0.$$

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $-3x^2+5x+2=0$, отримаємо $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$. Коефіцієнт при старшому члені від'ємний, тому графіком лівої частини нерівності є парабола, вітки якої направлені вниз, існування двох дійсних коренів (зазначимо, що $-\frac{1}{3}<2$) дає можливість стверджувати, що парабола перетинає вісь Ox в двох точках. Отже, використовуючи таблицю 1, можемо стверджувати, що розв'язком нерівності є множина $x\in\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$.

<u>Приклад 4.5.</u> Розв'язати нерівність:

$$x^2-6x+15>0.$$

Розв'язання. Рівняння $x^2-6x+15=0$ дійсних коренів не має, так як $D=-24<0$. Коефіцієнт при старшому члені додатний, тому графіком лівої частини нерівності є парабола, вітки якої направлені вгору, відсутність дійсних коренів дає можливість стверджувати, що парабола вісь Ox не перетинає. Отже (див. таблицю 1), нерівність справджується для всіх дійсних значень змінної і її розв'язком буде множина $x\in R$.

<u>Приклад 4.6.</u> Розв'язати нерівність:

$$-2x^2+5x-4>0.$$

Розв'язання. Рівняння $-2x^2+5x-4=0$ дійсних коренів не має, так як $D=-7<0$. Коефіцієнт при старшому члені від'ємний, тому графіком лівої частини нерівності є парабола, вітки якої направлені вниз, відсутність дійсних коренів дає можливість стверджувати, що парабола вісь Ox не перетинає. Отже (див. таблицю 1), нерівність не може справджуватися для жодного дійсного значення змінної і факт відсутності її розв'язків буде позначатися так $x\in\varnothing$.

4.3. Метод інтервалів

Пригадаємо зміст зауваження 4.1.4, яке можна сформулювати і так: при $a>0$ двочлен $ax+b$ приймає додатні значення при $x\in\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ та приймає від'ємні значення при $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$. Розглянемо простіший двочлен $x-\alpha$. Зрозуміло, що він приймає додатні значення при $x\in(\alpha;+\infty)$, або справа від числа α, та приймає від'ємні значення при $x\in(-\infty;\alpha)$, тобто зліва від числа α. Ця властивість двочлена лежить в основі *методу інтервалів* і часто використовується при розв'язуванні нерівностей.

Нехай треба розв'язати нерівність $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$. Розглянемо многочлен:

$$P(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

де $x_1, x_2,\ldots, x_n$ – фіксовані числа, що задовольняють умову $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Виходячи з описаної властивості двочлена можемо зробити висновок, що для кожного числа $a_1>x_n$ значення кожного із співмножників у запису многочлена $P(x)$ буде додатним, а тому і значення многочлена $P(a_1)$ буде додатним. Для кожного числа a_2 з проміжку $(x_{n-1};\, x_n)$ відповідне числове значення останнього співмножника буде від'ємним, а числові значення всіх інших співмножників – додатні. Тому $P(a_2)<0$. Аналогічно виясняємо, що $P(a_3)>0$, де $a_3\in(x_{n-2};\, x_{n-1})$, і так далі до проміжку $(-\infty;\, x_1)$. Тому розв'язування нерівності $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$ буде виконуватися за таким алгоритмом (який і називають *методом інтервалів*):

1. На числову вісь наносимо числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$ (не втрачаючи загальності покладемо, що $x_1<x_2<\ldots<x_n$). В результаті вся числова вісь (див. рис.1) виявилася розбитою точками $x_1, x_2,\ldots, x_n$ на $n+1$ інтервал:

$$(-\infty;\, x_1),\ (x_1;\, x_2),\ldots,\ (x_{n-1};\, x_n),\ (x_n;\, +\infty).$$

2. Крайній правий інтервал позначаємо знаком плюс, а наступний за ним (рахуючи справа наліво) – знаком мінус, наступний – знаком плюс і так далі до крайнього лівого інтервалу.
3. Розв'язком вихідної нерівності буде об'єднання всіх інтервалів, які позначені знаком плюс.

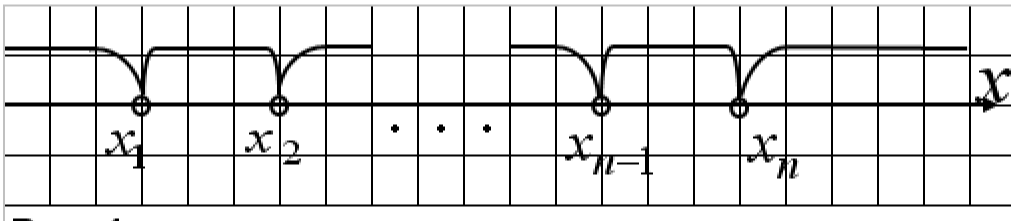


Рис. 1

<u>Примітка.</u> Розв'язком нерівності $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)<0$ буде множина, яка є об'єднанням всіх інтервалів, що позначені знаком мінус.

Розглянемо іншу нерівність:

$$(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0,$$

де $k_1, k_2,\ldots, k_n$ – фіксовані натуральні числа, $x_1, x_2,\ldots, x_n$ – фіксовані дійсні числа, що задовольняють умову $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Ця нерівність розв'язується за допомогою *узагальненого методу інтервалів*. Вивчимо його детальніше.

Розглянемо многочлен:

$$P(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}.$$

Для кожного числа $a_1>x_n$ значення кожного із співмножників у запису многочлена $P(x)$ буде додатним, а тому і значення многочлена $P(a_1)$ буде додатним.

Для кожного числа a_2 з проміжку $(x_{n-1};\,x_n)$ відповідне числове значення останнього співмножника $(x-x_n)^{k_n}$ буде від'ємним, якщо k_n – непарне число, та додатним, якщо k_n – парне число. Числові ж значення всіх інших співмножників для кожного числа a_2 з проміжку $(x_{n-1};\,x_n)$ будуть додатними. Математики в таких випадках говорять, що многочлен $P(x)$ при переході через точку x_n змінює знак на протилежний, якщо k_n – непарне число, або многочлен $P(x)$ при переході через точку x_n зберігає свій знак, якщо k_n – парне число. Це правило слід використати у процесі руху по числовій осі справа наліво при всіх переходах через точки x_i, керуючись алгоритмом: многочлен $P(x)$ при переході через точку x_i змінює знак на протилежний, якщо k_i – непарне число, або многочлен $P(x)$ при переході через точку x_i зберігає свій знак, якщо k_i – парне число. Тому $P(a_2)<0$. Аналогічно виясняємо, що $P(a_3)>0$, де $a_3\in(x_{n-2};\;x_{n-1})$, і так далі до проміжку $(-\infty;\;x_1)$.

Отже, розв'язування нерівності $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0$ буде виконуватися за таким алгоритмом (який і називають *узагальненим методом інтервалів*):

1. Аналогічно до попереднього розв'язування наносимо на числову вісь числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$ (не втрачаючи загальності покладемо, що $x_1<x_2<\ldots<x_n$). В результаті вся числова вісь виявилася розбитою точками $x_1, x_2,\ldots, x_n$ на $(n+1)$ інтервал:

$$(-\infty;\,x_1),\,(x_1;\,x_2),\ldots,\,(x_{n-1};\,x_n),\,(x_n;\,+\infty).$$

2. Крайній правий інтервал $(x_n;\,+\infty)$ позначаємо знаком плюс, наступний за ним $(x_{n-1};\,x_n)$ (рахуючи справа наліво) – знаком мінус, якщо k_n – непарне число, або ж знаком плюс, якщо k_n – парне число, наступний $(x_{n-2};\,x_{n-1})$ – знаком мінус, якщо k_{n-1} – непарне число, або ж знаком плюс, якщо k_{n-1} – парне число і так далі до крайнього лівого інтервалу.
3. Розв'язком вихідної нерівності буде об'єднання всіх інтервалів, які позначені знаком плюс.

Примітка. Розв'язком нерівності $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}<0$ буде множина, яка є об'єднанням всіх інтервалів, що позначені знаком мінус.

Зауваження 4.1.8. Для того, щоб розв'язати нестрогу нерівність, наприклад:

$$(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}\ge 0,$$

треба до розв'язків строгої нерівності:

$$(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0$$

додати розв'язки рівняння:

$$(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}=0.$$

Зауваження 4.1.9. Нагадаємо, що (згідно зауваження 4.1.6) коли многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ має $k\ (k<n)$ дійсних коренів, то ліву частину нерівності $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n>0$ можна подати у вигляді:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)\cdot S_{n-k}(x),$$

де $x_1, x_2,\ldots, x_k$ – дійсні корені многочлена $P_n(x)$, а многочлен $S_{n-k}(x)$ не має дійсних коренів. При цьому, якщо многочлен $S_{n-k}(x)$ додатний для всіх $x\in R$, то вихідна нерівність рівносильна такій нерівності:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)>0,$$

а якщо многочлен $S_{n-k}(x)$ від'ємний для всіх $x\in R$, то вихідна нерівність рівносильна такій нерівності:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)<0.$$

Приклад 4.7. Розв'язати нерівність:

$$x^3-9x^2+9x-1>0.$$

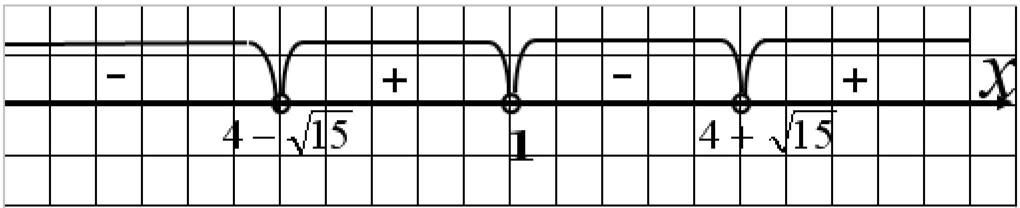


Рис. 2

Розв'язання. Знайдемо цілий корінь лівої частини нерівності серед дільників вільного члена. Перевірка показує, що $x=1$ є коренем. Поділивши ліву частину нерівності на $(x-1)$, отримаємо тричлен x^2-8x+1, який у свою чергу розкладається на множники за своїми коренями:

$$x^2-8x+1=\left(x-\left(4+\sqrt{15}\right)\right)\cdot\left(x-\left(4-\sqrt{15}\right)\right).$$

Отже, вихідна нерівність рівносильна нерівності:

$$(x-1)\cdot\left(x-\left(4+\sqrt{15}\right)\right)\cdot\left(x-\left(4-\sqrt{15}\right)\right)>0,$$

для розв'язання якої ми використаємо метод інтервалів. Наносимо на числову вісь (див. рис. 2) числа $4-\sqrt{15}, 1, 4+\sqrt{15}$. Числова вісь виявилася розбитою цими точками на 4 інтервали, на яких ми і визначимо знаки лівої частини нерівності. На крайньому справа інтервалі позначимо знак плюс, на наступному інтервалі $\left(1;\,4+\sqrt{15}\right)$ – мінус, і так далі, на інтервалі $\left(-\infty;\,4-\sqrt{15}\right)$ – знак мінус. Отже, розв'язки вихідної нерівності будуть такими: $x\in\left(4-\sqrt{15};\,1\right)\cup\left(4+\sqrt{15};\,+\infty\right)$.

<u>Приклад 4.8.</u> Розв'язати нерівність:

$$(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+7)-65<0.$$

Розв'язання. Скористаємося заміною $y=x+4$. Тоді замість вихідної нерівності розв'яжемо таку:

$$(y-3)\cdot(y-1)\cdot(y+1)\cdot(y+3)-65<0.$$

Після спрощення отримаємо біквадратну нерівність:

$$y^4-10y^2-56<0,$$

яка буде рівносильна нерівності:

$$\left(y-\sqrt{14}\right)\cdot\left(y+\sqrt{14}\right)\cdot\left(y^2+4\right)<0.$$

Врахувавши зауваження 4.1.9 щодо того, що $y^2+4>0$ для любого $x\in R$, маємо рівносильну нерівність:

$$\left(y-\sqrt{14}\right)\cdot\left(y+\sqrt{14}\right)<0,$$

розв'язком якої буде проміжок, який зручніше записати у вигляді подвійної нерівності:

$$-\sqrt{14}<y<\sqrt{14}.$$

Перейшовши назад до змінної x, маємо:

$$-\sqrt{14}<x+4<\sqrt{14},\text{ або } -\sqrt{14}-4<x<\sqrt{14}-4.$$

Отже, розв'язки вихідної нерівності належать проміжку $x\in\left(-\sqrt{14}-4;\sqrt{14}-4\right)$.

<u>Приклад 4.9.</u> Розв'язати нерівність:

$$\frac{(4-2x)^3\cdot x^5\cdot(3x+9)^2\cdot(x-4)\cdot\left(x^2+4\right)}{x^2\cdot(2x+4)\cdot(2x+8)^3\cdot(x-3)^4}>0.$$

Розв'язання. Скориставшись зауваженням 4.1.7, маємо, що вихідна нерівність рівносильна такій нерівності:

$$(4-2x)^3\cdot x^5\cdot(3x+9)^2\cdot(x-4)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot x^2\cdot(2x+4)\cdot(2x+8)^3\cdot(x-3)^4>0.$$

Винесемо за дужки множники біля змінних та знайдемо їх добуток:

$$(x-2)^3\cdot x^5\cdot(x+3)^2\cdot(x-4)\cdot x^2\cdot(x+2)\cdot(x+4)^3\cdot(x-3)^4\cdot(-1152)\cdot\left(x^2+4\right)>0.$$

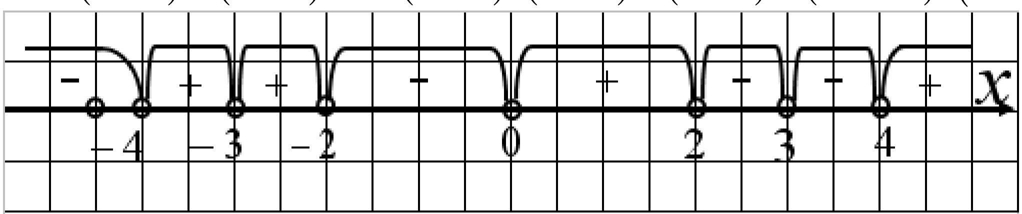


Рис. 3

Двочлен $(-1152)\cdot\left(x^2+4\right)$ не має дійсних коренів і від'ємний для всіх $x\in R$, тому, згідно зауваження 4.1.9, нерівність буде рівносильною такій нерівності:

$$(x-2)^3 \cdot x^7 \cdot (x+3)^2 \cdot (x-4) \cdot (x+2) \cdot (x+4)^3 \cdot (x-3)^4 < 0 .$$

Наносимо на числову вісь числа: $-4; -3; -2, 0, 2, 3, 4$, які розбивають всю вісь на 8 інтервалів. Використовуючи узагальнений метод інтервалів, позначаємо знаки лівої частини нерівності на кожному інтервалі (див. рис. 3): на інтервалі $(4; +\infty)$ позначаємо знак плюс, на інтервалі $(3; 4)$ позначаємо знак мінус (так як степінь $(x-4)$ рівний 1, отже – непарний, тому многочлен лівої частини при переході через точку $x=4$ змінює знак на протилежний), на інтервалі $(2; 3)$ позначаємо знак мінус (так як степінь $(x-3)$ парний – тому знак многочлена не змінюється), на інтервалі $(0; 2)$ позначаємо знак плюс (так як степінь $(x-2)$ непарний) і так далі до інтервалу $(-\infty; -4)$. Розв'язком вихідної нерівності буде об'єднання всіх інтервалів, які позначені знаком мінус – $x \in (-\infty; -4) \cup (-2, 0) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$.

Приклад 4.10. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \le 0 .$$

Розв'язання. Скориставшись зауваженням 4.1.7, маємо, що вихідна нерівність рівносильна такій системі умов:

$$\begin{cases} (x^3 - x^2 + x - 1) \cdot (x+8) \le 0 \\ x+8 \ne 0 \end{cases} .$$

Розклавши ліву частину першої умови системи на множники, матимемо:

$$\begin{cases} (x-1) \cdot (x+8) \cdot (x^2+1) \le 0 \\ x+8 \ne 0 \end{cases} .$$

Двочлен (x^2+1) не має дійсних коренів і додатний для всіх $x \in R$, тому, згідно зауваження 4.1.9, отримаємо таку рівносильну систему умов:

$$\begin{cases} (x-1) \cdot (x+8) \le 0 \\ x+8 \ne 0 \end{cases} ,$$

розв'язок якої легко знайти: $x \in (-8; 1]$.

Приклад 4.11. Розв'язати нерівність:

$$\frac{5x+2}{x^3 - 3x^2} \ge \frac{3x+4}{x^3 + x^2} .$$

Розв'язання. Перенесемо все до лівої частини нерівності, звівши отриманий вираз до спільного знаменника. Провівши в чисельнику лівої частини нерівності необхідні перетворення, отримаємо рівносильну нерівність:

$$2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 7}{x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-3)} \ge 0 .$$

Розклавши на множники чисельник лівої частини нерівності та скориставшись зауваженням 4.1.7, маємо, що вихідна нерівність рівносильна такій системі умов:

$$\begin{cases}\left(x-\left(-3-\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-3+\sqrt{2}\right)\right)\cdot x^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)\ge 0\\ x^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)\ne 0\end{cases}.$$

Наносимо на числову вісь числа: $-3-\sqrt{2};\ -3+\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ 3,$ які розбивають всю вісь на 6 інтервалів (при цьому не забуваємо врахувати, що числа $-1,\ 0,\ 3$ не є розв'язками нерівності – їх на рис. 4 позначаємо «кружечками»). Використовуючи узагальнений метод інтервалів, позначаємо знаки лівої частини нерівності на кожному інтервалі (див. рис. 4): на інтервалі $(3;+\infty)$ позначаємо знак плюс, на інтервалі $(0;3)$ позначаємо знак мінус (так як степінь $(x-3)$ рівний 1, отже – непарний, тому многочлен лівої частини при переході через точку $x=3$ змінює знак на протилежний), на інтервалі $(-1;0)$ позначаємо знак мінус (так як степінь x парний – тому знак многочлена не змінюється), і так далі до інтервалу $\left(-\infty;-3-\sqrt{2}\right)$. Розв'язком вихідної нерівності буде об'єднання всіх інтервалів, які позначені знаком плюс з врахуванням належності до розв'язку і чисел $-3-\sqrt{2};\ -3+\sqrt{2}$. Отже, $x\in\left(-\infty;-3-\sqrt{2}\right]\cup\left[-3+\sqrt{2};-1\right)\cup(3;+\infty)$.

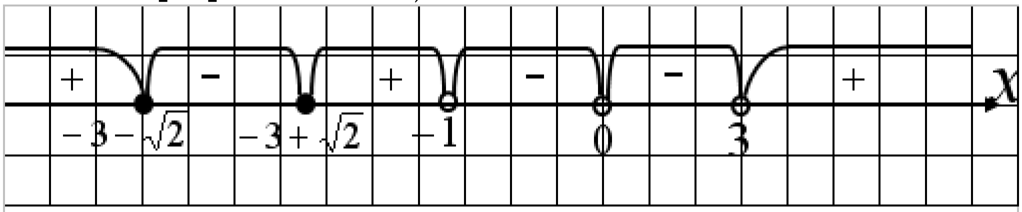


Рис. 4

Приклад 4.12. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{x+8}{x^2-16}\\ \dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}\le\dfrac{2x}{x^2-9}\end{cases}.$$

Розв'язання. Використаємо наступну стратегію розв'язування: розв'яжемо кожну з нерівностей ***системи*** окремо, використавши для цього метод інтервалів, а потім знайдемо ***спільний розв'язок*** цих нерівностей, або ***переріз розв'язків*** нерівностей (див. зауваження 4.1.1). Зазначимо, що якби в умові задачі говорилося про вимогу розв'язати ***сукупність нерівностей***, ми б використали цю ж саму стратегію з невеликою поправкою – після окремого розв'язування кожної з нерівностей нам треба буде шукати ***загальний розв'язок*** нерівностей, або ***об'єднання розв'язків*** нерівностей (див. зауваження 4.1.2).

Отже, перенесемо в обох нерівностях системи все до лівої частини, звівши отримані вирази у лівих частинах нерівностей до спільного знаменника. Провівши в чисельниках лівої частини обох нерівностей необхідні перетворення, отримаємо рівносильну систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{(x-4)\cdot(x+4)\cdot x} \geq 0 \\ \dfrac{x+3}{(x-3)\cdot(x+3)} \leq 0 \end{cases}.$$

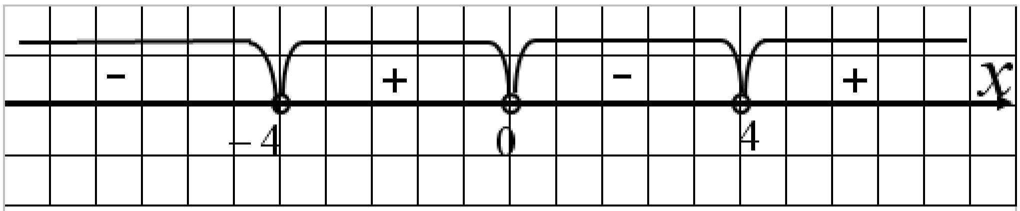


Рис. 5

Перша нерівність системи є рівносильною такій системі умов (згідно зауваженням 4.1.7):

$$\begin{cases} 16\cdot(x-4)\cdot(x+4)\cdot x \geq 0 \\ (x-4)\cdot(x+4)\cdot x \neq 0 \end{cases},$$

розв'язок якої легко шукається з використанням методу інтервалів (рис. 5) і буде виглядати так: $x \in (-4;\, 0) \cup (4;\, +\infty)$. Друга нерівність системи буде рівносильною такій системі умов (дивіться зауваження 4.1.7):

$$\begin{cases} (x+3)^2 \cdot (x-3) \leq 0 \\ (x+3)\cdot(x-3) \neq 0 \end{cases},$$

розв'язок якої є очевидним (перевірте це з використанням методу інтервалів): $x \in (-\infty;\, -3) \cup (-3;\, 3)$. Тепер ми маємо знайти переріз розв'язків кожної з нерівностей системи. Проілюструємо це на рис. 6, позначивши розв'язки першої нерівності системи штриховкою над віссю Ox, а розв'язки другої нерівності системи – штриховкою під віссю Ox (див. рис. 6). Ті проміжки, на яких штриховка згори та знизу співпала, і будуть розв'язками вихідної системи нерівностей. Отже, $x \in (-4;\, -3) \cup (-3;\, 0)$.

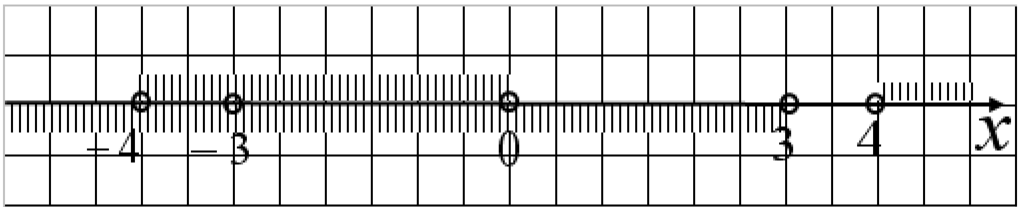


Рис. 6

<u>Примітка.</u> Розв'язок сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{x+8}{x^2-16} \\ \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{x+3} \leq \dfrac{2x}{x^2-9} \end{array}\right.$$

легко знаходиться як об'єднання розв'язків кожної з нерівностей (див. рис. 6): $x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$. Перевірте це.

4.4. Розв'язування нерівностей, що містять знак модуля

<u>Означення 4.8.</u> *Абсолютною величиною, або модулем числа a називається саме число a, якщо $a \geq 0$, та $-a$, якщо $a < 0$. Або:*

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0 \\ 0, \text{ якщо } a = 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}.$$

Досить важливим поняттям при оперуванні виразами зі знаком модуля є геометрична інтерпретація модуля, або абсолютної величини числа. З'ясуємо це.

<u>Зауваження 4.1.8.</u> Нехай дано рівняння:

$$|x-2| = 4.$$

Геометричною мовою його можна переказати так: треба на числовій прямій знайти всі точки x, відстань яких від точки 2 дорівнює 4. Очевидно, що тут ми маємо два розв'язки: $x_1 = -2, x_2 = 6$ (див. рис. 7). Розглянемо нерівність:

$$|x-2| < 4.$$

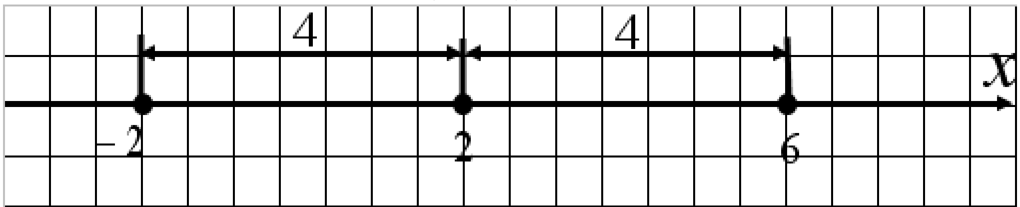


Рис. 7

Геометричною мовою цей запис можна сформулювати так: треба знайти на числовій прямій всі точки x, відстань яких від точки 2 менше, ніж 4. Очевидно, що тут ми маємо такі розв'язки: $x \in (-2, 6)$ (див. рис. 7). Геометричною мовою запис

$$|x-2| > 4$$

можна сформулювати так: треба знайти на числовій прямій такі всі точки x, відстань яких від точки 2 більше, ніж 4. Тут ми маємо такі розв'язки: $x \in (-\infty, -2) \cup (6; +\infty)$ (див. рис. 7).

Інколи геометричне тлумачення поняття модуля суттєво допомагає та спрощує розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем. Зазначимо, що розв'язування подібних нестрогих нерівностей відрізняється лише тим, що до розв'язків слід додати межі.

<u>Зауваження 4.1.9.</u> Нехай дано нерівність:

$$|f(x)| < a,$$

де $f(x)$ – деяка функція від змінної x. Дана нерівність буде рівносильною такій системі умов:

$$\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}.$$

Інколи таку систему умов записують у вигляді подвійної нерівності:

$$-a < f(x) < a.$$

<u>Зауваження 4.1.10.</u> Нехай дано нерівність:

$$|f(x)| > a.$$

Вона буде рівносильною такій сукупності умов:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right..$$

<u>Зауваження 4.1.11.</u> У загальному випадку при розв'язуванні рівнянь або нерівностей, що містять знак модуля, слід розбити область допустимих значень змінної рівняння або нерівності на множини, на кожній з яких вирази, що містяться під знаком модуля, зберігають знак. На кожній такій множині рівняння чи нерівність треба розв'язати і отримані розв'язки об'єднати у множину розв'язків вихідного рівняння чи нерівності. Такий спосіб розв'язування носить назву *розв'язування рівняння чи нерівності на проміжках*. Враховуючи ідентичність дій по розв'язуванню рівнянь у подальшому викладі розглянемо лише приклади розв'язування нерівностей, що містять абсолютну величину.

<u>Приклад 4.13.</u> Розв'язати нерівність:

$$\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \le 1.$$

Розв'язання. Використаємо зауваження 4.1.9. Вихідна нерівність буде рівносильною системі нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2} \le 1 \\ \dfrac{x+4}{x+2} \ge -1 \end{cases}.$$

Розв'язування цієї системи нерівностей проведемо так само, як ми це робили у прикладі 4.12, розв'язавши кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайшовши їх спільний розв'язок. Отже, система нерівностей буде рівносильною такій системі:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+2} \le 0 \\ \dfrac{2\cdot(x+3)}{x+2} \ge 0 \end{cases}.$$

Перша нерівність системи буде мати розв'язок $x \in (-\infty; -2)$, а друга нерівність системи буде рівносильною такій системі умов:

$$\begin{cases} 2\cdot(x+3)\cdot(x+2)\ge 0 \\ x+2\ne 0 \end{cases},$$

а тому матиме розв'язки: $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;+\infty)$. Знайдемо переріз отриманих розв'язків, проілюструвавши їх на рис. 8. Отримаємо: $x\in(-\infty;-3]$.

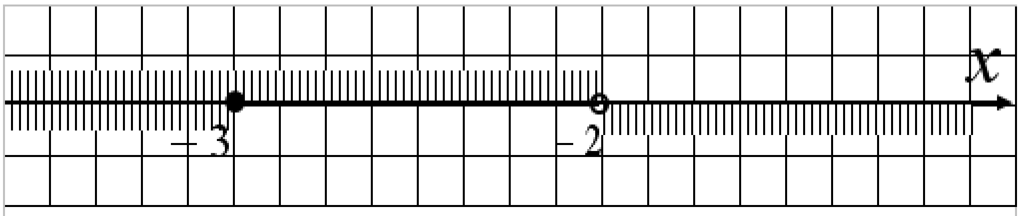


Рис. 8

<u>Приклад 4.14.</u> Розв'язати нерівність:

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>1.$$

Розв'язання. Використаємо зауваження 4.1.10. Вихідна нерівність буде рівносильною сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}<-1 \end{array}\right..$$

Розв'язування цієї сукупності нерівностей проведемо так само, як ми це робили у примітці до прикладу 4.12, розв'язавши кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайшовши їх загальний розв'язок як об'єднання розв'язків обох нерівностей. Отже, сукупність нерівностей буде рівносильною такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-6x}{x^2+3x+2}>0 \\ \dfrac{2x^2+4}{x^2+3x+2}<0 \end{array}\right..$$

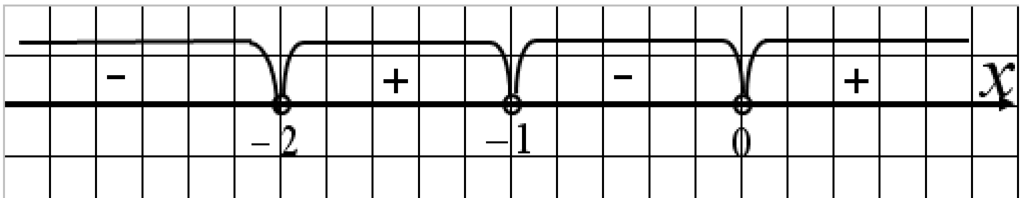


Рис. 9

Перша нерівність сукупності є рівносильною такій нерівності (див. зауваження 4.1.7 та 4.1.9):

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)<0,$$

розв'язком якої буде множина $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$ (див. рис. 9). Друга нерівність сукупності згідно тих же зауважень рівносильна нерівності:

$$\left(x+1\right)\cdot\left(x+2\right)<0,$$

розв'язком якої буде $x\in\left(-2;\,-1\right)$. Знайдемо об'єднання отриманих розв'язків, скориставшись ілюстрацією (рис. 10). Отримаємо відповідь: $x\in\left(-\infty;\,-2\right)\cup\left(-2;\,-1\right)\cup\left(-1;\,0\right)$.

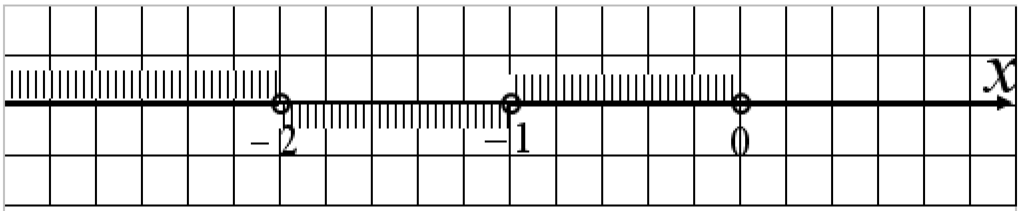


Рис. 10

<u>Приклад 4.15.</u> Розв'язати нерівність:

$$\left|x^2-6x+8\right|<5x-x^2.$$

Розв'язання. Використаємо зауваження 4.1.9. Вихідна нерівність буде рівносильною системі нерівностей:

$$\begin{cases}x^2-6x+8<5x-x^2\\ x^2-6x+8>-\left(5x-x^2\right)\end{cases}.$$

Розв'язування цієї системи нерівностей проведемо так само, як ми це робили у попередніх вправах, розв'язавши кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайшовши їх спільний розв'язок. Отже, система нерівностей буде рівносильною такій системі:

$$\begin{cases}2x^2-11x+8<0\\ -x+8>0\end{cases},$$

або:

$$\begin{cases}2\cdot\left(x-\dfrac{11-\sqrt{57}}{4}\right)\cdot\left(x-\dfrac{11+\sqrt{57}}{4}\right)<0\\ x<8\end{cases}.$$

Розв'язком першої нерівності системи є множина $x\in\left(\dfrac{11-\sqrt{57}}{4};\,\dfrac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$, а другої – проміжок $x\in\left(-\infty;\,8\right)$. Знайшовши переріз цих двох множин, отримаємо відповідь до вправи: $x\in\left(\dfrac{11-\sqrt{57}}{4};\,\dfrac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$.

<u>Приклад 4.16.</u> Розв'язати нерівність:

$$\left|\left|x-1\right|-5\right|\le 2.$$

Розв'язання. Використаємо зауваження 4.1.9. Вихідна нерівність буде рівносильною системі нерівностей:

$$\begin{cases} |x-1|-5 \le 2 \\ |x-1|-5 \ge -2 \end{cases}.$$

або:

$$\begin{cases} |x-1| \le 7 \\ |x-1| \ge 3 \end{cases}.$$

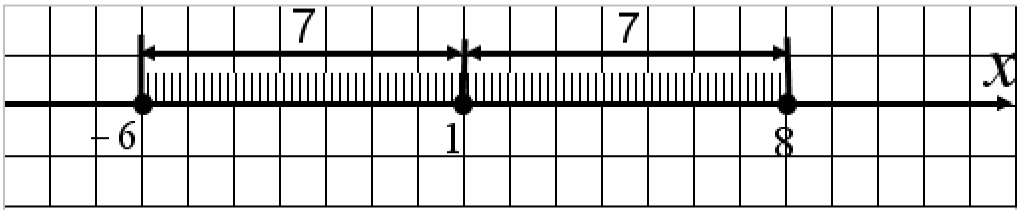


Рис. 11

Для спрощення подальшого розв'язування скористаємося зауваженням 4.1.8. Першу нерівність системи можна перефразувати так: знайти на осі Ox такий проміжок, кожна точка якого знаходиться від точки 1 на відстані не більшій, ніж 7. Тому розв'язком першої нерівності системи буде проміжок (див. рис. 11): $x \in [-6;\, 8]$. Аналогічно, другу нерівність системи можна переформулювати так: знайти на осі Ox такий проміжок, кожна точка якого знаходиться від точки 1 на відстані не меншій, ніж 3. Тому розв'язком другої нерівності системи буде проміжок (див. рис. 12): $x \in (-\infty;\, -2] \cup [4;\, +\infty)$.

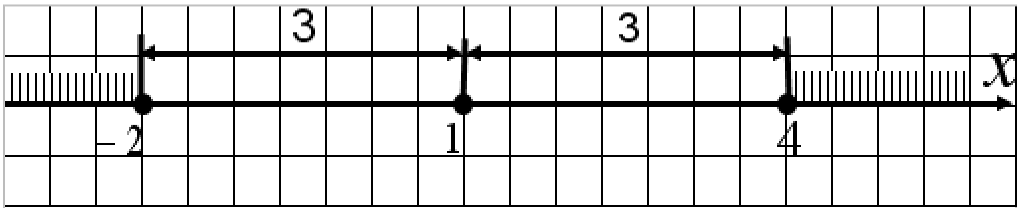


Рис. 12

Знайшовши переріз цих розв'язків, отримаємо відповідь до вихідної нерівності (див. рис. 13): $x \in [-6;\, -2] \cup [4;\, 8]$.

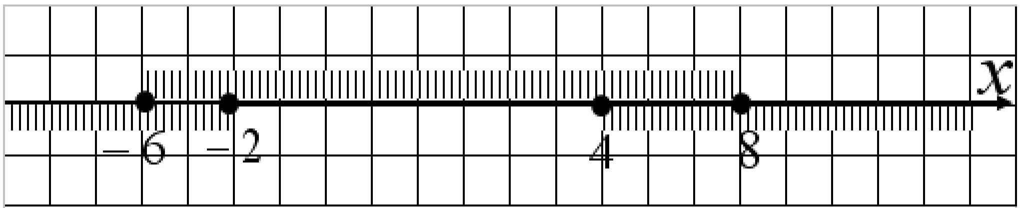


Рис. 13

Приклад 4.17. Розв'язати нерівність:

$$|x-3| + |x+1| \ge |2x-2|.$$

Розв'язання. Використаємо зауваження 4.1.11. Розіб'ємо область допустимих значень змінної нерівності на множини, на кожній з яких вирази, що містяться під знаком модуля, зберігають знак. Для цього визначимо ті значення змінної, при яких вирази під знаком модуля перетворюються в 0. Легко бачити, що це $x = -1,\ x = 1,\ x = 3$. Позначимо ці точки на осі Ox, виділимо проміжки, на які вказані точки розбили числову вісь Ox та визначимо знаки виразів, що містяться під знаком модуля, на кожному з визначених проміжків. Результати цього дослідження зобразимо на рис. 14 (знаки виразів, що містяться під знаком модуля, на рисунку зображуються позначками «+» або «–» і відповідають послідовному запису цих виразів у вихідній нерівності). В подальшому ми будемо розв'язувати вихідну нерівність на кожному з визначених проміжків.

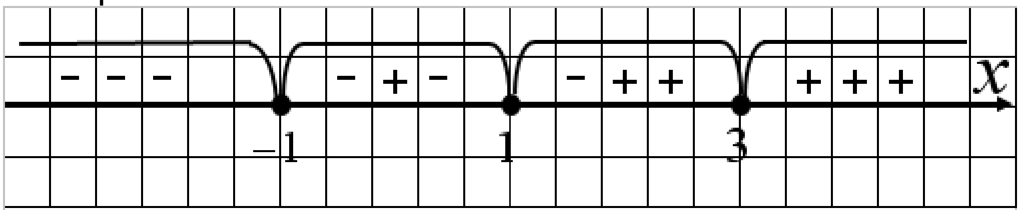


Рис. 14

Розв'яжемо вихідну нерівність на проміжку $x \in (-\infty; -1]$. Як бачимо з рис. 14, всі вирази, що містяться під знаком модуля, на цьому проміжку є від'ємними. Тому вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$-(x-3)-(x+1) \geq -(2x-2),$$

або:

$$0 \geq 0.$$

Ми отримали тотожність, отже, всі точки проміжку $x \in (-\infty; -1]$ є розв'язками вихідної нерівності.

Розв'яжемо вихідну нерівність на проміжку $x \in (-1; 1]$. Як бачимо з рис. 14, вирази $x-3$ та $2x-2$ набувають на цьому проміжку від'ємних значень, а вираз $x+1$ – додатних. Тому вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$-(x-3)+(x+1) \geq -(2x-2),$$

або після спрощення:

$$x \geq -1 \text{ тобто } x \in [-1; +\infty).$$

Це означає, що на проміжку $x \in (-1; 1]$ нерівність буде мати розв'язок $x \in [-1; +\infty)$. Для остаточного запису розв'язку у такому випадку треба знайти переріз цих двох проміжків. Отримаємо відповідь: $x \in (-1; 1]$.

Розв'яжемо вихідну нерівність на проміжку $x \in (1; 3]$. З врахуванням знаків виразів, що містяться під знаком модуля, вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$-(x-3)+(x+1) \geq 2x-2,$$

або після спрощення:

$$-2x+6 \geq 0 \text{ тобто } x \in (-\infty; 3].$$

Отже, розв'язком нерівності в цьому випадку буде ввесь проміжок $x \in (1; 3]$.

Розв'яжемо вихідну нерівність на проміжку $x \in (3;+\infty)$. З урахуванням знаків виразів, що містяться під знаком модуля, вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$(x-3)+(x+1) \ge 2x-2,$$

або після спрощення:

$$0 \ge 0.$$

Ми знову отримали тотожність, отже, всі точки проміжку $x \in (3;+\infty)$ є розв'язками вихідної нерівності.

Щоб знайти загальний розв'язок вихідної нерівності, треба отримані на кожному з проміжків розв'язки об'єднати (див. зауваження 4.1.11). Отже, вихідна нерівність справджується при $x \in R$.

Приклад 4.18. Розв'язати нерівність:

$$\frac{3}{|x+3|-1} \ge |x+2|.$$

Розв'язання. Використаємо знову зауваження 4.1.11. Розіб'ємо область допустимих значень змінної нерівності на множини, на кожній з яких вирази, що містяться під знаком модуля, зберігають знак. Для цього визначимо ті значення змінної, при яких вирази під знаком модуля перетворюються в 0. Це $x=-3,\ x=-2$. Позначимо ці точки на осі Ox, виділимо проміжки, на які вказані точки розбили числову вісь Ox та визначимо знаки виразів, що містяться під знаком модуля, на кожному з визначених проміжків. Результати цього дослідження зобразимо на рис. 15. Розв'яжемо вихідну нерівність на кожному з визначених проміжків.

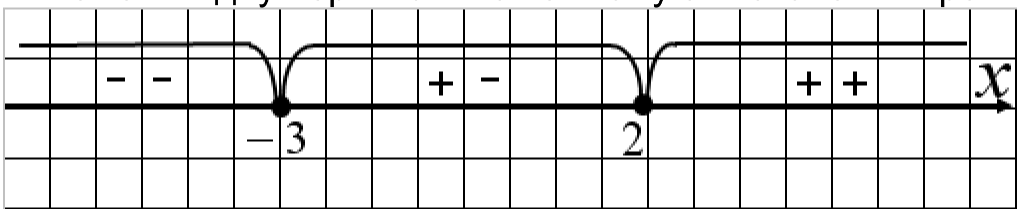


Рис. 15

Нехай $x \in (-\infty;-3]$. З врахуванням знаків виразів, що містяться під знаком модуля, вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$\frac{3}{-(x+3)-1} \ge -(x+2),$$

або після спрощення:

$$\frac{x^2+6x+5}{x+4} \ge 0.$$

Розкладемо на множники чисельник лівої частини та, скориставшись зауваженням 4.1.7, отримаємо рівносильну систему умов:

$$\begin{cases} (x+5)\cdot(x+1)\cdot(x+4) \ge 0 \\ x+4 \ne 0 \end{cases}.$$

Проілюструвавши розв'язування цієї системи умов на рис. 16, отримаємо, що $x \in [-5; -4) \cup [-1; +\infty)$. Врахувавши проміжок $x \in (-\infty; -3]$, на якому ми розв'язуємо нерівність, отримаємо відповідь для цього випадку (див. рис. 16): $x \in [-5; -4)$.

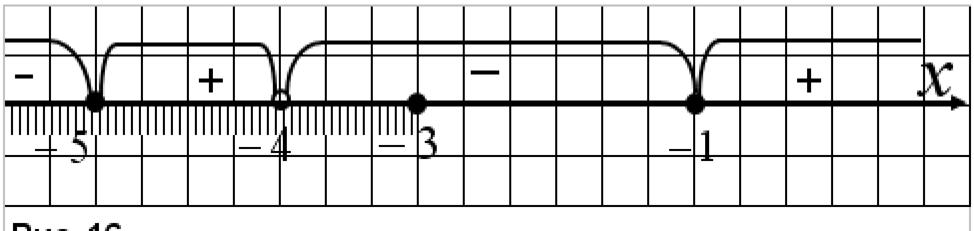


Рис. 16

Нехай $x \in (-3; -2]$. З врахуванням знаків виразів, що містяться під знаком модуля (див. рис. 15), вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$\frac{3}{(x+3)-1} \geq -(x+2),$$

або після спрощення:

$$\frac{x^2+4x+7}{x+2} \geq 0.$$

Врахувавши, що $x^2+4x+7>0$ для всіх значень змінної, отримаємо розв'язок попередньої нерівності:

$$x > -2 \text{ або } x \in (-2; +\infty).$$

Врахувавши проміжок $x \in (-3; -2]$, на якому ми розв'язуємо нерівність, отримаємо відповідь для цього випадку: $x \in \varnothing$.

Нехай $x \in (-3; +\infty)$. З врахуванням знаків виразів, що містяться під знаком модуля, вихідна нерівність на цьому проміжку буде рівносильною такій нерівності:

$$\frac{3}{(x+3)-1} \geq (x+2),$$

або після спрощення:

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} \leq 0.$$

Розкладемо на множники чисельник лівої частини та, скориставшись зауваженням 4.1.7, отримаємо рівносильну систему умов:

$$\begin{cases} \left(x-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)\cdot(x+2) \leq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}.$$

Проілюструвавши розв'язування цієї системи умов на рис. 17, отримаємо, що $x \in \left(-\infty; -2-\sqrt{3}\right] \cup \left(-2; -2+\sqrt{3}\right]$. Врахувавши проміжок $x \in (-3; +\infty)$, на якому ми розв'язуємо нерівність, отримаємо відповідь для цього випадку (див. рис. 17): $x \in \left(-2; -2+\sqrt{3}\right]$.

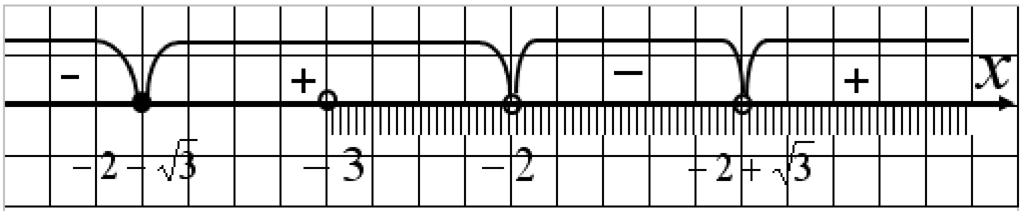


Рис. 17

Для знаходження загального розв'язку вихідної нерівності треба отримані на кожному з проміжків розв'язки об'єднати (див. зауваження 4.1.11). Отже, вихідна нерівність справджується при $x \in [-5; -4) \cup \left(-2; -2+\sqrt{3}\,\right]$.

4.5. Розв'язування нерівностей з параметрами

Розв'язати нерівність (або рівняння) з параметром означає знайти її розв'язки у залежності від зміни параметра. Як правило, для надання досконалості записів та витримки логіки дослідження при записі відповіді показують залежність розв'язків нерівності (рівняння) від зміни параметра від $-\infty$ до $+\infty$. Нерівності з параметрами не мають загальних способів розв'язання. Кожна нерівність розв'язується своїм методом. У цьому пункті ми розглянемо розв'язання нерівностей з параметрами, які мають загальний вигляд:

$$f(a)\cdot x^2 + g(a)\cdot x + h(a) > 0 \text{ (або } < 0;\ \geq 0;\ \leq 0\text{)}, \qquad (4.4)$$

де $f(a), g(a), h(a)$ – деякі функції від параметра a. При розв'язуванні таких нерівностей ми будемо керуватися зауваженнями 4.1.4, 4.1.5 та таблицею 1.

<u>Примітка.</u> Розв'язування рівнянь з параметром типу:

$$f(a)\cdot x^2 + g(a)\cdot x + h(a) = 0,$$

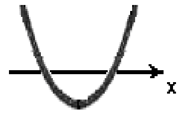
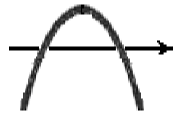
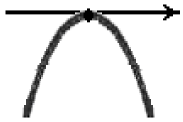
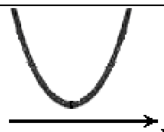
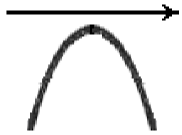
де $f(a), g(a), h(a)$ – деякі функції від параметра a, є порівняно з розв'язуванням подібних нерівностей типу (4.4) набагато простішою процедурою, тому ми пропонуємо читачам самостійно опрацювати розв'язування рівнянь з параметром після вивчення змісту цього пункту.

Розглянемо основні прийоми розв'язування нерівностей з параметром типу (4.4) на прикладах.

<u>Приклад 4.19.</u> Розв'язати нерівність:

$$a\cdot x^2 + 4x - 5 - a < 0.$$

Розв'язання. Використаємо для розв'язування таблицю 1. Очевидно, що для випадку $ax^2 + bx + c < 0$ вона набуде іншого вигляду (див. таблицю 2):

	$a>0$	$a<0$
$D>0$	 $x\in(x_1;x_2)$	 $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
$D=0$	 $x\in\varnothing$	 $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$
$D<0$	 $x\in\varnothing$	 $x\in R$

Таблиця 2. Розв'язування нерівності $ax^2+bx+c<0$.

Розділимо розв'язування на етапи у залежності від коефіцієнта при x^2 у лівій частині нерівності.

Перший етап. Нехай $a>0$. Згідно таблиці 2 ми маємо розглянути три варіанти.

Перший варіант. Нехай $D=4^2+4\cdot a\cdot(5+a)=4\cdot(a^2+5a+4)>0$. Ця умова виконується при $a\in(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$. Враховуючи межі зміни параметра, при якому ми розглядаємо даний випадок ($a\in(0;+\infty)$), та факт існування коренів тричлена $a\cdot x^2+4x-5-a$, які виражаються так:

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a};\ x_2=\frac{-2-\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a}$$

(очевидно, що при $a>0$ $x_2<x_1$), ми можемо записати розв'язки вихідної нерівності для $a\in(0;+\infty)$ (див. таблицю 2):

$$x\in\left(\frac{-2-\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a};\frac{-2+\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a}\right).$$

Другий варіант. Нехай $D=4\cdot(a^2+5a+4)=0$, тобто $a=-4$ або $a=-1$. Врахувавши умову $a>0$, стверджуємо, що в цьому варіанті нерівність розв'язків не матиме..

Третій варіант. Нехай $D=4\cdot(a^2+5a+4)<0$, тобто $a\in(-4;-1)$. Врахувавши умову $a>0$, стверджуємо, що і в цьому варіанті нерівність розв'язків не матиме.

Другий етап. Нехай $a=0$. Звертаємо увагу читача, що при розв'язуванні квадратичних нерівностей з параметром типу (4.4) ми обов'язково маємо розглянути випадок, коли коефіцієнт при старшому члені дорівнює нулеві. Тільки так наш розв'язок буде повним (ось чому нам знадобилося посилання на зауваження 4.1.4). Отже, при $a=0$ вихідна нерівність набуває вигляду:

$$4x-5<0,$$

а тому її розв'язком буде проміжок $x\in\left(-\infty;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

Третій етап. Нехай $a<0$. Знову згідно таблиці 2 ми маємо розглянути три варіанти.

Перший варіант. Нехай $D=4\cdot\left(a^2+5a+4\right)>0$. Ця умова виконується при $a\in(-\infty;\,-4)\cup(-1;\,+\infty)$. Враховуючи факт існування коренів тричлена $a\cdot x^2+4x-5-a$ (очевидно, що при $a<0$ $x_2>x_1$), ми можемо записати розв'язки вихідної нерівності для $a\in(-\infty;-4)\cup(-1;0)$ (див. таблицю 2):

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{-2+\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a}\right)\cup\left(\frac{-2-\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a};+\infty\right).$$

Другий варіант. Нехай $D=4\cdot\left(a^2+5a+4\right)=0$, тобто $a=-4$ або $a=-1$. Тоді маємо такі розв'язки вихідної нерівності (див. таблицю 2):

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{-2}{a}\right)\cup\left(\frac{-2}{a};+\infty\right).$$

Третій варіант. Нехай $D=4\cdot\left(a^2+5a+4\right)<0$, тобто $a\in(-4;\,-1)$. Тоді маємо згідно таблиці 2 $x\in R$.

Отже, загальний розв'язок вихідної нерівності можна записати у такому вигляді (не забуваємо для надання запису логічності та акуратності задати зміну параметра a у межах від $-\infty$ до $+\infty$):

$$x\in\begin{cases}\left(-\infty;\ \dfrac{-2+\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a}\right)\cup\left(\dfrac{-2-\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a};+\infty\right) & при\ a\in(-\infty;\,-4)\cup(-1;\,0)\\ \left(-\infty;\ \dfrac{-2}{a}\right)\cup\left(\dfrac{-2}{a};+\infty\right) & при\ a=-4\ або\ a=-1\\ R & при\ a\in(-4;\,-1)\\ \left(-\infty;\ \dfrac{5}{4}\right) & при\ a=0\\ \left(\dfrac{-2-\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a};\ \dfrac{-2+\sqrt{(a+4)\cdot(a+1)}}{a}\right) & при\ a\in(0;\,+\infty)\end{cases}$$

<u>Приклад 4.20.</u> Розв'язати нерівність:

$$(a-2)\cdot x^2-2(a+3)\cdot x+4a>0.$$

Розв'язання. Використаємо для розв'язування таблицю 1. Розділимо розв'язування на етапи у залежності від коефіцієнта при x^2 у лівій частині нерівності.

Перший етап. Нехай $a-2>0$. Згідно таблиці 1 ми маємо розглянути три варіанти.

Перший варіант. Нехай:

$$D = 4(a+3)^2 - 16a(a-2) = -4(3a^2 - 14a - 9) > 0.$$

Ця умова виконується при $a \in \left(\frac{7-2\sqrt{19}}{3}; \frac{7+2\sqrt{19}}{3} \right)$. Враховуючи межі зміни параметру, при якому ми розглядаємо даний випадок ($a \in (2; +\infty)$), та факт існування коренів тричлена $(a-2) \cdot x^2 - 2(a+3) \cdot x + 4a$, які виражаються так:

$$x_1 = \frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}; \; x_2 = \frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}$$

(очевидно, що при $a>2$ $x_2 > x_1$), ми можемо записати розв'язки вихідної нерівності для $a \in \left(2; \frac{7+2\sqrt{19}}{3} \right)$ (див. таблицю 1):

$$x \in \left(-\infty; \frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2} \right) \cup \left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}; +\infty \right).$$

Другий варіант. Нехай $D = -4(3a^2 - 14a - 9) = 0$, тобто $a = \frac{7+2\sqrt{19}}{3}$ (з врахуванням умови $a>2$). Очевидно, що в цьому випадку нерівність має такі розв'язки (див. таблицю 1):

$$x \in \left(-\infty; \frac{a+3}{a-2} \right) \cup \left(\frac{a+3}{a-2}; +\infty \right).$$

Третій варіант. Нехай $D = -4(3a^2 - 14a - 9) < 0$, тобто $a \in \left(-\infty; \frac{7-2\sqrt{19}}{3} \right) \cup \left(\frac{7+2\sqrt{19}}{3}; +\infty \right)$. Врахувавши умову $a>2$, маємо, що при $a \in \left(\frac{7+2\sqrt{19}}{3}; +\infty \right)$ нерівність має розв'язки (див. таблицю 1): $x \in R$.

Другий етап. Нехай $a=2$. Тоді вихідна нерівність набуває вигляду:

$$-10x + 8 > 0,$$

а тому її розв'язком буде проміжок $x \in \left(-\infty; \frac{4}{5} \right)$.

Третій етап. Нехай $a<2$. Знову згідно таблиці 1 ми маємо розглянути три варіанти.

Перший варіант. Нехай $D=-4(3a^2-14a-9)>0$. Ця умова виконується при $a\in\left(\frac{7-2\sqrt{19}}{3};\frac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)$. Враховуючи межі зміни параметру $a\in(-\infty;\,2)$ та факт існування коренів тричлена $a\cdot x^2+4x-5-a$ (очевидно, що при $a<2$ $x_2<x_1$), ми можемо записати розв'язки вихідної нерівності для $a\in\left(\frac{7-2\sqrt{19}}{3};2\right)$ (див. таблицю 1):

$$x\in\left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};\frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right).$$

Другий варіант. Нехай $D=-4(3a^2-14a-9)=0$, тобто $a=\frac{7-2\sqrt{19}}{3}$ (з врахуванням умови $a<2$). Тоді маємо згідно таблиці 1 $x\in\varnothing$.

Третій варіант. Нехай $D=-4(3a^2-14a-9)<0$, тобто $a\in\left(-\infty;\frac{7-2\sqrt{19}}{3}\right)\cup\left(\frac{7+2\sqrt{19}}{3};+\infty\right)$. Тоді маємо з врахуванням умови $a\in(-\infty;\,2)$ та згідно таблиці 1, що при $a\in\left(-\infty;\frac{7-2\sqrt{19}}{3}\right)$ $x\in\varnothing$.

Отже, загальний розв'язок вихідної нерівності можна записати у такому вигляді:

$$x\in\begin{cases}\varnothing\ \textit{при}\ a\in\left(-\infty;\ \frac{7-2\sqrt{19}}{3}\right]\\ \left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};\frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right)\ \textit{при}\ a\in\left(\frac{7-2\sqrt{19}}{3};\ 2\right)\\ \left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right)\ \textit{при}\ a=2\\ \left(-\infty;\ \frac{a+3-\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2}\right)\cup\left(\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+14a+9}}{a-2};\ +\infty\right)\\ \qquad\qquad\textit{при}\ a\in\left(2;\ \frac{7+2\sqrt{19}}{3}\right)\\ \left(-\infty;\frac{a+3}{a-2}\right)\cup\left(\frac{a+3}{a-2};+\infty\right)\ \textit{при}\ a=\frac{7+2\sqrt{19}}{3}\\ R\ \textit{при}\ a\in\left(\frac{7+2\sqrt{19}}{3};\ +\infty\right)\end{cases}$$

Приклад 4.21. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x+a}{2}-\frac{2}{x+a}>\frac{x-a}{2}.$$

Розв'язання. Перетворимо нерівність до вигляду:

$$\frac{ax+a^2-2}{x+a}>0.$$

При $a\neq 0$ нерівність можна записати так:

$$\frac{a\cdot\left(x-\frac{2-a^2}{a}\right)}{x+a}>0.$$

Тепер розглянемо випадки. Остання нерівність при $a>0$ рівносильна нерівності:

$$\frac{x-\frac{2-a^2}{a}}{x+a}>0.$$

Легко перевірити, що при $a>0$ виконується $-a<\frac{2-a^2}{a}$, тому, розв'язуючи нерівність методом інтервалів, отримаємо відповідь:

$$x\in(-\infty,-a)\cup\left(\frac{2-a^2}{a},+\infty\right).$$

При $a<0$ початкова нерівність рівносильна нерівності:

$$\frac{x-\frac{2-a^2}{a}}{x+2}<0.$$

Аналогічно, при $a<0$ виконується $-a>\frac{2-a^2}{a}$. Тому розв'язок вихідної нерівності у цьому випадку має вигляд:

$$x\in\left(\frac{2-a^2}{a},-a\right).$$

При $a=0$ початкова нерівність набуває вигляду:

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{x}>\frac{x}{2}\ \text{або}\ \frac{2}{x}<0,$$

звідки випливає, що $x\in(-\infty;\,0)$. Отже, відповідь до вправи може бути записана так:

$$x \in \begin{cases} \left(\dfrac{2-a^2}{a}, -a \right) \ \text{при} \ \ a \in (-\infty;\ 0) \\ (-\infty;\ 0) \ \text{при} \ \ a = 0 \\ (-\infty, -a) \cup \left(\dfrac{2-a^2}{a}, +\infty \right) \ \text{при} \ \ a \in (0;\ +\infty) \end{cases}.$$

<u>Приклад 4.22.</u> Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Запропонуємо ще один спосіб розв'язування нерівностей з параметром виду (4.4), який ґрунтується на використанні властивостей квадратичної функції та графічному представленні розв'язків. Побудуємо у системі координат xOa графіки кожної з нерівностей, що входить до системи. Для цього проведемо перетворення над нерівностями, розклавши їх ліві частини на множники за коренями тричленів. Отримаємо таку рівносильну систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x-a)\cdot(x-1) < 0 \\ (x+a)\cdot(x+3) < 0 \end{cases}.$$

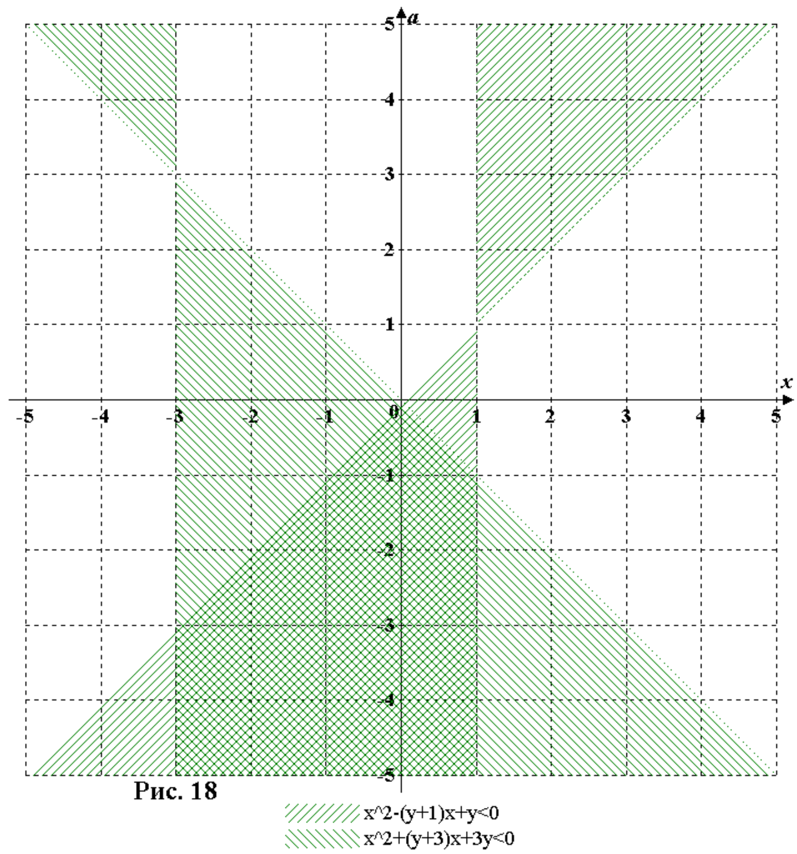


Рис. 18

Побудовані графіки нерівностей зображені на рис. 18. Очевидно, що для знаходження розв'язків вихідної системи треба знайти переріз множин розв'язків кожної нерівності. Для наочності проілюструємо це графічно. Зобразимо в системі координат xOa графіки функцій $a = x$ і $a = -x$, та ліній $x = -3$ і $x = 1$, позначимо розв'язки першої нерівності штриховою з нахилом вліво, а розв'язки другої нерівності штриховкою з нахилом вправо. В результаті буде легко побачити спільний розв'язок цієї системи нерівностей як переріз заштрихованих множин (рис. 18).

Отже, розв’язок вихідної системи нерівностей тепер легко описати аналітично, рухаючи уявну лінію $a=\alpha$ знизу вгору по осі Oa.

$$x\in\begin{cases}(-3;\ 1)\ при\ \ a\in(-\infty;\ -3)\\ (a;\ 1)\ при\ \ a\in[-3;\ -1)\\ (a;\ -a)\ при\ \ a\in[-1;\ 0)\\ \varnothing\ \ при\ \ a\in[0;\ +\infty)\end{cases}.$$

<u>Приклад 4.23.</u> Розв’язати нерівність:

$$\left|x^2-1\right|\ge a.$$

Розв’язання. Розв’яжемо цю нерівність з модулем та параметром, використавши властивості квадратичної функції та побудувавши графік цієї нерівності. Побудуємо у системі координат xOa графік функції $a=\left|x^2-1\right|$, врахуємо, що точки, які відповідають умові $a\le\left|x^2-1\right|$ лежать нижче графіка цієї функції. Результат побудови можна побачити на рис. 19 (область координатної площини, що відповідає розв’язкам нерівності, на рисунку заштрихована).

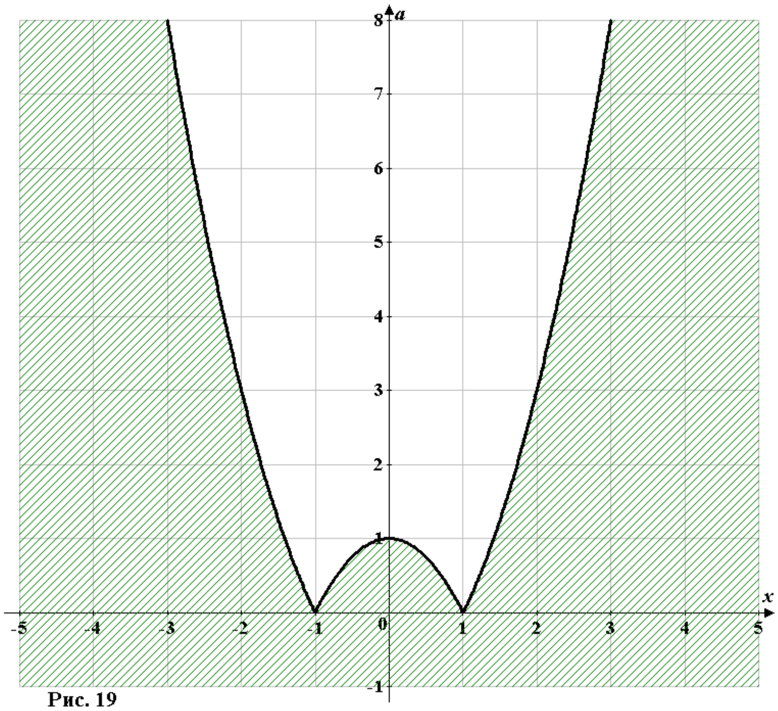


Рис. 19

З метою уточнення властивостей функції $a=\left|x^2-1\right|$ зазначимо, що при $a\in(0;\ 1)$ рівняння $a-\left|x^2-1\right|=0$ має чотири розв’язки: $x_{1,2}=\pm\sqrt{1-a}$ для $-1<x<1$ та $x_{3,4}=\pm\sqrt{a+1}$ для $x<-1$ або $x>1$.

Отже, розв’язок вихідної нерівності тепер легко аналогічно до попередньої вправи описати аналітично, рухаючи уявну лінію $a=\alpha$ знизу вгору по осі Oa.

$$x\in\begin{cases}R\ \ при\ \ a\in(-\infty;\ 0]\\ \left(-\infty;\ -\sqrt{a+1}\right]\cup\left[-\sqrt{1-a};\ \sqrt{1-a}\right]\cup\left[\sqrt{a+1};\ +\infty\right)\ при\ \ a\in(0;\ 1)\\ \left(-\infty;\ -\sqrt{a+1}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{a+1};\ +\infty\right)\ при\ \ a=1\\ \left(-\infty;\ -\sqrt{a+1}\right]\cup\left[\sqrt{a+1};\ +\infty\right)\ при\ \ a\in(1;\ +\infty)\end{cases}$$

Вправи до § 4

4.1. Використовуючи метод інтервалів, розв'язати нерівність: $\dfrac{3x^3-5x-2}{x^2-10x-9}<0$.

Вказівка. Розкладіть на множники чисельник і знаменник, врахуйте область допустимих значень з x.

Відповідь: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(5-\sqrt{34};\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{33}}{6};\ 5+\sqrt{34}\right)$.

4.2. Розв'язати нерівність: $\dfrac{-7x^3+9x+2}{x^2-10x+9}\le 0$.

Відповідь: $x\in\left[-1;\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{105}}{14}\right]\cup\left(1;\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{105}}{14}\right]\cup(9;\infty)$.

4.3. Розв'язати нерівність: $\dfrac{-2x^3+9x+7}{-5x^3+7x+2}\le 0$.

Відповідь: $x\in\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2};\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{65}}{10}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{65}}{10};\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right]$.

4.4. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^3-8x+7}{2x^3+5x+7}\le 0$.

Відповідь: $x\in\left[-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{29}}{2};-1\right)\cup\left[1;-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{29}}{2}\right]$.

4.5. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4+x^3-15x^2+23x-10}{2x^3+5x+7}<0$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(1;\ 2)$.

4.6. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4+4x^3+2x^2-4x-3}{x^2+6x+5}\ge 0$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup[-3;-1)\cup[1;\infty)$

4.7. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4+x^3-x^2-x}{x^3+7x^2+11x+5}\ge 0$.

Відповідь: $x\in(-5;\ -1)\cup(-1;0]\cup[1;\infty)$

4.8. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4+4x^3-18x^2+20x-7}{x^2+7x-8}\le 0$.

Відповідь: $x\in(-8;-7]$.

4.9. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^2-3x+2}\le 0$.

Відповідь: $x \in [-2;1) \cup (1;2)$.

4.10. Розв'язати нерівність: $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8)(x^2 - x - 2) < 0$.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

4.11. Розв'язати нерівність: $|x-2| - 3|x+1| + 7|2x-5| \le 16$.

Вказівка. Знайдіть нулі підмодульних виразів і перейдіть до розв'язування нерівності на проміжках знакосталості підмодульних виразів.

Відповідь: $x \in \left[1; \dfrac{14}{3}\right]$.

4.12. Розв'язати нерівність: $|x+3||x-1| - 20|x-4| \le 21$.

Відповідь: $x \in [-26;14]$.

4.13. Розв'язати нерівність: $\dfrac{7|x+3| - 2|x^2-4|}{|x+1|} < 11$.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \dfrac{-9+\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{10}; \infty\right)$.

4.13. Розв'язати нерівність: $11 \le \dfrac{3|x+5| - |x^2-1|}{|x+1| - 2}$.

Вказівка. Врахуйте область допустимих значень виразу.

Відповідь: $x \in \left(-3; 7-7\sqrt{2}\right] \cup \left(1; -4+\sqrt{43}\right]$.

4.14. Розв'язати нерівність: $|x^2 - 3x - 2| + |x^2 - 4| \le 4$.

Відповідь: $x \in \left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\}$.

4.15. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} |x| + 2|y| = 5, \\ |x| - |y| = 2. \end{cases}$.

Вказівка. Врахуйте симетрію відносно осей координат і початку координат.

Відповідь: $(-3;-1); (-3;1); (3;-1); (3;1)$.

4.16. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 - 2|y| = 12, \\ |x| - |y| = 2. \end{cases}$.

Вказівка. Врахуйте симетрію відносно осей координат і початку координат або зведіть до квадратного рівняння відносно $|x|$.

Відповідь: $(-4;-2); (-4;2); (4;-2); (4;2)$.

Вправи для самостійного розв’язування.

У цьому розділі ми пропонуємо вправи для контролю отриманих умінь. У лівій частині таблиці вказана умова вправи, а у правій – лише відповідь без вказівок з розв’язання. Не забувайте, що консультації з розв’язання вправ можна отримати у рамках навчання у заочній фізико-математичній школі.

Умова	Відповідь
1. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $7-\sqrt{3}$	$x^2-14x+46=0$
2. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $2+\sqrt{5}$	$x^2-4x-1=0$
3. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $6-2\sqrt{3}$	$x^2-12x+24=0$
4. Скласти зведене квадратне рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює $2-\sqrt{3}$	$x^2-4x+1=0$
5. Розв’язати рівняння $x^6-26x^3-27=0$ у множині R	$x\in\{-1;\ 3\}$
6. Розв’язати рівняння $x^{10}-33x^5+32=0$ у множині R	$x\in\{1;\ 2\}$
7. Розв’язати рівняння $4x^4-5x^2+1=0$ у множині R дійсних чисел	$x\in\left\{\pm\frac{1}{2};\pm1\right\}$
8. Розв’язати рівняння $5x^4-11x^2+6=0$ у множині R дійсних чисел	$x\in\left\{\pm1;\pm\frac{\sqrt{30}}{5}\right\}$
9. Знайти дійсні розв’язки рівняння: $4x-11\sqrt{x-5}-13=0$	$x\in\left\{6;\frac{129}{16}\right\}$
10. Знайти дійсні розв’язки рівняння: $8x-13\sqrt{2x-5}-11=0$	$x\in\left\{3;\frac{161}{32}\right\}$
11. Знайти дійсні розв’язки рівняння: $10x^2-4\sqrt{5x^2-1}-2=0$	$x\in\left\{\frac{\sqrt{5}}{5};\pm1\right\}$
12. Знайти дійсні розв’язки рівняння: $2\sqrt{x+7}-7\sqrt[4]{x+7}+6=0$	$x\in\left\{-\frac{31}{16};9\right\}$
13. Знайти дійсні розв’язки рівняння: $2x^3-4\sqrt{2x^3-5}-2=0$	$x\in\left\{\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{7}\right\}$

14. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $2x^2 - 6\sqrt{2x^2+1} + 10 = 0$	$x \in \{\pm 2\}$
15. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $6x^3 + 5\sqrt{2x^3 - 5} - 23 = 0$	$x \in \{\sqrt[3]{3}\}$
16. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^2 - 2\sqrt{x^2+8} + 5 = 0$	$x \in \{\pm 1\}$
17. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^2 - 3\sqrt[3]{x^2-3} - 1 = 0$	$x \in \{\pm 2\}$
18. Знайти розв'язки рівняння: $(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-9) = -20$.	$x \in \left\{ 4,\ 7,\ \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2} \right\}$
19. Знайти розв'язки рівняння: $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\cdot(x+8) = 24$	$x \in \{-6,\ -4, -5 \pm 2\sqrt{3}\}$
20. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+7)\cdot(x+9) = 45$	$x \in \{-6,\ -4, -5 \pm \sqrt{19}\}$
21. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+7) = 9$	$x \in \{-4, -4 \pm \sqrt{10}\}$, (-4) є двократним коренем
22. Знайти розв'язки рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x+6) = 144$	$x \in \{-7, -2,\ 3\}$, (-2) є двократним коренем
23. Знайти розв'язки рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-6) = 12$	$x \in \left\{ 3,\ 4,\ \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2} \right\}$
24. Знайти розв'язки рівняння: $(x+2)(x-2)(x-4)(x-8) = 52$	$x \in \{3 \pm 3\sqrt{3},\ 3 \pm i\}$
25. Знайти розв'язки рівняння: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$	$x \in \left\{ 1; 8;\ \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i \right\}$
26. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)(x-4)(x-7)(x-12) = 90$	$x \in \{2 \pm \sqrt{10},\ 9 \pm \sqrt{10}\}$
27. Знайти розв'язки рівняння: $(x-11)(x-9)(x-4)(x-2) = 72$	$x \in \left\{ 5; 8;\ \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{97}}{2} \right\}$
28. Знайти розв'язки рівняння: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot(x-12) = -6x^2$}	$x \in \left\{ \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2},\ 5 \pm \sqrt{13} \right\}$
29. Знайти розв'язки рівняння: $(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)\cdot(x-12) = -3x^2$	$x \in \left\{ \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2};\ 3;\ 8 \right\}$
30. Знайти розв'язки рівняння: $(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)\cdot(x-12) = -4x^2$	$x \in \{6 \pm 2\sqrt{3}\}$, корені двократні
31. Знайти розв'язки рівняння: $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x-6) = -20x^2$	$x \in \left\{ 2;\ 3;\ -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i \right\}$

32. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+12)=315x^2$	$x\in\left\{-14\pm 2\sqrt{46};2;6\right\}$
33. Знайти розв'язки рівняння: $(x-2)(x+4)(x+4)(x-8)=175x^2$	$x\in\left\{1;16;\ -\frac{15}{2}\pm\frac{\sqrt{161}}{2}\right\}$
34. Знайти розв'язки рівняння: $(x-3)(x-4)(x+2)(x+6)=16x^2$	$x\in\left\{2;6;\ -\frac{9}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right\}$
35. Знайти розв'язки рівняння: $(x-4)(x-6)(x+3)(x+8)=-20x^2$	$x\in\left\{-6;-4;\frac{9}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$
36. Знайти розв'язки рівняння: $(x-4)(x-6)(x+3)(x+8)=100x^2$	$x\in\left\{2;12;\ -\frac{15}{2}\pm\frac{\sqrt{129}}{2}\right\}$
37. Знайти розв'язки рівняння: $(x+3)(x+4)(x+6)(x+8)=12x^2$	$x\in\left\{-12;\ -2;-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{47}}{2}i\right\}$
38. Знайти розв'язки рівняння: $(x-8)^4+(x-4)^4=82$	$x\in\left\{5;\ 7;\ 6\pm 5i\right\}$
39. Знайти розв'язки рівняння: $(x-3)^4+(x-5)^4=706$	$x\in\left\{0;\ 8;\ 4\pm 22i\right\}$
40. Знайти розв'язки рівняння: $(x-1)^4+(x+5)^4=272$	$x\in\left\{-3;-1;-2\pm\sqrt{55}\,i\right\}$
41. Знайти розв'язки рівняння: $(x-7)^4+(x+1)^4=1312$	$x\in\left\{1;\ 5;\ 3\pm 10i\right\}$
42. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)^4+(x-3)^4=82$	$x\in\left\{0;\ 2;\ 1\pm 5i\right\}$
43. Знайти розв'язки рівняння: $(x+4)^4+(x-2)^4=626$	$x\in\left\{-3;1;-1\pm\sqrt{58}\,i\right\}$
44. Знайти розв'язки рівняння: $(x+5)^4+(x+1)^4=82$	$x\in\left\{-4;-2;-3\pm 5i\right\}$
45. Знайти розв'язки рівняння: $(x+3)^4+(x-1)^4=1312$	$x\in\left\{-5;3;-1\pm 2\sqrt{10}\,i\right\}$
46. Знайти розв'язки рівняння: $(x+1)^4+(x-3)^4=626$	$x\in\left\{-2;4;1\pm\sqrt{33}\,i\right\}$
47. Знайти розв'язки рівняння: $(x-6)^4+(x-4)^4=2$	$x\in\left\{5;5\pm\sqrt{6}\,i\right\},5$ - двократний
48. Знайти розв'язки рівняння: $(24x+3)(8x+3)(6x+3)(4x+3)+9=0$	$x\in\left\{-\frac{5}{8};-\frac{1}{4};\ \frac{7}{16}\pm\frac{\sqrt{17}}{16}\right\}$
49. Знайти розв'язки рівняння: $(12x-5)(4x-5)(3x-5)(2x-5)+42=0$	$x\in\left\{\frac{1}{2};1;\frac{23}{12};\frac{29}{12}\right\}$

50. Знайти розв'язки рівняння: $(24x-5)(8x-5)(6x-5)(4x-5)+42=0$	$x\in\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{23}{24};\frac{29}{24}\right\}$
51. Знайти розв'язки рівняння: $(12x+7)(4x+7)(3x+7)(2x+7)+209=0$	$x\in\left\{-\frac{10}{3};-\frac{3}{4};-\frac{49}{24}\pm\frac{\sqrt{313}}{24}\right\}$
52. Знайти розв'язки рівняння: $(24x-3)(8x-3)(6x-3)(4x-3)-315=0$	$x\in\left\{-\frac{1}{8};1;\ \frac{7}{16}\pm\frac{\sqrt{55}}{16}i\right\}$
53. Знайти розв'язки рівняння: $(48x-5)(16x-5)(12x-5)(8x-5)+57=0$	$x\in\left\{\frac{11}{48};\frac{1}{2};\ \frac{35}{96}\pm\frac{\sqrt{481}}{96}\right\}$
54. Знайти розв'язки рівняння: $(24x-5)(8x-5)(6x-5)(4x-5)+77=0$	$x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{3}{8};\frac{9}{8};\frac{13}{12}\right\}$
55. Знайти розв'язки рівняння: $(24x+5)(8x+5)(6x-5)(4x-5)-988=0$	$x\in\left\{-\frac{3}{4};\frac{1}{6};\frac{11}{8};\frac{11}{24}\right\}$
56. Знайти розв'язки рівняння: $x^5-4x^4-31x^3-16x^2+58x+48=0$	$x\in\left\{-3;-1;8;\ \pm\sqrt{2}\right\}$
57. Знайти розв'язки рівняння: $10x^5+13x^4-8x^3-14x^2-2x+1=0$	$x\in\left\{-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{5};1\right\}$; (-1) -двократний
58. Знайти розв'язки рівняння: $x^5-18x^3+30x^2-19x+30=0$	$x\in\left\{-5;2;3;\ \pm i\right\}$
59. Знайти розв'язки рівняння: $9x^4+9x^3-13x^2-9x+4=0$	$x\in\left\{-\frac{4}{3};-1;\frac{1}{3};1\right\}$
60. Знайти розв'язки рівняння: $4x^4-15x^2-5x+6=0$	$x\in\left\{-\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2};2\right\}$
61. Знайти розв'язки рівняння: $8x^4-2x^3-9x^2+2x+1=0$	$x\in\left\{-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2};1\right\}$
62. Знайти розв'язки рівняння: $x^5-7x^4+5x^3+19x^2+6x+120=0$	$x\in\left\{-2;4;5;\ \pm\sqrt{3}\,i\right\}$
63. Знайти розв'язки рівняння: $2x^5-9x^4+17x^3-39x^2+35x+30=0$	$x\in\left\{-\frac{1}{2};2;3;\ \pm\sqrt{5}\,i\right\}$
64. Знайти розв'язки рівняння: $3x^5-5x^4-2x^3-2x^2-5x+3=0$	$x\in\left\{-1;\frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3};\pm i\right\}$
65. Знайти розв'язки рівняння: $2x^5-7x^4+5x^3+5x^2-7x+2=0$	$x\in\left\{-1;\frac{1}{2};1;2\right\}$; 1 - двократний
66. Знайти розв'язки рівняння: $x^5+4x^4-5x^3-5x^2+4x+1=0$	$x\in\left\{-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2};-1;1\right\}$; 1- двократний
67. Знайти розв'язки рівняння: $2x^5+9x^4-11x^3-11x^2+9x+2=0$	$x\in\left\{-\frac{11}{4}\pm\frac{\sqrt{105}}{4};-1;1\right\}$; 1 - двократн.
68. Знайти розв'язки рівняння: $2x^4+5x^3-14x^2+5x+2=0$	$x\in\left\{-\frac{9}{4}\pm\frac{\sqrt{65}}{4};1\right\}$; 1 - двократний

69. Знайти розв'язки рівняння: $2x^4+5x^3-21x^2+5x+2=0$	$x\in\left\{\frac{1}{2};2;-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}$
70. Знайти розв'язки рівняння: $8x^4-6x^3-49x^2-6x+8=0$	$x\in\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{13}{8}\pm\frac{\sqrt{105}}{8}\right\}$
71. Знайти розв'язки рівняння: $3x^5-7x^4-4x^3-4x^2-7x+3=0$	$x\in\left\{-1;\frac{1}{3};3;\pm i\right\}$
72. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $2x^4+7x^3-26x^2+7x+2=0$	$x\in\left\{\frac{1}{2};2;-3\pm2\sqrt{2}\right\}$
73. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^5+7x^4+5x^3+5x^2+7x+1=0$	$x\in\left\{-1;-\frac{3}{2}-\sqrt{3}\pm\frac{\sqrt{17+12\sqrt{3}}}{2}\right\}$
74. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $6x^5+5x^4-15x^3-15x^2+5x+6=0$	$x\in\left\{-1;\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}$; (-1) -трикратний
75. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $45x^4-36x^3-530x^2-36x+45=0$	$x\in\left\{-3;-\frac{1}{3};\frac{31}{15}\pm\frac{4\sqrt{46}}{15}\right\}$
76. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $6x^4-x^3-28x^2-x+6=0$	$x\in\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}\right\}$
77. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $3x^6-4x^5-11x^4-8x^3-11x^2-4x+3=0$	$x\in\left\{-1;\frac{1}{3};3\right\}$; (-1) -двократний
78. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $6x^5-7x^4-13x^3+13x^2+7x-6=0$	$x\in\left\{-1;\frac{2}{3};1;\frac{3}{2}\right\}$; (-1) -двократний
79. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $2x^5-x^4-4x^3-4x^2-x+2=0$	$x\in\left\{-1;\frac{1}{2};2\right\}$
80. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $5x^5+21x^4-16x^3+16x^2-21x-5=0$	$x\in\left\{-5;-\frac{1}{5};1\right\}$
81. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $3x^6+3x^4-10x^5-3x^2+10x-3=0$	$x\in\left\{-1;\frac{1}{3};1;3\right\}$
82. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $4x^5+17x^4+4x^3-4x^2-17x-4=0$	$x\in\left\{-4;-\frac{1}{4};1\right\}$
83. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $6x^5+31x^4-25x^3+25x^2-31x-6=0$	$x\in\left\{-6;-\frac{1}{6};1\right\}$
84. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $2x^5-7x^4+9x^3-9x^2+7x-2=0$	$x\in\left\{1;\frac{1}{2};2\right\}$
85. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $8x^5+57x^4-49x^3+49x^2-57x-8=0$	$x\in\left\{-8;-\frac{1}{8};1\right\}$
86. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $3x^5-13x^4+16x^3-16x^2+13x-3=0$	$x\in\left\{\frac{1}{3};1;3\right\}$

87. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^6-12x^5+53x^4-108x^3+106x^2-48x+8=0$	$x\in\left\{1;2;2\pm\sqrt{2};\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$
88. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^6-11x^5+42x^4-80x^3+84x^2-44x+8=0$	$x\in\left\{1;2;3\pm\sqrt{7}\right\}$
89. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^6-6x^5+17x^4-30x^3+34x^2-24x+8=0$	$x\in\{1;2\}$
90. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^4-9x^3+18x^2-18x+4=0$	$x\in\left\{\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{41}}{2}\right\}$
91. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^4-7x^3+14x^2-14x+4=0$	$x\in\left\{\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$
92. Знайти дійсні розв'язки рівняння: $x^4-8x^3+16x^2-16x+4=0$	$x\in\left\{3\pm\sqrt{7}\right\}$
93. Знайти розв'язки рівняння: $\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+2}=0$	$x\in\left\{\pm\frac{\sqrt{150\pm10\sqrt{145}}}{20};\pm\frac{\sqrt{150\mp10\sqrt{145}}}{20}\right\}$
94. Знайти розв'язки рівняння: $x\sqrt{12+x}-2x-\sqrt{12+x}=4$	$x\in\left\{-5-2\sqrt{6};\ 4\right\}$
95. Знайти розв'язки рівняння: $x\sqrt{5+x}-4x+2\sqrt{5+x}=2$	$x\in\{4\}$
96. Знайти розв'язки рівняння: $x\sqrt{3+x}-3x-\sqrt{3+x}+3=0$	$x\in\{1;\ 6\}$
97. Розв'язати нерівність: $\frac{x^4+6x^3+12x^2+10x+3}{x^2-x-2}\le 0$	$x\in[-3;-1)\cup(-1;\ 2)$
98. Розв'язати нерівність: $(2x^4+3x^3-9x^2+x+3)(2x^2+7x+3)\le 0$	$x\in\left\{-3,-\frac{1}{2},1\right\}$
99. Розв'язати нерівність: $\frac{x^4+4x^3-21x^2+4x+28}{x^2+7x+6}\le 0$	$x\in[-7;\ -6)\cup\{2\}$
100. Розв'язати нерівність: $\frac{3x^3+5x^2+x-1}{-3x^2-11x+4}\le 0$	$x\in(-4;-1)\cup\left(-1;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$
101. Розв'язати нерівність: $\frac{x^4+9x^3+21x^2+19x+6}{x^2+7x+6}\le 0$	$x\in\varnothing$
102. Розв'язати нерівність: $\frac{x^4+11x^3+42x^2+68x+40}{x^3-x^2-5x-3}<0$	$x\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-1;\ 3)$

103. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4+10x^3+21x^2-4x-28}{x^2+3x-4}<0$	$x\in(-7;\,-4)$
104. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4+2x^3-15x^2+4x+20}{x^2+6x+5}\le 0$	$x\in\{2\}$
105. Розв’язати нерівність: $\frac{x^3+6x^2+3x-10}{x^3+4x^2+x-6}<0$	$x\in(-5;\,-3)$
106. Розв’язати нерівність: $(x^4-3x^3-5x^2+3x+4)(x^2-5x+4)<0$	$x\in\varnothing$
107. Розв’язати нерівність: $\frac{x^5+8x^4+22x^3+28x^2+17x+4}{x^3-x^2-5x-3}\le 0$	$x\in[-4;-1)\cup(-1;\,3)$
108. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4-2x^3-12x^2-14x-5}{x^2+3x+2}<0$	$x\in(-2;-1)\cup(-1;\,5)$
109. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4+9x^3+25x^2+27x+10}{x^2+7x+10}<0$	$x\in\varnothing$
110. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^2-6x+8}<0$	$x\in(-1;\,2)\cup(2;\,4)$
111. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4+9x^3+29x^2+39x+18}{x^2+x-2}\le 0$	$x\in[-1;\,1)\cup\{3\}$
112. Розв’язати нерівність: $\frac{x^5+3x^4+2x^3-2x^2-3x-1}{x^3+4x^2+5x+2}<0$	$x\in(-2;-1)\cup(-1;\,1)$
113. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4+x^3-6x^2-4x+8}{x^2-3x+2}\le 0$	$x\in\{-2\}$
114. Розв’язати нерівність: $\frac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^2-4x+3}\le 0$	$x\in\{-1\}\cup(3;5]$

115. Розв'язати нерівність: $-\dfrac{2x^3-7x^2+4x+4}{2x^2+11x+5}<0$	$x\in\left(-5;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};2\right)\cup(2;\infty)$
116. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^4-9x^2+4x+12}{x^2+7x+12}\le 0$	$x\in(-4;-3)\cup(-3;-1]\cup\{2\}$
117. Розв'язати нерівність: $(x^4+3x^3-5x^2-3x+4)(x^2+5x+4)\le 0$	$x\in\{-4,-1,1\}$
118. Розв'язати нерівність: $(x^4+3x^2-4)(x^2+10x+9)<0$	$x\in(-9;-1)\cup(-1;1]$
119. Розв'язати нерівність: $(3x^4+11x^3+11x^2+x-2)(3x^2+5x-2)<0$	$x\in\varnothing$
120. Розв'язати нерівність: $\lvert x+5\rvert-\lvert x^2-1\rvert<0$	$x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$
121. Розв'язати нерівність: $\lvert x+4\rvert-9\lvert x-2\rvert+10<0$	$x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{5}\right)\cup(4;\infty)$
122. Розв'язати нерівність: $\lvert x-5\rvert+3\lvert 2x+1\rvert\le 9$	$x\in\left[-1;\dfrac{1}{5}\right]$
123. Розв'язати нерівність: $\lvert x-4\rvert-2\lvert x+1\rvert+7\le 0$	$x\in(-\infty;-13]\cup[3;\infty)$
124. Розв'язати нерівність: $\lvert x-4\rvert-2\lvert\lvert x\rvert+1\rvert+7\le 0$	$x\in(-\infty;-9]\cup[3;\infty)$
125. Розв'язати нерівність: $\lvert x^2-4\rvert-5\lvert x+1\rvert\le 15$	$x\in[-7;8]$
126. Розв'язати нерівність: $\dfrac{\lvert x+4\rvert+6\lvert x-2\rvert-13}{\lvert x\rvert-1}<0$	$x\in\left(-1;\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;3)$
127. Розв'язати нерівність: $\dfrac{\lvert 6x-1\rvert-2\lvert 2x+1\rvert}{\lvert 4x+3\rvert}\le 1$	$x\in(-\infty;-3]\cup\left[-\dfrac{2}{7};\infty\right)$
128. Розв'язати нерівність: $(\lvert x+1\rvert-5\lvert x+3\rvert+14)(\lvert x\rvert-3)<0$	$x\in(-\infty;-7)\cup(-3;0)\cup(3;\infty)$
129. Розв'язати нерівність: $0<\dfrac{\lvert x-1\rvert-\lvert x^2-9\rvert+2}{\lvert x-4\rvert-1}+20$	$x\in(-24;3)\cup\left(\dfrac{-19+\sqrt{641}}{2};5\right)\cup(6;15)$
130. Розв'язати нерівність: $\lvert x^2-5x-6\rvert+\lvert x^2-4\rvert\le 7$	$x\in\left[-\dfrac{9}{5};-\dfrac{1}{2}\right]$
131. Розв'язати нерівність: $\lvert x^2+5x+6\rvert-\lvert x+1\rvert+2\lvert x+6\rvert<27$	$x\in\left(-8;-3+\sqrt{19}\right)$

132. Розв'язати нерівність: $\lvert x^2+4x-5\rvert+\lvert x^2-1\rvert<2$	$x\in\left(\sqrt{3}-1;\sqrt{5}-1\right)$
133. Розв'язати нерівність: $\lvert x\lvert x-2\rvert-5\rvert+\lvert x^2-1\rvert\le 5$	$x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$
134. Розв'язати нерівність: $\frac{\lvert 3x+4\rvert+5\lvert 2x-1\rvert}{\lvert x+5\rvert}\le 19$	$x\in(-\infty;-16]\cup\left[-\frac{47}{16};\infty\right)$
135. Розв'язати однорідне рівняння: $2(2x^2-x-3)^2-3(2x^2-x-3)(4x+1)+(4x+1)^2=0$	$x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{57}}{4};\frac{3\pm\sqrt{37}}{4}\right\}$
136. Розв'язати однорідне рівняння: $2(x^2-x-5)^2-7(x^2-x-5)(2x-5)+5(2x-5)^2=0$	$x\in\left\{0;3;3\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$
137. Розв'язати однорідне рівняння: $2(2x^2-x+3)^2-13(2x^2-x+3)(4x+1)+11(4x+1)^2=0$	$x\in\left\{\frac{1}{2};2;\frac{23\pm3\sqrt{61}}{4}\right\}$
138. Розв'язати однорідне рівняння: $2(x^2-5)^2-3(x^2-5)(2x-3)+(2x-3)^2=0$	$x\in\left\{1\pm\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}\right\}$
139. Розв'язати однорідне рівняння: $(x^2+x+1)^2-4(x^2+x+1)(4x-3)+3(4x-3)^2=0$	$x\in\left\{1;10;\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}\right\}$
140. Розв'язати однорідне рівняння: $(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)(3x-7)+5(3x-7)^2=0$	$x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2};\frac{17\pm3\sqrt{21}}{2}\right\}$

Предметний покажчик.

Зміст.

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Раціональні рівняння та нерівності

Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів

Людмила Володимирівна Ізюмченко
Вікторія Вікторівна Нічишина
Ренат Ярославович Ріжняк