Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
Заочна фізико-математична школа

Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк

Цілі та комплексні числа

Серія: Навчальні матеріали для учнів
заочної фізико-математичної школи

Кіровоград – 2009

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк

Цілі та комплексні числа: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 112 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков,
кандидат фізико-математичних наук, доцент С.Д.Паращук.

У посібнику міститься основний теоретичний матеріал та приклади розв'язування задач, пов'язаних з вивченням властивостей цілих та комплексних чисел та використання цих властивостей у процесі розв'язування задач. Після кожної частини викладу запропоновані задачі для самостійного розв'язування, до яких у кінці посібника подані відповіді та вказівки. Розробка містить предметний покажчик теоретичного матеріалу.

Посібник призначений для використання учнями заочної фізико-математичної школи фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка при розв'язуванні контрольних робіт. Може бути використаний у процесі самостійної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл до державної атестації. Крім того, матеріал посібника рекомендується для використання під час організації самостійної роботи студентів педагогічних математичних спеціальностей ВНЗ з дисципліни «Елементарна математика».

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 28 квітня 2009 року (протокол № 11).

Друкується в рамках розвитку проекту «Заочна фізико-математична школа КДПУ ім. В.Винниченка» за підтримки ректорату університету.

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

Глава 1. Подільність цілих чисел.

§1. Основні поняття та властивості.

Нагадаємо, що *множина цілих чисел* складається з натуральних чисел, нуля та чисел, що є протилежними до натуральних. Наприклад, числа 1; –100; 0; 2345; –1 є числами цілими, а числа 0,5; ¾; 1,0001 не належать до множини цілих чисел. Факт належності числа x до множини цілих чисел (яку позначають літерою Z) у математиці символічно записують так:

$$x \in Z .$$

<u>Означення 1.1.</u> Нехай $a, b \in Z$, причому $b \neq 0$. Число a *<u>ділиться на число</u>* b, або a *<u>кратне</u>* b (пишуть $a \vdots b$), якщо існує таке $c \in Z$, що $a = c \cdot b$. В цьому випадку число b називається *<u>дільником</u>* числа a. Якщо ж такого c не існує, то кажуть, a *<u>не ділиться</u>* на b, або що a *<u>не кратне</u>* b.

<u>Наприклад:</u> 12⋮4, оскільки 12=3·4; –90⋮15, оскільки –90=(–6)·15; 14$\not\vdots$3,оскільки не існує такого $c \in Z$, що 14 = *с*·3.

Як безпосередньо випливає з означення подільності, всі числа, кратні b, мають вигляд $c \cdot b$, де $c \in Z$.

<u>Зауваження 1.1</u>: Використовуючи в подальшому записи виду $x \vdots y$, будемо завжди вважати, що $x, y \in Z$ та $y \neq 0$ (за відсутності додаткових умов).

<u>Приклад 1.1.</u> Для кожного $a \in Z$ (не рівного нулю) дайте відповідь на запитання: чи ділиться a на $-a$?

Розв'язання. Очевидно, що для a та $-a$ виконується рівність:

$$a = (-1) \cdot (-a).$$

Так як число –1 є цілим, то $a \vdots (-a)$.

<u>Приклад 1.2.</u> У якому випадку для цілих чисел a і b $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ одночасно $a \vdots b$ та $b \vdots a$?

Розв'язання. За означенням 1.1 мають існувати такі цілі числа c_1 та c_2, що одночасно виконуватимуться рівності:

$$a = c_1 \cdot b \text{ та } b = c_2 \cdot a .$$

Очевидно, що одночасне виконання записаних умов можливо лише тоді, коли $a = \pm b$.

Доведемо декілька властивостей цілих чисел, пов'язаних з подільністю (у формулюваннях властивостей буквами будуть позначатися довільні цілі числа).

<u>Властивість 1.</u> Якщо $a \vdots c, b \vdots c$, то $(a+b) \vdots c, (a-b) \vdots c$.

Доведення. Оскільки $a \vdots c$, то існує $m \in Z$ таке, що $a = m \cdot c$. Аналогічно, знайдеться $n \in Z$ таке, що $b = n \cdot c$. Тоді:

$$a+b=m\cdot c+n\cdot c=(m+n)\cdot c,\ a-b=m\cdot c-n\cdot c=(m-n)\cdot c.$$

Оскільки $m+n\in Z,\ m-n\in Z,$ то це і означає, що $(a+b)\vdots c, (a-b)\vdots c,$ що і треба було довести.

Властивість 1 можна узагальнити на випадок довільної кількості доданків.

__Властивість 1'.__ Якщо $a_1\vdots c, a_2\vdots c, ..., a_n\vdots c$, то $(a_1\pm a_2\pm ...\pm a_n)\vdots c$ (замість будь-якого із знаків можна поставити або «+», або «–»).

Має місце і обернене твердження: Якщо сума і усі доданки, крім одного, діляться на деяке число, то і останній доданок ділиться на це число.

__Властивість 2.__ Якщо $a\vdots c$, $b\not\vdots c$, то $(a+b)\not\vdots c$, $(a-b)\not\vdots c$.

Доведення. Припустимо, що $(a+b)\vdots c$. Тоді (за властивістю 1) $b=((a+b)-a)\vdots c$ (оскільки $(a+b)\vdots c,\ a\vdots c$), що суперечить умові. Як наслідок, припущення невірне і $(a+b)\not\vdots c$, що і треба було довести. Аналогічно можна довести, що $(a-b)\not\vdots c.$

__Властивість 3.__ Якщо $a\vdots b$, $b\vdots c$, то $a\vdots c$.

__Властивість 4.__ Якщо $a\vdots c$, то $(a\cdot b)\vdots c$ для будь-якого $b\in Z$.

Доведення властивостей 3 та 4 пропонуємо зробити читачеві самостійно.

__Приклад 1.3.__ Відомо, що $a\vdots b$ та $c\vdots d$. Довести, що $(ac)\vdots(bd)$.

Доведення. Оскільки $a\vdots b$, то існує $m\in Z$ таке, що $a=m\cdot b$. Аналогічно, так як $c\vdots d$, то знайдеться $n\in Z$ таке, що $c=n\cdot d$. Тоді, маємо:

$$a\cdot c=m\cdot b\cdot n\cdot d=(m\cdot n)\cdot(b\cdot d).$$

Так як добуток цілих чисел $m\cdot n$ є цілим числом, то $(ac)\vdots(bd)$.

__Приклад 1.4.__ Доведіть, що якщо $(2a+3b)\vdots 7$, то і $(a+5b)\vdots 7$.

Доведення (перший спосіб). Оскільки $(2a+3b)\vdots 7$, то існує $m\in Z$ таке, що $2a+3b=7m$. Звідси: $2a=7m-3b$. Доведемо, що $2\cdot(a+5b)\vdots 7$. Справді:

$$2a+10b=7m-3b+10b=7m+7b=7\cdot(m+b).$$

Звідси очевидно, що $(7\cdot(m+b))\vdots 7$, а тому $2\cdot(a+5b)\vdots 7$, а, так як 2 на 7 не ділиться, то $(a+5b)\vdots 7$.

Примітка: При розв'язуванні вправи 1.4 ми використали очевидну властивість – якщо $(ab)\vdots c$ і b з c – взаємно прості, тобто НСД$(b,c)=1$, то $a\vdots c$.

Доведення (другий спосіб). Оскільки $(2a+3b)\vdots 7$, *то і* $4\cdot(2a+3b)\vdots 7$, звідки $(8a+12b)\vdots 7$. Оскільки $8a+12b=7(a+b)+(a+5b)$, то з подільності суми і першого доданка на 7 випливає подільність другого доданка на 7 (обернене твердження до властивості 1').

Вправи до § 1.

1.1. Доведіть, що якщо $a \vdots b$, то $a^n \vdots b^n$ *для будь-якого* $n \in N$.

Вказівка. З означення подільності $a \vdots b$ маємо: існує $m \in Z$ таке, що $a = mb$. Треба довести: існує $k \in Z$ таке, що $a^n = kb^n$. Нескладно перевірити, що $k = m^n$ і $k \in Z$.

1.2. Доведіть, що якщо $a^2 \vdots (a+b)$, то і $b^2 \vdots (a+b)$.

Розв'язання. З означення подільності маємо: існує $m \in Z$ таке, що $a^2 = m \cdot (a+b)$. Треба довести: існує $k \in Z$, що $b^2 = k \cdot (a+b)$. Розглянемо різницю $b^2 - a^2 = (b-a)\cdot(a+b)$, звідки

$b^2 = \underbrace{a^2}_{\vdots (a+b)} + \underbrace{(b-a)\cdot(a+b)}_{\vdots (a+b)}$, а тому $b^2 \vdots (a+b)$.

Ми скористалися *властивістю*: якщо один із співмножників ділиться на деяке число, то і весь добуток ділиться на це число.

1.3. Доведіть, що якщо $a^3 \vdots (a+b)$, то і $b^3 \vdots (a+b)$.

Вказівка. Дивіться розв'язання попередньої задачі та розгляньте $b^3 + a^3$.

1.4. Які з наступних тверджень є вірними, а які – хибними? (Вірні твердження необхідно довести, а до хибних – навести контрприклади):

а) якщо $a \not\vdots 14$, $b \not\vdots 14$, то $(a+b) \not\vdots 14$ (*Відповідь*: хибне);
б) якщо $a \vdots 14$, $a \vdots 10$, то $a \vdots (14 \cdot 10)$ (*Відповідь*: хибне);
в) якщо $a \vdots 14$, $a \vdots 15$, то $a \vdots (14 \cdot 15)$ (*Відповідь*: істинне);
г) якщо $(ab) \vdots 14$, то $a \vdots 14$ або $b \vdots 14$ (*Відповідь*: хибне);
д) якщо $(ab) \vdots 11$, то $a \vdots 11$ або $b \vdots 11$ (*Відповідь*: істинне);
е) якщо $a \not\vdots 14$, $b \not\vdots 14$, то $(a \cdot b) \not\vdots 14$ (*Відповідь*: хибне);
є) якщо $a \not\vdots 11$, $b \not\vdots 11$, то $(a \cdot b) \not\vdots 11$ (*Відповідь*: істинне);
ж) якщо $a \vdots 2$, $b \vdots 7$, то $(a \cdot b) \vdots 14$ (*Відповідь*: істинне).

1.5. Нехай $(ab) \vdots c$ і $(a+b) \vdots c$. Доведіть, що

а) $(a^2 + b^2) \vdots c$; б) $(a^3 + b^3) \vdots c$; в) $(a^4 b + a^2 b^3 + a^3 b^2 + ab^4) \vdots c$;
г) $(a^4 + b^4) \vdots c$; д) $(a^5 b^2 + a^4 b^3 + a^3 b^4 + a^2 b^5) \vdots c$.

Розв'язання: а) $a^2 + b^2 = \underbrace{(a+b)}_{\vdots c}{}^2 - 2 \cdot \underbrace{(ab)}_{\vdots c} \Rightarrow (a^2 + b^2) \vdots c$;

б) $a^3 + b^3 = \underbrace{(a+b)}_{\vdots c}{}^3 - 3 \cdot \underbrace{(ab)}_{\vdots c}(a+b) \Rightarrow (a^3 + b^3) \vdots c$;

в), д) *Вказівка.* Згрупуйте окремо перший і четвертий; другий і третій доданки, винесіть спільні множники за дужки та скористайтесь розв'язанням пункту б);

г) Скористаємося формулою $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, звідки $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - (4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) = (a+b)^4 - 6(ab)^2 - 4ab(a^2 + b^2)$.
Виконаємо заміну: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2\cdot(ab)$, матимемо:
$$a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 6(ab)^2 - 4ab\left((a+b)^2 - 2\cdot(ab)\right) = \underbrace{(a+b)^4}_{\vdots c} + \underbrace{2(ab)^2}_{\vdots c} - \underbrace{4ab\,(a+b)^2}_{\vdots c}.$$

1.6. Якщо m – непарне число, то $(m^2-1)\vdots 8$. Доведіть це.

Доведення. За умовою $m = 2k+1;\ k \in Z$. Тоді $m^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = = 4k^2 + 4k = 4\cdot\underbrace{k(k+1)}_{\vdots 2}$, а тоді весь добуток ділиться на 8. Ми скористались відомим *фактом*: добуток двох послідовних цілих чисел ділиться на 2 (адже серед двох послідовних цілих чисел одне обов'язково є парним).

1.7. Відомо, що m, n – непарні числа. Доведіть, що $(m^2 - n^2)\vdots 8$.

Вказівка до доведення 1. Запишіть $m = 2k+1;\ n = 2l+1,\ k,l \in Z$ та обчисліть різницю квадратів $m^2 - n^2$.

Вказівка до доведення 2. Запишіть $m^2 - n^2 = (m^2-1) - (n^2-1)$ та скористайтеся вправою 1.6.

1.8. Якщо m – не ділиться на 3, то $(m^2-1)\vdots 3$. Доведіть це.

Доведення. За умовою $m = 3k \pm 1;\ k \in Z$. Тоді $m^2 - 1 = (3k\pm 1)^2 - 1 = = 9k^2 \pm 6k = \underbrace{3\cdot k(3k\pm 2)}_{\vdots 3}$.

1.9. Нехай p – просте число, що перевищує 3, тоді $(p^2-1)\vdots 24$. Доведіть це.

Вказівка. Скористайтесь результатами вправ 1.6 та 1.8.

1.10. Відомо, що p, q – прості числа, що перевищують 3, тоді $(p^2 - q^2)\vdots 24$. Доведіть це.

Вказівка. Запишіть $p^2 - q^2 = (p^2-1) - (q^2-1)$ та скористайтесь результатами вправи 1.9.

1.11. Нехай p, q – прості числа, що перевищують 3. Чому дорівнює найбільший спільний дільник усіх чисел виду $(p^2 - q^2)$?

Відповідь: 24 (скористайтесь результатами вправи 1.10).

1.12. Доведіть, що якщо число a не ділиться ні на 2, ні на 3, то $(a^2-1)\vdots 24$.

Вказівка: Розгляньте усі цілі числа: 6k, 6k$\pm$1, 6k$\pm$2, 6k+3. Обґрунтуйте, що умову задачі задовольняють лише a=6k$\pm$1 та розгляньте вираз a^2-1.

1.13. Доведіть: $(3a+4b)\vdots 5 \Rightarrow (a+3b)\vdots 5$ для довільних $a,b \in Z$.

Доведення. За умовою $(3a+4b)\vdots 5$, тоді і число в 2 рази більше за це число також ділиться на 5: $\underbrace{2(3a+4b)}_{\vdots 5} = \underbrace{5(a+b)}_{\vdots 5} + (a+3b)$, звідки випливає те, що треба довести.

1.14. Доведіть: $(a^2+8ab+b^2)\vdots 10 \Rightarrow (a^2-b^2)\vdots 10$ для довільних $a,b \in Z$.

Доведення. За умовою $\underbrace{a^2+8ab+b^2}_{\vdots 10} = (a-b)^2 + \underbrace{10ab}_{\vdots 10} \Rightarrow (a-b)^2 \vdots 10$.

Оскільки $a,b \in Z$, то з того, що $(a-b)^2 \vdots 10 \Rightarrow (a-b)\vdots 10$, а тоді і $a^2-b^2 = \underbrace{(a-b)}_{\vdots 10}(a+b)\vdots 10$.

§2. Ділення з остачею.

Нехай дано натуральне число b. Відмітимо на числовій прямій усі числа, кратні b. Це будуть числа *0*, *b*, *–b*, *2b*, *–2b*,… (рис. 1).

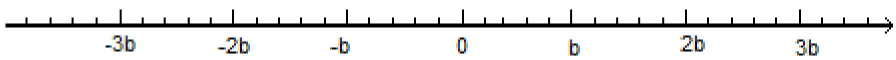


Рис. 1

Якщо ціле число a співпадає з одним з них, то $a = qb$, (де $q \in Z$), тобто a ділиться на b (див. §1). Якщо ж a не ділиться на b, то в цьому випадку можна виконати *ділення з остачею.* Припустимо, що a розташоване на числовій прямій між числами qb та $(q+1)b$ (рис. 2).

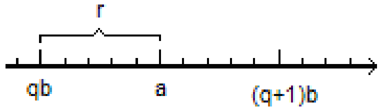


Рис. 2

Тоді можна записати рівність $a = qb + r$, де, легко бачити, $0 < r < b$. Відмітимо, що якщо a ділиться на b, то його теж можна представити у вигляді $qb + r$, поклавши $r = 0$. Сформулюємо тепер означення.

<u>Означення 1.2.</u> *Поділити з остачею* ціле число a на натуральне b – означає представити a у вигляді:

$$a = qb + r$$

де $q, r \in Z$ та $0 \le r < b$.

Число a називається *діленим,* b *– дільником,* q *– часткою,* r *– остачею.*

Підкреслимо ще раз, що остача від ділення a *на* b дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли $a \vdots b$.

Вище ми показали, що ділення з остачею завжди можливе, тобто за даними a та b можна знайти частку q та остачу r, яка задовольняє подвійну нерівність $0 \le r < b$. Доведемо тепер, що ділення з остачею завжди можна виконати **єдиним** способом.

<u>Теорема 1.1.</u> Нехай $a \in Z, b \in N$ **та** $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$**, де** $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$ **і** $0 \le r_1 < b$ **та** $0 \le r_2 < b$**. Тоді** $q_1 = q_2, r_1 = r_2$**.**

Доведення. Оскільки $q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2,$ то $(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1$ і, як наслідок, $(r_2 - r_1) \vdots b$. Враховуючи обмеження $0 \le r_1 < b$, $0 \le r_2 < b$, маємо: $-b < r_2 - r_1 < b$. Але з усіх цілих чисел, що задовольняють дану подвійну нерівність, лише 0 ділиться на b; як наслідок,

$$r_2 - r_1 = 0, \text{ або } r_1 = r_2.$$

Тоді з рівності $(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1$ отримуємо, що $q_1 = q_2$. Теорему доведено.

Наведемо декілька прикладів ділення з остачею.

<u>Приклад 1.5.</u> Поділіть з остачею 101 на 14.

Розв'язання. Очевидно, 101=7·14+3. Оскільки 0≤3<14, то дана рівність і виражає результат ділення з остачею 101 на 14. Частка в даному випадку дорівнює 7, а остача дорівнює 3.

<u>Приклад 1.6.</u> Поділіть з остачею –132 на 7.

Розв'язання. Очевидно, –132=(–19)·7+1.Оскільки 0≤1<7, то в даному випадку частка дорівнює (–19), а остача дорівнює 1.

Зі школи добре відомим є спосіб ділення з остачею «в стовпчик». Але він застосовується лише тоді, коли ділене – додатне число. Наступна задача допоможе зрозуміти, як бути, коли ділене від'ємне.

<u>Приклад 1.7.</u> Ціле число a дає при діленні на число 7 частку q та остачу 2. Які частку та остачу дасть при діленні на 7 число $-a$?

Розв'язання. За умовою $a = 7q + 2$. Тоді:

$$-a = -7q - 2 = -7 \cdot (q+1) + 5 = 7 \cdot (-(q+1)) + 5.$$

Отже, частка дорівнює $-(q+1)$, остача дорівнює 5.

Як можна побачити з розв'язання наведеної задачі, частку та остачу від ділення числа $-a$ на деяке b можна визначити, якщо відомі частка та остача від ділення a на b.

Вправи до § 2.

2.1. Поділіть з остачею: а) 2010 на 13; б) 200101 на 11; в) 4531945 на 25; г) (-123) на 9; д) (-123) на (-9); е) (-12345) на 4.

Відповідь: а) q =154, r=8; б) q =18191, r=0;
в) q=181277, r=20; г) q= -14, r=3;
д) q =14, r=3; е) q = -3087, r=3.

2.2. Зобразіть числову пряму та відмітьте на ній усі цілі числа, які лежать на проміжку від -20 до 20, такі, що дають остачу 2 при діленні на 5. Через скільки повторюються ці числа?

Відповідь: -18; -13; -8; -3; 2; 7; 12; 17. Через 5.

2.3. Випишіть у рядок усі цілі числа, які лежать на проміжку від -25 до 25 та відмітьте підкреслюванням усі цілі числа, які при діленні на 6 дають остачу 1. Через скільки повторюються ці числа?

Відповідь: через 6.

2.4. Число a дає остачу 6 при діленні на 10. Чому дорівнює остача від ділення a на 5?

Розв'язання: число a має вигляд 10k+6; виконаємо ділення на 5, маємо: 10k+6=5(2k+1)+1, частка дорівнює (2k+1), остача 1.

Відповідь: 1.

2.5. Число a дає остачу 8 при діленні на 9. Чому дорівнює остача від ділення a на 3?

Відповідь: 2.

2.6. Чи може число ділитись на 8 та давати остачу 10 при діленні на 12?

Розв'язання: дане число має вигляд 8k; розглянемо ділення на 12, маємо, що наше число має вигляд: 12m+10, а тому 12m+10=8k, звідки 2k-3m=2.5, що неможливо, оскільки k,m – цілі числа.

Відповідь: Ні.

2.7. Чи може число ділитись на 6 та давати остачу 4 при діленні на 10?

Відповідь: Так, наприклад, 24.

2.8. Число a дає при діленні на 8 остачу 3, число b – остачу 5. Яку остачу при діленні на 8 дає число: а) $a+b$; б) a-b; в) $a\cdot b$?

Розв'язання: а) $a=$8k+3; $b=$8m+5, k,m – цілі числа. Тоді $a+b=$(8k+3)+(8m+5)=8(k+m+1), частка (k+m+1), остача 0.

Відповідь: 0.

б) a-b=(8k+3)-(8m+5)=8(k-m-1)+6, частка (k-m-1), остача 6.

Відповідь: 6.

в) a-b=(8k+3)·(8m+5)=8(8km+3m+5k+1)+7, остача 7.

Відповідь: 7.

2.9. Число a дає при діленні на 11 остачу 4, число b – остачу 6. Яку остачу при діленні на 11 дає число: а) $a+b$; б) a-b; в) $a{\cdot}b$?

а) *Відповідь:* 10; б) *Відповідь:* 9; в) *Відповідь:* 2.

2.10. Серед усіх чисел, які більші від 5000 та при діленні на 15 дають остачу 3, знайдіть найменше.

Розв'язання: дане число має вигляд 15k+3, з умови випливає 15k+3>5000; звідки k>333.1(3). Оскільки k – ціле число і нас цікавить найменше число, то при k=334 маємо шукане число 5013.

Відповідь: 5013.

2.11. Знайдіть найбільше число, яке не перевищує числа 10000 та яке дає остачу 28 при діленні на 56.

Відповідь: 9996.

2.12. Число 41 дає остачу 6 при діленні на a. Знайдіть всі можливі значення числа a.

Розв'язання: з умови випливає, що 41=$a{\cdot}q$+6, причому остача 6 менша за $|a|$. Виразимо a, маємо: $a=\dfrac{35}{q}$; оскільки $a\in Z$, звідси: $35\,\vdots\,q \Rightarrow q\in\{\pm1;\pm5;\pm7;\pm35\}$. Неважко помітити, що дві умови: $a=\dfrac{35}{q}$; $|a|>6$ задовольняють значення часток $q\in\{\pm1;\pm5\}$, звідки $a\in\{\pm7;\pm35\}$. Тобто можливі 4 випадки: $41=(\pm7)\cdot(\pm5)+6$; $41=(\pm35)\cdot(\pm1)+6$.

Відповідь: $a\in\{\pm7;\pm35\}$.

2.13. Число a при діленні на 3 дає остачу 2 та при діленні на 2 – остачу 1. Знайдіть остачу від ділення a на 6. Укажіть найменше натуральне число, що задовольняє умову.

Розв'язання: з умови маємо, що a=3k+2 та a=2m+1 (тобто a – непарне), k,m – цілі числа. При k парному, k=2n, a=3k+2=6n+2 (парне) – неможливо; при k – непарному, k=2n+1, маємо: a=3k+2=3(2n+1)+2=6n+5, а тому остача від ділення a на 6 дорівнює 5. Найменше натуральне число, що задовольняє умову – 5.

Відповідь: 5.

2.14. Остачі від ділення числа g на 3,5,11 дорівнюють a,b,c відповідно. Доведіть, що (110a+33b+30c-8g)⋮165.

Доведення: з умови маємо: g=3k+a; g=5m+b; g=11n+c, причому g,a,b,c,k,m,n – цілі числа. Виразимо a,b,c та підставимо у вираз, даний в умові, отримаємо: 110a+33b+30c-8g= =110·(g-3k)+33·(g-5m)+30·(g-11n)-8g=165g-330k-165m-330n= =165·(g-2k-m-2n) ⋮165, оскільки вираз у дужках – число ціле.

2.15. Було 3 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 10 частин, і так n разів. Чи могло в результаті отриматись:

а) 2009 аркушів; б) 2010 аркушів; в) 2013 аркушів?

Розв'язання: Врахуємо, як змінюється кількість аркушів після кожного розрізу: зникає один лист (його розрізають) та з'являється 10 нових листів, тобто після кожного розрізу додається 9 листів. Після n розрізів отримається (3+9n) аркушів.

а) 3+9n=2009, n – натуральне, звідки 9n =2006, рівняння не має розв'язків у множині натуральних чисел. Відповідь негативна.

б) 3+9n=2010, 9n =2007, n =223. Відповідь позитивна.

в) 3+9n=2013, рівняння не має розв'язків у множині натуральних чисел. Відповідь негативна.

Відповідь: а) ні; б) так; в) ні.

2.16. Яку остачу дає число a при діленні на b, де

а) a=2n^2+5n-3, b=n+4; б) a=4n+7, b=2n+1;

в) a=4n+5, b=2n+3; г) a=n^2+1, b=n,

якщо n – довільне натуральне число?

Розв'язання: Виконаємо ділення у стовпчик:

$$\begin{array}{r|l} -\,2n^2+5n-3 & n+4 \\ \underline{2n^2+8n} & \overline{2n-3} \\ -3n-3 & \\ -\,\underline{-3n-12} & \\ 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,4n+7 & 2n+1 \\ \underline{4n+2} & \overline{\;\;2\;\;} \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,4n+5 & 2n+3 \\ \underline{4n+6} & \overline{\;\;2\;\;} \\ -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,n^2+1 & n \\ \underline{n^2} & \overline{n} \\ 1 & \end{array}$$

а) оскільки n – довільне натуральне число, а остача не може бути більшою від дільника, то маємо випадки:

якщо n+4>9, тобто n>5, остача r=9;

якщо n+4≤9, звідки n≤5, тоді остача дорівнює 9-(n+4)=5-n, тобто при n=1 остача r=4; при n=2 остача r=3; при n=3 остача r=2; при n=4 остача r=1; при n=5 остача r=0.

Відповідь: якщо n=1, то r=4; якщо n=2, то r=3; якщо n=3, то r=2; якщо n=4, то r=1; якщо n=5,то r=0; якщо n>5, то r=9.

б) якщо 2n+1>5, тобто n>2, остача r=5;

якщо 2n+1≤5, звідки n≤2, тоді остача дорівнює 5-(2n+1)=4-2n, тобто при n=1 остача r=2; при n=2 остача r=0.

Відповідь: якщо n=1, то r=2; якщо n=2, то r=0; якщо n>2, то r=5.

в) оскільки остача не може бути від'ємною, маємо таку остачу: -1+(2n+3)=2n+2, остача r=2n+2.

Відповідь: остача r=2n+2, n – довільне натуральне число.

г) Відповідь: якщо n=1, то r=0; якщо n>1, то r=1.

2.17. Знайдіть всі цілі числа n такі, що значення виразу $\frac{4n-5}{2n-1}$ є цілим числом.

Розв'язання: зауважимо, що при усіх цілих значеннях n знаменник не перетворюється в нуль. Виділимо цілу частину дробу (або виконаємо ділення у стовпчик): $\frac{4n-5}{2n-1}=\frac{2(2n-1)-3}{2n-1}=2-\frac{3}{2n-1}\in Z$, звідки $3 ⋮ (2n-1)$, а тому $(2n-1)$ може набувати значень {±1; ±3}.

Розв'язуючи сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}2n-1=-1;\\2n-1=1;\\2n-1=-3;\\2n-1=3;\end{array}\right.$, отримаємо $\left[\begin{array}{l}n=0;\\n=1;\\n=-1;\\n=2.\end{array}\right.$

Відповідь: $n\in\{-1;0;1;2\}$.

2.18. Доведіть, що з восьми цілих чисел завжди можна обрати два таких, різниця яких буде ділитися на 7.

Розв'язання: зауважимо, що при діленні на 7 можливі лише сім різних остач: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Оскільки у нас є вісім чисел, а можливих остач – сім, то за принципом Діріхле серед цих чисел обов'язково знайдуться два числа, які при діленні на 7 дають однакові остачі, а тоді їхня різниця буде ділитися на 7.

§3. Дільники.

Нагадаємо, що ціле число $b\neq 0$ називається дільником цілого числа a, якщо $a ⋮ b$. У цьому параграфі ми будемо розглядати лише натуральні числа та їх натуральні дільники. Випишемо, наприклад, всі дільники числа 48:

1,2,3,4,6,8,12,16,24,48.

Неважко помітити, що множина цих дільників має певну симетрію: 1·48=48, 2·24=48, 3·16=48, 4·12=48, 6·8=48. Це легко пояснити: якщо число $a\neq 0$ має дільник b, то за означенням $a=c\cdot b$, де $c\in Z$. Відповідно, число c також є дільником числа a; таким чином, для будь-якого дільника b знайдеться парний йому дільник c такий, що добуток b і c дорівнює даному числу a. Такі два дільника називають *додатковими*. У наведеному прикладі всі дільники числа 48 розбиваються на пари додаткових дільників. Однак так буває не завжди. Розглянемо, наприклад, дільники числа 36:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Бачимо, що 1·36=36, 2·18=36, 3·12=36, 4·9=36. А ось число 6 залишається без пари. Відповідь проста: адже 6·6=36 – тобто додатковим до дільника 6 буде саме число 6.

Вправи до § 3.

3.1. Випишіть усі натуральні дільники чисел: а) 64; б) 225; в) 162; г) 243; д) 1000.

Вказівка. Їхня кількість повинна бути: а) 7; б) 9; в) 10; г) 6; д) 16 штук.

3.2. Доведіть, що число має непарну кількість дільників тоді і тільки тоді, коли воно є повним квадратом.

Вказівка. Утворіть пари додаткових дільників, які дають у добутку дане число, та розгляньте дільник, що не має пари.

3.3. Які натуральні числа мають парне число натуральних дільників?

Вказівка. Дивіться вправу 3.2.

3.4. Довести, що $n=\dfrac{d_1+d_2+...+d_k}{\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}+...+\dfrac{1}{d_k}}$, де $d_1, d_2, ..., d_k$ – усі натуральні дільники числа *n*.

Вказівка. Використайте, що усі дільники числа *n* розбиваються на пари дільників: $n=d_1\cdot d_k; n=d_2\cdot d_{k-1}...$, виразіть $d_1, d_2, ..., d_k$, підставте у чисельник.

3.5. Наведіть приклад натурального числа, що має рівно: а) 5; б) 6 натуральних дільників.

Розв'язання. Нескладно переконатися, що число p^k, де p – просте число, має рівно $(k+1)$ дільник: 1, p, p^2,..., p^k. Тому, наприклад, число 16 має 5 натуральних дільників, а число 32 – 6 натуральних дільників. Числа 12, 18, 20, 50, 63 мають теж по 6 натуральних дільників. Також будь-яке число виду $p\cdot q^2$, де p,q – різні прості числа, має рівно 6 дільників: $\{1, p, q, pq, q^2, pq^2\}$.

Відповідь. а) p^4, де p – довільне просте число;
б) p^5, де p – просте число, або $p\cdot q^2$, де p,q – різні прості числа.

3.6. Наведіть приклад натурального числа, що має рівно: а) 7;

б) 8; в) 15 натуральних дільників.

Відповідь. а) p^6, де p – довільне просте число;

б) p^7, де p – просте число, або $p\cdot q^3$, де p,q – різні прості числа;

в) p^{14}, де p – просте число, або $p^2\cdot q^4$, де p,q – різні прості числа.

3.7. Скільки натуральних дільників має число 2000.

Розв'язання. Оскільки $2000=2^4\cdot 5^3$, то має $(4+1)(3+1)=20$ натуральних дільників.

Відповідь: 20.

3.8. Число *n* має вигляд $n=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$. Якщо число *n* поділити на 2, то нове число буде мати на 12 дільників менше, ніж *n*; якщо число *n* поділити на 3, то нове число буде мати на 15 дільників менше, ніж *n*; якщо число *n* поділити на 5, то нове число буде мати на 20 дільників менше, ніж *n*. Знайти число *n*.

Розв'язання. Оскільки $n=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$, то кількість усіх дільників числа *n* визначається $t=(x+1)(y+1)(z+1)$. Після ділення *n* на 2 отримаємо число $n_1=2^{x-1}\cdot 3^y\cdot 5^z$, кількість дільників якого, відповідно, $t-12=x(y+1)(z+1)$; після ділення числа *n* на 3 отримаємо число $n_2=2^x\cdot 3^{y-1}\cdot 5^z$, кількість дільників якого $t-15=(x+1)\cdot y\cdot(z+1)$; після ділення *n* на 5 матимемо число $n_3=2^x\cdot 3^y\cdot 5^{z-1}$, кількість дільників якого, відповідно, $t-20=(x+1)(y+1)\cdot z$. Маємо систему 4-х рівнянь з 4-ма невідомими. Віднімемо від першого рівняння послідовно друге, третє та четверте рівняння системи. Отримаємо:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)(z+1)=t\\ x(y+1)(z+1)=t-12\\ (x+1)\cdot y\cdot(z+1)=t-15\\ (x+1)(y+1)\cdot z=t-20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)(y+1)(z+1)=t\\ (y+1)(z+1)=12\\ (x+1)(z+1)=15\\ (x+1)(y+1)=20\end{cases}.$$

З другого, третього та четвертого рівнянь маємо, що $x=4; y=3; z=2$, тому $t=60$, а тоді і шукане число $n=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$.

Відповідь: $n=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$.

3.9. У кожному вагоні потягу пасажирів було порівну. Скільки було вагонів, якщо відомо, що в потягу їхало 1007 пасажирів?

Розв'язання. Нескладно помітити, що 1007=19·53, а тому потяг налічував 19 вагонів (по 53 пасажири у кожному). Відмітимо, що пасажирський потяг не може містити 53 вагони.

Відповідь. 19 вагонів.

§4. Порівняння за модулем.

Означення 1.3. Нехай m – довільне натуральне число. Два цілих числа a і b називаються *порівнюваними за модулем* m, якщо a і b дають однакові остачі при діленні на m. Пишуть $a \equiv b(\bmod m)$.

Приклади: 7≡13(mod 6); –8≡122(mod 5).

Поділимо a і b з остачею на m: $a = q_1 \cdot m + r_1$, $b = q_2 \cdot m + r_2$. Якщо $r_1 = r_2$, то $a - b = q_1 \cdot m - q_2 \cdot m = ((q_1 - q_2) \cdot m) \vdots m$. Навпаки, якщо $(a-b) \vdots m$, тобто $((q_1 - q_2) \cdot m + (r_1 - r_2)) \vdots m$, то і $(r_1 - r_2) \vdots m$. З означення остачі випливають нерівністі: $0 \le r_1 < m, 0 \le r_2 < m$, звідки отримуємо, що $-m < r_1 - r_2 < m$. Але з усіх цілих чисел, що задовольняють цю подвійну нерівність, тільки 0 ділиться на m; відповідно, $r_1 - r_2 = 0$, тобто $r_1 = r_2$. Таким чином, справедливим є твердження: два цілих числа a і b є порівнюваними за модулем m, якщо $(a-b) \vdots m$.

Виходячи з цих міркувань можна сформулювати ознаку порівнюванння за модулем m чисел.

Теорема 1.2. Два числа порівнювані за модулем m тоді і тільки тоді, коли одне з них відрізняється від іншого на число, кратне модулю m:

$$a \equiv b(\bmod m) \Leftrightarrow a = b + mt,\ t \in Z.$$

Доведіть цю теорему самостійно, використовуючи означення 1.3.

Розглянемо основні властивості порівняння за модулем.

Теорема 1.3. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$, $b \equiv c(\bmod m)$, то $a \equiv c(\bmod m)$.

Доведення безпосередньо випливає з означення 1.3 (доведіть цю теорему самостійно).

Теорема 1.4. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$, $c \equiv d(\bmod m)$, то:

1) $a + c \equiv b + d(\bmod m)$, $a - c \equiv b - d(\bmod m)$; 2) $a \cdot c \equiv b \cdot d(\bmod m)$.

Доведення. 1) За умовою $(a-b) \vdots m$, $(c-d) \vdots m$. Тоді $(a+c)-(b+d) = ((a-b)+(c-d)) \vdots m$, тобто $a + c \equiv b + d(\bmod m)$, що і треба було довести. Порівняння $a - c \equiv b - d(\bmod m)$ доводиться аналогічно.

2) Виконаємо перетворення:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b) \cdot c + (c-d) \cdot b.$$

За умовою $(a-b) \vdots m$, $(c-d) \vdots m$, відповідно, і $(ac - bd) \vdots m$, тобто $a \cdot c \equiv b \cdot d(\bmod m)$, що і треба було довести.

Теорема 1.5. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$, то $a^n \equiv b^n(\bmod m)$ для будь-якого $n \in N$.

Доведення цієї теореми є очевидним, якщо згадати відому формулу:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot\left(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 + ... + a^2\cdot b^{n-3} + a\cdot b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Як випливає з теореми 1.4, порівняння за тим самим модулем можна додавати, віднімати та множити. Однак порівняння не можна ділити на будь-яке число, проте можна ділити на число, що взаємно-просте з модулем (очевидно, що при цьому на вказане число мають ділитися обидва числа, що порівнюються). Наприклад, нехай $12 \equiv 6(\mathrm{mod}\,2)$, тоді $4 \equiv 2(\mathrm{mod}\,2)$ є істинним твердженням (ми поділили 12 та 6 на 3, яке є взаємно простим з числом 2), а $6 \equiv 3(\mathrm{mod}\,2)$ є хибним твердженням (12 та 6 ми поділили на 2).

Порівняння за модулем буває зручно використовувати при розв'язуванні задач, що пов'язані з подільністю та остачами. Розглянемо декілька прикладів.

<u>Приклад 1.8.</u> Які остачі може давати квадрат цілого числа при діленні на 3?

Розв'язання. Розглянемо довільне ціле число a. Залежно від того, яку остачу воно дає при діленні на 3, можливі три випадки:

1) $a \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Тоді $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

2) $a \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Тоді $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

3) $a \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Тоді $a^2 \equiv 2^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

Отже, можливі два варіанти: $a^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ та $a^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Це означає, що можливі остачі від ділення a^2 на 3 дорівнюють 0 та 1.

<u>Приклад 1.9.</u> Доведіть, що $\left(12^{2n+1} + 11^{n+2}\right) \vdots 133$ при будь-якому $n \in N$.

Розв'язання. Маємо $12^{2n+1} = 12\cdot 12^{2n} = 12\cdot 144^n$. Помітимо, що $144 \equiv 11(\mathrm{mod}\,133)$; тоді $144^n \equiv 11^n(\mathrm{mod}\,133)$ та $12\cdot 144^n \equiv 12\cdot 11^n(\mathrm{mod}\,133)$. Далі, $11^{n+2} = 11^2\cdot 11^n = 121\cdot 11^n$. Оскільки $121 \equiv -12\,(\mathrm{mod}\,133)$, то $121\cdot 11^n \equiv -12\cdot 11^n\,(\mathrm{mod}\,133)$. Тоді:

$$12\cdot 144^n + 121\cdot 11^n \equiv 12\cdot 11^n + (-12)\cdot 11^n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,133),$$

а це означає, що $\left(12^{2n+1} + 11^{n+2}\right) \vdots 133$, що і треба було довести.

Порівняння за модулем дозволяють виявити цікаву закономірність, пов'язану з остачами степенів цілих чисел. Розглянемо послідовність $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ Подивимось, які остачі дають члени цієї послідовності при діленні, наприклад, на 5:

$2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$, $2^4=16\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$, $2^5=32\equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$, $2^6=64\equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$, $2^7=128\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5),\ldots$

Видно, що, починаючи з 2^4, остачі почали повторюватись. Чи будуть вони повторюватись і далі? Чи будуть вони повторюватись, якщо взяти іншу основу степеня замість 2 або інше число замість 5? Порівняння за модулем дозволяють легко відповісти на це запитання. Помітимо, що оскільки можливих остач від ділення на 5 скінченна кількість, а членів послідовності нескінченно багато, то знайдуться два члени з однаковими остачами. Нехай у n-го та $(n+s)$-го членів послідовності остачі від ділення на 5 співпали: $2^n \equiv 2^{n+s} (\mathrm{mod}\ 5)$. Тоді, помноживши це порівняння на таке: $2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$, отримаємо: $2^{n+1} \equiv 2^{(n+1)+s} (\mathrm{mod}\ 5)$. А це означає, що остачі $(n+1)$-го та $((n+1)+s)$-го членів також співпадуть. Аналогічно отримаємо, що співпадуть і остачі $(n+2)$-го та $((n+2)+s)$-го членів тощо. Відповідно, остачі будуть повторюватись з періодом s.

Оскільки проведені міркування ніяк не залежать від властивостей чисел 2 і 5, то їх можна здійснити і для будь-яких інших натуральних чисел. Таким чином, для будь-яких $m,k \in N$ остачі від ділення членів послідовності $m^0, m^1, m^2, m^3, \ldots$ на k будуть періодично повторюватись. Довжина періоду буде залежати від значень m і k: так, у розглянутому прикладі вона дорівнює 4. Якщо, наприклад, покласти m=3 і k=13, то довжина періоду буде рівною 3.

При деяких значеннях m і k остачі можуть періодично повторюватись не з самого початку. Наприклад, якщо $m=4$, $k=120$, то отримаємо таку послідовність остач: 1, 4, 16, 64, 16, 64, 16…

Розглянуту закономірність можна застосовувати для розв'язання деяких задач.

<u>Приклад 1.10.</u> Знайдіть остачу від ділення 2008^{2008} на 7.

Розв'язання. Оскільки $2008 = 286 \cdot 7 + 6$, то $2008 \equiv 6 \left(\mathrm{mod}\ 7\right)$, тоді $2008^{2008} \equiv 6^{2008} \left(\mathrm{mod}\ 7\right)$. Знайдемо остачі від ділення на 7 перших декількох степенів числа 6:

$$6^0 = 1;\ 6^1 = 6;\ 6^2 = 36 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 7\right);\ 6^3 = 216 \equiv 6 \left(\mathrm{mod}\ 7\right).$$

Очевидно, $6^2 \equiv 6^0 \left(\mathrm{mod}\ 7\right)$, а, відповідно, довжина періоду, з яким повторюються остачі від ділення 6^n на 7, дорівнює 2. Це означає, що $6^{2k+r} \equiv 6^r \left(\mathrm{mod}\ 7\right)$, для будь-яких $k, r \in N$. Помітимо, що $2008 = 2 \cdot 1004$; тоді $2008^{2008} \equiv 6^{2008} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ 7\right)$. Отже, шукана остача дорівнює 1.

Помітимо, що остачі від ділення членів послідовності $m, 2m, 3m, \ldots$ на деяке натуральне k (тут m – довільне натуральне число) також циклічно повторюються. Доведення цього факту схоже на наведене вище доведення для послідовності $m^0, m^1, m^2, m^3 \ldots$ Залишаємо це питання для самостійного дослідження.

<u>Приклад 1.11.</u> Знайдіть остачу від ділення числа 2009^{2009} на 3.

Розв'язання. Легко бачити, що $2009 \equiv -1 \left(\mathrm{mod}\ 3\right)$; відповідно, $2009^{2009} \equiv \left(-1\right)^{2009} \equiv -1 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ 3\right)$. Таким чином, шукана остача дорівнює 2.

Зверніть увагу на те, що при розв'язанні прикладу 1.11 ми звели основу степеня до –1. Зведення основи до 1 або –1 часто спрощує розрахунки, оскільки $1^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k)$, для будь-яких $n, k \in N$. За допомогою цього прийому можна, наприклад, запропонувати більш просте розв'язання прикладу 1.10. Помітимо, що $2008 \equiv (-1) (\mathrm{mod}\ 7)$, тоді $2008^{2008} \equiv (-1)^{2008} (\mathrm{mod}\ 7)$. Врахувавши, що $(-1)^{2008} = 1$, маємо, що шукана остача дорівнює 1.

Вправи до § 4

4.1. Які остачі може давати повний квадрат при діленні на а) 4; б) 5; в) 7; г) 8?

Розв'язання. а) При діленні на 4 усі цілі числа можуть давати такі остачі:

1) $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тоді $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$.

2) $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тоді $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

3) $a \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тоді $a^2 \equiv 2^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$.

4) $a \equiv 3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тоді $a^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Відповідь: можливі остачі від ділення a^2 на 4 дорівнюють 0 та 1.

б) *Відповідь*: остачі від ділення a^2 на 5 дорівнюють 0, 1 та 4.

в) *Відповідь*: остачі від ділення a^2 на 7 дорівнюють 0, 1, 2 та 4.

г) *Відповідь*: остачі від ділення a^2 на 8 дорівнюють 0, 1 та 4.

4.2. Доведіть, що a^2+1 не ділиться на 3 для усіх цілих a.

Вказівка: скористайтесь результатами прикладу 1.8 та отримайте, що усі можливі остачі від ділення виразу a^2+1 на 3 є 1 та 2.

4.3. Число a при діленні на 5 дає остачу 3. Чому дорівнює остача від ділення на 5 числа a^2+4a?

Розв'язання.

1) $a \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$. Тоді $a^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$.

2) $a \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$. Тоді $4a \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$.

3) $a^2 + 4a \equiv 4 + 2 \equiv 6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$.

Відповідь: остача від ділення a^2+4a дорівнює 1.

4.4. Доведіть, що числа 10^8 і 10^{12} дають однакові остачі при діленні на 11.

Розв'язання. $10 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 11)$. Піднесемо до 8-го степеня порівняння, маємо $10^8 \equiv (-1)^8 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$; аналогічно $10^{12} \equiv (-1)^{12} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$.

Відповідь: остачі від ділення 10^8 і 10^{12} однакові (дорівнюють 1).

4.5. Доведіть, що число виду 9^n+1, де $n \in N$, не може закінчуватися більш, ніж одним нулем.

Доведення. Якщо число закінчується двома і більше нулями, то воно ділиться на 4, розглянемо порівняння за модулем 4: $9 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^n + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, тобто $9^n + 1$ не ділиться на 4. А тому число $9^n + 1$ не може закінчуватися більше, ніж одним нулем (для того, щоб число мало один нуль, воно має ділитися на 2 та на 5, нескладно показати, що існують $n \in N$ такі, що число виду 9^n+1 ділиться на 2 та на 5).

4.6. Чи має рівняння $3x^2-4y^2=13$ цілочисельні розв'язки?

Вказівка. Перепишіть рівняння у вигляді $4x^2-4y^2=13+x^2$ та доведіть, що ліва частина ділиться на 4, а права – не ділиться на 4 для усіх цілих x, y (дивись вправу 4.1 а).

4.7. Доведіть, що рівняння $x^2+4x-8y=11$ не має розв'язків у цілих числах.

Вказівка. Перепишіть рівняння у вигляді $x^2-11=-4x+8y$ та доведіть, що права частина ділиться на 4, а ліва – не ділиться на 4 для усіх цілих x, y, оскільки дає остачу 1 або 2 при діленні на 4 (дивись вправу 4.1 а).

4.8. Знайдіть останню цифру числа 2009^{2009}.

Розв'язання. $2009 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 2009^{2009} \equiv (-1)^{2009} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$.

Відповідь: остання цифра числа 2009^{2009} дорівнює 9.

4.9. Доведіть, що $(2^{5n-2}+5^{n-1}\cdot 3^{n+1}) \vdots 17$ при будь-якому $n \in N$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення: $2^{5n-2} = 2^{5(n-1)+3} = 32^{n-1} \cdot 8$; $5^{n-1} \cdot 3^{n+1} = 15^{n-1} \cdot 9$. Оскільки $32 \equiv 15 \pmod{17}$, тоді вираз $2^{5n-2} + 5^{n-1} \cdot 3^{n+1} \equiv 32^{n-1} \cdot 8 + 15^{n-1} \cdot 9 \equiv 15^{n-1} \cdot 8 + 15^{n-1} \cdot 9 \equiv 15^{n-1} \cdot 17 \equiv 0 \pmod{17}$, остача дорівнює нулю для усіх натуральних $n \geq 1$.

4.10. Доведіть, що $(5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}) \vdots 19$ при будь-якому $n \in N \cup \{0\}$.

Розв'язання. Після перетворень: $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} = 25^n \cdot 5 \cdot 2^n \cdot 4 = 50^n \cdot 20$; $3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 3^n \cdot 9 \cdot 4^n \cdot 2 = 12^n \cdot 18$ та $50 \equiv 12 \pmod{19}$, маємо: $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \equiv 50^n \cdot 20 + 12^n \cdot 18 \equiv 12^n \cdot 20 + 12^n \cdot 18 \equiv 12^n \cdot 38 \equiv 0 \pmod{19}$, а тому остача дорівнює нулю для усіх цілих $n \geq 0$.

4.11. Доведіть, що $(3^{2n} + 15) \vdots 12$ при будь-якому $n \in N$.

Розв'язання. Очевидно, що даний вираз ділиться на 3 при будь-якому $n \in N$. Покажемо, що він ділиться на 4: $3^{2n} + 15 = 9^n + 15$, $9 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^n \equiv 1 \pmod 4$; $15 \equiv 3 \pmod 4$, а тоді $9^n + 15 \equiv 3 + 1 \equiv 0 \pmod 4$.

4.12. Доведіть, що для при будь-якому $n \in N$ $\left(3^{4n}+4\right) \vdots 5$.

Розв'язання. Оскільки $3^4 = 81 \equiv 1(\text{mod}\,5)$, то $3^{4n} = (3^4)^n \equiv 1^n \equiv 1(\text{mod}\,5)$, а тоді при будь-якому $n \in N$ маємо $3^{4n} + 4 \equiv 1 + 4 = 5 \vdots 5$.

4.13. Доведіть, що $(1^{2k+1}+2^{2k+1}+\ldots+(2n)^{2k+1}) \vdots (2n+1)$ при будь-яких n,k$\in N$.

Розв'язання. $2n \equiv -1(\text{mod } 2n+1) \Rightarrow (2n)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1(\text{mod } 2n+1)$;
$2n-1 \equiv -2(\text{mod } 2n+1) \Rightarrow (2n-1)^{2k+1} \equiv (-2)^{2k+1} \equiv -2^{2k+1}(\text{mod } 2n+1)$;
$2n-2 \equiv -3(\text{mod } 2n+1) \Rightarrow (2n-2)^{2k+1} \equiv (-3)^{2k+1} \equiv -3^{2k+1}(\text{mod } 2n+1)$ і т.д. А тоді

$$1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}+\ldots+(2n-2)^{2k+1}+(2n-1)^{2k+1}+(2n)^{2k+1} \equiv$$
$$\equiv 1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}+\ldots-3^{2k+1}-2^{2k+1}-1^{2k+1} \equiv 0 \ (\text{mod } 2n+1)$$

4.14. Знайдіть остачу від ділення числа $5^{2009}+7^{2010}$ на 11.

Розв'язання. Використаємо властивості порівнянь (почленно множити на число, почленно додавати, підносити до натурального степеня:

$$5^2 \equiv 25 \equiv 3(\text{mod } 11) \qquad 7^2 \equiv 49 \equiv 5(\text{mod } 11)$$
$$5^3 \equiv 5\cdot 3 \equiv 4(\text{mod } 11) \qquad 7^3 \equiv 7\cdot 5 \equiv 2(\text{mod } 11)$$
$$5^4 \equiv 5\cdot 4 \equiv 9(\text{mod } 11) \qquad 7^4 \equiv 7\cdot 2 \equiv 3(\text{mod } 11)$$
$$5^5 \equiv 5\cdot 9 \equiv 1(\text{mod } 11) \qquad 7^5 \equiv 7\cdot 3 \equiv -1(\text{mod } 11)$$
$$2009 = 5\cdot 401+4 \qquad 7^{10} \equiv (-1)^2 \equiv 1(\text{mod } 11)$$
$$5^{2009} \equiv \left(5^5\right)^{401}\cdot 5^4 \equiv 1^{401}\cdot 9 \equiv 9(11) \qquad 7^{2010} \equiv \left(7^{10}\right)^{201} \equiv 1^{201} \equiv 1(11)$$

А тоді $5^{2009}+7^{2010} \equiv 9+1 \equiv 10(\text{mod } 11)$.

Відповідь: остача 10.

4.15. Якою цифрою закінчується число $(((7^7)^7)^7)$?

Вказівка. Обчисліть остачу від ділення числа на 10. Виконайте покрокові обчислення, порівняйте проміжні результати: $7^7 \equiv 3(\text{mod } 10)$; $3^7 \equiv 7(\text{mod } 10)$; $7^7 \equiv 3(\text{mod } 10)$.

Розв'язання 2. $\left(\left(7^7\right)^7\right)^7 = 7^{7\cdot 7\cdot 7}$; оскільки $7^1 \equiv 7(\text{mod } 10)$, $7^2 \equiv 9(\text{mod } 10)$, $7^3 \equiv 3(\text{mod } 10)$, $7^4 \equiv 1(\text{mod } 10)$, то $7^{4n} \equiv 1(\text{mod } 10)$, $7^{4n+1} \equiv 7(\text{mod } 10)$, $7^{4n+2} \equiv 9(\text{mod } 10)$, $7^{4n+3} \equiv 3(\text{mod } 10)$. Лишилось встановити, до якого класу попадає число 7·7·7, для цього достатньо визначити, яку остачу дає це число при діленні на 4: $7^1 \equiv -1(\text{mod } 4) \Rightarrow 7^3 \equiv -1 \equiv 3(\text{mod } 4)$, отже потрапляє до класу $4k+3$; так як $7^{4n+3} \equiv 3(\text{mod } 10)$, тому відповідь: 3.

Відповідь: остання цифра числа є 3.

4.16. Знайдіть дві останні цифри числа $(((7^9)^9)^9)$?

Вказівка. Число, утворене двома останніми цифрами числа n, — це остача від ділення n на 100*.* Проміжні результати: $7^1 \equiv 7(\mathrm{mod}\ 100)$, $7^2 \equiv 49(\mathrm{mod}\ 100)$, $7^3 \equiv 43(\mathrm{mod}\ 100)$, $7^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100)$,

Відповідь: 07.

4.17. Доведіть, що числа n і n^3 дають однакову остачу при діленні на 6.

Розв'язання 1. Використаємо властивості порівнянь (піднесення до натурального степеня): $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$; $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$; $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 8 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$; $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 27 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$; $n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 64 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$; $n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow n^3 \equiv 125 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$.

Розв'язання 2. (дивись глава 2, приклад 2.5).

4.18. Доведіть, що $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a+b)$, при будь-якому $n \in N$*.*

Вказівка. Доведіть, що $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a^2-b^2)$, використовуючи формулу з § 4, а тому $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a+b)$.

4.19*.* Знайдіть яке-небудь натуральне число, яке дає остачу 1 при діленні на 2, остачу 2 при діленні на 3, остачу 3 при діленні на 4, остачу 4 при діленні на 5, остачу 5 при діленні на 6, остачу 6 при діленні на 7.

Розв'язання. Дану умову задовольняє число (-1), але воно не є натуральним. НСК(2;3;4;5;6;7)=420. Тому $a \equiv -1 \equiv 419\ (\mathrm{mod}\ 420)$.

Відповідь: 419; 839; 1259; загальний вигляд (-1+420n), де $n \in N$.

4.20. Доведіть, що $(3^{75} + 2^{75}) \vdots 7$.

Доведення 1. $(3^{75} + 2^{75}) = (3^3)^{25} + (2^3)^{25}$, а цей вираз ділиться на $(3^3 + 2^3) = 35$, а тому ділиться на 7. Ми скористалися відомим фактом: $(a^n + b^n) \vdots (a+b)$ для довільного непарного $n \in N$.

Доведення 2. Дослідимо, які остачі дають дані в умові степені чисел 2 та 3 при діленні на 7:

$$3^3 \equiv 27 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow (3^3)^{25} \equiv (-1)^{25} \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7);$$

$$2^3 \equiv 8 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow (2^3)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7);$$

а тоді $3^{75} + 2^{75} \equiv -1 + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$, що і треба було довести.

4.21*.* Доведіть, що при жодному цілому *n* число n^2+3n+5 не ділиться на 121.

Доведення. Для того, щоб число ділилося на $121=11^2$, необхідно, щоб воно ділилося на 11.

Розглянемо усі можливі остачі від ділення указаного виразу на 11 в залежності від того, яким є n:

$n \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 5 \pmod{11}$, тобто на 11 не ділиться;

аналогічно: $n \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 9 \pmod{11}$;

$n \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$;

$n \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 23 \equiv 1 \pmod{11}$;

$n \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 33 \equiv 0 \pmod{11}$ – ділиться на11;

$n \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$;

$n \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 59 \equiv 4 \pmod{11}$;

$n \equiv 7 \equiv -4 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 9 \pmod{11}$;

$n \equiv 8 \equiv -3 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 5 \pmod{11}$;

$n \equiv 9 \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 3 \pmod{11}$;

$n \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \equiv 3 \pmod{11}$.

Маємо, що лише при $n = 4 + 11t,\ t \in \mathrm{Z}$ вираз $(n^2 + 3n + 5) \vdots 11$. Дослідимо подільність виразу на 121 при вказаному значенні n:
$n^2 + 3n + 5 = (4 + 11t)^2 + 3(4 + 11t) + 5 = 16 + 88t + 121t^2 + 12 + 33t + 5 = 121t(t+1) + 33$
– не ділиться на 121 для усіх $t \in \mathrm{Z}$.

4.22. Доведіть, що рівняння x^3-x=y^2-2011y+2009 не має розв'язків у цілих числах.

Доведення. Ліва частина x^3-x=x(x^2-1)=(x-1)x(x+1) є добутком трьох послідовних чисел, а тому ділиться на 3!, отже, ділиться на 3. Покажемо, що права частина не ділиться на 3 при будь-якому цілому y:

$y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow y^2 - 2011y + 2012 \equiv 2012 \equiv 2 \pmod{3}$ – не ділиться на 3;

$y \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y^2 - 2011y + 2012 \equiv 2 \pmod{3}$ – не ділиться на 3;

$y \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow y^2 - 2011y + 2012 \equiv -2006 \equiv 1 \pmod{3}$ – не ділиться на 3.

§5. Десятковий запис числа.

У десятковій системі числення значення кожної цифри залежить від позиції (розряду), в якій вона знаходиться. Наприклад, $32583 = 3\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 8\cdot10^1 + 3\cdot10^0$, тобто число 32583 складається з 3 десятків тисяч, 2 тисяч, 5 сотень, 8 десятків, 3 одиниць. Такі системи числення, в яких значення цифри залежить від позиції, в якій вона знаходиться, називаються *позиційними*.

Оскільки в нашій системі числення усі числа можна подати за степенями числа 10, то вона називається *десятковою*; число 10 називається *основою системи числення*.

У загальному вигляді для десяткової системи можна записати:

$$a = \overline{a_1 a_2 ... a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0 .$$

де $a_1, a_2, ... a_n$ – цілі невід'ємні числа, які не перевищують 9, та $a_1 \neq 0$.

Приклад 1.12. Знайдіть усі тризначні числа, які в 15 разів більші суми власних цифр.

Розв'язання. Уявимо шукане число у вигляді $\overline{abc}$. За умовою $\overline{abc} = 15 \cdot (a+b+c)$, тобто $100a + 10b + c = 15 \cdot (a+b+c)$, або $85a - 5b = 14c$. З останньої рівності випливає, що $(14c) \vdots 5$, а тому і $c \vdots 5$, тобто $c = 0$ або $c = 5$. Якщо $c = 0$, то маємо: $85a = 5b$, *або* $17a = b$, що неможливо, оскільки $b \leq 9$, $a \neq 0$. Відповідно, якщо $c = 5$, то в цьому випадку рівняння набуває вигляду $85a - 5b = 14 \cdot 5$, *або* $17a = b + 14$. При $a = 1$ маємо $b = 3$; якщо ж $a \geq 2$, то $b \geq 17 \cdot 2 - 14 = 20$, чого бути не може. Отже, шукане число – це 135.

Вправи до §5

5.1. Ціле число a закінчується на 5. Доведіть, що a^2 закінчується на 25.

Розв'язання. Нехай $a = \overline{a_1 a_2 ... a_{n-1} 5} = \overline{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \cdot 10 + 5$, тоді

$$a^2 = \left(\overline{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \cdot 10 + 5\right)^2 = \underbrace{\left(\overline{a_1 a_2 ... a_{n-1}}\right)^2 \cdot 100 + 2 \cdot \overline{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \cdot 10 \cdot 5}_{\vdots\, 100} + 5^2 \equiv 25 \pmod{100}.$$

5.2. Знайдіть усі тризначні числа, які в 12 разів більші суми власних цифр.

Розв'язання. Нехай шукане число $\overline{abc}$, $a \neq 0$. За умовою $\overline{abc} = 12 \cdot (a+b+c)$, тобто $100a + 10b + c = 12 \cdot (a+b+c)$, або $88a - 2b - 11c = 0$. Звідки $2b \vdots 11$, а тому і $b \vdots 11$, тобто $b = 0$ та $11c \vdots 2 \Rightarrow c \vdots 2$. З рівності $88a - 11c = 0$ маємо $c = 8a$, а тоді $a = 1, c = 8$.

Відповідь: 108.

5.3. Припишіть до числа 123 справа дві цифри так, щоб отримане число ділилося на 36.

Розв'язання. Нехай шукане число $\overline{123x}$, де x – двозначне число, тоді $\overline{123x} = 123 \cdot 100 + x \equiv 24 + x \pmod{36}$, оскільки $12300 = 341 \cdot 36 + 24$. Число $\overline{123x}$ буде ділитися на 36, якщо 24+x=36t, t$\in Z$. Виберемо ті значення t, при яких число x буде належати проміжку [00; 99]. Отримаємо: x_1=12; x_1=48; x_1=84.

Відповідь: 12; 48; 84.

5.4. Чи існує таке натуральне n, щоб сума 1+2+…+n дорівнювала трицифровому числу з однаковими цифрами?

Розв'язання. Нехай $1+2+...+n=\overline{aaa}=a\cdot 100+a\cdot 10+a=111a=3\cdot 37a$, з іншого боку $1+2+...+n=\frac{1+n}{2}\cdot n$ як сума арифметичної прогресії. Маємо $\frac{1+n}{2}\cdot n=3\cdot 37a,\ a\in\{1,2,...,9\}$, звідки $n\cdot(n+1)=2\cdot 3\cdot 37a,$ оскільки ліва частина рівності є добуток двох послідовних натуральних чисел, а цифра $a\le 9$, то маємо єдину можливість: $n=2\cdot 3a,\cdot n+1=37$, а тоді $n=36, a=6$.

Відповідь: 666.

5.5. Чи існує ціле число, яке при закреслюванні першої цифри зменшується: а) у 36 разів; б) у 40 разів?

Розв'язання. а) Нехай таке ціле число a існує, тоді воно має принаймні дві цифри, а тоді: $a=\overline{a_1a_2...a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+\overline{a_2...a_n}$. За умовою $a_1\cdot 10^{n-1}+\overline{a_2...a_n}=36\cdot\overline{a_2...a_n}$, звідки $a_1\cdot 10^{n-1}=35\cdot\overline{a_2...a_n}$; $a_1 \vdots 7$, ліва частина ділиться на 10, тоді a_n – парна цифра. Нескладно побачити, що якщо у правій частині взяти число, рівне 2, отримаємо 35·2=70, тобто перша цифра є 7. Наприклад, число 72 задовольняє умову.

б) *Вказівка*: отримайте рівність $a_1\cdot 10^{n-1}=39\cdot\overline{a_2...a_n}$ та покажіть, чому вона неможлива.

Відповідь: а) існує, б) ні.

§6. Ознаки подільності.

Для того, щоб дізнатися, чи ділиться деяке натуральне число a на натуральне число b, можна просто розділити a на b (наприклад, «в стовпчик») і подивитись, чи дорівнює 0 остача. Однак, якщо число a велике, то таке ділення може виявитись занадто громіздким. У зв'язку з цим виникає питання: чи можливо, не виконуючи ділення, визначити за десятковим записом чисел a *і* b, чи ділиться a на b? У багатьох випадках відповідь на це питання виявляється стверджувальною.

Ознака подільності на 2. Натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2.

Зауваження. Оскільки у формулюванні фігурують слова «тоді і тільки тоді», то ця ознака містить два твердження:

1) якщо число ділиться на 2, то його остання цифра ділиться на 2;
2) якщо остання цифра ділиться на 2, то і саме число ділиться на 2.

Спробуйте аналогічним чином сформулювати два твердження ознаки порівнювання за модулем m двох чисел a та b (теорема 1.2).

Подібні формулювання мають і деякі інші ознаки подільності.

Ознака подільності на 4. Натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, утворене двома його останніми цифрами, ділиться на 4.

Ознака подільності на 8. Натуральне число ділиться на 8 тоді і тільки тоді, коли число, утворене трьома його останніми цифрами, ділиться на 8.

Ознака подільності на 5. Натуральне число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 5 (тобто рівна 5 або 0).

Ознака подільності на 10. Натуральне число ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0.

Ознака подільності на 25. Натуральне число ділиться на 25 тоді і тільки тоді, коли дві його останні цифри – нулі, або утворюють число, яке ділиться на 25 (тобто 25, 50 або 75).

Ознака подільності на 50. Натуральне число ділиться на 50 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується на 00 або 50.

Ознака подільності на 100. Натуральне число ділиться на 100 тоді і тільки тоді, коли дві його останні цифри – нулі.

Ознака подільності на 3. Натуральне число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Ознака подільності на 9. Натуральне число ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Ознака подільності на 11 формулюється дещо складніше.

Ознака подільності на 11. Нехай S_1 – сума цифр, що стоять в натуральному числі a на непарних місцях, а S_2 – сума цифр, що стоять в натуральному числі a на парних місцях. Число a ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли $(S_1 - S_2) \vdots 11$.

Ознаки подільності на 3, 9 та 11 легко довести, використовуючи порівняння за модулем. Доведемо, наприклад, ознаку подільності на 3.

Доведення. Оскільки $10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, то $10^n \equiv 1^n = 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ при будь-якому $n \in N$. Тоді:

$$\overline{a_1 a_2 ... a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0 \equiv$$

$$\equiv a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + ... + a_{n-1} \cdot 1 + a_n \equiv a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \ (\mathrm{mod}\ 3)$$

Ми отримали, що будь-яке натуральне число є порівнюваним із сумою своїх цифр за модулем 3, а це і означає, що число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Із розглянутих ознак можна отримати ще декілька ознак подільності. Розглянемо, наприклад, ознаку подільності на 6. Легко бачити, що якщо число ділиться на 6, то воно ділиться на 2 і на 3. Навпаки, якщо число ділиться на 2 і на 3, то воно ділиться і на 6.

Ознака подільності на 6. Натуральне число ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2 і на 3 одночасно.

Аналогічним чином можна отримати багато нових ознак подільності, використовуючи ознаки, які сформульовані в цьому параграфі.

Відмітимо, що існують і інші ознаки подільності (на 7, на 13, на 19 та інші числа), але вони формулюються і доводяться більш складно, ніж розглянуті вище. Взагалі, використовуючи порівняння за модулем, можна вивести ознаку подільності на будь-яке натуральне число, однак більшість таких ознак виявляються дуже незручними в практичному застосуванні та мають більш теоретичне значення.

Вправи до §6

6.1. Доведіть сформульовані в цьому параграфі ознаки подільності а) на 5; б) на 8; в) на 11.

Вказівка. а), в) Запишіть досліджуване число $\overline{a_1a_2...a_n}$ у вигляді $a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_{n-1}\cdot 10^1+a_n\cdot 10^0$ і скористайтеся порівнянням за модулем 5; за модулем 11; б) запишіть число $\overline{a_1a_2...a_n}$ у вигляді $\overline{a_1a_2...a_{n-3}}\cdot 10^3+\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ та скористайтеся порівнянням за модулем 8.

6.2. Знайдіть усі числа виду $\overline{185x2y34}$, які діляться на 33.

Розв'язання. Оскільки x та y – цифри, то $x,y\in\{0,1,...,8,9\}$. Для того, щоб число ділилося на 33, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і на 11. Так як $\overline{185x2y34}\,\vdots\,3$, то $1+8+5+x+2+y+3+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, звідки $x+y+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ або $x+y\in\{1,4,7,10,13,16\}$. Так як $\overline{185x2y34}\,\vdots\,11$, то $4-3+y-2+x-5+8-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, звідки $x+y+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, а тоді для суми маємо єдине значення: $x+y=10$. Відзначаємо, що при $x+y=10$ дане нам число ділиться і на 3, і на 11. Маємо дев'ять можливостей для $x;y$: $x_1=1,\ y_1=9; x_2=2,\ y_2=8;...;x_9=9,\ y_9=1$.

Відповідь: $x_1=1,\ y_1=9;\ \ x_2=2,\ y_2=8;...;\ x_9=9,\ y_9=1$.

6.3. Знайдіть усі числа виду $\overline{34x5y}$, які діляться на 36.

Вказівка. Скористайтеся ознаками подільності на 4 та 9. Порівняйте проміжні результати: $x+y+3\equiv 0 \pmod 9$ або $x+y\in\{6,15\}$ та $\overline{5y}\,\vdots\,4$ або $y\in\{2,6\}$.

Відповідь: $x_1=4,\ y_1=2;\ x_2=0,\ y_2=6;\ x_3=9,\ y_3=6.$

6.4. До числа 15 припишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 15.

Розв'язання. Мова йде про число $\overline{x15y}\,\vdots\,15$, x та y – невідомі цифри, тому $x,y\in\{0,1,...,8,9\}$, причому $x\neq 0$. Для того, щоб число ділилося на 15, необхідні і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і на 5. А тому $y\in\{0,5\}$ і $x+1+5+y\equiv 0 \pmod 3$, звідки $x+y\equiv 0 \pmod 3$. При $y=0,$ отримуємо $x\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x\in\{0,3,6,9\}$; так як $x\neq 0$, то маємо пари (3; 0); (6; 0); (9; 0). При $y=5,$ отримуємо $x\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x\in\{1,4,7\}$; маємо ще три пари (1; 5); (4; 5); (7; 5).

Відповідь: 3150; 6150; 9150; 1155; 4155; 7155.

6.5. Знайдіть найменше число, яке ділиться на 4, у записі якого зустрічаються усі десять цифр.

Розв'язання. Оскільки у записі числа зустрічаються всі десять цифр і воно найменше можливе, то мова йде про 10-цифрове число (оскільки будь-яке 10-цифрове менше за 11-, 12-цифрове і т.д.), а тому усі цифри повторюються рівно по одному разу.

Число буде найменшим, якщо виписувати, починаючи з початку, найменші цифри, або, починаючи з кінця, – найбільші. Очевидно, не можна починати з нуля. Тому, найменше число, що містить усі 10 цифр, є 1023456789. Проте це число не ділиться на 4. Почнемо виписувати найбільші цифри (починаючи з кінця) так, щоб число ділилося на 4 (в т.ч. на 2): якщо на останній позиції поставити найбільшу парну цифру, тобто 8, то перед нею має стояти якомога більша цифра з тих, що лишилися, щоб число ділилося на 4: це не може бути 9 (98 не ділиться на 4), не може бути 7 (78 не ділиться на 4), отже, це цифра 6. Дві останні цифри відомі – 68, а тому починаємо з кінця виписувати якомога більші цифри з тих, що лишилися, отримуємо число: 1023457968. Проте, якщо на останній позиції поставити цифру 6, то отримаємо менше число 1023457896.

Відповідь: 1023457896.

6.6. Доведіть, що число $\overline{a_0a_1a_2a_3}\,\vdots\,101$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова рівності чисел: $\overline{a_0a_1}=\overline{a_2a_3}$.

Розв'язання. Запишемо число $\overline{a_0a_1a_2a_3}$ у вигляді $\overline{a_0a_1}\cdot 10^2+\overline{a_2a_3}$ і використаємо порівняння за модулем 101: $10^2\equiv -1(\mathrm{mod}101)$, а тоді $\overline{a_0a_1a_2a_3}=\overline{a_0a_1}\cdot 10^2+\overline{a_2a_3}\equiv\overline{a_0a_1}\cdot(-1)+\overline{a_2a_3}\,(\mathrm{mod}101)$.

Умова $\overline{a_0a_1a_2a_3}\vdots 101$ рівносильна $\overline{a_0a_1a_2a_3}\equiv 0(\mathrm{mod}101)$, звідки отримуємо $\overline{a_0a_1}\cdot(-1)+\overline{a_2a_3}\equiv 0(\mathrm{mod}101)$, або $\overline{a_0a_1}\equiv\overline{a_2a_3}(\mathrm{mod}101)$. Оскільки два числа порівнювані за модулем 101, то вони або рівні, або відрізняються на число, кратне 101. Враховуючи, що це двоцифрові числа, маємо єдину можливість: $\overline{a_0a_1}=\overline{a_2a_3}$.

6.7. Доведіть, що число $\overline{a_0a_1a_2a_3}\vdots 99$ тоді і тільки тоді, коли число $\overline{a_0a_1}+\overline{a_2a_3}$ ділиться на 99.

Вказівка. Запишіть число $\overline{a_0a_1a_2a_3}$ у вигляді $\overline{a_0a_1}\cdot 10^2+\overline{a_2a_3}$ і використайте порівняння за модулем 99.

6.8. У натуральному числі a переставили цифри, в результаті чого воно зменшилося в 3 рази. Доведіть, що $a\vdots 27$.

Розв'язання. Запишемо число $a=\overline{a_1a_2a_3...a_n}$. Після перестановки цифр ми отримаємо деяке нове число з тими самими цифрами $b=\overline{a_1'a_2'a_3'...a_n'}$, причому $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}=\{a_1',a_2',a_3',...,a_n'\}$. За умовою $a=3b$, тому число $a\vdots 3$, а це означає, що сума його цифр ділиться на три: $(a_1+a_2+...+a_n)\vdots 3\Rightarrow(a_1'+a_2'+...+a_n')\vdots 3$. Оскільки сума цифр числа b ділиться на три, то число $b\vdots 3$, а тоді число $a=3b\vdots 9$.

Оскільки число $a\vdots 9$, то і сума його цифр ділиться на дев'ять: $(a_1+a_2+...+a_n)\vdots 9\Rightarrow(a_1'+a_2'+...+a_n')\vdots 9$. Оскільки сума цифр числа b ділиться на дев'ять, то число $b\vdots 9$, а тоді число $a=3b\vdots 27$.

6.9. У натуральному числі a переставили цифри, в результаті чого отримали число b. Доведіть, що $(a-b)\vdots 9$.

Вказівка. Використайте той факт, що суми цифр обох чисел однакові, а тому суми при діленні на 9 дають однакові остачі, а отже такі самі остачі дають і числа a і b, а тому різниця чисел $(a-b)\vdots 9$.

6.10. Якщо у записі числа 3*4*5*0*28 замість зірочок у довільному порядку поставити цифри 2,3,4 і 5 (кожну – один раз), то отримане число поділиться на 36. Доведіть це.

Вказівка. Використайте ознаки подільності на 4 і на 9.

Глава 2. Найбільший спільний дільник

§1. Основні поняття

Розглянемо два цілих числа a і b, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Виписавши всі їхні спільні дільники, можна знайти *найбільший спільний дільник*, тобто найбільше ціле число, яке є дільником як числа a, так і числа b. Найбільший спільний дільник чисел a і b позначається через *НСД(a,b)*, або просто *(a,b)*.

Приклади:
НСД(12,30)=6, НСД(7,–42)=7, НСД(15,22)=1, НСД(–10,–24)=2, НСД(18,0)=18.

Особливо відмітимо, що НСД(0,0) не визначений.

Аналогічно формулюється означення найбільшого спільного дільника трьох та більше чисел, хоча б одне з яких не дорівнює 0: це найбільше ціле число, яке є дільником всіх даних чисел.

Приклади: НСД(91, –133, 28, –1001)=7, НСД(12, –18, 27)=3, НСД(83, 60, 10, 20)=1.

Якщо НСД(a,b)=1, то числа a і b називаються *взаємно простими*. Один з прикладів взаємно простих чисел було наведено вище: 15 та 22. Ось ще декілька прикладів: 9 та 10; –4 та 15; 55 та 87.

Для трьох або більше чисел існують два різних означення.

Означення 2.1. Цілі числа $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ називаються *взаємно простими*, якщо їхній найбільший спільний дільник дорівнює 1.

Означення 2.2. Цілі числа $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ називаються *попарно взаємно простими*, якщо найбільший спільний дільник будь-яких двох чисел з цього набору дорівнює 1.

Легко довести, що **якщо n чисел ($n\geq3$) є попарно взаємно простими, то вони є взаємно простими** (пропонуємо читачеві це зробити самостійно).

Обернене твердження невірне: так, наприклад, числа 6,10,13 є взаємно простими, (НСД(6,10,13)=1), але не є попарно взаємно простими, оскільки НСД(6,10)$\neq$1.

Означення 2.3. *Найбільшим власним дільником числа* a називається такий його дільник, що не дорівнює a і є найбільшим з усіх інших дільників числа a.

Вправи до § 1.

1.1. Оберіть з наступних чисел всі пари взаємно простих чисел: 14,18,21,35,45,60,78,99.

1.2. Чи вірне твердження, що якщо НСД(a,b)=НСД(b,c)=d, то і НСД(a,c)=d?

Вказівка. Скористайтеся означенням НСД 2-х чисел та доведіть істинність твердження від супротивного за умов, коли (a;c)$\neq$(0;0).

1.3. Доведіть, що якщо НСД(a,b)=d, то НСД$\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)$=1.

Вказівка. Доведіть істинність твердження від супротивного, припустіть, що НСД$\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)$>1, отримайте протиріччя з умовою.

1.4. Яку найбільшу кількість однакових букетів можна скласти з 182 білих та 312 червоних троянд (треба використати всі квіти)?

Відповідь: 26 (яке обґрунтування розв'язання цієї вправи?).

1.5. Знайдіть найбільше тризначне число a, для якого НСД(a, 648)=54.

Розв'язання. Оскільки в умові йдеться про найбільше тризначне число і 999=54·18,5, то найбільше тризначне число, кратне 54, є 54·18=972. Так як 648=54·12, то НСД(972,648)>54, оскільки НСД$\left(\frac{972}{54};\frac{648}{54}\right)$=НСД$(18;12)=6\neq 1$ (дивись вправу 1.3), тому треба взяти менше число, яке кратне 54: 972-54=918. Перевірка:

НСД(918,648)=54, оскільки НСД$\left(\frac{918}{54};\frac{648}{54}\right)$= НСД$(17;12)$=1.

Відповідь: 918.

1.6. Відомо, що au+bv=1, де a, u,b,v – цілі числа. Доведіть, що НСД(a,b)=1.

Доведення. Від супротивного: нехай НСД(a,b)=d>1, звідки $a\,\vdots\,$d і b$\,\vdots\,$d. Тоді (au)$\,\vdots\,$d і (bv)$\,\vdots\,$d, а отже і (au+bv)$\,\vdots\,$d. Оскільки au+bv=1, то 1$\,\vdots\,$d>1, приходимо до суперечності з умовою.

1.7. Відомо, що au+bv=2, де a, u,b,v – цілі числа. Чи вірно, що НСД(a,b)=2?

Відповідь: невірно, придумайте контрприклад. Вірним є висновок: НСД(a,b)$\leq$2.

1.8. Сума двох натуральних чисел рівна 1045. Яке найбільше значення може приймати їх найбільший спільний дільник? Укажіть числа, про які йдеться у вправі.

Розв'язання. Варіант 1045=0+1045; НСД(0, 1045)=1045 не підходить, оскільки доданки за умовою є натуральними. Оскільки 1045=5·11·19, то найбільший власний дільник числа 1045 є 11·19, тобто число 209. Тому найбільший спільний дільник двох доданків може приймати найбільшого значення 209. Числа можуть бути 209 та 209·4; 209·2 та 209·3.

Припустимо, що a+b=1045 і НСД(a,b)=d>209. Тоді a⋮d і b⋮d, звідки (a+b)⋮d, тобто 1045⋮d>209, а тоді d=1045, маємо можливість a=0; b=1045 (або одне від'ємне, інше – додатне), що не задовольняє умови вправи.

Відповідь: 209; (209; 836) і (418; 627).

§2. Алгоритм Евкліда

Як шукати найбільший спільний дільник двох даних натуральних чисел? Можна, звичайно, діяти за означенням: виписати дільники цих чисел, виділити серед них спільні та вибрати серед всіх спільних дільників найбільший. Але цей спосіб можна запропонувати лише для зовсім невеликих чисел, оскільки він досить громіздкий: наприклад, навіть для числа 60 пошук всіх його дільників може зайняти декілька хвилин. А якщо треба знайти НСД(41450,3687135)? У таких випадках набагато ефективнішим є *алгоритм Евкліда*, який ми детально розберемо в цьому параграфі. Дія алгоритму Евкліда базується на наведених нижче лемі та теоремі.

Лема 2.1. Для будь-яких двох цілих чисел a та b, хоча б одне з яких не дорівнює 0, є вірною рівність $НСД(a,b)=НСД(a–b, b)$.

Доведення. Покажемо, що множина M спільних дільників чисел a і b співпадає з множиною N спільних дільників чисел $a–b$ і b.

Нехай m – довільний спільний дільник чисел a і b. Тоді $(a–b)\vdots m$ (за властивістю 1 з §1 глави 1), тобто m є спільним дільником чисел $a–b$ і b.

Навпаки, нехай n – довільний спільний дільник чисел $a–b$ і b. Тоді $a=((a–b)+b)\vdots n$ (за тією ж властивістю 1), тобто n є спільним дільником чисел a і b.

Таким чином, множина M спільних дільників a і b співпадає з множиною N спільних дільників $a–b$ та b; відповідно, і найбільші елементи цих двох множин (тобто НСД(a,b) та НСД($a–b,b$)) співпадають, що і треба було довести.

Сформулюємо і доведемо тепер теорему, яка, фактично, є узагальненням леми.

Теорема 2.1. Нехай $a=qb+r,\ a,b,q,r\in Z,$ причому хоча б одне з чисел a,b не дорівнюють нулю. Тоді НСД(a,b)=НСД(b,r).

Доведення. За лемою виконаємо наступні переходи:

$$\text{НСД}(a,b)=\text{НСД}(a–b,b)=\text{НСД}((a–b)–b,b)=\text{НСД}(a–2b,b)=\ldots$$
$$\ldots=\text{НСД}(a–qb,b)=\text{НСД}(r,b)=\text{НСД}(b,r),$$

що і треба було довести.

Отже, нехай дано два натуральні числа a *і* b і необхідно знайти їх найбільший спільний дільник. Покладемо для визначеності, що $a \geq b$. Поділимо з остачею a на b: нехай $a=bq_1+r_1$. За теоремою 2.1 можна записати: НСД(a,b)=НСД(b,r_1). Якщо $r_1=0$, то НСД(b,r_1)=НСД$(b,0)=b$, і в цьому випадку шуканий спільний дільник знайдено. Якщо ж $r_1\neq 0$, то поділимо тепер з остачею b на r_1: нехай $b=r_1q_2+r_2$. За тією ж теоремою 2.1 маємо: НСД(b,r_1)=НСД(r_1,r_2). Якщо $r_2=0$, то шуканий найбільший спільний дільник дорівнює r_1, якщо ж ні, то повторюємо описану процедуру, поділивши з остачею r_1 на r_2: $r_1 = r_2q_3 + r_3$ тощо. Оскільки $b>r_1>r_2>...$ за означенням остачі, то процес є скінченим, оскільки усі r_i – невід'ємні числа (також за означенням остачі).

Описаний алгоритм пошуку найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел і має назву *алгоритму Евкліда*. Розглянемо його застосування на прикладі.

Приклад 2.1. Наведемо приклад знаходження найбільшого спільного дільника, розв'язавши вправу, що була наведена на початку параграфа. Отже, треба знайти НСД(41450,3687135).

Розв'язання. Виконаємо ряд ділень з остачею:

$$3687135=41450\cdot 88+39535;$$
$$41450=39535\cdot 1+1915;$$
$$39535=1915\cdot 20+1235;$$
$$1915=1235\cdot 1+680;$$
$$1235=680\cdot 1+555;$$
$$680=555\cdot 1+125;$$
$$555=125\cdot 4+55;$$
$$125=55\cdot 2+15;$$
$$55=15\cdot 3+10;$$
$$15=10\cdot 1+5;$$
$$10=5\cdot 2.$$

За алгоритмом Евкліда маємо:

$$\text{НСД}(3687135, 41450)=\text{НСД}(41450, 39535)=\text{НСД}(39535, 1915)=$$
$$\text{НСД}(1915, 1235)=\text{НСД}(1235, 680)=\text{НСД}(680, 555)=\text{НСД}(555, 125)=$$
$$\text{НСД}(125, 55)=\text{НСД}(55, 15)=\text{НСД}(15, 10)=\text{НСД}(10, 5)=5.$$

Приклад 2.2. При яких значеннях $n\in N$ числа $3n+1$ і $5n+3$ є взаємно простими?

Розв'язання. Згідно леми 2.1:

$$НСД(3n+1,\ 5n+3) = НСД(3n+1,\ 5n+3-(3n+1)) = НСД(3n+1,\ 2n+2) =$$
$$= НСД(3n+1-(2n+2),\ 2n+2) = НСД(n-1,\ 2n+2) = НСД(n-1,\ 2n+2-2(n-1)) =$$
$$= НСД(n-1,\ 4).$$

Легко бачити, що $НСД(n–1,4)=1$ тоді і тільки тоді, коли $(n–1)\not\vdots 2$, тобто коли n – парне число.

Відповідь: при $n=2k$, де $k\in N$.

Зауваження. Алгоритм Евкліда можна застосовувати лише у випадку, коли обидва дані числа додатні. Тому, якщо одне (або обидва) з чисел a та b, найбільший спільний дільник яких треба знайти, від'ємне, то необхідно скористатися очевидною рівністю

$$НСД(a,b)=НСД(|a|,\ |b|),$$

після чого застосувати алгоритм Евкліда до чисел $|a|, |b|$.

Теорема 2.2. Якщо $НСД(a,b)=d$, то існують $u,v\in Z$ такі, що $au+bv=d$.

Доведення. Запишемо рівності, що відображають знаходження НСД(a,b) за допомогою алгоритму Евкліда:

$$\begin{gathered} a=bq_1+r_1, \\ b=r_1q_2+r_2, \\ r_1=r_2q_3+r_3, \\ r_2=r_3q_4+r_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-4}=r_{n-3}q_{n-2}+r_{n-2}, \\ r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1}, \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, \\ r_{n-1}=r_nq_{n+1}. \end{gathered}$$

Остання ненульова остача – це і є найбільший спільний дільник чисел a і b: $r_n=$НСД(a,b). Перепишемо ці рівності так, щоб кожна остача виражалася через дві попередні:

$$\begin{gathered} r_1=a-bq_1, \\ r_2=b-r_1q_2, \\ r_3=r_1-r_2q_3, \\ r_4=r_2-r_3q_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2}=r_{n-4}-r_{n-3}q_{n-2}, \\ r_{n-1}=r_{n-3}-r_{n-2}q_{n-1} \\ r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n. \end{gathered}$$

Підставивши в останню рівність вираз для r_{n-1}, отримаємо формулу, що виражає r_n через r_{n-2} та r_{n-3}:

$$r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n=r_{n-2}-(r_{n-3}-r_{n-2}q_{n-1})q_n=r_{n-2}(1+q_{n-1}q_n)-r_{n-3}q_n.$$

Аналогічно виразивши в отриманій рівності r_{n-2} через r_{n-3} та r_{n-4}, отримаємо формулу, яка виражає r_n через r_{n-3} та r_{n-4}. Потім виразимо r_{n-3} через r_{n-4} та r_{n-5} тощо. Таким чином ми дійдемо до вираження r_n у вигляді $au+bv$, де u та v – деякі цілі числа.

Приклад 2.3. Знайти НСД(1344, 272) та підібрати такі u і v, щоб НСД(1344, 272)=1344u+272v.

Розв'язання. Використавши алгоритм Евкліда, маємо такі рівності:

$$1344=272\cdot4+256;$$
$$272=256\cdot1+16;$$
$$256=16\cdot16.$$

Звідси маємо, що:

$$\text{НСД}(1344,\ 272)=16=272-256\cdot1=272-(1344-272\cdot4)=(-1)\cdot1344+5\cdot272.$$

Отже, $u=-1$ і $v=5$.

Наслідок з теореми 2.2. Якщо a і b – взаємно прості числа, то існують $u,v\in Z$ такі, що $au+bv=1$.

Розглянемо наступну важливу властивість найбільшого спільного дільника. Наприклад, випишемо всі спільні додатні дільники чисел 180 і 420:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Легко бачити, що НСД(180, 420)=60. Помітимо, що цей найбільший спільний дільник ділиться на будь-який інший спільний дільник чисел 180 і 420. Природно поставити питання: цей факт випадковий чи є загальною закономірністю, яка виконується для будь-якої пари чисел? Розглянемо теорему, яка дає відповідь на це питання.

Теорема 2.3. Якщо НСД$(a,b)=d$ і існує таке число c, що $a\vdots c$, $b\vdots c$, то і $d\vdots c$.

Доведення. За теоремою 2.2 існують $u,v\in Z$ такі, що $au+bv=d$. З умов $(au)\vdots c$, $(bv)\vdots c$ випливає умова $d=(au+bv)\vdots c$, що і потрібно було довести.

Таким чином, найбільший спільний дільник будь-яких двох чисел (хоча б одне з яких не дорівнює нулю) завжди ділиться на будь-який інший спільний дільник цих чисел.

Теорема 2.4. Якщо $(ab)\vdots c$ і НСД$(a,c)=1$, то $b\vdots c$.

Доведення. За наслідком з теореми 2.2 існують $u,v\in Z$ такі, що $au+cv=1$. Помноживши обидві частини цієї рівності на b, отримаємо: $abu+bcv=b$. За умовою $(abu)\vdots c$; крім того, $(bcv)\vdots c$; отже, і $b=(abu+bcv)\vdots c$, що і потрібно було довести.

Теорема 2.5. Якщо $ax=by$ $(a,b,x,y\in Z)$ і НСД$(a,b)=1$, то x, y можна представити у вигляді $x=bt$, $y=at$, де t – деяке ціле число.

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) $b\neq0$. За умовою $(ax)\vdots b$, НСД$(a,b)=1$; отже, $x\vdots b$ (за теоремою 2.4), тобто $x=bt$, де $t\in Z$. Тоді $y=\dfrac{ax}{b}=\dfrac{abt}{b}=at$.

2) $b=0$. Тоді $a\neq0$ і початкове рівняння приймає вигляд $ax=0$,

звідки $x=0$. Оскільки НСД$(a,b)=1$, то $a=\pm 1$. Тоді, вважаючи $t=\dfrac{y}{a}$, маємо: $y=at$, $x=0=0\cdot t=bt$ (число t є цілим, оскільки $a=\pm 1$).

Зауваження. Відмітимо, що не тільки всі цілочисельні розв'язки рівняння $ax=by$ можна представити у вигляді $x=bt$, $y=at$, де $t\in Z$, але і, навпаки, всі числа виду $x=bt$, $y=at$, де $t\in Z$, є розв'язками рівняння $ax=by$ (у цьому легко переконатися безпосередньою підстановкою).

<u>Приклад 2.4.</u> Розв'яжіть у цілих числах рівняння $5x+7y=0$.

Розв'язання. Перейдемо від даного рівняння до рівносильного:

$$5x=-7y.$$

Оскільки НСД$(5,-7)=1$, то за теоремою 2.5 всі цілочисельні розв'язки цього рівняння мають вигляд:

$$x=-7t,\ y=5t,$$

де $t\in Z$.

<u>Теорема 2.6.</u> Якщо $a\,\vdots\,c$, $a\,\vdots\,b$ і НСД$(b,c)=1$, то $a\,\vdots\,(bc)$.

Доведення. За умовою $a=qb$, де $q\in Z$. Тоді $(qb)\,\vdots\,c$, НСД$(b,c)=1$; отже $q\,\vdots\,c$ (за теоремою 2.4), тобто $q=kc$, де $k\in Z$. Тоді $a=qb=(kc)b=k(bc)$, звідки $a\,\vdots\,(bc)$, що і потрібно було довести.

<u>Приклад 2.5.</u> Доведіть, що $\left(n^3-n\right)\vdots\,6$, якщо $n\in N$.

Розв'язання. Розкладемо даний вираз на множники:

$$n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1).$$

Відмітимо, що $n-1$, n і $n+1$ – три послідовних цілих числа; одне з них ділиться на 3 і хоч би одне – на 2. Отже, і весь добуток ділиться на 3 і на 2, а отже за ознакою подільності на 6, і на $2\cdot 3=6$, що і потрібно було довести.

Вправи до § 2.

2.1. Використовуючи алгоритм Евкліда, знайдіть найбільший спільний дільник чисел:

а) 987654321 і 123456789; б) 987654321 і 222222222;
в) 111111 і 6666; г) 54321 і 12345; д) 86420 і 64208.

Відповідь: а) 123456789; б) 9; в) 33; г) 3; д) 4.

2.2. Від прямокутника 594x378 відрізують декілька квадратів із стороною 378, поки не залишиться прямокутник, у якого одна сторона менше 378. Від отриманого прямокутника знову відрізують квадрати із стороною, рівній меншій стороні цього прямокутника, доти поки це можливо, і т.д. Скільки квадратів якого розміру вийде в результаті таких операцій?

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда до указаних чисел, маємо:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}594\\ \underline{378}\\ 216\end{array} & \begin{array}{l}\underline{378}\\ 1\end{array} \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}378\\ \underline{216}\\ 162\end{array} & \begin{array}{l}\underline{216}\\ 1\end{array} \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}216\\ \underline{162}\\ 54\end{array} & \begin{array}{l}\underline{162}\\ 1\end{array} \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}162\\ \underline{162}\\ 0\end{array} & \begin{array}{l}\underline{54}\\ 3\end{array} \end{array}.$$

Таким чином, утвориться один квадрат розміру 378x378; один – 216x216; один – 162x162; три 54x54. Всього 6 квадратів.

Відповідь: 6 квадратів; у тому числі 1; 1; 1; 3 із сторонами, відповідно, 378; 216; 162; 54.

2.3. Від прямокутника 423x162 відрізують декілька квадратів із стороною 162, поки не залишиться прямокутник, у якого одна сторона менше 162. Від отриманого прямокутника знову відрізують квадрати із стороною, рівній меншій стороні цього прямокутника, доти поки це можливо, і т.д. Скільки квадратів якого розміру вийде в результаті таких операцій?

Відповідь: 9 квадратів; у тому числі 2; 1; 1; 1; 1; 3 із сторонами, відповідно, 162; 99; 63; 36; 27; 9.

2.4. Доведіть, що НСД (a, b) = НСД (27a+16b; 5a+3b) для будь-яких a,b$\in$Z.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда, маємо:
27a+16b=5·(5a+3b)+(2a+b); 5a+3b=2·(2a+b)+(a+b); 2a+b=1·(a+b)+a; a+b=1·a+b, тобто НСД (27a+16b; 5a+3b) = НСД (5a+3b; 2a+b) =
= НСД (2a+b; a+b) = НСД (a+b; a) = НСД (a; b).

2.5. При яких натуральних n будуть взаємно простими числа:

а) 4n+9 і n+2; б) 11n+5 і 2n+3; в) $2n^2+5n-5$ і n+4?

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда, маємо:

а) 4n+9 =4·(n+2)+1, звідки НСД (4n+9; n+2)= НСД (n+2;1)=1 при будь-яких натуральних n;

б) 11n+5=5·(2n+3)+(n-10); 2n+3=2·(n-10)+23, звідки
НСД (11n+5;2n+3)=НСД (n-10; 23)=1 при n-10$\neq$23k або n$\neq$23k+10, k$\in N_0$.

в) Оскільки

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}2n^2+5n-5\\ \underline{2n^2+8n}\\ -3n-5\\ -\underline{-3n-12}\\ 7\end{array} & \begin{array}{l}\underline{n+4}\\ 2n-3\end{array}\end{array}$$

, то НСД ($2n^2+5n-5$;n+4)=НСД (n+4;7)=1 при n+4$\neq$7k звідки n$\neq$7k-4, k $\in N$.

Відповідь: а) n $\in N$; б) n$\neq$23k+10, k$\in N_0$; в) n$\neq$7k-4, k $\in N$.

2.6. Доведіть, що НСД ($n^5+n^4+n^3+2n^2+n+1$; n^4+n^3+2n+1)=1 при будь-якому n$\in N$.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда, маємо:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,n^5+n^4+n^3+2n^2+n+1 & n^4+n^3+2n+1 \\ \cline{2-2}
\underline{\;\;n^5+n^4+\qquad 2n^2+n\;\;} & n \\
\qquad n^3\quad+\quad 1 &
\end{array},\quad
\begin{array}{l|l}
-\,n^4+n^3+2n+1 & n^3+1 \\ \cline{2-2}
\underline{\;\;n^4\quad+\quad n\;\;} & n+1 \\
\quad -\,n^3+n+1 & \\
\quad\;\underline{\;n^3\quad+\;1\;} & \\
\qquad\quad n &
\end{array},\quad
\begin{array}{l|l}
-\,n^3+1 & n \\ \cline{2-2}
\underline{\;\;n^3\;\;\;\;} & n^2 \\
\qquad 1 &
\end{array},
$$

тоді НСД ($n^5+n^4+n^3+2n^2+n+1$; n^4+n^3+2n+1)=НСД (n^4+n^3+2n+1; n^3+1)= =НСД (n^3+1; n)=НСД (n; 1)=1 при будь-якому $n\in N$.

2.7. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівнянь: а) 84x+133y=0; б) 91x-195y=0; в) 42x-72y=0.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда для відшукання НСД(84; 133), отримаємо: 133=84·1+49; 84=49·1+35; 49=35·1+14; 35=14·2+7; 14=7·2+0 (ділення виконуємо в стовпчик: більше число ділимо на менше; далі менше число – на остачу від першого ділення; далі остачу від першого ділення – на остачу від другого і т.д.), маємо НСД(84; 133)=7. Тоді від рівняння 84x+133y=0 переходимо до рівносильного 12x+19y=0, причому НСД(12; 19)=1, а тоді x=19t; y= -12t; $t\in Z$.

Зауваження. НСД двох чисел можна шукати, розкладаючи числа на множники: $84=2^2\cdot3\cdot7$; 133=7·13, а тому НСД(84; 133)=7.

Відповідь: а) x=19t; y= -12t; $t\in Z$;

б) *Вказівка*: Перейдіть від рівняння 91x-195y=0 до 7x-15y=0. *Відповідь:* x=15t; y=7t; $t\in Z$.

в) *Відповідь:* x=12t; y=7t; $t\in Z$.

2.8. Знайдіть найбільший спільний дільник всіх шестизначних чисел, складених з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторень).

Розв'язання. Розглянемо будь-які 2 числа, наприклад, 123456 і 123465, визначимо їхній НСД за допомогою алгоритма Евкліда:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,123465 & 123456 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{123456} & 1 \\
\qquad\;\; 9 &
\end{array}\qquad
\begin{array}{l|l}
\underline{12}3456 & 9 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{33} & 13717 \\
\;\;\;\underline{64} & \\
\;\;\;\;\underline{15} & \\
\;\;\;\;\;\underline{66} & \\
\;\;\;\;\;\;\;3 &
\end{array}\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,9 & 3 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{9} & 3 \\
\;\;0 &
\end{array}
$$

Маємо, НСД(123456, 123465)=3. Очевидно, що усі шестизначні числа, у запису яких є рівно по одному разу 1, 2, 3, 4, 5, 6, діляться на три, оскільки сума цифр кожного числа 1+2+3+4+5+6=21⋮3.

Відповідь: 3.

2.9. Знайдіть найбільший спільний дільник всіх 9-значних чисел, складених з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторень).

Вказівка: Доведіть, що усі такі числа діляться на 9 (за ознакою подільності на 9: обчисліть суму цифр таких чисел) та розгляньте, наприклад, два числа 123456789 і 123456798, щоб показати, що НСД таких чисел не може бути більше, ніж 9.

Відповідь: 9.

2.10. При яких цілих n число (n^2+2) ділиться на число (n+3)?

Розв'язання. Зауважимо, що $n \neq -3$. Якщо число (n^2+2) ділиться на число (n+3), то частка від ділення першого числа на друге є число ціле. Оскільки $\frac{n^2+2}{n+3} = n-3+\frac{11}{n+3}$, то це число є ціле тоді і тільки тоді, коли $11 \vdots (n+3)$. Число 11 є простим, а тому має 4 цілих дільники: $\pm 1; \pm 11$, звідки маємо сукупність 4 рівнянь: n+3=1; n+3=-1; n+3=11; n+3=-11 та значення для n, відповідно, -2; -4; 8; -14 (усі задовольняють умову $n \neq -3$).

Відповідь: -14; -4; -2; 8.

2.11. При яких цілих n число (n^3+5n^2+2n+12) ділиться на число (n+5)?

Вказівка. Виконайте ділення у стовпчик та отримайте $\frac{n^3+5n^2+2n+12}{n+5} = n^2+2+\frac{2}{n+5}$.

Відповідь: -7; -6; -4; -3.

2.12*.* Знайдіть усі натуральні *n*, при яких (n^4-22n^2-46)$\vdots$(n+5).

Розв'язання. Виконаємо ділення у стовпчик:
n^4-22n^2-46=(n+5)(n^3-5n^2+3n-15)+29, звідки 29$\vdots$(n+5). Оскільки 29 – просте, то n+5 може набувати значень: ±1; ±29. Розв'язуючи сукупність 4 рівнянь та врахувавши, що за умовою n натуральне, маємо: n=24.

2.13. Доведіть*,* що (m^5-m)$\vdots$30 при будь-якому $m \in Z$*.*

Розв'язання 1. Використаємо відомий факт: добуток n послідовних цілих чисел ділиться на n! (добуток 2 послідовних цілих чисел ділиться на 2; добуток 3 послідовних цілих чисел ділиться на 6 (див. приклад 2.5; добуток 4 послідовних цілих чисел ділиться на 24; добуток 5 послідовних цілих чисел ділиться на120, оскільки: 2!=1·2; 3!=1·2·3=6; 4!=1·2·3·4=24; 5!=1·2·3·4·5=120).

Відзначимо, що 120$\vdots$30, а тому спробуємо представити даний в умові вираз як добуток п'яти послідовних цілих чисел.

Виконаємо перетворення: m^5-m=(m^4-1)·m=(m^2-1)·(m^2+1)·m= =(m-1)·m·(m+1)·(m^2+1), маємо добуток 3 послідовних цілих чисел, не вистачає ще двох; очевидно, зручно до чисел

(m-1); m; (m+1)

вибрати два числа, яке стоять одне – зліва, інше – справа від цих чисел, тобто (m-2); (m+2):

$$(m-2);\ (m-1);\ m;\ (m+1);\ (m+2).$$

Добуток $(m-2)\cdot(m+2)=m^2-4$, тому виділимо в останньому співмножнику вираз m^2-4, маємо:

$$m^5-m=(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot(m^2+1)=(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot((m^2-4)+5)=$$
$$=(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot(m^2-4)+(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot 5=$$
$$=(m-2)\cdot(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot(m+2)+(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot 5,$$

Перший доданок є добуток п’яти послідовних цілих чисел, а тому ділиться на 5!=120, $120 \vdots 30$; другий доданок є добутком числа 5 і виразу, який є добутком трьох послідовних цілих чисел, а тому ділиться на 3!=6, а тому увесь доданок ділиться на 5·6=30, отже уся сума ділиться на 30.

Вказівка до розв’язання 2. Покажіть, що числа m^5 і m дають однакові остачі при діленні на 2; 3; 5, покажемо, що вони дають однакові остачі при діленні на 5: усі числа при діленні на 5 дають 5 різних остач, тому маємо 5 випадків:

$m\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow m^5\equiv 0^5\equiv 0 \pmod 5$; $m\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow m^5\equiv 1^5\equiv 1 \pmod 5$;

$m\equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow m^5\equiv 32\equiv 2 \pmod 5$; $m\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow m^5\equiv 243\equiv 3 \pmod 5$;

$m\equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow m^5\equiv 4^5\equiv 4^2\cdot 4^2\cdot 4\equiv 16\cdot 16\cdot 4\equiv 1\cdot 1\cdot 4\equiv 4 \pmod 5$ – остачі чисел m^5 і m однакові.

Покажіть, що числа m^5 і m дають однакові остачі при діленні на 2 та 3 самостійно.

§3. Діофантові рівняння

Діофантове рівняння – рівняння з раціональними коефіцієнтами, для якого поставлено завдання пошуку розв’язків в цілих або раціональних числах.

Найпростішим діофантовим рівнянням є рівняння

$$ax+by=c$$

де $a,b,c\in Z$ і хоча б один з коефіцієнтів a,b не дорівнює нулю.

Як за коефіцієнтами діофантового рівняння визначити, чи має воно цілочисельні розв’язки? І якщо має, то як знайти всі ці розв’язки? Відповіді на ці питання дають наведені нижче теореми.

Теорема 2.7. Рівняння $ax+by=c$, де $a,b,c\in Z$ і хоча б один з коефіцієнтів a або b не дорівнює нулю, має розв’язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли $c \vdots \text{НСД}(a,b)$.

Доведення. Доведемо необхідність; достатність буде автоматично випливати з подальшого викладу.

Нехай рівняння $ax+by=c$ має розв’язки в цілих числах, і нехай $(x_0;\ y_0)$ – довільний цілочисельний розв’язок цього рівняння. Тоді $ax_0+by_0=c$. За означенням $a \vdots \text{НСД}(a,b)$ і $b \vdots \text{НСД}(a,b)$; тоді і

$(ax_0)\vdots$НСД(a,b), $(by_0)\vdots$НСД(a,b). Отже, і $c=(ax_0+by_0)\vdots$НСД(a,b), що і треба було довести.

<u>Теорема 2.8.</u> Якщо НСД$(a,b)=1$ і $(x_0;\, y_0)$ – деякий цілочисельний розв'язок рівняння $ax+by=c$, то всі розв'язки цього рівняння в цілих числах мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases},$$

де t приймає всі можливі цілочисельні значення.

Зауваження. Необхідно довести два твердження:

1) якщо $(x_1;\, y_1)$ – деякий цілочисельний розв'язок рівняння $ax+by=c$, то $(x_1;\, y_1)$ можна представити у вигляді $x_1 = x_0 - bt$, $y_1 = y_0 + at$, де $t\in Z$;

2) для будь-якого $t\in Z$ пара $(x_0 - bt;\, y_0 + at)$ є розв'язком рівняння $ax+by=c$.

Доведення теореми.

1) Оскільки пари $(x_0;\, y_0)$ та $(x_1;\, y_1)$, є розв'язками рівняння $ax+by=c$, то $ax_0+by_0=c$ і $ax_1+by_1=c$, звідки $ax_0+by_0=ax_1+by_1$ або $a\cdot(x_0-x_1)=b\cdot(y_1-y_0)$. За умовою НСД$(a,b)=1$, тоді (за теоремою 2.5) $x_0-x_1=bt,\ y_1-y_0=at$, де t – деяке ціле число; значить $x_1=x_0-bt$, $y_1=y_0+at$.

2) Підставивши пару $(x_0-bt;\, y_0+at)$ в рівняння $ax+by=c$, отримаємо: $a\cdot(x_0-bt)+b\cdot(y_0+at)=ax_0-abt+by_0+abt=ax_0+by_0=c$. Отже, ця пара є розв'язком рівняння $ax+by=c$. Теорему доведено.

Таким чином, якщо відомий якийсь один розв'язок рівняння $ax+by=c$ (такий розв'язок називають *частковим розв'язком*), то можна записати і всі інші розв'язки. Але як знайти хоча б один частковий розв'язок? Якщо коефіцієнти рівняння малі за модулем, то цей розв'язок буває неважко підібрати (наприклад, легко бачити, що пари $(1,-1)$ і $(-2,3)$ є розв'язками рівняння $4x+3y=1$). Але при великих значеннях коефіцієнтів добір розв'язків може виявитися нездійсненним завданням (спробуйте, наприклад, навести хоча б один розв'язок рівняння $121x-384y+716=0$), тому необхідний метод, який дає можливість знайти частковий розв'язок при будь-яких значеннях коефіцієнтів.

Один з таких методів використовує алгоритм Евкліда, за допомогою якого можна представити НСД(a,b) у вигляді $au+bv$, де u та v – деякі цілі числа (теорема 2.2). В даному випадку НСД$(a,b)=1$, і, користуючись згаданим алгоритмом, можна підібрати такі цілі числа u та v, що $au+bv=1$. Тоді $a(uc)+b(vc)=c$;

отже, пара *(uc,vc)* є розв'язком рівняння $ax+by=c$.

Розглянемо знаходження часткового розв'язку і застосування теореми 2.8 на прикладі.

Приклад 2.6. Розв'яжіть рівняння $11x+7y=8$ в цілих числах.

Розв'язання. Знайдемо спочатку який-небудь частковий розв'язок даного рівняння. Для цього обчислимо НСД(11, 7):

$$11=7\cdot1+4$$
$$7=4\cdot1+3$$
$$4=3\cdot1+1$$
$$3=1\cdot3$$

Отже, НСД(11, 7)=1; представимо цей НСД у вигляді $11u+7v$:

$$1=4-3\cdot1=4-(7-4\cdot1)\cdot1=4\cdot2-7=(11-7\cdot1)\cdot2-7=11\cdot2+7\cdot(-3).$$

Тоді маємо:

$$8=8\cdot(11\cdot2+7\cdot(-3))=11\cdot16+7\cdot(-24).$$

Таким чином пара $x_0=16,\ y_0=-24$ є частковим розв'язком даного рівняння. Отже, за теоремою 2.7 всі цілочисельні розв'язки даного рівняння мають вигляд $x=16-7t$, $y=-24+11t$, де $t\in Z$.

Теорема 2.8 дає розв'язки діофантових рівнянь для випадку НСД*(a,b)*=1. А якщо *d*=НСД*(a,b)*≠1? Тоді потрібно просто поділити обидві частини рівняння на d – отримається рівносильне початковому рівняння:

$$\frac{a}{d}\cdot x+\frac{b}{d}\cdot y=\frac{c}{d}.$$

Оскільки $c \vdots d$ (в іншому випадку за теоремою 2.7 рівняння не має розв'язків у цілих числах), то всі коефіцієнти рівняння залишаться цілими, а оскільки НСД$\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)$=1 (див. приклад 2.6), то до отриманого рівняння вже можна застосувати теорему 2.8.

Дамо відповідь на питання – яка *геометрична інтерпретація* розв'язків у цілих числах рівняння $ax+by=c$. Відзначимо, що графіком рівняння $ax+by=c$ є пряма (якщо хоча б один з коефіцієнтів a і b не дорівнює нулю). А тому розв'язкам у цілих числах цього рівняння відповідають ті точки прямої, обидві координати яких – цілі числа.

Розглянемо ще один тип завдань, які розв'язуються за допомогою діофантових рівнянь.

Приклад 2.7. Знайдіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 5 остачу 2, а при діленні на 7 – остачу 5.

Розв'язання. За умовою шукане число a можна представити у вигляді $a=5m+2=7n+5$, де $m,\ n\in Z$, Отже:

$$5m+2=7n+5,\text{ або } 5m-7n=3.$$

Як нескладно бачити, пара $m_0 = 2, n_0 = 1$ є частковим розв'язком цього рівняння. Тоді за теоремою 2.8 всі його цілочисельні розв'язки мають вигляд $m = 2 + 7t, n = 1 + 5t$, де $t \in Z$. Таким чином:

$$a = 5m + 2 = 5 \cdot (2 + 7t) + 2 = 35t + 12, \text{ де } t \in Z.$$

Вправи до § 3.

3.1. Чи мають дані рівняння розв'язки в цілих числах:

а) 6x-16y=220; б) 105x+42y=56?

Розв'язання. а) НСД (6; 16)=2, причому 220⋮2, рівняння має розв'язки в цілих числах.

б) НСД(105; 42)=21, проте 56⋮̸21, рівняння не має розв'язків у цілих числах.

3.2. Розв'яжіть рівняння в цілих числах:

а) 7x-5y = 1; б) 3x+11y = 49; в) 35x-42y+21=0.

а) *Розв'язання*. Дослідження: оскільки НСД (7; 5)=1, то рівняння має розв'язки в цілих числах. Знайдемо частинний розв'язок нашого рівняння. Перепишемо рівняння $7x - 5y = 1$ у рівносильному вигляді $5y = 7x - 1$, звідки $y = \dfrac{7x-1}{5}$ або $y = \dfrac{5x + 2x - 1}{5}; y = x + \dfrac{2x-1}{5}$.

Оскільки $x; y$ - цілі, то $\dfrac{2x-1}{5}$ – теж ціле, а тоді $(2x-1) \vdots 5$, а тоді $2x - 1 = 5t, \quad t \in Z$. Виразимо $x = \dfrac{5t+1}{2}$, надамо t цілих значень, очевидно, при $t = 1$ $x_0 = 3$. Підставимо $x_0 = 3$ у початкове рівняння, отримаємо $y_0 = 4$, а тоді усі розв'язки є пари $(3 + 5t; 4 + 7t), \ t \in Z$.

Відповідь: $(3 + 5t; 4 + 7t), \ t \in Z$.

Зауваження 1: Можна міркувати і інакше: з умови $x = \dfrac{5t+1}{2}$, де $x, t \in Z$ випливає, що $t = 2k + 1$ (число непарне, чому?), а тоді $x = \dfrac{5(2k+1)+1}{2} = 3 + 5k, \ k \in Z$. Підставимо у вихідне рівняння замість x отриманий вираз, матимемо $7 \cdot (3 + 5k) - 5y = 1 \Rightarrow y = 4 + 7k, k \in Z$. Маємо той самий результат.

Зауваження 2: Нехай НСД(a;b)=1. Якщо коефіцієнти a або b рівняння $ax + by = c$ невеликі, нехай для певності менший (по модулю) коефіцієнт a при x, тоді, надаючи невідомому y |a| послідовних цілих значень, обов'язково натрапимо на ціле значення x_0.

б) *Вказівка*. Оскільки НСД (3; 11)=1, рівняння має розв’язки в цілих числах. Надаючи невідомому y трьох послідовних цілих значень, наприклад, -1; 0; 1, обов’язково натрапимо один раз на ціле значення x_0. Підставимо його у вихідне рівняння, отримаємо y_0.

Відповідь: $(20-11t; -1+3t)$, $t \in Z$.

в) *Вказівка*. Оскільки НСД (35; 42)=7, 21 ⋮ 7, то рівняння має цілочисельні розв’язки. Скоротіть на 7, отримайте: 5x-6y+3=0.

Відповідь: $(-3+6t; -2+5t)$, $t \in Z$.

3.3. Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{7n+2}{5}$ є скоротним.

Розв’язання. Дріб буде скоротним, якщо НСД чисельника і знаменника більший від 1. Оскільки дільники знаменника 5, простого числа, є 1 і 5, то НСД може бути рівним 5. Звідки $(7n+2) \vdots 5$ або $7n+2=5t$, $t \in Z$. Маємо діофантове рівняння $5t-7n=2$. Надаючи n цілих послідовних 5 значень, обов’язково один раз знайдемо ціле значення t. Наприклад, при $n=4, t=6$. Усі розв’язки $t=6+7t$, $n=4+5t,\ t \in Z$. Оскільки за умовою $n \in N$, то $4+5t \geq 1 \Rightarrow t \in N_0$.

Відповідь: $n=4+5t,\ t \in N_0$.

3.4. Знайдіть усі двозначні числа, які при діленні на суму своїх цифр дають частку 5 і остачу 6.

Запишемо умову задачі, врахуємо, що остача менша від дільника: $\overline{ab}=(a+b)\cdot 5+6,\ a+b>6$. Від умови $\overline{ab}=(a+b)\cdot 5+6$ перейдемо до рівності $10a+b=5a+5b+6,\ 5a=2(2b+3)$; права частина – число парне, яке не ділиться на 4, тому можливі значення для a є 2; 6. При $a=2$ отримуємо $10=4b+6$, звідки $b=1$, проте отримане число 21 не задовольняє умову задачі, оскільки при діленні на суму цифр 2+1=3 дає частку 7. При $a=6$ отримуємо $30=4b+6$, $b=6$, число 66 задовольняє умову задачі: $66=(6+6)\cdot 5+6$.

Відповідь: 66.

3.5. Знайдіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 24 остачу 17, а при діленні на 42 - остачу 5.

Розв’язання 1. З умови маємо, що шукане число має вигляд 24m+17 та 42n+5, де m,n$\in Z$, а тоді 24m+17=42n+5, звідки після спрощень маємо 4m-7n+2=0. Усі розв’язки даного рівняння описуються: m=3+7t, n=2+4t, t$\in Z$. Шукане число 24m+17=24(3+7t)+17 або 42n+5=42(2+4t)+5, тобто 89+168t, t$\in Z$.

Розв’язання 2. Числа 24 і 42 мають найменше спільне кратне НСК(24; 42)=168. Усі числа, які при діленні на 24 давали остачу 17, тобто числа виду 24m+17, $m \in Z$, при діленні на 168, будуть давати остачі, відповідно, 17; 17+24=41; 17+24·2=65; 17+24·3=<u>89</u>; 17+24·4=113; 17+24·5=137; 17+24·6=161.

Числа, які при діленні на 42 давали остачу 5, тобто числа виду 42n+5, де $n \in Z$, при діленні на 168, будуть давати остачі 5; 5+42=47; 5+42·2=<u>89</u>; 5+42·3=131.

Число, яке задовольняє обидві умови – це число, яке при діленні на 168 дає остачу 89, тобто число виду 89+168t, $t \in Z$.

Відповідь: 89+168t, $t \in Z$.

3.6. П'ять однакових ручок та сім однакових блокнотів коштують 63 гривні. Визначіть ціну ручки та ціну блокнота, якщо вони виражаються цілим числом гривень.

Розв'язання. За умовою задачі складемо рівняння 5x+7y=63, очевидним розв'язком якого є x=0; y=9. Усі розв'язки: x=7t; y=9-5t; $t \in Z$. При t=0 розв'язок x=0; y=9 не задовольняє умову задачі (бо ціна ручки є число додатне); при t=1 маємо x=7; y=4; при усіх інших цілих значеннях t або x або y перетворюються на від'ємні числа.

Відповідь: ціна ручки 7 грн., ціна блокнота 4 грн.

3.7. Для транспортування зерна є мішки по 60 кг і 80 кг. Скільки потрібно тих і інших мішків для перевезення: а) 420 кг; б) 2010 кг зерна. Мішки повинні бути повністю заповнені.

а) *Розв'язання*. Нехай x; y – число мішків місткістю 60 та 80 кг, відповідно. За умовою задачі складемо рівняння 60x+80y=420. НСД(60; 80)=20; причому $420 \vdots 20$, рівняння має розв'язки в цілих числах. Скоротимо на 20: 3x+4y=21; (7;0) – один з розв'язків; усі розв'язки x=7-4t; y=0+3t; $t \in Z$. Оскільки значення невідомих – невід'ємні, то маємо дві можливості: при t=0 (7;0) та t=1 (3;3).

Відповідь: є дві можливості: 7 мішків по 60 кг або 3 мішки по 60 кг і 3 мішки по 80 кг.

б) *Вказівка*. Складіть відповідне рівняння та покажіть, що воно не має розв'язків у цілих числах.

Відповідь: задача не має розв'язку у цілих числах.

3.8. Авто вантажністю 7 тонн треба повністю завантажити контейнерами, що мають масу 250 кг та 120 кг. Як це можна зробити? Укажіть, скільки контейнерів кожного виду треба взяти.

Розв'язання. За умовою задачі складемо рівняння 250x+120y=7000. НСД(250; 120)=10; $7000 \vdots 10$, тому рівняння має розв'язки в цілих числах. Скоротимо на 10: 25x+12y=700; (28;0) – один з розв'язків; усі розв'язки x=28-12t; y=0+25t; $t \in Z$. Значення невідомих – невід'ємні, отримаємо 3 можливості: при t=0 (28;0); t=1 (16;25); t=2 (4;50).

Відповідь: є три можливості: або 28 контейнерів по 250 кг, або 16 контейнерів по 250 кг і 25 контейнерів по 120 кг, або 4 контейнери по 250 кг і 50 контейнерів по 120 кг.

3.9. Скількома способами можна купити квитки вартістю 7 грн. 50 коп. та 12 грн. на суму 115 грн. 50 коп.? Використати усі кошти. Указати всі варіанти. Скільки найбільше можна купити квитків?

Розв'язання. Маємо рівняння 750x+1200y=11550. Дослідження: НСД(750; 1200)=150; 11550⋮150, тому рівняння має розв'язки в цілих числах. Скоротимо на 150, отримаємо: 5x+8y=77; один з розв'язків (17;-1); усі розв'язки x=17-8t; y=-1+5t; t$\in Z$. Значення невідомих – невід'ємні: маємо обмеження:

$$\begin{cases} 17-8t \ge 0 \\ -1+5t \ge 0 \\ t \in Z \end{cases},$$ звідки отримаємо 2 можливості:

при t=1 (9;4), разом 13 квитків; t=2 (1;9), разом 10 квитків.

Відповідь: 2-ма способами можна купити квитки: 9 квитків по 7 грн. 50 коп. та 4 квитки по 12 грн. або 1 квиток по 7 грн. 50 коп. та 4 квитки по 12 грн. Найбільше можна купити 13 квитків.

3.10. Скількома способами можна купити олівці вартістю 30 коп. та 1 грн. на суму 500 грн.? Використати усі кошти. Скільки найбільше можна купити олівців (яких)?

Розв'язання. Маємо рівняння 30x+100y=50000. Дослідження: НСД(30; 100)=10; 5000⋮10, рівняння має розв'язки в цілих числах. Отримаємо: 3x+10y=5000; один з розв'язків (0;500); усі розв'язки x=0-10t; y=500+3t; t$\in Z$. З умови маємо обмеження:

$$\begin{cases} -10t \ge 0 \\ 500+3t \ge 0 \\ t \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 0 \\ t \ge -\dfrac{500}{3} \\ t \in Z \end{cases} \Leftrightarrow t \in \{-166; -165; ...; -1; 0\},$$

отримаємо 167 можливостей: (1660; 2); (1650; 5); (1640; 8);…; (20; 494); (10; 493); (0; 500).

Відповідь: 167-ма способами можна купити олівці. Найбільше можна купити 1662 олівців, у тому числі 1660 олівців по 30 коп. і 2 олівці по 1 грн.

3.11. Скільки точок прямої 987x+654y=987654 з цілочисельними координатами лежить у першій координатній чверті?

Розв'язання. Дослідження: Використовуючи алгоритм Евкліда, знаходимо НСД(987; 654)=3; 987654⋮3, рівняння має розв'язки в цілих числах. Отримаємо після скорочення: 329x+218y=329218; один з розв'язків очевидний: оскільки 329218=329·1000+218·1, то пара (1000;1) є розв'язком; усі розв'язки x=1000-218t; y=1+329t; t$\in Z$. З умови маємо обмеження:

$$\begin{cases} 1000-218t \ge 0 \\ 1+329t \ge 0 \\ t \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 4\dfrac{64}{109} \\ t \ge -\dfrac{1}{329} \end{cases}, t \in Z \quad \Leftrightarrow t \in \{0;1;2;3;4\}.$$

Підставляючи замість t отримані значення, маємо 5 точок з кординатами: (1000; 1); (782; 330); (564; 659); (346; 988); (128; 1317).

Відповідь: 5 точок.

3.12. На столі лежали книги. Їх намагалися зв'язувати в пачки по 2, по 3, по 4, по 5 і по 6 штук, але незмінно одна книга залишалася зайвою. Коли ж книги почали зв'язувати в пачки по 7 штук, то зайвих книг не залишилося. Яке найменше число книг могло бути на столі?

Розв'язання 1. Очевидно, мова йде про число, яке ділиться на 7, тобто число виду 7k, k∈N, але при діленні на 2; 3; 4; 5; 6 дає остачу 1, а тому при діленні на їхнє найменше спільне кратне 60 теж дає остачу 1, тобто дане число має вигляд 60n+1, n∈N. Можна знайти це число перебором, перебравши щонайбільше сім чисел при послідовних значеннях n: 61 (не ділиться на 7); 121 (не ділиться на 7); 181 (не ділиться на 7); 241 (не ділиться на 7); 301 (ділиться на 7).

Розв'язання 2. Зведемо до рівняння: 7x=60y+1, один з розв'язків отримаємо, надаючи невідомому *y* сім послідовних цілих значень, поки не отримаємо ціле x: x=43 при y=5; тоді усі розв'язки мають вигляд: x=43+60t, y=5+7t, t$\in N_0$, а шукане число: 7·(43+60t) або 60·(5+7t)+1, тобто 301+420t, t$\in N_0$. За умовою задачі число повинно бути найменшим, його отримуємо при t=0: 301.

Відповідь: 301 книга.

3.13. Розв'яжіть систему в цілих числах: $\begin{cases} 12x-10y+7z=2 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$.

Розв'язання. Виключимо невідому x із системи рівнянь, отримаємо рівняння, яке залежить від двох невідомих y; z. Розв'яжемо діофантове рівняння відносно y; z та підставимо отримані значення в x:

$$\begin{cases} 12x-10y+7z=2 \\ 4x-3y+2z=1 \quad \Big| \cdot(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x-10y+7z=2 \\ -12x+9y-6z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z+1 \\ x=\dfrac{3y-2z+1}{4} \end{cases}.$$

$$+: \qquad -y+z=-1$$

А тоді $x=\dfrac{3(z+1)-2z+1}{4}$, $x=\dfrac{z}{4}+1$. Оскільки x має бути цілим, то z має ділитися на 4: $z=4t;\ y=1+4t;\ x=1+t,\ t\in Z$.

Перевірка: $\begin{cases}12(1+t)-10(1+4t)+7\cdot 4t=2\\ 4(1+t)-3(1+4t)+2\cdot 4t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12+\underline{12t}-10-\underline{40t}+\underline{28t}=2\\ 4+\underline{4t}-3-\underline{12t}+\underline{8t}=1\end{cases}.$

Відповідь: $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1+4t,\ t\in Z.\\ z=4t,\end{cases}$

3.14. На числовій прямій червоним кольором відмічені всі числа, які при діленні на 24 дають остачу 17; синім кольором – всі числа, які приділенні на 40 дають остачу 7. Знайдіть найменшу відстань між червоною та синьою точкою.

Розв'язання. Маємо числа 24m+17 та 40n+7, m,n – цілі. Відстань між ними є d=|(24m+17)-(40n+7)| або d=|24m-40n+10|. Оскільки m,n – цілі, то вираз (24m-40n+10)⋮2, тобто d – парне число. Перевіримо, чи може бути d=2. Для цього достатньо показати, що існують розв'язки принаймні одного рівняння з двох: 24m-40n+10=2 або 24m-40n+10=-2. Розглянемо перше рівняння: 24m-40n=-8. Дослідження: НСД(24; 40)=8; -8⋮8, тому рівняння має розв'язки в цілих числах. Після спрощень, отримаємо: -3m+5n=1; один з розв'язків (3; 2); усі розв'язки m=3+5t; n=2+3t; t$\in Z$. Числа, між якими відстань дорівнює двом, такі: 24(3+5t)+17=89+120t та 40(2+3t)+7=87+120t, t$\in Z$.

Зауваження: Ми знайшли усі такі числа, відстань між якими мінімальна, тобто дорівнює двом, оскільки друге рівняння, про яке йшла мова у розв'язанні: 24m-40n+10=-2, не має розв'язків у цілих числах (дослідіть, чому?).

Відповідь: 2.

3.15. Знайдіть усі натуральні числа m, n, які задовольняють умові $mn^2=2009(n+1)$.

Розв'язання. Відзначимо, що n і $(n+1)$ взаємно прості. Дійсно, якби у них був спільний дільник $d>1$, то $n=k_1d$, $n+1=k_2d$, тоді $1=(n+1)-n=d(k_2-k_1)$, тобто d є дільником 1, що суперечить нашому припущенню. А тоді і n^2 та $(n+1)$ теж взаємно прості.

Таким чином для заданої рівності повинні виконуватись такі умови: m повинно ділитись на $(n+1)$, а 2009 на n^2. Оскільки $2009=7^2\cdot 41$, то можливі два випадки: $n=1$ або $n=7$. Розглянемо обидва випадки. При $n=1$ маємо $m=2009\cdot 2=4018$. При $n=7$ маємо $49m=2009\cdot 8$, звідки $m=41\cdot 8=328$. Тобто рівняння має два розв'язки.

Відповідь: $(4018;1)$ та $(328;7)$.

Глава 3. Прості числа

Прості числа відігріють дуже важливу роль при вивченні цілих чисел: це своєрідні “цеглинки”, з яких складаються всі інші цілі числа. За допомогою розкладу на прості множники можна отримати наочні розв’язки різноманітних задач.

У цьому розділі ми будемо розглядати лише *натуральні* числа, якщо не буде додаткових умов.

§1. Основні поняття

Поставимо питання: скільки дільників мають різні натуральні числа? Будь-яке число, більше 1, має принаймні два дільника: 1 та саме це число. Деякі числа мають також інші дільники (наприклад, число 10 має ще дільники 2 і 5; число 9 має ще дільник 3).

Означення 3.1. Числа, які не мають додатних дільників, крім одиниці і самого себе, називаються *простими*. Числа, які мають, крім одиниці і самого себе, ще хоча б один додатний дільник, називаються *складеними*.

Одиниця не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

Це означення можна сформулювати по-іншому.

Означення 3.2. Числа, які мають тільки два додатних дільника, називаються *простими*. Числа, які мають більше двох додатних дільників, називаються *складеними*.

Ознайомимось ще з одним цікавим поняттям, що пов’язане з простими числами. *Числа-близнюки* – два простих числа, різниця між якими дорівнює 2. Наприклад: 3 і 5, 5 і 7, 15 і 17, 1021 і 1023.

Вправи до § 1.

1.1. Нехай p та p+2 – два простих числа-близнюки (p>3). Доведіть, що (p+1)⋮6.

Доведення. Оскільки за умовою p>3 і p – просте, то p – непарне, а тому (p+1) – парне, (p+1)⋮2. Оскільки добуток довільних трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3!=6, а отже ділиться на 3, то і добуток p(p+1)(p+2)⋮3. Так як p – просте, p>3, то p не ділиться на 3; аналогічно, (p+2) – просте, (p+2) >3, (p+2) не ділиться на 3. З того, що добуток трьох чисел ділиться на просте число 3, а два співмножники на 3 не діляться, випливає, що на 3 ділиться третій співмножник: (p+1)⋮3.

Так як (p+1)⋮2 і (p+1)⋮3, то (p+1)⋮6.

1.2. Знайдіть усі прості числа p такі, що p+1 – повний квадрат.

Розв'язання. Оскільки $p+1=x^2$, то $x^2-1=p$, звідки $(x-1)(x+1)=p$. Добуток двох чисел дорівнює простому числу, отже, один із множників (менший) дорівнює 1, маємо: $\begin{cases} x-1=1 \\ x+1=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ p=3 \end{cases}$. Перевірка: $3+1=2^2$.

Відповідь: p=3.

1.3. а) Знайдіть усі прості числа p такі, що p-1 – повний куб.

б) Знайдіть усі прості числа p такі, що p^2-1 – повний куб.

а) *Розв'язання.* Оскільки $p-1=x^3$, то $x^3+1=p$, звідки: $(x+1)(x^2-x+1)=p$. Маємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=1 \\ x^2-x+1=p \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=p \\ x^2-x+1=1 \end{cases} \end{array}\right.$. При розв'язанні сукупності систем отримуємо: при x=0, p=1 – не є простим; при x=1, p=2.

Відповідь: p=2.

б) *Відповідь*: p=3.

1.4. Довести, що серед усіх цілих чисел виду 2p+1, де p – просте число, тільки одне є повним кубом.

Розв'язання 1. З умови $2p+1=x^3$, x – число непарне, отже $x=2m+1$, $m \in N_0$. Обчислимо $(2m+1)^3=8m^3+12m^2+6m+1$, тоді $2p+1=8m^3+12m^2+6m+1$, звідки $p=4m^3+6m^2+3m=m(4m^2+6m+3)$. Так як p – просте, то перший співмножник дорівнює 1 (другий не може бути 1), отже, m=1, p=13, а число x=3.

Розв'язання 2. З умови $2p+1=x^3$, $2p=x^3-1$, $2p=(x-1)(x^2+x+1)$.

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=2 \\ x^2+x+1=p \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=p \\ x^2+x+1=2 \end{cases} \end{array}\right.$. При розв'язанні сукупності отримуємо: із першої системи при x=3, p=13; з другої – x не є цілим, що неможливо.

1.5. Для двох натуральних чисел m,n відомо, що 33m=95n. Чи вірно, що їхня сума є складене число?

Розв'язання. Якщо m – парне, то з рівності 33m=95n випливає, що n – парне. А тоді сума m+n є число парне, не рівне 2 (сума двох натуральних чисел рівна 2, якщо обидва вони рівні 1, а такі значення не задовольняють рівність з умови); якщо ж m – непарне, то з рівності 33m=95n маємо, що і n – непарне. А тоді сума m+n є число парне, відмінне від 2.

Оскільки сума (m+n)$\vdots$2, (m+n)>2, а тому є $m+n$ числом складеним.

Відповідь: вірно.

1.6. Знайдіть усі прості числа p такі, що p+14 і p+16 теж є простими.

Розв'язання. Розглянемо указані числа з точки зору подільності на 3: $p+14 \equiv p-1 \pmod 3$, $p+16 \equiv p+1 \pmod 3$. А серед чисел p-1; p; p+1 одне ділиться на 3. Ділиться на три і є простим, отже, одне із чисел дорівнює 3. Числа p+14 і p+16 більші від трьох, тому лишається єдина можливість: p=3, тоді p+14=17 і p+16=19. Маємо єдиний набір чисел (3; 17; 19).

Відповідь: (3; 17; 19).

1.7. Знайдіть усі цілі невід'ємні k, для яких число $2^{4k+2}+1$ є простим.

Розв'язання. Виконаємо перетворення:
$2^{4k+2}+1=(2^{2k+1})^2+1=[(2^{2k+1})^2+1^2+2\cdot1\cdot2^{2k+1}]-2\cdot1\cdot2^{2k+1}=(2^{2k+1}+1)^2-2^{2k+2}=$
$=(2^{2k+1}+1)^2-(2^{k+1})^2=(2^{2k+1}+1-2^{k+1})(2^{2k+1}+1+2^{k+1})$. Дане число є простим тоді і тільки тоді, коли менший з множників дорівнює 1, а більший при цьому залишається простим числом. Маємо першу умову: $2^{2k+1}+1-2^{k+1}=1$, звідки $2^{2k+1}-2^{k+1}=0$, а тоді $2^{k+1}(2^k-1)=0$ або $2^k=1$, k=0. Отже, тільки при такому значенні k=0 число може бути простим. Перевіримо, чи буде простим при k=0 другий множник: $2^{2\cdot0+1}+1+2^{0+1}=5$. Умова виконується.

Відповідь: тільки при k=0 число є простим і дорівнює 5.

1.8. Доведіть, що при усіх натуральних k число $2^{4k+2}+1$ є складеним.

Вказівка. Дивись вправу 1.7.

1.9. Сума двох натуральних чисел дорівнює 97, а різниця їх квадратів – просте число. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. З умови m+n=97, m^2-n^2 – просте. Оскільки $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ – просте, то менший множник дорівнює одиниці, а другий – просте число, відмітимо, що число 97 – просте. Маємо систему:

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m=98 \\ n=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=49 \\ n=48 \end{cases}.$$

Відповідь: 49 і 48.

1.10. Доведіть, що число $\underbrace{77...77}_{2011}6$ - складене.

Вказівка. Покажіть, що сума цифр 7·2010+6 ділиться на три, а тому число ділиться на 3, є складеним.

1.11. Доведіть, що знайдуться 10 підряд складених чисел.

Доведення. Нагадаємо, що $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, очевидно, що $n!\vdots2$, $n!\vdots3$, …, $n!\vdots n$. Розглянемо 10 послідовних чисел: $11!+2$; $11!+3$; $11!+4$; $11!+5$; …, $11!+10$; $11!+11$. Так як $(11!+2)\vdots2$; $(11!+3)\vdots3$;…; $(11!+11)\vdots11$, то ці числа є складеними.

1.12. Доведіть, що знайдуться 1000 підряд складених чисел.

Вказівка. Розгляньте числа $1001!+2$; $1001!+3$; …;$1001!+1001$.

1.13. Знайдіть усі прості p, для яких $q=p^2+3p+11$ – теж просте число.

Розв'язання. При p=2 число q=21 – не просте. При p=3 q=29 – просте число. При p>3, $q=[(p^2-1)+3(p+4)]\vdots3$, q>11, отже q – не просте. Доведення того, що при p – простому, де p>3, число $(p^2-1)\vdots3$ дивись у главі 1 вправу 1.9.

Відповідь: p=3, q=29.

1.14. Знайдіть усі додатні розв'язки (x; y) рівнянь, де x,y – прості числа: а) $x+y=21$; б) $x+y=35$; в) $x-y=29$; г) $x^2-y^2=22$; д) $x^2-y^2=21$; е) $5x-y=30$; є) $x+3y=30$.

а) *Розв'язання*: Числа x,y – різної парності, тому з того, що вони прості, випливає, що одне з них 2, а тому інше 19.

Відповідь: (2; 19) та (19; 2).

б) *Вказівка*: Дивись розв'язання а).

Відповідь: немає розв'язків.

в) *Вказівка*: Дивись розв'язання а).

Відповідь: (31; 2).

г) Відмітимо, що $x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$, та те, що числа (x-y) і (x+y) – числа однакової парності (перевірте: якщо x,y – парні, вони обидва парні; якщо x,y – непарні, вони обидва парні; якщо x,y – різної парності, вони обидва непарні). Оскільки добуток 22 є число парне, то кожен із співмножників не може бути непарним, отже є парним, а тому їхній добуток має ділитися на 4, проте число 22 не ділиться 4. Неможливо.

Відповідь: немає розв'язків.

д) *Вказівка*: Дивись розв'язання г): числа x, y – різної парності.

Відповідь: (5; 2).

е) *Вказівка*: Доведіть, що $y\vdots5$, оскільки y – просте, то y=5, а тоді x=7.

Відповідь: (7; 5).

є) *Вказівка*: Дивись розв'язання е): x має ділитися на 3.

Відповідь: немає розв'язків.

1.15. Довести, що ні при якому $n \in N$ числа $2^n+1, 2^n+123, 2^n+125$ одночасно не можуть бути простими.

Доведення:

1. Очевидно, що при $n=1$ друге число $2^n+123=125\vdots 5$, а тому не є простим, отже $n\neq 1$.

2. Якщо показник n має непарні дільники виду $2k+1,\ k\in N$, тобто $n=(2k+1)\cdot t,\ \ k,t\in N$, тоді перше число $2^n+1=2^{(2k+1)\cdot t}+1=\left(2^t\right)^{2k+1}+1^{2k+1}\vdots\left(2^t+1\right)$ – не є простим, тому n не може мати непарних дільників.

3. Лишився один випадок, коли n – парне натуральне число, що не має непарних дільників, тобто $n=2^k$.

Покажемо, що і за цих обставин три числа $2^{2^k}+1,\ 2^{2^k}+123,\ 2^{2^k}+125$ не можуть бути одночасно простими. Числа 1; 123; 125 при діленні на 3 дають остачі, відповідно, 1, 0, 2. Дослідимо, які остачі дає число $2^{2^k},k\in N$: при $k=1,\ 2^{2^1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$; при $k=2, 2^{2^2}\equiv 2^4\equiv 16\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$; при $k=3, 2^{2^3}\equiv 2^8\equiv 16^2\equiv 1^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Гіпотеза: $2^{2^k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

Обґрунтування: при $k=1$ – перевірили. Індукційне припущення: нехай твердження має місце при $k\in N$: $2^{2^k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Покажемо істинність при $k+1$: $2^{2^{k+1}}=2^{2^k\cdot 2}=\left(2^{2^k}\right)^2$, з урахуванням індукційного припущення маємо $2^{2^{k+1}}=\left(2^{2^k}\right)^2\equiv 1^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Доведено.

А тоді третє число $2^n+125\equiv 1+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ – ділиться на 3, а тому не є простим.

Отже, при усіх натуральних n три числа не можуть бути одночасно простими. Твердження доведено.

1.16. Доведіть, що якщо число p – просте і p>5, то або $p^2\equiv 1$(mod 30), або $p^2\equiv 19$ (mod 30).

Вказівка: Запишіть усі натуральні числа: 30k; 30k±1; 30k±2; …; 30k±14; 30k+15 та випишіть ті, які можуть бути простими (ті, які не діляться на 2,3,5). Тоді простими можуть бути лише 30k±1; 30k±7; 30k±11; 30k±13. Піднесіть їх до квадрату і оцініть остачу від ділення на 30, наприклад: $(30k\pm 13)^2\equiv(\pm 13)^2\equiv 169\equiv 19$ (mod 30) і т.д.

§2. Розклад на прості множники

Нехай дано деяке складене число a. Його можна розкласти у добуток двох множників, відмінних від 1 та a: $a=bc$, де $1<b<a$, $1<c<a$. Якщо числа b і c прості, то ми отримали розклад числа a на прості множники. Якщо ж хоча б одне з них складене, то його теж

можна розкласти на два множники. Якщо серед отриманих множників будуть складені, то розкладемо і їх, і так далі доти, доки не залишаться тільки прості множники $p_1, p_2, ..., p_n$ (подумайте, чому це рано чи пізно станеться). У результаті отримаємо розклад числа a на прості множники: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$. Пояснимо цей алгоритм на прикладі.

<u>Приклад 3.1.</u> Розкладіть число 180 на прості множники.

Розв'язання. $180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Зверніть увагу на те, що ми записали відповідь в *канонічному вигляді*: зібрали однакові прості множники і впорядкували всі прості множники по зростанню.

У загальному вигляді *канонічний розклад числа n на прості множники* має вигляд:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m},$$

де $p_1, p_2, ..., p_m$ – різні прості числа, впорядковані по зростанню $p_1 < p_2 < ... < p_m$, $\alpha_i \in N \ (1 \le i \le m)$.

Відмітимо, що за необхідності можна доповнити канонічний розклад простими множниками, які не входять до розкладу числа n, записавши їх в нульових степенях (оскільки $p^0 = 1$ для будь-якого $p \in N$); наприклад, в розглянутій задачі можна було подати задане число у вигляді добутку простих множників так:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0.$$

Тому можна вважати, що в *розкладі числа n на прості множники* $\alpha_i \in N_0 \ (1 \le i \le m)$.

Розглянутий вище алгоритм дає можливість розкласти будь-яке складене число на прості множники. Але постає питання: чи єдиний такий розклад? Наприклад, в прикладі 3.1 можна було виділяти множники по-іншому: $180 = 5 \cdot 36$. Можливо інша послідовність дій привела б нас до іншого результату?

Виявляється, ні. Розклад числа на прості множники завжди єдиний; два розклади одного і того ж числа можуть відрізнятися лише порядком розташування множників. Цей факт інтуїтивно здається очевидним, але потребує строгого доведення. Спочатку доведемо лему.

Лема. Нехай $p_1, p_2, ..., p_n, q$ – прості числа і $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n) \vdots q$. Тоді хоча б одне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ співпадає з q.

Доведення. Якщо $p_n \vdots q$, то $p_n = q$, інакше p_n є складеним (чому?). Якщо ж p_n не ділиться на q, то $\text{НСД}(p_n, q) = 1$ і тоді, оскільки $((p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{n-1}) \cdot p_n) \vdots q$, то $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{n-1}) \vdots q$ за теоремою 2.4. Якщо $p_{n-1} \vdots q$, то $p_{n-1} = q$, і лему доведено; якщо ж ні, то аналогічними міркуваннями отримуємо, що $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{n-2}) \vdots q$ тощо. Продовжуючи міркування, ми або на одному з кроків отримаємо, що $p_i \vdots q$ (отже, $p_i = q$, де $2 \le i \le n$), або врешті решт прийдемо до того, що $p_1 \vdots q$ (тоді $p_1 = q$). Лему доведено.

<u>Теорема 3.1. (основна теорема арифметики).</u> Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, розкладається в добуток простих множників єдиним (з точністю до порядку множників) способом.

Доведення. Існування розкладу для складених чисел було доведено вище (для простих чисел існування розкладу очевидне). Доведемо єдиність розкладу.

Нехай існують два розклади деякого числа a на прості множники:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n} = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n},$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – різні прості числа, які входять хоча б в один із двох розкладів числа a; $\alpha_i,\ \beta_i \in N\ (1 \le i \le n)$.

Доведемо, що $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$. Припустимо, що це не так і $\alpha_i < \beta_i$ для деякого i. Можна вважати, що $i=1$ (це завжди можна зробити, якщо перенумерувати прості множники) і що $\alpha_1 < \beta_1$. Тоді перепишемо наведену вище рівність у вигляді:

$$p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n} = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}.$$

Оскільки $\beta_1 - \alpha_1 \ge 1$, то права частина отриманої рівності ділиться на p_1; тоді і ліва частина ділиться на p_1. Отже, за лемою хоча б одне з простих чисел $p_2, p_3, ..., p_n$, які входять до розкладу лівої частини, співпадає з p_1 – маємо протиріччя. Це означає, що рівності $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$ справедливі; таким чином, два записаних розклади співпадають. Теорему доведено.

Існують і інші доведення основної теореми арифметики. Приймемо без доведення таку теорему.

<u>Теорема 3.2.</u> Нехай

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n},$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – різні прості числа, $\alpha_i,\ \beta_i \in N\ (1 \le i \le n)$. В цьому випадку $a \vdots b$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i \ge \beta_i$ для будь-якого i від 1 до n включно.

Наслідок з теореми. Нехай $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n},\ b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_m^{\beta m}$ де $p_1, p_2, ..., p_n$, $q_1, q_2, ..., q_m$ – прості числа, $\alpha_i \in N\ (1 \le i \le n)$,

$\beta_j \in N\ (1 \le j \le m)$. Тоді числа a і b взаємно прості тоді і тільки тоді, коли ні одне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ не співпадає ні з одним із чисел $q_1, q_2, ..., q_m$.

Приклад 3.1. Нехай $a, b \in Z$, $НСД(a, b) = 1$. Доведіть, що $НСД(a^r, b^s) = 1$, для будь-яких $r, s \in N_0$.

Розв'язання. Нехай $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$, $b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_m^{\beta m}$, де $p_1, p_2, ..., p_n$, $q_1, q_2, ..., q_m$ – прості числа, $\alpha_i \in N\ (1 \le i \le n)$, $\beta_j \in N\ (1 \le j \le m)$. Так як $НСД(a, b) = 1$, то за наслідком з теореми 3.2 ні одне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ не співпадає ні з одним із чисел $q_1, q_2, ..., q_m$. Розглянемо числа:

$$a^r = p_1^{r \cdot \alpha_1} \cdot p_2^{r \cdot \alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{r \cdot \alpha_n},\ b^S = q_1^{s \cdot \beta_1} \cdot q_2^{s \cdot \beta_2} \cdot ... \cdot q_m^{s \cdot \beta m}.$$

Очевидно, що і в цьому випадку ні одне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ не співпадає ні з одним із чисел $q_1, q_2, ..., q_m$. З цього ж наслідку випливає, що $НСД(a^r, b^s) = 1$, для будь-яких $r, s \in N_0$.

Як визначити, дане число є простим чи складеним? Довести, що число є складеним іноді можна за допомогою ознак подільності або порівнянь за модулем. Наприклад, 3547821 – складене число, оскільки воно ділиться на 3, в чому легко переконатися за допомогою ознаки подільності; $2^{46}+1$ – складене, оскільки $2^{46}+1=2^{4\cdot11+2}+1 \equiv 16^{11}\cdot2^2+1 \equiv 1\cdot2^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ (дивись приклад з остачами степенів числа 2).

Ще один спосіб доведення того, що число є складеним, полягає в його розкладі на деякі (не обов'язково прості) множники, наприклад: $9991=10000-9=100^2-3^2=(100-3)(100+3)$.

Якщо ж не вдалося показати, що дане число є складеним, то, ймовірно, це число – просте. Щоб довести, що число a є простим, треба перевірити, що у нього нема жодного простого дільника (крім самого числа a). Але не обов'язково перевіряти всі прості дільники від 2 до a–1: наступна теорема дає можливість скоротити перевірку.

Теорема 3.3. Будь-яке складене число a має простий дільник p такий, що $p^2 \le a$.

Доведення. Розкладемо число a на прості множники, впорядкувавши їх по зростанню:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m,$$

де $p_1, p_2, ..., p_m$ – різні прості числа, впорядковані по зростанню $p_1 < p_2 < ... < p_m$. Оскільки a – складене, то простих множників в його розкладі буде не менше двох; тоді

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m \geq p_1 \cdot p_2 \geq p_1^2,$$

і p_1 – шуканий простий дільник числа a.

Таким чином, для того, щоб впевнитися в тому, що деяке число a є простим, достатньо перевірити, що воно не ділиться на жодне просте число, яке не перевищує $\sqrt{a}$. Наприклад, для доведення того, що число 173 є простим, необхідно перевірити, що воно не ділиться на $2,3,5,7,11,13$; подальша перевірка не потрібна, оскільки наступне просте число – це 17, а $17^2 > 173$. Оскільки 173 не ділиться ні на одне з простих чисел від 2 до 13, то 173 – просте число.

Вправи до § 2.

2.1. Розкладіть на прості множники числа: а) 2002; б) 2009; в) 2010.

Відповідь: а) $2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$; б) $2009=7^2\cdot41$; в) $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$.

2.2. Визначте, скількома нулями закінчується число 50!.

Розв'язання. Ми маємо $50!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot48\cdot49\cdot50$. Оскільки нас цікавить кількість нулів у запису числа, то визначимо показник степеня, з яким входить у розклад даного числа 2 та 5 ($2\cdot5=10$).

Вкажемо, як визначити кількість двійок, якщо у нас є ряд чисел: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,…,16,…,50. Оскільки 50:2=25, то у даному ряді є 25 парних чисел, які дадуть, принаймні одну двійку у розклад 50!. Далі, кожне четверте число (4,8,12,16,…,44,48) дасть додатково ще по одній двійці у розклад 50!; оскільки частка від ділення 50 на 2^2 дорівнює 12, то таких чисел є 12. Далі, кожне восьме число (8, 16, 24, 32, 40, 48) дасть ще по одній двійці у розклад 50!; таких чисел є 6, оскільки частка від ділення 50 на 2^3 дорівнює 6. Аналогічно, кожне шістнадцяте число дасть додатково ще по одній двійці, таких чисел буде стільки, якою є частка від ділення 50 на 2^4, тобто 3. Кожне 32-те число дасть ще по одній двійці, таких чисел – 1, оскільки частка від ділення 50 на 2^5 дорівнює 1; кожне 64-те число дало б ще по одній двійці, але таких чисел – 0, оскільки частка від ділення 50 на 2^6 дорівнює 0. Таким чином, маємо 25+12+6+3+1=47 двійок у розкладі 50!

Математично це записується з використанням цілої частини числа:

$$\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{2^2}\right]+\left[\frac{50}{2^3}\right]+\left[\frac{50}{2^4}\right]+\left[\frac{50}{2^5}\right]+\left[\frac{50}{2^6}\right]+...=25+12+6+3+1=47.$$

Аналогічно, кількість п'ятірок у запису числа 50! є:

$$\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{5^2}\right]+\left[\frac{50}{5^3}\right]+\ldots=10+2+0=12.$$

Оскільки $50!\vdots 2^{47}$, $50!\vdots 5^{12}$ і не ділиться на 2^{48}; 5^{13}, то у запису 50! можна утворити множник $(2\cdot5)^{12}$, а тому 50! закінчується 12-ма нулями.

Зауваження. Очевидно, п’ятірки у запису зустрічаються значно рідше, ніж двійки, тому достатньо рахувати лише п’ятірки.

Відповідь: 12 нулями.

2.3. Визначте, скількома нулями закінчується число 300!.

Розв’язання: $\left[\frac{300}{5}\right]+\left[\frac{300}{5^2}\right]+\left[\frac{300}{5^3}\right]+\left[\frac{300}{5^4}\right]+\ldots=60+12+2+0=74$.

Дивись вправу 2.2.

Відповідь: 74 нулями.

2.4. Визначте, що буде стояти у знаменнику дробу $\frac{200!}{3^{100}\cdot5^{50}}$ після його скорочення.

Розв’язання: Визначимо кількість трійок та п’ятірок у запису 200! (дивись вправу 2.2):

$\left[\frac{200}{3}\right]+\left[\frac{200}{3^2}\right]+\left[\frac{200}{3^3}\right]+\left[\frac{200}{3^4}\right]+\ldots=66+22+7+2=97$; отже 3^{97};

$\left[\frac{200}{5}\right]+\left[\frac{200}{5^2}\right]+\left[\frac{200}{5^3}\right]+\left[\frac{200}{5^4}\right]+\ldots=40+8+1+0=49$, отже 5^{49}.

А тоді у знаменнику після скорочення залишиться $3^3\cdot5^1$.

Відповідь: $3^3\cdot5^1$.

2.5. Розкладіть на прості множники числа: а) 14!; б) 2^{24}-1.

а) Розв’язання: у розкладі 14! будуть присутні прості множники, від 2 до 13. Обчислимо показники степенів, з яким входять у розклад 14! прості числа 2, 3, 5, 7, 11, 13:

$\left[\frac{14}{2}\right]+\left[\frac{14}{2^2}\right]+\left[\frac{14}{2^3}\right]+\left[\frac{14}{2^4}\right]+\ldots=7+3+1+0=11$, отже множник 2^{11};

$\left[\frac{14}{3}\right]+\left[\frac{14}{3^2}\right]+\left[\frac{14}{3^3}\right]+\ldots=4+1+0=5$, отже маємо 3^5;

$\left[\frac{14}{5}\right]+\left[\frac{14}{5^2}\right]+\ldots=2+0=2$, маємо 5^2; $\left[\frac{14}{7}\right]+\left[\frac{14}{7^2}\right]+\ldots=2+0=2$, маємо 7^2;

$\left[\frac{14}{11}\right]+\left[\frac{14}{11^2}\right]+\ldots=1+0=1$, тому 11^1; $\left[\frac{14}{13}\right]+\left[\frac{14}{13^2}\right]+\ldots=1+0=1$, тому 13^1.

Зауваження: Якщо число невелике, наприклад, 5!, то можна порахувати усе вручну, без застосувань формул, якщо велике, то щоб не помилитися, краще використовувати результати вправи 2.2.

Відповідь: $14!=2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1$.

б) Розв'язання: Розкладемо на множники $2^{24}-1$, наприклад, як різницю квадратів: $2^{24}-1=(2^{12}-1)\cdot(2^{12}+1)$; далі використаємо формули різниці та суми кубів:

$$2^{24}-1=[(2^4-1)\cdot(2^8+2^4+1)]\cdot[(2^4+1)\cdot(2^8-2^4+1)]=15\cdot 273\cdot 17\cdot 241.$$

Розкладемо отримані множники на прості: $15=3\cdot 5$; $273=3\cdot 7\cdot 13$; числа 17 і 241 є простими. Маємо розклад: $2^{24}-1=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 241$.

Відповідь: $2^{24}-1=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 241$.

2.6. Чи ділиться число $\frac{1000!}{(500!)^2}$ на 11?

Розв'язання: Визначимо показник степеня, з яким входить число 11 у запис 500! та 1000! (дивись вправу 2.2):

$\left[\frac{1000}{11}\right]+\left[\frac{1000}{11^2}\right]+\left[\frac{1000}{11^3}\right]+...=90+8+0=98$; отже маємо 11^{98};

$\left[\frac{500}{11}\right]+\left[\frac{500}{11^2}\right]+\left[\frac{500}{11^3}\right]+...=45+4+0=49$, тому $(500!)^2 \vdots 11^{98}$. Після ділення 1000! на $(500!)^2$ не залишиться 11.

Відповідь: не ділиться.

2.7. Нехай p – просте число, p≠2. Відомо, що a не ділиться на p, b не ділиться на p, $(a^2-b^2)\vdots p^n$, де $n\in N$. Доведіть, що або $(a+b)\vdots p^n$, або $(a-b)\vdots p^n$.

Доведення. З того, що $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ і $(a^2-b^2)\vdots p^n$ випливає, що $(a+b)(a-b)\vdots p^n$. Покажемо, що тільки один з множників ділиться на p^n. Припустимо, що обидва множники діляться на p у якомусь степені: $(a+b)\vdots p^k$, $(a-b)\vdots p^m$. Тоді $(a+b)\vdots p$, $(a-b)\vdots p$, а тому їхня сума (різниця) також ділиться на p: сума $2a\vdots p$ (різниця $2b\vdots p$). Оскільки за умовою p≠2, то НСД(p,2)=1, тоді з того, що добуток $2a\vdots p$, і перший множник з простим числом p взаємно простий, випливає, що другий множник ділиться на p, отримали $a\vdots p$ протиріччя з умовою. Отже, маємо, що тільки один з виразів, або $(a+b)\vdots p^n$, або $(a-b)\vdots p^n$.

2.8. Доведіть, що натуральне число, більше одиниці, є n-им степенем деякого натурального числа тоді і тільки тоді, коли всі показники степенів в його канонічному розкладі на прості множники діляться на n.

Вказівка: Зверніть увагу на те, що у задачі дві теореми: пряма і обернена. Доведення оберненої теореми спирається на властивості степеня з натуральним показником. Пряму теорему доведіть від супротивного.

2.9. Нехай a,b,c$\in N$, причому a^2 =bc і НСД(b,c)=1. Доведіть, що b і c – повні квадрати.

Розв'язання: Якщо b або c, або b і c одночасно, рівні 1, тоді доведення тривіальне. Нехай b і c не рівні 1, тоді їх можна записати у вигляді добутку простих співмножників, замітимо, оскільки b і c взаємно прості, то однакових співмножників не може бути: $b = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$, $c = q_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot q_m^{\beta m}$, де $p_1, ..., p_n$, $q_1, ..., q_m$ – різні прості числа, $\alpha_1;...;\alpha_n;\beta_1;...;\beta_m \in N$. Тоді $a^2 = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}\right)\left(q_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot q_m^{\beta m}\right)$, оскільки серед множників немає однакових, то за вправою 2.8, $\alpha_1 \vdots 2;...;\alpha_n \vdots 2;\beta_1 \vdots 2;...;\beta_m \vdots 2$, тобто $\alpha_1 = 2t_1;...;\alpha_n = 2t_n$; $\beta_1 = 2r_1;...;\beta_m = 2r_m$, де усі $t_1;...;t_n;r_1;...;r_m \in N$, а тоді $b = \left(p_1^{t_1} \cdot ... \cdot p_n^{t_n}\right)^2$, $c = \left(q_1^{r_1} \cdot ... \cdot q_m^{r_m}\right)^2$ – повні квадрати.

2.10. Чи може виконуватися рівність $pm^2=n^2$ для $m,n \in N$ і простого p?

Вказівка: Перепишіть задачу справа наліво і застосуйте вправу 2.9. Скористайтеся означенням простого числа (p не може бути квадратом натурального числа).

Відповідь: неможливо.

2.11. Сума цифр натурального числа дорівнює 12. Доведіть, що воно не є а) повним квадратом; б) повним кубом.

Доведення. а) За ознакою подільності число ділиться на 3, проте не ділиться на $9=3^2$, а тому не може бути повним квадратом.

б) За ознакою подільності число ділиться на 3; проте не ділиться на $27=3^3$, оскільки не ділиться на 9, а тому не може бути повним кубом.

2.12. Знайдіть найменше натуральне число, половина якого – повний квадрат натурального числа, третя частина – куб натурального числа, четверта частина – п'ята степінь натурального числа.

Розв'язання: Запишемо число n з умови задачі: $\frac{1}{2}n=x^2$; $\frac{1}{3}n=y^3$; $\frac{1}{4}n=z^5$. Звідки $n \vdots 2$, $n \vdots 3$, $n \vdots 4$, тобто $n \vdots 12$.

Далі, з того, що $n \vdots 12$, $n=2x^2$ випливає, що $x \vdots 2$, $x \vdots 3$, звідки (оскільки нас цікавить найменше таке число) $x=2^k \cdot 3^m$, $k,m \in N$, тоді $n=2x^2$, $n=2 \cdot (2^k \cdot 3^m)^2=2^{2k+1} \cdot 3^{2m}$.

З того, що $n=2^{2k+1} \cdot 3^{2m}$, $n=3y^3$, маємо $3y^3=2^{2k+1} \cdot 3^{2m}$, звідки випливає, що $y^3=2^{2k+1} \cdot 3^{2m-1}$ та $(2k+1) \vdots 3$, $(2m-1) \vdots 3$.

Проаналізуємо умову: $(2k+1) \vdots 3$. Те, що деяке число при діленні на 2 дає остачу 1, а при діленні на 3 остачу – 0, означає, що це число при діленні на 6 дає остачу 3 (перевірте: $2k+1=3s$ – діофантове рівняння, його розв'язки $k=1+3t$, $s=1+2t$, t – ціле, а тоді число $2k+1=2(1+3t)+1=6t+3$ або $3s=3(1+2t)=6t+3$, тобто при діленні на 6 дає остачу 3).

Умова (2m-1)⋮3, означає, що $2m-1\equiv 0 \pmod 3$ або $2m\equiv 1 \pmod 3$, тобто число 2m має вигляд 6p+4.

А тому наше число $n=2^{2k+1}\cdot 3^{2m}$ має вигляд $n=2^{6t+3}\cdot 3^{6p+4}$, $t,p\in N_0$.

З того, що $n=2^{6t+3}\cdot 3^{6p+4}$, $n=4z^5$, маємо $4z^5=2^{6t+3}\cdot 3^{6p+4}$, звідки $z^5=2^{6t+1}\cdot 3^{6p+4}$ та (6t+1)⋮5, (6p+4)⋮5, причому $t,p\in N_0$. Усі розв'язки запишуться у вигляді: t=4+5q, $q\in N_0$; p=1+5u, $u\in N_0$. Найменші значення, що задовольняють цим умовам є t=4, p=1. А тому шукане число $n=2^{6t+3}\cdot 3^{6p+4}$, відповідно, $n=2^{27}\cdot 3^{10}$.

Перевірка: $\frac{1}{2}n=x^2$; $\frac{1}{2}n=2^{26}\cdot 3^{10}$; $x=2^{13}\cdot 3^5$;

$\frac{1}{3}n=y^3$; $\frac{1}{3}n=2^{27}\cdot 3^9$; $y=2^9\cdot 3^3$; $\frac{1}{4}n=z^5$; $\frac{1}{4}n=2^{25}\cdot 3^{10}$; $z=2^5\cdot 3^2$.

Відповідь: шукане число $2^{27}\cdot 3^{10}$.

2.13. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівнянь:

а) $y^2+33=x^2$; б) x+y=xy; в) xy+11=x-3y; г) $x^2-3xy=x-3y+2$.

а) *Розв'язання:* Запишемо рівняння у вигляді: $x^2-y^2=33$, звідки отримаємо (x-y)(x+y)=33; оскільки за умовою x,y – цілі, то і їх різниця x-y та сума x+y є числа цілі. Число 33 можна подати у вигляді добутку цілих, враховуючи порядок слідування множників: 1·33; 33·1; 3·11; 11·3; -1·(-33); -33·(-1); -3·(-11); -11·(-3), а тому маємо сукупність з восьми систем рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=33 \end{cases} \Rightarrow (17;16); \quad \begin{cases} x-y=33 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (17;-16); \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow (7;4);$$

$$\begin{cases} x-y=11 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow (7;-4); \quad \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-33 \end{cases} \Rightarrow (-17;-16); \quad \begin{cases} x-y=-33 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow (-17;16);$$

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-11 \end{cases} \Rightarrow (-7;-4); \quad \begin{cases} x-y=-11 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow (-7;4).$$

Зауваження: розв'язання задачі можна було спростити, якщо помітити, що змінні x і y входять у парних степенях, а тому достатньо було розв'язати на множині натуральних чисел, та доповнити відповідь чергуваннями знаків розв'язку.

Відповідь: (±17;±16); (±17;∓16); (±7; ±4); (±7;∓4).

б) *Вказівка:* Представте x+y=xy у вигляді добутку (x-1)(y-1)=1 та доведіть, що (x-1) і (y-1) – цілі, а тому можуть набувати значень ±1, так, щоб їхні добутки були рівні 1. Переберіть усі варіанти.

Відповідь: (2; 2); (0;0).

в) *Вказівка:* Представте xy+11=x-3y у вигляді добутку (x+3)(y-1)=-14, обґрунтуйте, що (x+3) і (y-1) – цілі, а тому можуть набувати значень ±1, ±2, ±7, ±14, так, щоб їхні добутки були рівні -14. Переберіть усі варіанти (8).

Відповідь: (-2;-13); (-4;15);(11;0); (-17;2);(-1;-6); (-5;8);(4;-1); (-10;3).

г) *Вказівка:* Представте $x^2-3xy=x-3y+2$ у вигляді добутку

(1-x)(3y-x)=2, обґрунтуйте, що (1-x) і (3y-x) – цілі, а тому можуть набувати значень ±1, ±2. Розв'яжіть 4 системи та виберіть розв'язки тих систем, де x,y – одночасно цілі.

Відповідь: (2;0); (-1;0).

2.14. Знайдіть усі прямокутники, площа яких чисельно дорівнює їхньому периметру. Сторони виражаються цілими числами.

Розв'язання: До задачі складемо рівняння: x·y=2(x+y), де x і y – сторони прямокутника (натуральні числа). Після перетворень отримаємо (x-2)(y-2)=4; розглянувши варіанти 1·4; 4·1; 2·2, отримаємо для пар (x; y): (3;6); (6;3); (4;4). Перші два набори визначають один прямокутник; останній визначають прямокутник, що є квадратом.

Відповідь: (3;6); (4;4).

2.15. Розв'яжіть у натуральних числах систему: $\begin{cases} x+y+z=14 \\ x+yz=19 \end{cases}$.

Розв'язання: Виключимо змінну x, отримаємо діофантове рівняння другого степеня: $yz-y-z=5 \Leftrightarrow (y-1)(z-1)=6$. Оскільки за умовою змінні набувають натуральних значень, розв'язавши сукупність 4-х рівнянь, отримуємо для пар $(y;z):(2;7);(7;2);(3;4);(4;3)$. Так як $x=14-(y+z)$, обчислимо x, матимемо відповідь.

Відповідь: (5;2;7); (5;7;2); (7;3;4); (7;4;3).

2.16. Добуток трьох простих чисел в 11 разів більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.

Розв'язання: З умови маємо $pqr=11(p+q+r)$. Права частина ділиться на 11, а тому і ліва частина теж ділиться на 11. Враховуючи, що числа є простими, це означає, що одне з них дорівнює 11. Не порушуючи загальності міркувань, нехай $p=11$. Поділимо ліву і праву частини на 11, матимемо: $qr=11+q+r \Leftrightarrow (q-1)(r-1)=12$. Розв'язавши діофантове рівняння, виберемо прості розв'язки: $q_1=2;\ r_1=13$ та $q_2=3;\ r_2=7$.

Відповідь: числа 11; 2; 13 або 11; 3; 7.

2.17. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння n^3+4mn=145.

Розв'язання: Застосуємо метод локалізації і перебору. Оскільки числа m,n є натуральними і обидва доданки додатні, то кожен з них строго менший за 145, звідки n$\le$5. Далі, n не може бути парним (бо тоді ліва частина ділиться на 2, а права – ні), n не ділиться на 3 (бо тоді ліва частина ділиться на 3, а права – ні), лишається перебрати: n=1; тоді m=36; n=5; тоді m=1.

Відповідь: (1;36); (5;1).

2.18. Доведіть, що якщо 4-значне число n не ділиться на жодне просте число від 2 до 97, то n - просте.

Вказівка: Скористайтеся теоремою 3.3, врахувавши, що корінь з найбільшого 4-цифрового числа задовольняє умову: $\sqrt{9999} < 100$ (а отже, і корінь з меншого 4-цифрового числа менший за 100) і те, що числа 98, 99 – не прості.

2.19. Доведіть, що наступні числа є складеними:

а) $3^{2009}+7^{2010}$; б) $2^{12}+7^{15}$; в) $2^{2010}+3^{2008}$; г) 2009^4+4.

а) *Вказівка*: доведіть, що кожен доданок є непарним, а тому сума є парним числом. Число ділиться на 2 і не дорівнює 2, отже є складеним числом.

б) *Розв'язання*: $2^{12}+7^{15}=[(2^4)^3+(7^5)^3] \vdots (2^4+7^5)$, а тому є число непросте, оскільки дільник більший від одиниці. Ми скористалися формулою $(x^3+y^3) \vdots (x+y)$.

в) *Розв'язання*: $2^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 5)$, піднесемо до 1005-го степеня ($2010=2\cdot1005$), отримаємо $2^{2010} \equiv (-1)^{1005} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 5)$;

$3^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 5)$, піднесемо до 1004-го степеня ($2008=2\cdot1004$), отримаємо $3^{2008} \equiv (-1)^{1004} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$.

А тоді сума $2^{2010}+3^{2008} \equiv -1+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$, тобто дає остачу нуль при діленні на 5 (ділиться на 5).

г) *Розв'язання 1*: Виділимо повний квадрат:

$2009^4+4=(2009^2)^2+2^2=(2009^2+2)^2-2\cdot2009^2\cdot2=(2009^2+2)^2-(2\cdot2009)^2$.

Маємо різницю квадратів, після розкладу на множники отримаємо: $2009^4+4=(2009^2+2-2\cdot2009)\cdot(2009^2+2+2\cdot2009)$ – це число є складеним, оскільки кожен з множників не дорівнює 1.

Розв'язання 2: $2009 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 5)$, піднесемо до 4-го степеня, отримаємо $2009^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$; а тоді $2009^4+4 \equiv 1+4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$, тобто вказаний вираз ділиться на 5.

§3. Нескінченність множини простих чисел

__**Теорема 3.4.**__ Множина простих чисел нескінченна.

Доведення. Припустимо зворотне: існує всього m різних простих чисел: $p_1, p_2, ..., p_m$. Розглянемо число $P = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m + 1$. Очевидно, що P не ділиться на p_1: якщо $P \vdots p_1$, то і число $P - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m = 1$ ділиться на p_1, що невірно. Аналогічно можна показати, що P не ділиться на $p_2, p_3, ..., p_m$. Отже, число P не має жодного простого дільника. Проте цього не може бути, оскільки будь-яке натуральне число, більше за 1, можна розкласти на прості множники (теорема 3.1). Отримали суперечність, отже наше припущення невірне і множина простих чисел нескінченна, що і потрібно було довести.

Наведене доведення належить великому давньогрецькому математику Евкліду.

Вправи до § 3.

3.1. Довести, що для довільного $n \in N$ існує $m \in N$, для якого $\left(7^m - 1\right) \vdots\, 3^{n+2}$.

Доведення. При діленні на 3^{n+2} усі натуральні числа дають 3^{n+2} остач (скінченне число): $0, 1, 2, \ldots, 3^{n+2} - 2, 3^{n+2} - 1$. Оскільки натуральних чисел виду 7^m нескінченно багато, то за принципом Діріхле знайдуться $m_1, m_2 \in N$, $m_1 \neq m_2$, такі, що 7^{m_1} та 7^{m_2} дають однакові остачі при діленні на 3^{n+2} (не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $m_1 > m_2$). А тоді різниця $7^{m_1} - 7^{m_2} \vdots\, 3^{n+2}$. Очевидно, що $7^{m_1} - 7^{m_2} \vdots\, 3^{n+2} \Leftrightarrow 7^{m_2}(7^m - 1) \vdots\, 3^{n+2}$, де $m = m_1 - m_2$. Оскільки найбільший спільний дільник $(3,7) = 1$, то і будь-які їхні натуральні степені також взаємно прості, тобто $(3^{n+2}, 7^{m_2}) = 1$. А тоді $\left(7^m - 1\right) \vdots\, 3^{n+2}$.

§4. Найменше спільне кратне

<u>Означення 3.3.</u> *Найменшим спільним кратним* двох або більше цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, які не дорівнюють нулю, називається найменше натуральне число, яке ділиться на всі ці числа. Найменше спільне кратне чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ позначається через НСК($a_1, a_2, ..., a_n$).

Приклади: НСК(10,22)=110, НСК(28,30)=420, НСК(4,6,30)=60.

<u>Теорема 3.5.</u> Нехай $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, де $p_1, p_2, ..., p_n$ – різні прості числа, $\alpha_i, \beta_i \in N_0$ $\left(1 \le i \le n\right)$. Покладемо $\gamma_i = \min\left(\alpha_i, \beta_i\right)$, $\delta_i = \max\left(\alpha_i, \beta_i\right)$ $\left(1 \le i \le n\right)$.

Тоді $НСД\left(a, b\right) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$, $НСК\left(a, b\right) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\delta_n}$.

Доведення. За теоремою 3.2 число $D = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$ є спільним дільником чисел a та b. Представимо довільний спільний дільник d чисел a та b у вигляді $d = p_1^{\varphi_1} \cdot p_2^{\varphi_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi_n}$ (інших простих множників у його розкладі бути не може, оскільки в цьому випадку він не буде дільником чисел a і b). За теоремою 3.2 потрібно, щоб виконувалися співвідношення $\varphi_i \le \alpha_i, \varphi_i \le \beta_i, \left(1 \le i \le n\right)$, звідки $\varphi_i \le \min\left(\alpha_i, \beta_i\right) = \gamma_i$; тобто $d \le D$, це і доводить, що D – саме найбільший спільний дільник. Доведення другої рівності аналогічне. Пропонуємо читачам провести його самостійно.

Наслідок. Для будь-яких двох цілих чисел a та b справджується рівність:

$$a \cdot b = НСД(a,b) \cdot НСК(a,b).$$

Доведення наслідку логічно випливає з доведеної теореми 3.5.

Зауваження 1. Формула з наслідку має місце тільки для двох чисел, для трьох чисел вона інша.

Зауваження 2. Теорему 3.5 можна узагальнити на випадок трьох і більше чисел.

<u>Теорема 3.6.</u> Будь-яке спільне кратне двох чисел a і b ділиться на їх найменше спільне кратне.

Доведення. Нехай $m=НСК(a,b)$, M – довільне спільне кратне чисел a і b. Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що M не ділиться на m. Виконаємо ділення з остачею: $M=qm+r$, де $0<r<m$. Оскільки $M \vdots a$, $m \vdots a$, то і $r=(M-qm) \vdots a$, аналогічно $r \vdots b$. Таким чином, r також є спільним кратним чисел a і b і $r<m$, що суперечить тому, що m – їх найменше спільне кратне.

Відзначимо, що теорему 3.6 можна було довести і інакше – за допомогою теорем 3.2 і 3.5.

Вправи до § 4.

4.1. Знайдіть НСД і НСК чисел:
а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ і $2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 11$; б) 648 і 360; в) 288 і 324; г) 42, 594 і 1008.

а) *Відповідь*: НСД=$2^2 \cdot 3 \cdot 5$=60, НСК=$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11$=3465000.

б) *Вказівка:* Використовуючи алгоритм Евкліда, знайдіть НСД вказаних чисел, а потім скористайтеся формулою, яка пов'язує НСД і НСК двох чисел.

Відповідь: НСД=72; НСК=$\frac{648 \cdot 360}{72}$=3240.

в) *Відповідь*: НСД=36; НСК=2592.

г) *Розв'язання*: знайдемо НСД перших двох чисел, потім НСД отриманого числа і 3-го числа: НСД(42; 594)=6; НСД(6; 1008)=6; отже, НСД(42;594;1008)=6.

Обчислимо НСК перших 2-ох чисел, потім НСК отриманого числа і 3-го числа: НСК(42; 594)=$\frac{42 \cdot 594}{6}$=4158.

Для відшукання НСК(4158;1008), знайдемо спочатку їх НСД: НСД(4158;1008)=126, тоді НСК(4158;1008)=$\frac{4158 \cdot 1008}{126}$=33264 – це і є НСК усіх трьох чисел.

Перевірка: НСД (усі 3 числа діляться на НСД і отримані частки взаємно прості): $\frac{42}{6}=7; \frac{594}{6}=99; \frac{1008}{6}=168$, три числа (7,99,168) – взаємно прості, тому НСД знайдено правильно.

НСК (НСК ділиться на усі числа і отримані частки взаємно прості): $\frac{33264}{42}=792; \frac{33264}{594}=56; \frac{33264}{1008}=33$. Усі три числа (792,56,33) взаємно прості, тому НСК знайдено правильно.

Відповідь: НСД(42;594;1008)=6, НСК(42;594;1008)= 33264.

4.2. Знайдіть натуральні числа a та b, якщо відомо, що їхні НСД(a,b)=12 та НСК(a,b)=420.

Вказівка: розкладіть на множники НСД і НСК.

Відповідь: 12 і 420 або 60 і 84.

4.3. Знайдіть натуральні числа a та b, якщо відомо, що частка від ділення їхньої суми на НСД(a,b) дорівнює 14 та НСК(a,b)=693.

Розв'язання: Відмітимо, що числа a та b – різні, оскільки якби вони були однакові, то a=b=НСД(a,b) і частка від ділення (a+b) на НСД(a,b) була б рівна двом. Нехай, для визначеності число a<b. Позначимо через d=НСД(a,b), тоді a=md, b=nd, m,n – натуральні, НСД(m,n)=1 і m<n. З умови маємо $\frac{a+b}{d}=\frac{md+nd}{d}=m+n=14$ та ще

НСК(a,b)=693=$3^2 \cdot 7 \cdot 11$, врахуємо, що НСК$(a,b)=\frac{a \cdot b}{d}$, отримаємо $\frac{a \cdot b}{d}=\frac{md \cdot nd}{d}=mnd=3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Із системи: $\begin{cases} m+n=14 \\ mnd=3^2 \cdot 7 \cdot 11 \end{cases}$, враховуючи, що усі невідомі є натуральними і m<n, маємо єдину можливість для m і n: m=3, n=11, а тоді d=3·7=21 і шукані числа: a=md, b=nd, відповідно, a=63, b=231. Перевірку правильності відповіді пропонуємо провести самостійно.

4.4. Знайдіть натуральні числа a та b, якщо відома їхня сума 667 і частка від ділення НСК(a,b) на НСД(a,b) дорівнює 120.

Розв'язання: Відмітимо, що числа a та b – різні; оскільки якби a=b, то їхня сума була б парним числом. Нехай, для визначеності число a<b. Позначимо через d=НСД(a,b), тоді a=md, b=nd, m,n – натуральні, НСД(m,n)=1 і m<n. З умови отримаємо першу умову $a+b=667 \Leftrightarrow (m+n)d=23 \cdot 29$, звідки для d з'являються 4 можливості {1, 23, 29, 23·29}; та другу $\frac{HCK}{HCD}=\frac{a \cdot b}{d^2}=\frac{md \cdot nd}{d^2}=mn=120$.

При d=1, m+n=667, m·n=120, тобто m,n (за оберненою теоремою Вієта) є розв'язками квадратного рівняння x^2-667x+120=0, проте це рівняння натуральних розв'язків не має.

Можна міркувати і інакше: навіть, якщо m=120 (найбільше можливе натуральне, що задовольняє умову m·n=120), n=1, їхня сума не може бути 667. Аналогічно, при d=23·29, отримуємо, що m+n=1, неможливо, адже m,n – натуральні. При d=23, m+n=29, m·n=120, тоді m,n є розв'язками квадратного рівняння x^2-29x+120=0, тобто m=5, n=24; числа a=115 та b=552. При d=29, m+n=23, m·n=120, відповідне квадратне рівняння x^2-23x+120=0, звідки m=8, n=15; числа a=232 та b=435.

Відповідь: 115 і 552 або 232 і 435.

4.5. Відомо, що НСД(m,n)+НСК(m,n)=m+n. Доведіть, що одне з чисел m,n ділиться на інше.

Доведення: нехай НСД(m,n)=d, тоді НСК$(m,n)=\dfrac{m\cdot n}{d}$. З умови маємо $d+\dfrac{m\cdot n}{d}=m+n \Leftrightarrow d^2+mn-md-nd=0 \Leftrightarrow (m-d)(n-d)=0$, звідки випливає: або m=d, тобто НСД(m,n)=m, а це означає, що n⋮m; або n=d, тобто НСД(m,n)=n і тоді m⋮n. У випадку, коли обидва множники дорівнюють нулю, отримуємо: m=n=d, і твердження теж виконується, на чому завершується доведення.

§5. Рівняння Піфагора

Цей параграф присвячений пошуку розв'язків в натуральних числах *рівняння Піфагора*:

$$x^2+y^2=z^2$$

(трійка чисел *(a, b, c)*, що складає розв'язок цього рівняння, називається *піфагоровою трійкою*). Відомо, що якщо числа x, y, z задовольняють рівняння Піфагора, то трикутник зі сторонами x, y, z існує і є прямокутним; навпаки, для будь-якого прямокутного трикутника з катетами x, y і гіпотенузою z виконується співвідношення $x^2+y^2=z^2$. Найпростіший розв'язок рівняння Піфагора в натуральних числах – це (3, 4, 5) (прямокутний трикутник з катетами 3, 4 і гіпотенузою 5 називається *єгипетським*). Існують і інші розв'язки рівняння Піфагора, наприклад: (5, 12, 13). Але як знайти всі його розв'язки в натуральних числах? У цьому параграфі ми отримаємо формули, що дають всі ці розв'язки.

Відмітимо, що якщо трійка натуральних чисел *(a,b,c)* є розв'язком рівняння Піфагора, то і будь-яка трійка виду *(ka,kb,kc)*, де k – довільне натуральне число, також є його розв'язком. І навпаки, якщо трійка *(ka,kb,kc)* є розв'язком рівняння Піфагора $(a,b,c,k\in N)$, то і трійка *(a,b,c)* буде його розв'язком. Тому надалі досліджуватимемо лише такі розв'язки *(a,b,c)*, для яких *НСД(a,b,c)=1*. Такі трійки називаються *примітивними*. Решта всіх розв'язків отримуються з примітивних множенням a,b,c на одне і те ж натуральне число.

Лема. Нехай a,b,c – натуральні числа, які є розв'язками рівняння Піфагора, причому *НСД(a,b,c)=1*. Тоді одне з чисел a і b є парним, а інше – непарним.

Доведення. Відмітимо, що числа a і b не можуть обидва бути парними, оскільки в цьому випадку $c^2 = \left(a^2 + b^2\right) \vdots 2$, звідки $c \vdots 2$, що суперечить умові *НСД(a,b,c)=1*. Оскільки $(2t)^2 = 4t^2$ і $(2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4 \cdot \left(t^2 + t\right) + 1$, то квадрат парного числа дає при діленні на 4 остачу 0, а квадрат непарного числа – остачу 1. Отже, числа a і b не можуть обидва бути непарними, оскільки в цьому випадку $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, а це неможливо. Таким чином, одне з чисел a і b – парне, а інше – непарне, що і потрібно було довести.

<u>Теорема 3.7.</u> Нехай a, b, c – натуральні числа, які є розв'язками рівняння Піфагора, причому *НСД(a,b,c)=1* і a – непарне число. Тоді існують взаємно прості натуральні числа u і v різної парності такі, що $u>v$ і

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

Доведення. Згідно леми, b – парне число, оскільки a – непарне. Число c^2 є непарним, як сума непарного числа a^2 і парного b^2. Отже, і c – непарне. Перепишемо рівність $a^2 + b^2 = c^2$ у вигляді $b^2 = (c+a) \cdot (c-a)$. Оскільки a і c – непарні числа, то $(c+a) \vdots 2$, $(c-a) \vdots 2$. Покладемо $c+a=2q$, $c-a=2r$, $b=2s$, де q, r, s – деякі натуральні числа. Тоді рівність $b^2 = (c+a) \cdot (c-a)$ запишеться у вигляді $(2s)^2 = 2q \cdot 2r$, або $s^2 = q \cdot r$. Числа q і r є взаємно простими. Дійсно, якщо припустити, що q і r мають спільний простий дільник p, то і числа $q + r = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} = c$ і $q - r = \frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2} = a$ також діляться на p; тоді і $b^2 = \left(c^2 - a^2\right) \vdots p$, звідки $b \vdots p$ (оскільки p – просте число). Отримуємо, що числа a, b, c мають спільний простий дільник p. А це суперечить умові *НСД(a,b,c)=1*. Отже, q і r – взаємно прості; тоді з рівності $s^2 = q \cdot r$ за основною теоремою арифметики випливає, що q і r – повні квадрати: $q = u^2, r = v^2$, де $u, v \in N$. Маємо:

$$\begin{cases} a = q - r = u^2 - v^2 \\ b = 2s = 2 \cdot \sqrt{qr} = 2uv \\ c = q + r = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

Нерівність $u>v$ очевидна: адже $c+a>c-a$, тобто $2q>2r$, або $q>r$, звідки $u^2>v^2$, або (оскільки $u, v\in N$) $u>v$. Покажемо тепер, що числа u і v взаємно прості і мають різну парність. Якщо $d=НСД(u, v)\neq 1$, то $a=(u^2-v^2)\vdots d$, $b=(2uv)\vdots d$, $c=(u^2+v^2)\vdots d$, тобто $НСД(a,b,c)\neq 1$, що суперечить умові. Якщо ж u,v мають однакову парність, то $(u-v)\vdots 2$, звідки $a=((u-v)(u+v))\vdots 2$ – суперечність з умовою. Теорему доведено.

Доведемо обернену теорему.

Теорема 3.8. Нехай u, v – взаємно прості натуральні числа різної парності, причому $u>v$. Тоді числа $a=u^2-v^2$, $b=2uv$, $c=u^2+v^2$ є примітивним розв'язком рівняння Піфагора, причому a – непарне число.

Доведення. Перевіримо спочатку справедливість рівності $a^2+b^2=c^2$. Дійсно:

$$a^2+b^2=\left(u^2-v^2\right)^2+\left(2uv\right)^2=\left(u^2+v^2\right)^2.$$

Непарність числа a випливає з того, що $a=(u-v)(u+v)$, а обидва числа $u-v$ і $u+v$ непарні (оскільки u, v за умовою мають різну парність). Залишилося показати, що трійка (a,b,c) є примітивною (тобто $НСД(a,b,c)=1$). Припустимо, a, b, c мають спільний простий дільник p. Відмітимо, що $p\neq 2$ (адже a – непарне); отже, u або v ділиться на p, оскільки $b=(2uv)\vdots p$ і p – просте. Покладемо для визначеності, що $u\vdots p$; але тоді і $v^2=(u^2-a)\vdots p$, звідки $v\vdots p$. Отриманий результат суперечить взаємній простоті чисел u, v. Аналогічно можна розглянути випадок, коли $v\vdots p$. Теорему доведено.

Теореми 3.7 і 3.8 говорять лише про примітивні розв'язки рівняння Піфагора. Проте на підставі цих теорем можна зробити остаточний висновок про загальний вигляд розв'язку рівняння Піфагора.

Теорема 3.9. Множина натуральних розв'язків рівняння Піфагора задається формулами:

$$a=k\cdot\left(u^2-v^2\right),\ b=2kuv,\ c=k\cdot\left(u^2+v^2\right)$$

та $a=2kuv,\ b=k\cdot\left(u^2-v^2\right),\ c=k\cdot\left(u^2+v^2\right)$

де k – довільне натуральне число; u, v – довільні взаємно прості натуральні числа різної парності такі, що $u>v$.

Доведення теореми безпосередньо випливає з теорем 3.7 і 3.8 і того, що всі розв'язки рівняння Піфагора випливають з примітивних трійок множенням a, b, c на одне і те ж натуральне число.

Відзначимо, що при $k=1$ перша серія розв'язків описує випадок, коли a є непарним числом, b – парним. Друга серія розв'язків відповідає випадку, коли, навпаки, a – парне, b – непарне. При $k\neq 1$ обидва числа a і b можуть бути парними, наприклад: $a=6$, $b=8$, $c=10$.

Вправи до § 5.

5.1. Доведіть, що якщо трійка (a,*b*,*c*) складає розв'язок рівняння Піфагора, то

а) хоч би одне з чисел a, *b* кратне 3;

б) хоч би одне з чисел a, *b* кратне 4;

в) хоч би одне з чисел a, *b, c* кратне 5.

Доведення. а) Від супротивного. Нехай числа a, *b* не кратні 3, тоді вони можуть бути записані 3k±1, або $a\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, аналогічно, $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, а тоді $a^2+b^2\equiv 1+1\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, а це неможливо, бо якщо $c\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow c^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, і з $a^2+b^2\equiv c^2$ отримуємо $2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, а це не так; а якщо $c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow c^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, то маємо $2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, що теж не виконується. Отже, обидва числа a, *b* не можуть мати вигляд 3k±1, а це і означає, що хоч би одне з них має вигляд 3k, тобто ділиться на 3.

б) Скористаємося формулами, виведеними у цьому параграфі: $\begin{cases} a=u^2-v^2 \\ b=2uv \end{cases}$. Якщо хоч би одне з чисел *u* чи *v* – парне (чи обидва), тоді *b*⋮4; якщо обидва *u* і *v* – непарні, тоді їхня сума і різниця є числа парні, а тому $a=u^2-v^2=\underbrace{(u-v)}_{\vdots 2}\underbrace{(u+v)}_{\vdots 2}\vdots 4$.

в) Скористаємося формулами: $\begin{cases} a=u^2-v^2 \\ b=2uv \\ c=u^2+v^2 \end{cases}$. Якщо хоч одне з чисел *u* чи *v* ділиться на 5, то *b*⋮5 і доведення закінчено.

Якщо $\begin{cases} u\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,5) \\ v\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2\equiv 1-1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$, тобто $a\vdots 5$;

якщо $\begin{cases} u\equiv \pm 2(\mathrm{mod}\,5) \\ v\equiv \pm 2(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2\equiv 4-4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$, $a\vdots 5$;

якщо $\begin{cases} u\equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,5) \\ v\equiv \pm 2(\mathrm{mod}\,5) \end{cases}\Rightarrow u^2+v^2\equiv 1+4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$, $c\vdots 5$.

5.2. Укажіть довжини всіх сторін якого-небудь цілочисельного прямокутного трикутника, один з катетів якого рівний: а) 7; б) 18.

Розв'язання. а) маємо $u^2 - v^2 = 7 \Leftrightarrow (u-v)(u+v) = 7$, $u > v$. Отримали діофантове рівняння; оскільки $u, v \in N$, то різниця менша за суму, а тому маємо єдину можливість: $\begin{cases} u - v = 1 \\ u + v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$. А тоді сторони: 7; 24; 25.

б) маємо 2 можливості $u^2 - v^2 = 18$ або $2uv = 18$. Перше рівняння не має розв'язків у цілих числах (якщо припустити, що воно має розв'язки у цілих числах і врахувати, що $u - v$; $u + v$ - однакової парності, тоді маємо, що їхній добуток або непарний, або ділиться на 4, у нас добуток - число 18 $\not\vdots$ 4). Отже, $2uv = 18$, $uv = 9$, НСД$(u, v) = 1$, $u > v$. Маємо єдину можливість: $u = 9, v = 1$. А тоді сторони: 80; 18; 82.

5.3. Укажіть довжини сторін всіх цілочисельних прямокутних трикутників, у яких довжина гіпотенузи не перевищує 20.

Розв'язання. Маємо $c = u^2 + v^2 \le 20$, $u > v$. Використаємо метод локалізації і перебору $u > v, u \le 4$. Маємо можливості:

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20

Відповідь: (3;4;5); (8;6;10); (5;12;13); (15;8;17); (12;16;20).

5.4. На дошці написано вираз (n – ціле число):

$$\leftrightarrow n^{12} \leftrightarrow n^{11} \leftrightarrow n^{10} \leftrightarrow n^{9} \leftrightarrow n^{8} \leftrightarrow n^{7} \leftrightarrow n^{6} \leftrightarrow n^{5} \leftrightarrow n^{4} \leftrightarrow n^{3} \leftrightarrow n^{2} \leftrightarrow n.$$

Двоє гравців грають у таку гру: вони по черзі роблять один хід, ставлячи замість одного знака ↔ знак «+» або «-». Гравець, який ходить другим, прагне, щоб отриманий вираз після 12 ходів ділився на 6, а гравець, який розпочинає гру першим, прагне завадити цьому. Вкажіть виграшну стратегію другого гравця.

Розв'язання: Нагадаємо, що $\pm(n^3-n) \vdots 6$, а тоді $\pm(n^4-n^2) = \pm n(n^3-n) \vdots 6$, аналогічно $\pm(n^5-n^3) = \pm n^2(n^3-n) \vdots 6$, $\pm(n^6-n^4) \vdots 6$ і т.д. Згрупувавши умовно елементи по два: n^3 та n; n^4 та n^2; n^5 та n^3; …; n^{11} та n^9; n^{12} та n^{10}, другий гравець ставить елементові умовної пари протилежний знак до того, який знак поставив перший гравець. Таким чином усі доданки будуть ділитися на 6. А тому другий гравець виграє.

5.4. На дошці виписані числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Дозволяється додавати по 1 лише до двох чисел. Чи можуть після деякої кількості додавань всі числа стати рівними.

Відповідь: Ні, це неможливо: (1+2+…+6)+2n=6k, або 3k-n=10,5.

Глава 4. Комплексні числа

Поняття про комплексні числа з'явилося в середині XVI століття у зв'язку зі спробами математиків того часу одержати формулу, яка б виражала корені кубічного рівняння через його коефіцієнти.

У 1545 році була видана книга «Велике мистецтво, або про алгебраїчні перетворення», в якій Дж. Кардано (1501–1576) опублікував формулу для коренів кубічного рівняння, відкриту його сучасниками С. дель Ферро (1465–1526) і Н. Тарталья (1500–1557). Виявилось, що у випадку, коли кубічне рівняння має три дійсних корені, у формулі Кардано з'являться квадратні корені з від'ємного числа. Квадратні корені з від'ємних чисел назвали уявними числами. В «Алгебрі» італійського математика Р. Бомбеллі у 1579 році було показано, що обчислення виразів, які містять квадратні корені з від'ємних чисел, за певними правилами дає можливість отримувати достовірні результати. Уявні числа стали широко використовуватися при розв'язуванні рівнянь.

На межі XVIII та XIX століть К.Ф. Гаусс докладно дослідив уявні числа, назвав їх комплексними числами; він дав їм геометричну інтерпретацію і довів основну теорему алгебри, яка стверджує, що кожний многочлен, степінь якого не менше одиниці, має хоча б один корінь, дійсний або комплексний (1799).

У теперішній час комплексні числа широко використовуються в математиці, фізиці і техніці; їх застосування часто спрощує розв'язування найрізноманітніших задач.

§1. Основні означення і властивості

Розв'яжемо рівняння $z^2+1=0$. Дійсних розв'язків рівняння не має, але якщо записати його розв'язки у вигляді $z_1=\sqrt{-1}$ та $z_2=-\sqrt{-1}$, то, ввівши позначення $i=\sqrt{-1}$ (звідси очевидно, що $i^2=-1$), матимемо, що рівняння $z^2+1=0$ у множині комплексних чисел має розв'язки $z_1=i,\ z_2=-i$. Розв'яжемо інше рівняння $z^2-2z+2=0$. З формулою коренів маємо, що $z_1=1+i=1+1\cdot i,\ z_2=1-i=1-1\cdot i$. Отримані комплексні числа зручно записувати парами: $z_1:(1;\,1), z_2:(1;\,-1)$. Записавши розв'язки рівняння $z^2+1=0$ у вигляді $z_1=0+1\cdot i,\ z_2=0-1\cdot i$, їх можна представити парами так: $z_1:(0;\,1),\ z_2:(0;\,-1)$.

<u>Означення 4.1.</u> *Комплексним числом* називається впорядкована пара дійсних чисел $(x;\ y)$. *Множина комплексних чисел* позначається через C.

<u>Означення 4.2.</u> Два комплексних числа $(x_1;y_1)$ та $(x_2;y_2)$ називаються *рівними*, якщо $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

<u>Означення 4.3.</u> *Сумою комплексних чисел* $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$ називається комплексне число $(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$.

<u>Означення 4.4.</u> *Добутком комплексних чисел* $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$ називається комплексне число $(x_1x_2-y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1)$.

Операції суми та добутку комплексних чисел мають такі властивості, які легко перевірити, використовуючи тільки означення.

І. Властивості суми.

1. Комутативність: $z_1+z_2=z_2+z_1$.
2. Асоціативність: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

ІІ. Властивості добутку.

3. Комутативність: $z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1$.
4. Асоціативність: $(z_1 \cdot z_2)\, z_3=z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

ІІІ. Властивість дистрибутивності: $(z_1+z_2)\, z_3=z_1\, z_3+z_2\, z_3$.

Доведення наведених властивостей залишаємо читачеві для самостійного виконання.

Між комплексними числами виду $(x;0)$ і множиною дійсних чисел $\{x|x\in R\}$ є взаємно однозначна відповідність, а саме: двом різним комплексним числам $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ ставляться у відповідність два різних дійсних числа x_1, x_2. Сумі комплексних чисел $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ відповідає сума дійсних чисел x_1, x_2, і навпаки; добутку комплексних чисел $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ – добуток відповідних дійсних чисел, і навпаки.

Алгебраїчною формою запису комплексного числа $z=(x;y)$ називається запис виду $z=x+iy$, де i – формальний символ, який називається уявною одиницею.

Примітка. Якщо x або y дорівнює 0, то відповідний доданок прийнято опускати, наприклад: $5+0 \cdot i=5$, $0-4i=-4i$, $0+0i=0$.

Додавання і множення комплексних чисел, які записані в алгебраїчній формі, здійснюється за звичайними правилами алгебри з урахуванням рівності $i^2=-1$. Це випливає з наведених вище властивостей і означення множення комплексних чисел: дійсно, нехай $z_1=(x_1;y_1)=x_1+iy_1$, $z_2=(x_2;y_2)=x_2+iy_2$. Тоді за означенням

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

З іншого боку,

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1 \cdot iy_2+x_2 \cdot iy_1+(iy_1)(iy_2)=$$
$$=(x_1x_2+i^2y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Ми бачимо, що для того, щоб отримати результат, який відповідає означенню, необхідно і достатньо покласти $i^2=-1$.

Визначимо тепер різницю і частку комплексних чисел.

<u>Означення 4.5.</u> *Різницею комплексних чисел* z_1 і z_2 називається комплексне число z, для якого виконується рівність $z+z_2=z_1$.

Різниця чисел z_1 і z_2 позначається через z_1-z_2. Можна довести, що для будь-яких двох комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ їх різниця завжди існує і визначається єдиним способом за формулою

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Таким чином, і віднімання комплексних чисел здійснюється за звичайними правилами алгебри. Проілюструємо виконання дій з комплексними числами на прикладі.

<u>Приклад 4.1.</u> Обчисліть: $(2+6i)-(3-5i)\cdot(-1+2i)$.

Розв'язання:

$$(2+6i)-(3-5i)\cdot(-1+2i) = 2+6i-(-3+6i+5i+10) = 2+6i-(7+11i) = -5-5i.$$

<u>**Означення 4.6.**</u> Комплексні числа $z = x+iy$ і $\bar{z} = x-iy$ називаються *комплексно спряженими*.

<u>Приклад 4.2.</u> Доведіть, що спряжене до добутку дорівнює добутку спряжених $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ для довільних комплексних чисел z_1 і z_2.

Розв'язання: Запишемо дані числа в алгебраїчній формі: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\cdot(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Далі:

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)\cdot(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\cdot(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1 \cdot z_2},$$

що і потрібно було довести.

<u>**Означення 4.7.**</u> *Модулем*, або *абсолютною величиною* комплексного числа $z=x+iy$ називається дійсне число $\sqrt{x^2+y^2}$, яке позначається $|z|$.

Відмітимо, що:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

<u>**Означення 4.8.**</u> *Часткою комплексних чисел* z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, називається комплексне число z, для якого виконується рівність $z \cdot z_2 = z_1$.

Частка чисел z_1 і z_2 позначається через $z_1 : z_2$ або $\frac{z_1}{z_2}$. Можна довести, що для будь-яких двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ їх частка завжди існує і визначається єдиним способом за формулою

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примітка. Відмітимо, що на практиці ділення комплексних чисел краще виконувати не за допомогою безпосереднього використання наведеної формули, а використовуючи рівність

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$, з якої вона й випливає. Пояснимо цей спосіб на прикладі.

Приклад 4.3. Обчисліть: $\frac{3-i}{1-2i}$

Розв'язання: $\frac{3-i}{1-2i}=\frac{(3-i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}=\frac{3+6i-i+2}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$.

З означення модуля комплексного числа випливає ланцюг рівностей

$$|z\cdot\omega|^2=(z\cdot\omega)\cdot\overline{(z\cdot\omega)}=(z\cdot\omega)\cdot(\overline{z}\cdot\overline{\omega})=(z\cdot\overline{z})\cdot(\omega\cdot\overline{\omega})=|z|^2\cdot|\omega|^2,$$

з якого випливає формула $|z\cdot\omega|=|z|\cdot|\omega|$ Зокрема, при $z_2\neq 0$ маємо рівність: $|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|$, звідки: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Означення 4.9. *Дійсною частиною* комплексного числа $z=x+iy$ називається дійсне число x, яке позначається $\operatorname{Re} z$ (від латинського «realis» – «дійсний»).

Означення 4.10. *Уявною частиною* комплексного числа $z=x+iy$ називається дійсне число y, яке позначається $\operatorname{Im} z$ (від латинського «imaginarius» – «уявний»).

Наприклад, $\operatorname{Re}(5-3i)=5,\ \operatorname{Im}(5-3i)=-3$.

Використовуючи операцію комплексного спряження, можна алгебраїчно виразити дійсну і уявну частини комплексного числа, а саме: $\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

(ці формули випливають з очевидних рівностей $z+\overline{z}=2\cdot\operatorname{Re} z,\ z-\overline{z}=2i\cdot\operatorname{Im} z$).

Означення 4.11. Комплексне число вигляду iy, де $y\neq 0$, називається *чисто уявним*.

Приклад 4.4. Знайдіть всі значення параметра $a\in R$, при яких число $(a+i)^2-3-4i$ є чисто уявним.

Розв'язання. Оскільки:

$$(a+i)^2-3-4i=a^2+2ai-1-3-4i=(a^2-4)+i\cdot(2a-4),$$

то чисто уявним це число буде при:

$$\begin{cases}a^2-4=0\\2a-4\neq 0\end{cases}, \text{ або } a=-2.$$

Вправи до § 1.

1.1. Обчисліть:

а) $(40-2i)+(1-3i)-(15+7i)-(23-6i)$; б) $(1+i)\cdot(4-i)\cdot(-3+7i)+(3-2i)\cdot(i^3-4)$;

в) $\dfrac{17-i}{1-3i}$; г) $\dfrac{-13+4i}{6+i}-\left(\dfrac{1+3i}{1+i}\right)^2$; д) $\dfrac{3(1+2i)^3-5(2+3i)^2}{(1-2i)^2-(3+i)^3+(7+2i)}$.

а) *Вказівка*: розкрийте дужки, зведіть подібні.

Відповідь: 3-6i.

б) *Розв'язання*: розкриємо дужки, врахуємо, що i^2=-1; i^3=-i; i^4=1.

1) (1+i)(4-i)=4+4i-i-i^2=4+4i-i+1=5+3i;

2) (5+3i)(-3+7i)= -15-9i+35i+21i^2= -15-9i+35i-21= -36+26i;

3) (3-2i)(i^3-4)=3i^3-2i^4-12+8i= -3i-2-12+8i= -14+5i;

4) (-36+26i)+(-14+5i)= -50+31i.

Відповідь: -50+31i.

в) *Розв'язання*: домножимо чисельник і знаменник на спряжене до знаменника:

$$\frac{17-i}{1-3i}=\frac{(17-i)\cdot(1+3i)}{(1-3i)\cdot(1+3i)}=\frac{17-i+51i-3i^2}{1^2-(3i)^2}=\frac{20+50i}{1+9}=\frac{20+50i}{10}=2+5i\,.$$

Відповідь: 2+5i.

д) *Вказівка*: розкрийте дужки, зведіть подібні, скоротіть дріб та домножте чисельник і знаменник на спряжене до знаменника (1-2i), порівняйте результати проміжних дій:

(1+2i)^3= -11-2i; (2+3i)^2= -5+12i; 3·(1+2i)^3-5·(2+3i)^2= -8-66i;

(1-2i)^2= -3-4i; (3+i)^3=18+26i; (1-2i)^2-(3+i)^3+(7+2i)= -14-28i=-14(1+2i).

Відповідь: $2+\dfrac{5}{7}i.$

1.2. Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексних чисел: а) $\dfrac{5+40i}{3+4i}$; б) $\dfrac{4+i}{8-15i}$; в) $\dfrac{2+i}{11-2i}$; г) $\dfrac{3-4i}{24-7i}$.

Вказівка: домножте чисельник і знаменник на спряжене до знаменника, запишіть отримане число у вигляді x+yi.

Відповідь: а) Re z=7; Im z=4; б) Re z=$\dfrac{1}{17}$; Im z=$\dfrac{4}{17}$;

в) Re z=$\dfrac{4}{25}$; Im z=$\dfrac{3}{25}$; г) Re z=$\dfrac{4}{25}$; Im z=$-\dfrac{3}{25}$.

1.3. Знайдіть усі комплексні числа z такі, що Re z+Im z=|z|.

Розв'язання: нехай $z=x+yi$, тоді $\operatorname{Re} z=x; \operatorname{Im} z=y;$; $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, причому $x,y\in R$. З умови маємо $x+y=\sqrt{x^2+y^2}$. Розв'язуючи рівняння, отримаємо $x+y\geq 0; xy=0$, маємо: $x=0;\ y\geq 0$ або $y=0;\ x\geq 0$

- дві координатні півпрямі першої чверті.

Відповідь: $0+yi;\ y\ge 0$ та $x+0i;\ x\ge 0$.

1.4. Використовуючи алгебраїчну форму комплексного числа, доведіть твердження про комплексно спряжені числа:

а) $z=\overline{(\overline{z})}$; б) $|z|=|\overline{z}|$; в) $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in R$;

г) $z=-\overline{z}\Leftrightarrow iz\in R$; д) $\overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; е) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Запишемо число в алгебраїчній формі: $z=x+iy$. Тоді: $\overline{z}=x-iy$.

Розв'язання: (див.прикл.4.2). а) Потрібно довести, що спряжене до спряженого дорівнює самому числу: $\overline{(\overline{z})}=\overline{x-iy}=x+iy=z$.

б) Треба довести, що модулі числа і спряженого до нього числа однакові. Обчислимо $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; $|\overline{z}|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$.

в) Твердження містить дві теореми: пряму і обернену.
Якщо $z=\overline{z}$, то $x+iy=x-iy\Rightarrow 2y\cdot i=0\Rightarrow y=0\Rightarrow z=x+0i=x,\ x\in R\Rightarrow z\in R$.
Якщо $z\in R$, то $\operatorname{Im}z=0,\ y=0$, отже $z=x+i\cdot 0$, спряжене до цього числа $\overline{z}=x-i\cdot 0$, а тому $z=\overline{z}$.

Усі інші твердження доведіть самостійно.

1.5. Доведіть тотожність: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

Доведення. Запишемо числа в алгебраїчній формі: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тоді: $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i\cdot(y_1+y_2)$; $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i\cdot(y_1-y_2)$, обчислимо квадрати модулів усіх чисел, які входять у вираз: $|z_1|^2=x_1^2+y_1^2$; $|z_2|^2=x_2^2+y_2^2$; $|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$;
$|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

Маємо: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$
$=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)+\left(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2\right)+\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)+\left(y_1^2-2y_1y_2+y_2^2\right)=$
$=2\left(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\right)=2\left(\left(x_1^2+y_1^2\right)+\left(x_2^2+y_2^2\right)\right)=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

1.6. Розв'яжіть системи:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i,\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i,\end{cases}$ б) $\begin{cases}z_1+2z_2=1+i,\\3z_1+iz_2=2-3i;\end{cases}$.

а) *Розв'язання*: Виключимо одну змінну, наприклад z_1:

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i, & |\cdot(1-i)\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i, & |\cdot(1+i)\end{cases}\ \begin{cases}2z_1-2i\,z_2=2, & |:2\\2z_1+2iz_2=-2+4i, & |:2\end{cases}\ \begin{cases}z_1-i\,z_2=1,\\z_1+iz_2=-1+2i,\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z_1 = 2i, \\ 2i\,z_2 = -2+2i, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = i, \\ z_2 = 1+i. \end{cases}$$

Під час розв'язання ми використали: $(1+i)\cdot(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$; $(1\pm i)^2=1^2\pm 2i+i^2=1\pm 2i-1=\pm 2i$; $(1+3i)\cdot(1+i)=1^2+3i+i+3i^2=-2+4i$; $\dfrac{-2+2i}{2i}=\dfrac{-1+i}{i}=\dfrac{(-1+i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\dfrac{i-i^2}{-i^2}=\dfrac{i-(-1)}{-(-1)}=1+i$.

Перевірку правильності обчислень пропонуємо провести самостійно.

Відповідь: $z_1=i,\ z_2=1+i$.

б) *Відповідь*: $z_1=1-i,\ z_2=i$.

1.7. Знайдіть усі комплексні числа z такі, що $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right|=\dfrac{5}{3}$ і $\left|\dfrac{z-8}{z-4}\right|=1$.

Вказівка: Врахуйте, що $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ та $z-12=(x+iy)-12=(x-12)+iy$, а тоді його модуль $|z-12|=\sqrt{(x-12)^2+y^2}$; для числа $z-8i=x+i(y-8)$, модуль $|z-8i|=\sqrt{x^2+(y-8)^2}$. Запишіть умову і розв'яжіть систему двох рівнянь відносно дійсних змінних x, y.

Відповідь: $z_1=6+8i,\ z_2=6+17i$.

§2. Зображення комплексних чисел на координатній площині

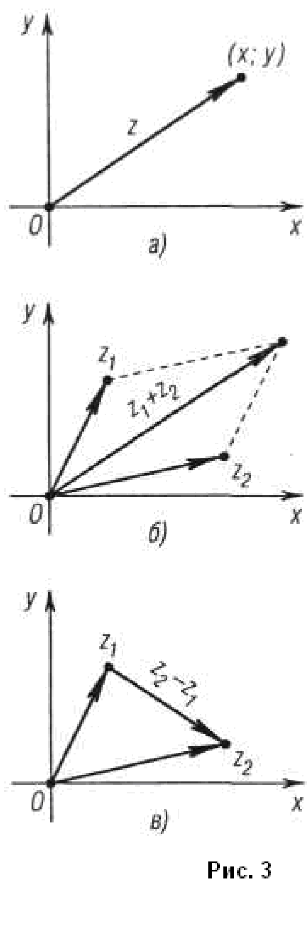


Рис. 3

Розглянемо комплексне число $z=x+iy$. На декартовій координатній площині Oxy відмітимо точку з координатами $(x;y)$, радіус-вектор якої також позначимо через z (рис. 3 (а)). Довжина цього радіус-вектора, очевидно, дорівнює $\sqrt{x^2+y^2}=z$.

Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *комплексною площиною*; вісь Ox називається *дійсною віссю*, а вісь Oy – *уявною віссю*.

Примітка. Оскільки має місце взаємно однозначна відповідність між комплексними числами і точками комплексної площини, то будемо інколи ототожнювати точки і числа там, де це не приведе до непорозумінь. Наприклад, замість «точки, які відповідають числам z_1, z_2 і z_3, лежать на одній прямій», будемо просто писати «точки z_1, z_2 і z_3 лежать на одній прямій» тощо.

З означення суми і різниці випливає, що комплексні числа додаються і віднімаються, як вектори. Векторна інтерпретація суми і різниці комплексних чисел показана на рис. 3(б), 3(в). Так, геометричний зміст суми комплексних чисел z_1 і z_2 – це діагональ паралелограма, побудованого на векторах $z_1=(x_1;y_1)$ і $z_2=(x_2;y_2)$.

Розглянемо трикутник, вершини якого відповідають числам 0, z_1 і z_1+z_2, а сторони, таким чином, рівні $|z_1|$, $|z_2|$ і $|z_1+z_2|$. Застосувавши до нього нерівність трикутника, відому з курсу геометрії (або наслідок з нього, який враховує випадок, коли три точки лежать на одній прямій), отримаємо нерівність трикутника для комплексних чисел:

$$|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|\,.$$

Цю нерівність можна довести і повністю алгебраїчним методом. Наведемо його.

Доведення. Якщо $z_2=0$, то справедливість нерівності очевидна. Розглянемо далі випадок, коли $z_2\ne 0$. За властивістю модуля виконуються рівності:

$$|z_1+1|^2=(z_1+1)\cdot(\overline{z_1}+1)=|z_1|^2+z_1+\overline{z_1}+1.$$

Якщо $z_1=x_1+iy_1$ то:

$$z_1+\overline{z_1}=2x_1\le 2\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2\cdot|z_1| \text{ і } |z_1+1|^2\le|z_1|^2+2\cdot|z_1|+1=(|z_1|+1)^2,$$

або $|z_1+1|\le|z_1|+1$.

Розглянемо модуль суми:

$$|z_1+z_2|=\left|z_2\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}+1\right)\right|=|z_2|\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|\le|z_2|\cdot\left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+1\right)=|z_1|+|z_2|,$$

що і необхідно було довести. Відмітимо, що рівність може досягатися лише у випадку, коли точки z_1, z_2 і 0 лежать на одній прямій.

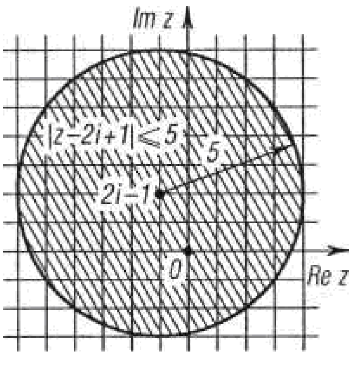


Рис. 4

Наслідок. Оскільки $z_1=-z_2+(z_1+z_2)$ і $|z_2|=|-z_2|$, то за нерівністю трикутника маємо наступні нерівності:

$$|z_1|\le|-z_2|+|z_1+z_2|=|z_2|+|z_1+z_2|\Leftrightarrow|z_1+z_2|\ge|z_1|-|z_2|.$$

Аналогічно, $|z_1+z_2|\ge|z_2|-|z_1|$; отже $|z_1+z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$. Покажіть самостійно, що і $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$.

<u>Приклад 4.5.</u> Зобразити на комплексній

площині множину точок z, які задані умовою

$$|z-2i+1|\leq 5.$$

Розв'язання. Умова задачі рівносильна такій вимозі: знайти всі точки z, віддалені від точки $2i-1$ на відстані не більше 5. Шуканою множиною є круг радіуса 5 з центром в точці $2i-1$ (рис. 4).

Тригонометричною формою запису комплексного числа $z \neq 0$ називається запис виду:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

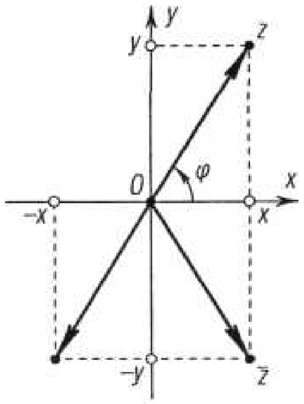


Рис. 5

Кут φ, який визначається рівностями $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$, або $x = |z| \cdot \cos\varphi,\ y = |z| \cdot \sin\varphi$ (рис. 5), називається аргументом числа z. Зазначимо, що такий кут завжди існує, оскільки:

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Аргумент комплексного числа 0 не визначений.

Усі можливі значення аргументу комплексного числа $z \neq 0$ визначаються за формулою $\varphi' = \varphi + 2\pi k$, де $k \in Z$. Будь-які два значення аргументу відрізняються на ціле кратне 2π; інакше кажучи, частка $\dfrac{\varphi' - \varphi}{2\pi}$ є ціле число. У тому випадку, коли необхідно отримати однозначно визначене значення аргументу, беруть його головне значення, яке лежить між числами $-\pi$ і π, яке позначають через $\arg(z)$, або $\arg z$ (де $-\pi < \arg z \leq \pi$). Довільне (не обов'язково головне) значення аргументу позначається через $Arg(z)$ або $Argz$.

Для обчислення $\arg z$, де $z = x + iy$, використовують співвідношення:

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} \qquad \text{при } x > 0;$$

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi \qquad \text{при } x < 0,\ y \geq 0;$$

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} - \pi \qquad \text{при } x < 0,\ y < 0;$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \qquad \text{при } x = 0,\ y > 0;$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{при } x = 0,\ y < 0.$$

Відмітимо, що $z_1 = z_2$ тоді і тільки тоді, коли $|z_1| = |z_2|$, $Argz_1 - Argz_2 = 2\pi k$, де $k \in Z$ $(z_1, z_2 \neq 0)$. Якщо ж формулювати критерій рівності, використовуючи головне значення аргументу, то він запишеться так:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \arg z_1 = \arg z_2. \end{cases}$$

Наведемо приклади запису комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0),$$
$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi);$$
$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$$
$$-i = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right);$$
$$\overline{z} = |z| \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi) = |z| \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

З останнього прикладу випливає, що аргументи комплексно спряжених чисел відрізняються знаком (за виключенням випадку $\arg z = \pi,$ коли і $\arg \overline{z} = \pi$).

Формули множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі, мають вигляд:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{|z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

(переконатися в справедливості наведених рівностей ми пропонуємо читачам самостійно, здійснивши відповідні тригонометричні перетворення).

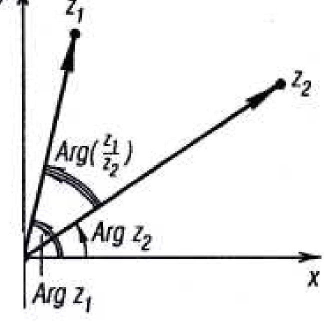


Рис. 6

Таким чином, *при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються; при діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.*

З рівності $Arg \frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2$ випливає, що кут між векторами z_1 і z_2, який відлічується від z_2 до z_1 проти годинникової стрілки, дорівнює $Arg \frac{z_1}{z_2}$ (рис. 6).

Приклад 4.6. Запишіть у тригонометричній формі число $z = i - \sqrt{3}$.

Розв'язання. Запишемо довільне число $z \neq 0$ у тригонометричному вигляді, використавши формулу:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Для числа $z = i - \sqrt{3}$ маємо: $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Тоді $z = i - \sqrt{3} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Приклад 4.7. Запишіть у тригонометричній формі число:

$$\frac{i-1}{2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Розв'язання. Запишемо довільне число $z \neq 0$ у тригонометричному вигляді, використавши формулу:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Для числа шуканого числа проведемо певні спрощення:

$$\frac{i-1}{2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{i-1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{(i-1)\cdot\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Тоді для числа $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ маємо: $|z| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$.

Отже, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді: $\frac{i-1}{2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Примітка. Цей приклад можна розв'язати інакше, використавши формулу ділення двох комплексних чисел, поклавши, що $i - 1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити попередній запис і розв'язати вправу вказаним способом.

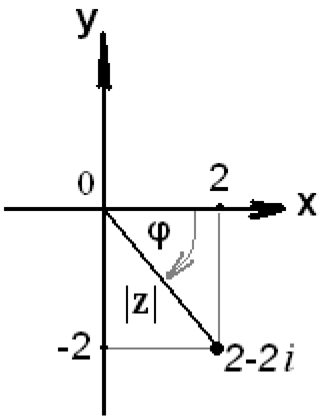
Вправи до § 2.

2.1. Яка геометрична інтепретація тотожності із задачі 1.5: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$?

Вказівка: Візьміть 2 довільних комплексних числа, побудуйте їхню суму і різницю. Згадайте, чим для паралелограма є сума і різниця векторів-сторін.

Відповідь: Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

2.2. Запишіть у тригонометричній формі числа: а) 2 – 2і; б) $\sin\frac{\pi}{9} - i\cos\frac{\pi}{9}$.



а) *Розв'язання.* Обчислимо модуль і аргумент комплексного числа:

$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, звідки $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. А тоді $z = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Відповідь: $2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

б) *Розв'язання 1*: Оскільки $\sin\frac{\pi}{9} = \cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{2}\right)$; $-\cos\frac{\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{2}\right)$, то отримаємо тригонометричну форму комплексного числа: $\sin\frac{\pi}{9} - i\cos\frac{\pi}{9} = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{18}\right)\right)$.

Розв'язання 2: Домножимо і поділимо комплексне число на i, отримаємо $\frac{\left(\sin\frac{\pi}{9} - i\cos\frac{\pi}{9}\right)\cdot i}{i} = \frac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{i}$; оскільки $i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (див. §2 глави 4), то виконавши ділення комплексних чисел, заданих у тригонометричні формі, отримаємо $1\cdot\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{18}\right)\right)$.

Відповідь: $1\cdot\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{18}\right)\right)$.

2.3. Виконайте дії з числами, попередньо записавши їх у тригонометричній формі:

а) $\frac{-\sqrt{3} - i}{6 - 2\sqrt{3}i}$; б) $\frac{3i}{1-i}$; в) $\frac{(1-i)\cdot\left(\sqrt{3} - i\right)}{(1+i)\cdot\left(\sqrt{3} + i\right)}$.

а) *Розв'язання.* Обчислимо модулі і аргументи комплексних чисел $\left(-\sqrt{3} - i\right)$; $\left(6 - 2\sqrt{3}i\right)$:

1) $|z_1|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$, $\cos\varphi_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_1=-\dfrac{1}{2}$, звідки $\varphi_1=-\dfrac{5\pi}{6}$, а тоді $-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$;

2) $|z_2|=\sqrt{6^2+(-2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$, $\cos\varphi_2=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$, звідки $\varphi_2=-\dfrac{\pi}{6}$, а тоді $6-2\sqrt{3}\,i=4\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, а тоді маємо:

$$\frac{-\sqrt{3}-i}{6-2\sqrt{3}\,i}=\frac{2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{4\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{1}{4}i=-\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}i\ .$$

Відповідь: $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{1}{4}i$.

б) *Вказівка.* Запишіть у тригонометричній формі чисельник і знаменник. Перевірте проміжні результати: $3i=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, а тоді $\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Відповідь: $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

в) *Вказівка.* Запишіть у тригонометричній формі чисельник і знаменник. Виконайте множення і ділення, порівняйте результати: чисельник $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, звідки $(1-i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$; відповідно, знаменник: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, а тоді отримуємо $(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Кінцевий результат $\dfrac{(1-i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)}{(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)}=\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i.$

Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

2.4. Знайдіть: arg $\frac{5-i}{2-3i}$.

Вказівка. Спростіть вираз, записавши число у алгебраїчній формі $1+i$, та обчисліть аргумент цього числа.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

2.5. Відомо, що tg arg z_1= 2, tg arg z_2=3. Визначте arg ($z_1 \cdot z_2$).

Розв'язання. Запишемо аргументи комплексних чисел z_1, z_2: arg z_1=arctg 2, arg z_2=arctg 3. Оскільки при множенні комплексних чисел їхні аргументи додаються, то аргумент добутку $z_1 \cdot z_2$ дорівнює сумі аргументів: φ=arg $z_1 \cdot z_2$=arctg 2+arctg 3. Проведемо спрощення, для чого обчислимо tg φ= tg(arctg 2+arctg 3), скористаємося формулою тангенса суми, отримаємо: tg φ=$\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$, а тоді $\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Відповідь: arg ($z_1 \cdot z_2$)=$-\frac{\pi}{4}$ або arg ($z_1 \cdot z_2$)=$\frac{3\pi}{4}$.

2.6. Проілюструйте на прикладі те, що вправа 2.5 має два розв'язки.

Вказівка. Розгляньте, наприклад, два числа 1+2i та 1+3i, покажіть, що вони задовольняють умову вправи 2.5; обчисліть їхній добуток та знайдіть аргумент добутку; та розгляньте два числа, наприклад, -1-2i та 1+3i. У першому випадку arg ($z_1 \cdot z_2$)=$\frac{3\pi}{4}$, у другому: arg ($z_1 \cdot z_2$)=$-\frac{\pi}{4}$.

2.7. Обчисліть cos 15° і sin 15°, використовуючи тригонометричну форму запису комплексного числа.

Розв'язання. Використаємо той факт, що при діленні комплексних чисел їхні модулі діляться, а аргументи – віднімаються, та що 15°=45°-30°. Тоді $\cos 15^0 + i\sin 15^0 = \frac{\cos 45^0 + i\sin 45^0}{\cos 30^0 + i\sin 30^0}$, відзначимо, що модулі усіх чисел рівні одиниці. А тоді

$$\cos 15^0 + i\sin 15^0 = \frac{\cos 45^0 + i\sin 45^0}{\cos 30^0 + i\sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)\cdot\left(\sqrt{3} - i\right)}{\left(\sqrt{3} + i\right)\cdot\left(\sqrt{3} - i\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{6}i - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i^2}{3 - i^2} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cdot i}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i\,.$$

Порівнюючи ліву і праву частини, отримуємо відповідь.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ та $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2.8. Не використовуючи результату вправи 2.7, обчисліть cos 75° і sin 75°, застосовуючи тригонометричну форму запису комплексного числа.

Вказівка. 75°=45°+30°, див. ідею вправи 2.7.

Відповідь: $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ та $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

2.9. Визначте кут між радіус-векторами комплексних чисел $a + bi$ і $-b + ai$, де a, b – додатні дійсні числа.

Вказівка. Доведіть, що радіус-вектори утворюють кут 90°, скориставшись, наприклад, умовою $\angle(z_1;z_2)=90^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2 = -1$.

Відповідь: 90°.

2.10. Зобразити на координатній площині множину точок z, які задані умовами:

а) $|z| = 3$; б) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$; в) $\operatorname{Re}(2z+1) = 3$;

г) $|z| = |z - 4i|$; д) $\arg z = 3\pi/4$; е) $\arg \overline{z} = \pi/4$;

є) $\left|\frac{z-2i}{z+4}\right| \ge 1$; ж) $\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2$; з) $|z-2| = \operatorname{Re} z + 2$.

Розв'язання. а) Використаємо означення модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, тоді отримаємо $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, звідки $x^2 + y^2 = 9$ – рівняння кола з центром у точці O(0;0) радіуса R=3, див.рис. а.

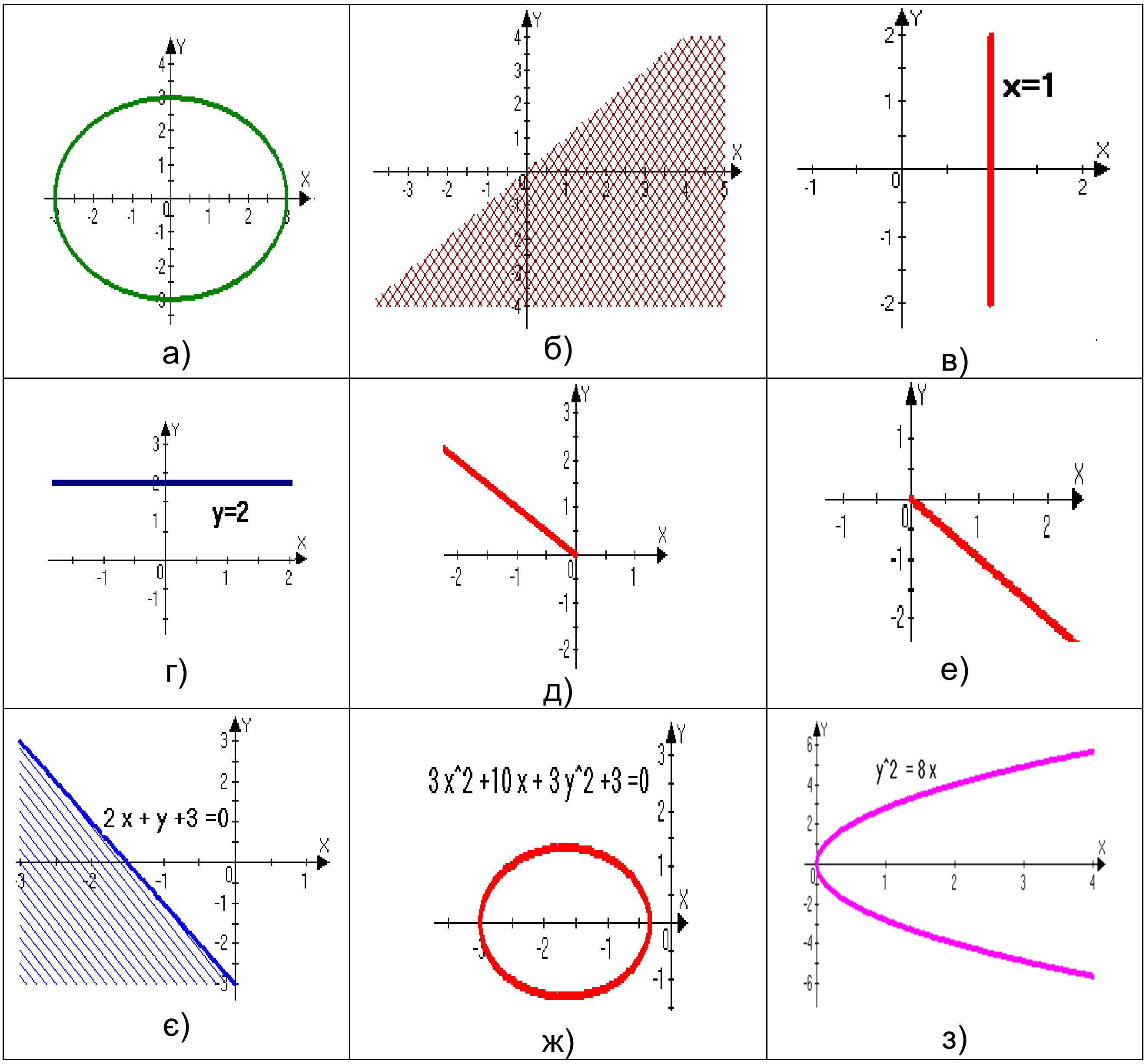
б) Комплексне число $z = x + yi$; дійсна і уявна частини $\operatorname{Re} z = x$; $\operatorname{Im} z = y$. З умови маємо $x > y$, а ця умова визначає півплощину, що лежить вправо і вниз від прямої x=y, без самої межі, див.рис. б.

в) Комплексне число $z = x + yi$; $2z + 1 = (2x+1) + 2yi$; а тоді дійсна частина $\operatorname{Re}(2z+1) = 2x + 1$. З умови маємо $2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$, маємо пряму, паралельну до вісі ординат, див.рис. в.

г) Комплексне число $z = x + yi$; $z - 4i = x + (y-4)i$. Модулі, відповідно: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|z + 4i| = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$. Умова запишеться у вигляді $x^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow y = 2$; маємо пряму, паралельну до вісі абсцис, див.рис. г.

д) Для усіх комплексних чисел, що лежать на промені, який утворює кут $3\pi/4$ з додатним напрямом вісі абсцис, аргумент дорівнює $3\pi/4$ (крім точки O(0;0)).

е) Нехай комплексне число $z = x + yi$, тоді спряжене до нього $\bar{z} = x - yi$. Оскільки аргумент спряженого числа $\arg \bar{z} = \pi/4$, то $\bar{z}$ лежить у першій чверті, координати (x;-y) є додатними, причому вони рівні, а тоді x>0; y<0 (четверта чверть, x=-y), кут $\arg z = -\pi/4$.



є) Запишемо числа та їхні модулі: $z = x + yi$; $z - 2i = x + (y-2)i$; $z + 4 = (x+4) + yi$. Модулі, відповідно: $|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$; $|z+4| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$. Умова $\left|\dfrac{z-2i}{z+4}\right| \geq 1$ запишеться у вигляді: $\dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}} \geq 1$ або $x^2 + y^2 - 4y + 4 - (x^2 + 8x + 16 + y^2) \geq 0$, звідки $2x + y + 3 \leq 0$ – півплощина з межею $2x + y + 3 = 0$, див.рис. є.

ж) Числа $z - 1 = (x-1) + yi$; $z + 1 = (x+1) + yi$. Модулі, відповідно: $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$; $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Умова $\dfrac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 4$ приводить після перетворень до рівняння $3x^2 + 10x + 3y^2 + 3 = 0$ або $\left(x + \dfrac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ – рівняння кола з центром O$\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$, радіуса R=$\dfrac{4}{3}$.

з) Число $z - 2 = (x-2) + yi$, модуль $|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, тоді умова $|z-2| = \operatorname{Re} z + 2$ приводить до $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x + 2$, після перетворень отримуємо $y^2 = 8x$ – рівняння параболи, для якої віссю симетрії є вісь абсцис, див.рис. з.

§3. Формула Муавра

З формул множення і ділення можна вивести загальне правило піднесення комплексних чисел до цілого степеня, яке називається *формулою Муавра* (А. де Муавр (1667–1754) – англійський математик).

Покладемо за означенням $z^0 = 1$ (при $z \neq 0$). При $n \in N$ маємо:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \;\; z \neq 0$$

(це очевидно випливає із формули множення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі).

Поклавши $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, виведемо аналогічну формулу для цілого числа $m = -n < 0 \;(n \in N)$, а саме ($z \neq 0.$):

$$z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} =$$

$$= |z|^{-n} \cdot (\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = |z|^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi),$$

Звідси випливає істинність формули Муавра

$$z^m = |z|^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

для всіх $m \in Z$ $(z \neq 0)$.

<u>Приклад 4.8.</u> Обчисліть $(1-i)^7$.

Розв'язання. Запишемо $1-i$ у тригонометричній формі:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

Тоді,

$$(1-i)^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\left(-7\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-7\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=8\cdot(1+i).$$

<u>Приклад 4.9.</u> Обчисліть $z=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^8\cdot\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^6}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{14}}$.

Розв'язання. Запишемо числа, що знаходяться в основах степенів, у тригонометричній формі:

$$1+i\sqrt{3}=2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$-\sqrt{3}+i=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Тоді маємо:

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^8\cdot\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^6}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{14}}=\frac{2^8\cdot\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)\cdot 2^6\cdot\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right)}{2^{14}\cdot\left(\cos\frac{14\cdot 5\pi}{6}+i\sin\frac{14\cdot 5\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i.$$

Вправи до § 3.

3.1. Обчисліть: $\dfrac{(1+i)^{24}}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{12}}$.

Розв'язання. Обчислимо модулі і аргументи комплексних чисел $(1+i)$; $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$:

1) $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\cos\varphi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, звідки $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$,

а тоді $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, за формулою Муавра:

$$(1+i)^{24}=\left(\sqrt{2}\right)^{24}\left(\cos\left(24\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(24\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{12}(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)=2^{12}(1+i\cdot 0)=2^{12};$$

2) $|z_2|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\cos\varphi_2=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $\varphi_2=-\frac{\pi}{3}$, а тоді $1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, маємо:

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{12}=2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(12\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=2^{12}(\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi))=2^{12}.$$

Отримаємо $\frac{(1+i)^{24}}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{12}}=\frac{2^{12}}{2^{12}}=1.$

Відповідь: 1.

3.2. Обчисліть z^{21}, де z дорівнює: а) 1+i; б) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$; в) $\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$.

а,б) *Вказівка*: див. вправу 3.1.

в) *Розв'язання*. $\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^{21}=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^{21}=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}\right)^{21}=$

$$=\frac{\cos 21\alpha+i\sin 21\alpha}{\cos(-21\alpha)+i\sin(-21\alpha)}=\frac{1+i\,tg21\alpha}{1+i\,tg(-21\alpha)}=\frac{1+i\cdot tg21\alpha}{1-i\cdot tg21\alpha}$$

Відповідь: а) -1024-1024·i; б) -1024-1024·i; в) $\frac{1+i\cdot tg21\alpha}{1-i\cdot tg21\alpha}$.

3.3. Використовуючи формулу Муавра, знайдіть такі комплексні числа z, що $z^2=i$.

Вказівка. Запишіть z у тригонометричній формі, піднесіть до квадрату за допомогою формули Муавра і прирівняйте отриманий вираз до $i=1\cdot\left(cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ та знайдіть можливі значення модуля і аргумента z.

Відповідь: $cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ або $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

3.4. Обчисліть: а) $\left|(1-i)^6+3i\right|$; б) $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^9}{(1-i)^7}$.

Вказівка. а) Запишіть (1-i) у тригонометричній формі, піднесіть до 6-го степеня за допомогою формули Муавра, додайте 3i, порівняйте проміжний результат: комплексне число $11i$, його модуль $|0+11i|=\sqrt{0^2+11^2}=11$.

Відповідь: $\left|(1-i)^6+3i\right|=11$.

б) *Вказівка*. Скористайтеся формулою Муавра, порівняйте проміжні результати: $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9=-2^9$; $(1-i)^7=2^3\cdot(1+i)$.

Відповідь: -32+32·i.

3.5. Знайдіть усі числа z такі, що $\overline{z}=z^3$.

Розв'язання. Нехай $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, тоді $z^3=r^3(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)$, спряжене до z число $\overline{z}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$. За умовою 2 комплексних числа рівні, отже, рівні їхні модулі, а аргументи можуть відрізнятися на число, кратне 2π. Тому маємо: $\begin{cases} r^3=r; \\ 3\alpha=-\alpha+2\pi k, k\in Z \end{cases}$. З першої умови $r_1=0\Leftrightarrow z=0$ або $r_2=1$. Надаючи k цілих значень, отримаємо: $k=0;\ \alpha=0\Rightarrow z=1(\cos 0+i\sin 0)=1$; $k=1;\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow z=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=i$; $k=2;\ \alpha=\pi\Rightarrow z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$; $k=3;\ \alpha=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow z=1\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$; нескладно переконатися, що далі підуть повтори: при $k=4;\ \alpha=2\pi\Rightarrow z=1(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1$.

Перевірку правильності кінцевих результатів пропонуємо провести самостійно.

Вказівка. Дану вправу можна розв'язати, використовуючи алгебраїчний запис комплексного числа, тобто: $z=x+iy$; $\overline{z}=x-iy$; далі $z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)$ та прирівняти 2 числа і розв'язати систему двох рівнянь з 2 невідомими.

Відповідь: таких чисел – п'ять: 0; ±1; ±i.

3.6. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що $(1+i)^n=(1-i)^n$.

Вказівка. Переведіть обидва числа у тригонометричну форму, виконайте дії у тригонометричній формі та встановіть найменше можливе значення кутів, за яких відбувається рівність чисел. Або виконайте усі дії в алгебраїчній формі (складніше).

Відповідь: 4.

3.7. Доведіть , що $\left(\dfrac{1+i\cdot tg\alpha}{1-i\cdot tg\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\cdot tg\, n\alpha}{1-i\cdot tg\, n\alpha}$.

Вказівка. Скористайтеся алгоритмом, запропонованим у вправі 3.2 в).

3.8. Використовуючи формулу Муавра, виразіть через степінь $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ тригонометричні функції кратних кутів:

а) $\sin 3\varphi$ і $\cos 3\varphi$; б) $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$; в) $\sin 4\varphi$ і $\cos 4\varphi$.

а) *Розв'язання*. Нехай $z = 1\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, скористаємося формулою Муавра, тоді $z^3 = 1^3\cdot(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$; з іншого боку

$$z^3 = \cos^3\alpha + 3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot i + 3\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot i^2 + \sin^3\alpha\cdot i^3 =$$

$$= (\cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha) + (3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha)i$$

А тоді $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha;\ \sin 3\alpha = 3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha.$ Можна врахувати: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, тоді після спрощень матимемо:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin 3\alpha = 3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\cdot(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Відповідь: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

б) *Вказівка:* див.пункт а).

Відповідь: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;\ \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

в) *Вказівка:* див.пункт а): $z^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$; порівняйте:

$$z^4 = \cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha\cdot i + 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot i^2 + 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha\cdot i^3 + \sin^4\alpha =$$

$$= (\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) + i\cdot(4\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha - 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha).$$

Відповідь: $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha;$

$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha.$

§4. Добування коренів із комплексних чисел.

Означення 4.12. *Коренем n-го степеня із комплексного числа* ω називається комплексне число z таке, що $z^n = \omega$. Множина усіх коренів n-го степеня з ω позначається через $\sqrt[n]{\omega}$.

Теорема 4.1. Рівняння $z^n = \omega$, де $\omega \in C,\ \omega \neq 0,\ n \in N$, має рівно n різних комплексних коренів.

Доведення. Нехай $\omega = |\omega|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; число z будемо шукати у вигляді $z = |z|\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Перетворимо рівняння $z^n = \omega$, використовуючи формулу Муавра:

$$|z|^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |\omega|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси випливають рівності

$$|z|^n = |\omega|, \qquad n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z,$$

з яких для модуля шуканого кореня отримається певне значення $|z| = \sqrt[n]{|\omega|}$, тоді як його аргумент $\alpha = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in Z$, може приймати різні значення при різних k. При цьому значенням k=0, 1, 2,…,n–1 відповідають різні значення кореня, а при k=n значення кореня співпадає з його значенням при k=0. При k=n+1 отримаємо таке ж значення кореня, що і при k=1 тощо.

Таким чином, число різних значень кореня дорівнює n – це

$$z_k = \sqrt[n]{|\omega|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

де k=0, 1, 2,…, n–1, що і потрібно було довести.

Усі n коренів z_k лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{|\omega|}$ з центром в початку координат; вони ділять коло на n дуг величиною $\dfrac{2\pi}{n}$ кожна і є вершинами вписаного в нього правильного n–кутника.

Приклад 4.10. Розв'язати рівняння $x^4 + 8 = 0$ у множині комплексних чисел.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$x^4 = 8 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi).$$

Його коренями згідно теореми 4.1 будуть такі значення:

$$x = \sqrt[4]{8} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \text{ де } k = 0, 1, 2, 3.$$

Отже:

$$x_1 = \sqrt[4]{8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[4]{2}(1 + i),$$

$$x_2 = \sqrt[4]{8} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[4]{2}(-1 + i),$$

$$x_3 = \sqrt[4]{8} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[4]{2}(-1 - i),$$

$$x_4 = \sqrt[4]{8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[4]{2}(1 - i).$$

Приклад 4.11. Обчисліть корені третього степеня із комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Розв'язання. Знайдемо тригонометричну форму даного числа:

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right).$$

За формулою для коренів із комплексних чисел маємо:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right),$$ де $k = 0, 1, 2$.

Запишемо отримані корені:

$$a_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{9} + i \cdot \sin\frac{\pi}{9} \right),$$

$$a_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{9} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{9} \right),$$

$$a_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{13\pi}{9} + i \cdot \sin\frac{13\pi}{9} \right),$$

Приклад 4.12. Знайдіть $\sqrt{3+4i}$.

Розв'язання 1. Нехай $\omega = 3+4i$. Покладемо $\varphi = \arg\omega$. Очевидно, що $|\omega| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; тоді $\omega = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Відповідно, $z = \sqrt{\omega} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{2} \right)$, де $k = 0, 1$. Запишемо детально:

$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} \right),$$

$$z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right) = -z_1.$$

Знайдемо $\cos\frac{\varphi}{2}$ і $\sin\frac{\varphi}{2}$, використовуючи формулу подвійного кута:

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = \cos\varphi = \frac{3}{5},$$

звідки:

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{5}, \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{5};$$

тоді:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Кут φ лежить у першій четверті (так як $\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}$), а відповідно, і кут $\frac{\varphi}{2}$ також, тому $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$. Отже:

$$z_1=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}+i\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=2+i,\qquad z_2=-z_1=-2-i.$$

Розв'язання 2. Нехай $\sqrt{3+4i}=x+yi$, тоді $3+4i=(x+yi)^2$, звідки $3+4i=(x^2-y^2)+2xyi$, тоді $\begin{cases}x^2-y^2=3\\2xyi=4i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=3\\xy=2\end{cases}\Rightarrow(\pm2;\pm1)\Rightarrow z=\pm2\pm i.$
Отримали той самий результат.

Зауваження. Нескладно показати, що всі значення кореня n–го степеня з комплексного числа z можна отримати множенням одного із значень кореня на всі корені n–го степеня з 1.

Наприклад, $z_k=z_0\cdot\varepsilon_k\ (k=0,1,2,\dots,n-1)$. Так, $\sqrt[3]{1}$ приймає значення $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (перевірте це самостійно); тоді, наприклад, $\sqrt[3]{-8}$ приймає значення $\{-2\varepsilon_0;-2\varepsilon_1;-2\varepsilon_2\}$ або $\{-2;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$.

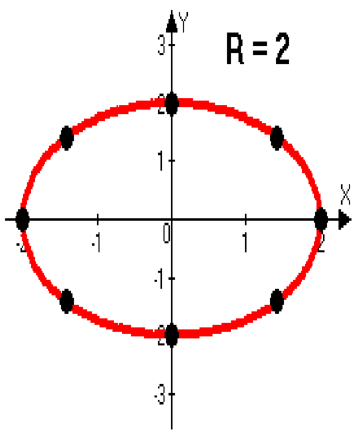
Вправи до § 4.

4.1. Знайдіть усі значення коренів:

а) $\sqrt[4]{-64}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{5+12i}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Відповіді: а) $\{\pm2\pm2i;\ \pm2\mp2i\}$; б) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ -i\right\}$; в) $\{\pm3\pm2i\}$.

г) *Розв'язання.* Запишемо числа у тригонометричній формі $z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $z_2=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Тоді $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$, усі корені можуть бути обчислені:



$$\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\cdot\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{12}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{-\frac{5\pi}{12}+2\pi k}{3}\right),$$ де $k=0,1,2$, звідки при $k=0$: $\varepsilon_0=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{36}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{5\pi}{36}\right)\right)$; при $k=1$: $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{36}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{36}\right)$; при $k=2$:

$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \left(\cos\frac{43\pi}{36} + i \cdot \sin\frac{43\pi}{36} \right)$ – усі значення коренів.

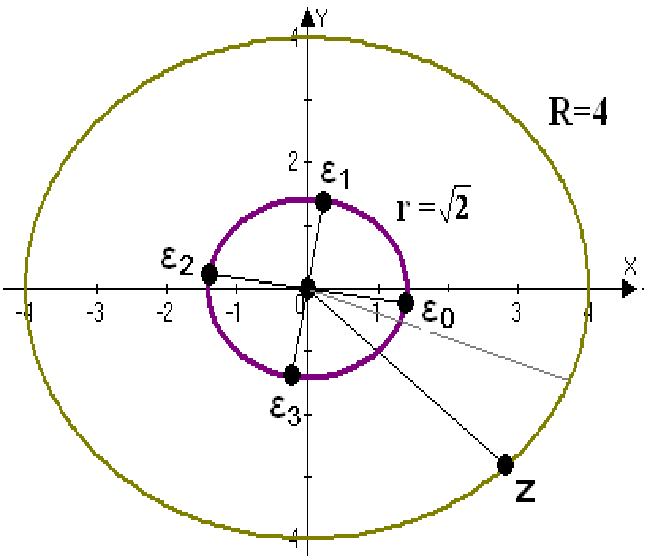
4.2. Покажіть на координатній площині множину усіх значень $\sqrt[8]{256}$.

Вказівка: Запишіть число у вигляді: $z = 256 = 2^8(\cos 0 + i \sin 0)$. Тоді усі корені обчислюються за формулою:
$\sqrt[8]{256} = 2 \cdot \left(\cos\frac{0+2\pi k}{8} + i \cdot \sin\frac{0+2\pi k}{8} \right)$, де $k = 0,1,...,7$. Перевірте: усі корені поділяють коло радіуса 2 на 8 рівних частин.

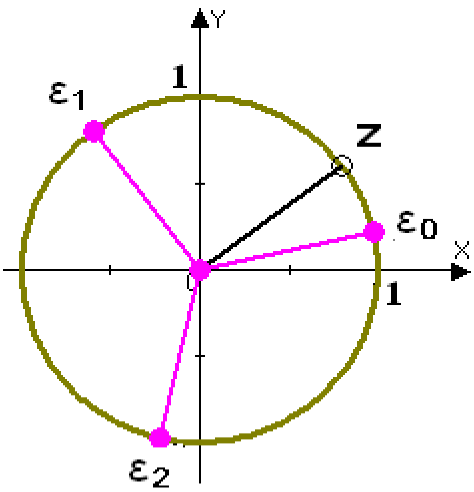
Відповідь: {±2; $\pm\sqrt{2}(1+i)$; $\pm\sqrt{2}(1-i)$; ±2i}.

4.3. Розв'яжіть задачу відшукання коренів графічно: а) $\sqrt[4]{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}$; б) $\sqrt[3]{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$.

а) *Розв'язання.* Обчислимо модуль числа z та зобразимо його на координатній площині: $|z| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 4$; тоді усі корені лежать на колі радіуса $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$; аргумент числа z кут $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ поділиться на 4, тобто ε_0 лежатиме на промені, який утворює кут $\left(-\frac{\pi}{16}\right)$ з додатним напрямом вісі Ох. Оскільки коренів – чотири, то вони поділять коло радіуса $\sqrt{2}$ на 4 рівні частини, їхні радіус-вектори утворюватимуть попарно кути 90°.



б) *Розв'язання.* Обчислимо модуль числа z: $|z| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$; тоді усі корені лежать на колі радіуса $\sqrt[3]{1} = 1$; аргумент числа z кут φ поділиться на 3, тобто ε_0 лежатиме на промені, який утворює кут $\frac{\varphi}{3}$ з додатним напрямом вісі Ох. Оскільки коренів – три, то вони



поділять коло радіуса 1 на 3 рівні частини, їхні радіус-вектори утворюватимуть попарно кути 120°.

§5. Розв'язування рівнянь.

Обговоримо тепер питання про те, як розв'язуються квадратні рівняння в комплексних числах. Розглянемо рівняння $az^2+bz+c=0$, де $a\neq 0, b, c$ – довільні комплексні коефіцієнти. Наведемо міркування, аналогічні до тих, за допомогою яких виводиться формула коренів квадратного рівняння у випадку з дійсними коефіцієнтами та змінними:

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow z^2+2\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

В правій частині рівності стоїть деяке комплексне число; за означенням кореня з комплексного числа

$$z+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\text{, або } z+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(відмітимо, що, на відміну від розв'язування рівняння на множині дійсних чисел, немає необхідності ставити знак «$\pm$» перед коренем, оскільки в комплексному випадку знаком $\sqrt{}$ позначається множина всіх коренів із числа).

Переносячи другий доданок з лівої частини в праву, отримаємо формулу:

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(відмінність від формули для дійсного випадку, відомої з курсу алгебри, полягає лише в тому, що замість знака «$\pm$» перед коренем стоїть «+»; причина цього пояснена вище). Таким чином, квадратне рівняння завжди має два комплексних кореня (можливо однакових). Взагалі, з основної теореми алгебри випливає, що будь-яке рівняння n–го степеня від однієї змінної має з урахуванням кратності рівно n коренів (вислів «з урахуванням кратності» означає, що кожний корінь рахується стільки раз, якою є його кратність).

Для квадратних тричленів з комплексними коефіцієнтами справедливі формули Вієта і теорема про розклад на лінійні множники, відомі з шкільного курсу алгебри для випадку, коли такі тричлени мають дійсні коефіцієнти та два дійсні корені. Більше того, їх доведення можна без змін перенести на випадок з комплексними коефіцієнтами та комплексними коренями квадратного тричлена.

Приклад 4.13. Розв'яжіть квадратне рівняння $z^2 + 4z + 8 = 0$.

Розв'язання. Використаємо для рівняння вказану вище формулу його коренів:

$$z = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i.$$

Помітимо, що корені розглянутого в прикладі 4.13 рівняння є комплексно спряженими числами. Це не випадковість: так буде завжди, якщо коефіцієнти рівняння дійсні. Насправді: якщо $a, b, c \in R$, то $D = b^2 - 4ac \in R$, а тоді $\sqrt{D}$ є або дійсним числом, якщо ($D \ge 0$), або, як в розглянутому прикладі, чисто уявним: $\sqrt{D} = \pm it, t \in R$ (якщо $D < 0$). У першому випадку обидва кореня – дійсні, а у другому числа $\frac{-b+it}{2a}$ і $\frac{-b-it}{2a}$ є комплексно спряженими.

Якщо ж не всі коефіцієнти квадратного рівняння є дійсними, то його корені, взагалі не будуть комплексно спряженими числами.

Приклад 4.14. Розв'язати рівняння:

$$(i-3)\cdot z^2 + (5i+5)\cdot z + (8-6i) = 0.$$

Розв'язання. Використаємо для рівняння формулу його коренів:

$$z = \frac{-5i - 5 + \sqrt{(5i+5)^2 - 4\cdot(i-3)\cdot(8-6i)}}{2\cdot(i-3)} = \frac{-5i - 5 + \sqrt{72 - 54i}}{2\cdot(i-3)} =$$

$$= \frac{-5i - 5 + 3\sqrt{8-6i}}{2\cdot(i-3)}.$$

Знайдемо $\sqrt{8-6i}$. Використаємо для цього спосіб, відмінний від класичного знаходження кореня з комплексного числа, описаного у § 4. Введемо позначення:

$$\sqrt{8-6i} = u + vi.$$

Або:

$$8 - 6i = u^2 - v^2 + 2uvi.$$

Скористаємося означенням рівності комплексних чисел, яка досягається при одночасній рівності дійсних та уявних частин. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 8 \\ 2uv = -6 \end{cases}, \text{ або } \left[\begin{array}{l} u_1 = -3,\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3,\ v_2 = -1 \end{array}\right..$$

Звідси маємо такі корені вихідного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-5i-5+3\cdot(-3+i)}{2\cdot(i-3)}=\dfrac{-i-7}{i-3}=2+i \\ z=\dfrac{-5i-5+3\cdot(3-i)}{2\cdot(i-3)}=\dfrac{2-4i}{i-3}=i-1 \end{array}\right.$$

Приклад 4.15. Скласти квадратне рівняння, що має такі корені: $z_1=i+1,\ z_2=i-2$.

Розв'язання. Ускладнимо задачу, задавши коефіцієнт при старшому члені у шуканому рівнянні рівний $i-1$. Тоді рівняння матиме вигляд:

$$(i-1)\cdot(z-(i+1))\cdot(z-(i-2))=0.$$

Провівши елементарні перетворення у лівій частині рівняння, отримаємо рівняння вигляду:

$$(i-1)\cdot z^2+(1+3i)\cdot z+4-2i=0$$

З комплексними числами тісно пов'язане і розв'язування рівнянь третього і четвертого степеня (як було сказано у вступі, комплексні числа і з'явилися в зв'язку із спробами отримати формулу коренів кубічного рівняння), однак ми не будемо зупинятися на цьому питанні. Зазначимо лише, що основні способи розв'язування таких рівнянь можна запозичити з посібника цієї серії «Раціональні рівняння та нерівності», врахувавши при цьому інформацію з § 3. Що ж стосується розв'язування нерівностей на множині комплексних чисел, то пропонуємо читачам дочекатися відповідного посібника нашої серії.

Відмітимо, що для рівнянь і многочленів відносно комплексних чисел мають місце багато тверджень, з якими ви можете ознайомитися у посібниках цієї серії – «Вирази та тотожні перетворення», «Многочлени». Так, наприклад, справедливими і в комплексному випадку виявляються теореми Безу і Вієта. А ось з розкладом на множники повної аналогії не спостерігається: за основною теоремою алгебри будь-який многочлен степеня вище першого має комплексний корінь, а це означає, може бути розкладений на множники (за теоремою Безу). Над множиною ж дійсних чисел, як ви знаєте, існують многочлени і другого степеня, які не зводяться.

Вправи до § 5.

5.1. Розв'яжіть рівняння:

а) $z^2+9=0$; б) $z^2+(3+2i)z-19+3i=0$; в) $iz^2+(1-2i)z-(7+i)=0$.

Розв'язання. а) $z^2+9=0 \Leftrightarrow z=\sqrt{-9}; z_1=3i; z_2=-3i$.

б) Обчислимо дискримінант: $D=(3+2i)^2-4\cdot(-19+3i)\cdot 1=81$; тоді $z=\frac{-(3+2i)\pm 9}{2\cdot 1}$; $z_1=3-i; z_2=-6-i$.

в) Обчислимо дискримінант: $D=(1-2i)^2-4\cdot i\cdot(-7-i)=-7+24i$; знайдемо корені, їх буде два: нехай $\sqrt{-7+24i}=u+vi$, тоді $-7+24i=u^2-v^2+2uvi$, звідки:

$$\begin{cases} u^2-v^2=-7 \\ uv=12 \end{cases}, \text{ або } \left[\begin{array}{l} u_1=-3,\ v_1=-4 \\ u_2=3,\ v_2=4 \end{array}\right.$$

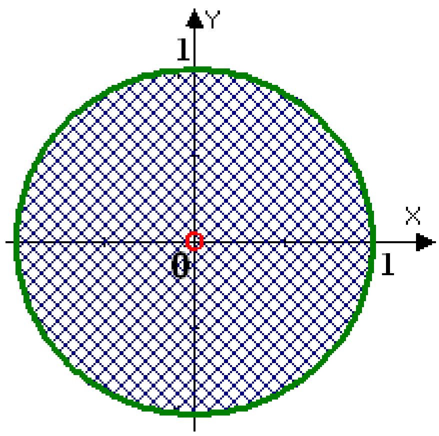
А тоді корені вихідного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-(1-2i)+(-3-4i)}{2\cdot i}=\frac{-4-2i}{2i}=\frac{-2-i}{i}=-1+2i \\ z_2=\frac{-(1-2i)+(3+4i)}{2\cdot i}=\frac{2+6i}{2i}=\frac{1+3i}{i}=3-i \end{array}\right.$$

Відповідь: а) $\pm 3i$; б) $3-i$; $-6-i$; в) $-1+2i$; $3-i$.

5.2. Укажіть усі значення комплексного параметра a, при яких модуль суми коренів квадратного рівняння $az^2+(4-3i)z-2i+1=0$ більше або дорівнює 5.

Розв'язання. За умовою рівняння є квадратним, тому $a\neq 0$. За теоремою Вієта сума коренів квадратного рівняння $z_1+z_2=-\frac{4-3i}{a}$; $a=x+yi$, $(x;y)\neq(0;0)$ (бо a комплексне за умовою, $a\neq 0$), тоді модуль $|z_1+z_2|=\frac{|4-3i|}{|x+yi|}=\frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq 5$. Розв'язуючи нерівність, отримаємо $x^2+y^2\leq 1$, тобто a є множина усіх точок круга радіуса R=1 з центром у початку координат, за винятком точки (0; 0).



Відповідь: $a=x+yi$; $x^2+y^2\leq 1$; $(x;y)\neq(0;0)$.

Вправи для самостійного розв’язування.

У цьому розділі ми пропонуємо вправи для контролю отриманих умінь. У лівій частині таблиці вказана умова вправи, а у правій – лише відповідь без вказівок із розв’язання. Не забувайте, що консультації з розв’язання вправ можна отримати у рамках навчання у заочній фізико-математичній школі.

Умова	Відповідь
1. Які з наступних тверджень є вірними, а які – хибними? (Вірні твердження необхідно довести, а до хибних – навести контрприклади):	
якщо $a \not\vdots\, 4$, $b \not\vdots\, 4$, то $(a-b) \not\vdots\, 4$	хибне
якщо $a \not\vdots\, 4$, $b \not\vdots\, 4$, то $(a+b) \not\vdots\, 4$	хибне
якщо $a \not\vdots\, 7$, $b \not\vdots\, 7$, то $(a+b) \not\vdots\, 7$	хибне
якщо $a \not\vdots\, 4$, $b \not\vdots\, 4$, то $(a \cdot b) \vdots\, 4$	хибне
якщо $a \vdots\, 4$, $b \not\vdots\, 4$, то $(a \cdot b) \not\vdots\, 4$	хибне
якщо $a \vdots\, 4$, $a \vdots\, 15$, то $a \vdots\, (4 \cdot 15)$	істинне
якщо $a \not\vdots\, 4$, $b \not\vdots\, 4$, то $(a \cdot b) \not\vdots\, 4$	хибне
якщо $a \not\vdots\, 7$, $b \not\vdots\, 7$, то $(a \cdot b) \not\vdots\, 7$	істинне
якщо $a \vdots\, 33$, $a \vdots\, 15$, то $a \vdots\, (33 \cdot 15)$	хибне
якщо $a \vdots\, 33$, $a \vdots\, 15$, то $a \vdots\, (3 \cdot 11 \cdot 5)$	істинне
якщо $(a \cdot b) \vdots\, 4$, то $a \vdots\, 4$ або $b \vdots\, 4$	хибне
якщо $(a \cdot b) \vdots\, 19$, то $a \vdots\, 19$ або $b \vdots\, 19$	істинне
2. Випишіть у рядок усі цілі числа, які лежать на проміжку від -20 до 20 та відмітьте усі цілі числа, які при діленні на 7 дають остачу 2.	-19; -12; -5; 2; 9; 16
3. Поділіть з остачею:	
-10000 на 11	q = -910, r = 10
-2009 на 9	q = -224, r = 7
2009 на 9	q = 223, r = 2
-123456 на 173	q = -714, r = 66
123456 на 173	q = 713, r = 107
-54321 на 131	q = -415, r = 44
-54321 на -11	q = 4939, r = 8
-97531 на -24	q = 4064, r = 5
97531 на 24	q = 4063, r = 19
-97531 на 24	q = -4064, r = 5
4. Число a дає остачу 5 при діленні на 14. Чому дорівнює остача від ділення a на 2?	r = 1
Число a дає остачу 11 при діленні на 24. Чому дорівнює остача від ділення a на 4?	r = 3
Число a дає остачу 11 при діленні на 24. Чому дорівнює остача від ділення a на 6?	r = 5

Число a дає остачу 3 при діленні на 6. Чому дорівнює остача від ділення a на 12?	r =3 або r =9
Число a дає остачу 8 при діленні на 9. Чому дорівнює остача від ділення a на 18?	r =8 або r =17
Число a дає остачу 5 при діленні на 6. Чому дорівнює остача від ділення a на 18?	r =5 або r =11, або r =17
5. Чи може число ділитись на 15 та давати остачу 10 при діленні на 21? Якщо так, наведіть найменше таке натуральне число.	Ні
Чи може число ділитись на 18 та давати остачу 6 при діленні на 21? Якщо так, наведіть найменше таке натуральне число.	Так; 90
Чи може число ділитись на 35 та давати остачу 5 при діленні на 45? Якщо так, наведіть найменше таке натуральне число.	Так; 140
Чи може число ділитись на 45 та давати остачу 5 при діленні на 35? Якщо так, наведіть найменше таке натуральне число.	Так; 180
6. Число a дає при діленні на 15 остачу 8, число b – остачу 11. Яку остачу при діленні на 15 дають числа: $a+b$; a-b; $a{\cdot}b$.	4; 12; 13
Число a дає при діленні на 12 остачу 6, число b – остачу 8. Яку остачу при діленні на 12 дають числа: $a+b$; a-b; $a{\cdot}b$.	2; 10; 0
7. Серед усіх 4-значних чисел, які при діленні на 17 дають остачу 3, знайдіть найменше.	1006
Серед усіх чисел, які більші від 2000 та при діленні на 21 дають остачу 16, знайдіть найменше.	2011
Серед усіх чисел, які більші від 5000 та при діленні на 14 дають остачу 12, знайдіть найменше.	5010
Знайдіть найбільше число, яке не перевищує 7000 та яке при діленні на 62 дає остачу 6.	6950
Знайдіть найбільше число, яке не перевищує 10000 та яке при діленні на 53 дає остачу 17.	9981
Серед усіх чисел, які більші від 10000 та при діленні на 53 дають остачу 17, знайдіть найменше. Порівняйте відповіді 2-х останніх прикладів (на скільки вони відрізняються?)	10034; на 53
8. Знайдіть найменше шестизначне число, яке ділиться на 321.	100152
Знайдіть найбільше п’ятизначне число, яке ділиться на 321. Порівняйте відповіді 2-х	99831; на 321

останніх прикладів (на скільки вони відрізняються?)	
Знайдіть найбільше п'ятизначне число, яке ділиться на 213.	99897
Знайдіть найменше шестизначне число, яке ділиться на 143.	100100
9. Остачі від ділення числа n на 3,5,7 дорівнюють a,b,c відповідно. Доведіть, що $(70a+21b+15c-n) \vdots 105$.	Запишіть $n=3k+a$; $n=5m+b$; $n=7p+c$
10. Яку остачу дає число a при діленні на b, де $a=2n^2+7n+11$, $b=n+2$; $n \in N$.	При $n \leq 3$, остача $r=3-n$; при $n>3$, $r=5$
Яку остачу дає число a при діленні на b, де $a=n^3+2n+1$, $b=n$; $n \in N$.	При $n=1$, $r=0$; при $n>1$, $r=1$
10. Наведіть приклад натурального числа, що має рівно 10 натуральних дільників.	$p \cdot q^4$ або p^9, де p,q – різні прості
Наведіть приклад натурального числа, що має рівно 3 натуральних дільники.	p^2, де p – просте число
Наведіть приклад натурального числа, що має рівно 9 натуральних дільників.	$p^2 \cdot q^2$ або p^8, де p,q – різні прості
11. Які остачі може давати повний квадрат при діленні на 6?	0; 1; 3; 4
Які остачі може давати повний квадрат при діленні на 9?	0; 1; 4; 7
Які остачі може давати повний куб при діленні на 9?	0; 1; 8
12. Доведіть, що a^2+2 не ділиться на 5 для усіх цілих a.	Остачі 1; 2; 3
13. Доведіть, що числа 10^7 і -1 дають однакові остачі при діленні на 11.	Остачі 10
14. Знайдіть остачу від ділення числа 2^{2009} на 7.	4
Знайдіть остачу від ділення числа 7^{64} на 13.	9
Знайдіть остачу від ділення числа 15^{2009} на 12.	3
15. На яку цифру закінчується число $(((3^3)^3)^3)^3$?	3
На яку цифру закінчується число $(((2^5)^5)^5)$?	2
На яку цифру закінчується число $(((4^6)^6)^6)$?	6
На яку цифру закінчується число $26^7+15^5-31^9$?	0
16. Знайдіть усі тризначні числа, які в 14 разів більші суми власних цифр.	126
17. У кожному вагоні потягу пасажирів було порівну. Скільки було вагонів, якщо відомо, що в потягу їхало: а) 767 ; б) 517 пасажирів?	а) 13; б) 11

18. Чи існує натуральне число, яке при закреслюванні першої цифри зменшується: а) у 11 разів; б) у 22 рази?	а) так, 44; б) ні
19. До числа 12 припишіть зліва і справа по одній цифрі, щоб отримане число ділилося на 44.	3124; 7128
20. Знайдіть усі значення цифр х; у такі, щоб числа виду $\overline{2x19y4}$ ділилися на 33.	$x_1=3$; $y_1=2$; $x_2=6$; $y_2=5$; $x_3=9$; $y_3=8$
Знайдіть усі значення цифр х; у такі, щоб числа виду $\overline{3x15y9}$ ділилися на 99.	$x=5$; $y=4$
Знайдіть усі значення цифр х; у такі, щоб числа виду $\overline{71x1y}$ ділилися на 45.	$x_1=0$; $y_1=0$; $x_2=9$; $y_2=0$; $x_3=4$; $y_3=5$
21. Знайдіть найбільше число, яке ділиться на 4, у записі якого зустрічаються усі десять цифр.	9876543120
Знайдіть найменше число, яке ділиться на 8, у записі якого зустрічаються усі парні цифри, крім цифри 0.	2648
22. Яку найбільшу кількість однакових букетів можна скласти з 252 білих та 357 червоних троянд (треба використати всі квіти)? Скільки яких квітів буде у букеті?	21; по 12 білих та 17 червоних
Яку найбільшу кількість однакових десертів можна скласти з 270 груш, 162 яблук, 216 абрикос? Скільки фруктів буде налічувати кожен набір? Треба використати всі фрукти.	54; по 12
23. Знайдіть найбільше тризначне число a, для якого НСД(a, 540)=36.	936
24. Сума двох натуральних чисел рівна 153. Яке найбільше значення може приймати їх найбільший спільний дільник?	51
Сума двох натуральних чисел рівна 399. Яке найбільше значення може приймати їх найбільший спільний дільник?	133
Сума двох натуральних чисел рівна 385. Яке найбільше значення може приймати їх найбільший спільний дільник?	77
25. Використовуючи алгоритм Евклдіда, знайдіть найбільший спільний дільник чисел: 97530 і 2463.	3
Знайдіть НСД чисел: 985410 і 7632.	18
Знайдіть НСД чисел: 5555555 і 55555.	5
Знайдіть НСД чисел: 88888888 і 444444.	44
Знайдіть НСД чисел: 87431256 і 444708.	396

26. Від прямокутника 324х141 відрізують декілька квадратів із стороною 141, поки не залишиться прямокутник, у якого одна сторона менше 141. Від отриманого прямокутника знову відрізують квадрати із стороною, рівній меншій стороні цього прямокутника, доти поки це можливо, і т.д. Скільки квадратів якого розміру вийде в результаті таких операцій?	12; 2; 3; 2; 1; 4 із сторонами, відповідно, 141; 42; 15; 12; 3
Від прямокутника 396х288 відрізують декілька квадратів із стороною 288, поки не залишиться прямокутник, у якого одна сторона менше 288. Від отриманого прямокутника знову відрізують квадрати із стороною, рівній меншій стороні цього прямокутника, доти поки це можливо, і т.д. Скільки квадратів якого розміру вийде в результаті таких операцій?	6; 1; 2; 1; 2; із сторонами, відповідно, 288; 108; 72; 36
27. Доведіть, що НСД(a,b)=НСД(5a+3b, 13a+8b) для будь-яких a,b$\in$Z.	Застосуйте алгоритм Евкліда
28. При яких натуральних n будуть взаємно простими числа 3n+7 і n+1.	n=2k, k$\in$Z
29. Доведіть, що НСД (n^5+4n^3+3n; n^4+3n^2+1)=1 при будь-якому n$\in N$.	Застосуйте алгоритм Евкліда
30. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння 42x+154y=0.	x=11t; y= -3t; t$\in$Z
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння 36x-84y=0.	x=7t; y=3t; t$\in$Z
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння 56x+126y=0.	x=9t; y= -4t; t$\in$Z
31. Доведіть: $(2a+b)\vdots 7 \Rightarrow (a-3b)\vdots 7$ для довільних $a,b \in Z$.	Домножте даний вираз на 4 або на 3
Доведіть: $(4a+3b)\vdots 10 \Rightarrow (b-2a)\vdots 10$ для довільних $a,b \in Z$.	Домножте даний вираз на 3 або на 7
32. Чи має рівняння 26x+65y=20 розв'язки в цілих числах?	Ні
Чи має рівняння 20x-45y=10 розв'язки в цілих числах? Які?	Так; x=5+9t; y=2+4t; t$\in$Z
Чи має рівняння 20x+10y=45 розв'язки в цілих числах?	Ні
33. Розв'яжіть рівняння 12x+9y=39 в цілих числах.	x=1-3t; y=3+4t; t$\in$Z

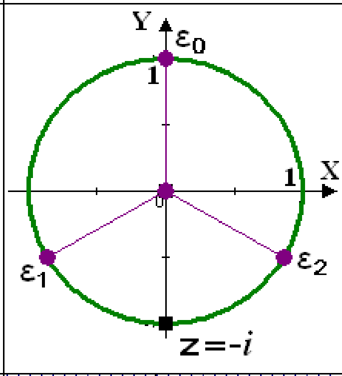
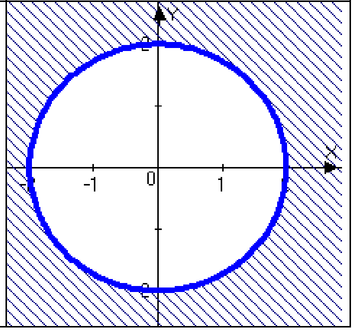
Розв'яжіть рівняння 14x-8y=22 в цілих числах.	x=1+4t; y=-1+7t; t∈Z
34. Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{5n+3}{8}$ є скоротним.	$n=1+8t,\ t\in N_0$
Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{3n+5}{11}$ є скоротним.	$n=2+11t,\ t\in N_0$
Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{4n-5}{9}$ є скоротним.	$n=8+9t,\ t\in N_0$
Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{7n-5}{13}$ є скоротним.	$n=10+13t,\ t\in N_0$
Знайдіть усі натуральні n, для яких дріб $\frac{8n+71}{5n+16}$ є скоротним.	$n=227t-94,\ t\in N$
35. Доведіть, що ні при яких натуральних n дріб $\frac{2n^2+5n-2}{n+3}$ не є скоротним.	Покажіть, що НСД чисельника і знаменника є 1
Доведіть, що ні при яких натуральних n дріб $\frac{n^4-n^3+12n^2-7n+36}{n^2+7}$ не є скоротним.	Покажіть, що НСД чисельника і знаменника є 1
36. Знайдіть усі двозначні числа, які при діленні на суму своїх цифр дають частку 7 і остачу 6.	62; 83
Знайдіть усі двозначні числа, які при діленні на суму своїх цифр дають частку 5 і остачу 3.	34; 46; 58
37. Знайдіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 12 остачу 5, а при діленні на 30 - остачу 23.	53+60t; t∈Z
Знайдіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 14 остачу 11, а при діленні на 35 - остачу 4.	39+70t; t∈Z
Знайдіть загальну формулу чисел, що дають при діленні на 36 остачу 23, а при діленні на 63 - остачу 5.	131+252t; t∈Z
38. Для транспортування цукру є мішки по 50 кг (великі) і 30 кг (малі). Скільки потрібно тих і інших мішків для перевезення 420 кг цукру. Мішки повинні бути повністю заповнені.	14 малих або 3 великих і 9 малих, або 6 великих і 4малих
Скільки поштових марок по 40 коп. і 1 грн. можна купити на 5 грн. 20 коп.? Використати усі кошти.	(3;4) або (8;2), або (13;0)
Прокладають водопровід протяжністю 75 м. Є труби по 5 м і 1,5 м. Скільки потрібно замовити	Варіанти: (15;0); (12;10); (9; 20);

тих і інших труб? Труби повинні бути повністю використані.	(6;30); (3; 40); (0; 50)
Авто вантажністю 5 тонн треба повністю завантажити контейнерами, що мають масу 150 кг та 230 кг. Як це можна зробити? Укажіть, скільки контейнерів кожного виду треба взяти.	18 контейнерів масою 150 кг і 10 контейнерів масою 230 кг
Авто вантажністю 3 тонни треба повністю завантажити контейнерами, що мають масу 120 кг та 170 кг. Як це можна зробити? Укажіть, скільки контейнерів кожного виду треба взяти.	(25; 0) або (8; 12)
39. Доведіть, що якщо у рівнянні *a*x+by=82 коефіцієнти *a* і b – цілі числа, то пара (15, 9) не може бути розв’язком цього рівняння.	Від супротивно-го: ліва частина ділиться на 3
40. Скільки точок прямої 98x+75y=9875 з цілочисельними координатами лежить у першій координатній чверті? Які?	Дві; (100;1); (25;99)
Скільки точок прямої 56x+78y=5678 з цілочисельними координатами лежить у першій координатній чверті? Які?	Три (100;1); (61;29); (22;57);
41. Розв’яжіть систему в цілих числах: $\begin{cases}3x+5y-7z=15\\2x+3y-9z=12\end{cases}$.	$\begin{cases}x=15+24t,\\y=-6-13t,\ t\in Z\\z=t,\end{cases}$
Розв’яжіть систему в цілих числах: $\begin{cases}6x-3y+7z=0\\11x-5y+8z=0\end{cases}$.	$\begin{cases}x=11t,\\y=29t,\ t\in Z\\z=3t,\end{cases}$
42. Знайдіть усі прості числа p такі, що p+26 і p+28 теж є простими.	3; 29; 31
Знайдіть усі прості числа p такі, що p+10 і p+14 теж є простими.	3; 13; 17
Знайдіть усі прості числа p такі, що p+40 і p+44 теж є простими.	3; 43; 47
43. Сума двох натуральних чисел дорівнює 103, а різниця їх квадратів - просте число. Знайдіть ці числа.	52 і 51
Сума двох натуральних чисел дорівнює 401, а різниця їх квадратів - просте число. Знайдіть ці числа.	201; 200
Сума двох натуральних чисел дорівнює 131, а різниця їх квадратів - просте число. Знайдіть ці числа.	66; 65
Сума двох натуральних чисел дорівнює 863, а різниця їх квадратів - просте число. Знайдіть ці числа.	432; 431

44. Доведіть, що числа $\underbrace{22...223}_{403}$; $\underbrace{55...559}_{1111}$ є складеними.	Скористайтеся ознакою подільності на 3
45. Доведіть, що знайдуться 200 підряд складених чисел.	Розгляньте числа 201!+2; 201!+3; …; 201!+201
Доведіть, що знайдуться 150 підряд складених чисел.	Розгляньте числа 151!+2; 151!+3; …; 151!+151
46. Визначте, скількома нулями закінчується число 100!.	24
Визначте, скількома нулями закінчується число 500!.	124
Визначте, скількома нулями закінчується число 1000!.	249
47. Визначте, що буде стояти у знаменнику дробу $\frac{100!}{5^{30}\cdot 7^{20}}$ після його скорочення.	$5^6\cdot 7^4$
Визначте, що буде стояти у знаменнику дробу $\frac{1000!}{11^{100}\cdot 19^{55}}$ після його скорочення.	$11^2\cdot 19^1$
Чи ділиться $\frac{1000!}{(500!)^2}$ на 10; 10^2?	Обчисліть число нулів у 1000! та $(500!)^2$ (249 та 248); так; ні
48. Розкладіть на прості множники число 540.	$2^2\cdot 3^3\cdot 5$
Розкладіть на прості множники число 9680.	$2^4\cdot 5\cdot 11^2$
Розкладіть на прості множники число 522.	$2\cdot 3^2\cdot 29$
Розкладіть на прості множники число 3927.	$3\cdot 7\cdot 11\cdot 17$
Розкладіть на прості множники число 824.	$2^3\cdot 103$
Розкладіть на прості множники число 1635.	$3\cdot 5\cdot 109$
Розкладіть на прості множники число 10!.	$2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$
Розкладіть на прості множники число 25!.	$2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot$ $\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23$
49. Знайдіть усі додатні розв'язки (x; y) рівняння x+y=25, де x,y – прості числа.	(2; 23); (23; 2)
Знайдіть усі додатні розв'язки (x; y) рівняння x-y=29, де x,y – прості числа.	(31; 2)
Знайдіть усі додатні розв'язки (x; y) рівняння x+5y=20, де x,y – прості числа.	(5; 3)
Знайдіть усі додатні розв'язки (x; y) рівняння $x^2-y^2=45$, де x,y – прості числа.	(7; 2)
50. Сума цифр натурального числа дорівнює 201. Доведіть, що воно не є повним квадратом.	Ділиться на 3, не ділиться на 3^2

Сума цифр натурального числа дорівнює 15. Доведіть, що воно не є повним квадратом.	Ділиться на 3, не ділиться на 3^2
Сума цифр натурального числа дорівнює 111. Доведіть, що воно не є повним кубом.	Ділиться на 3; не ділиться на 3^3, бо не ділиться на 9
51. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $x^2+11=y^2$	(5;6); (-5;-6); (5;-6); (-5;6)
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $x^2-5=y^2$	(3;2); (-3;-2); (3;-2); (-3;2)
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $xy+5=3x+2y$	(1;2); (3;4)
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $xy-5=4y-x$	(5;0); (3;-2)
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $2xy+4=4x+3y$	(2;4); (1;0)
Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння $3xy+5=9x+2y$	(1;4)
52. Визначіть вигляд усіх прямокутників, площа яких чисельно дорівнює їхньому півпериметру. Сторони виражаються натуральними числами.	Складіть рівняння $xy=x+y$ (2;2); квадрат
53. Подвоєний добуток трьох простих чисел у 7 разів більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.	7; 2; 3
Добуток трьох простих чисел у 5 разів більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.	5; 2; 7
54. Доведіть, що якщо двозначне число n не ділиться на жодне просте число від 2 до 7, то n - просте.	$\sqrt{99}<10$; дивись ознаку простого числа
Доведіть, що якщо 5-значне число n не ділиться на жодне просте число від 2 до 313, то n - просте.	$\sqrt{99999}<317$; дивись ознаку простого числа
Доведіть, що числа 971; 983; 991; 997 – прості.	Покажіть, що вони не діляться на 2,3,5,7,11,13, 17,19,23,29,31
55. Знайдіть НСД і НСК чисел 414 і 1012	46; 9108
Знайдіть НСД і НСК чисел 3870 і 2150	430; 19350
Знайдіть НСД і НСК чисел 957 і 1305	87; 14355
Знайдіть НСД і НСК чисел 2954 і 3165	211; 44310
56. Знайдіть натуральні числа a та b, якщо відома їхня сума 527 і частка від ділення НСК(a,b) на НСД(a,b) дорівнює 220.	187; 340
57. Укажіть довжини всіх сторін якого-небудь цілочисельного прямокутного трикутника, один з катетів якого рівний 12	(12;16;20); (5;12;13); (35;12;37)

58. Обчисліть: $(2-2i)(3+i)(-1+i)+(5+2i)(-6+i)$.	$-36+5i$
Обчисліть: $\frac{2+11i}{4-3i}+4\cdot\left(\frac{1+2i}{1+i}\right)^3$.	$8+15i$
Обчисліть: $16\cdot\frac{5+4i}{9+40i}-\frac{11-4i}{5+4i}$.	1
Обчисліть: $\frac{3\cdot(1+3i)^2+5\cdot(2+i)^3}{(9+i)^2+(1-3i)^3}$.	$\frac{4}{9}+\frac{19}{18}i$
Обчисліть: $9\cdot\frac{3+i}{5-2i}+11\cdot\frac{1-12i}{20+21i}$.	1
59. Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексного числа $\frac{5-14i}{12-5i}$.	Re z=$\frac{10}{13}$; Im z=$-\frac{11}{13}$
Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексного числа $\frac{3+7i}{20-21i}$.	Re z=$-\frac{3}{29}$; Im z=$\frac{7}{29}$
Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексного числа $\frac{15+8i}{7+6i}$.	Re z=$\frac{9}{5}$; Im z=$-\frac{2}{5}$
Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексного числа $\frac{11+3i}{9-5i}$.	Re z=$\frac{42}{53}$; Im z=$\frac{41}{53}$
Обчисліть дійсну Re z та уявну Im z частини комплексного числа $\frac{3+i}{4-5i}$.	Re z=$\frac{7}{41}$; Im z=$\frac{19}{41}$
Обчисліть дійсну Re z і уявну Im z частини комплексного числа $\frac{(4+4i)(\sqrt{3}-i)}{(2-2i)(\sqrt{3}+i)}$.	$\operatorname{Re} z=\sqrt{3}$; $\operatorname{Im} z=1$
Обчисліть дійсну Re z і уявну Im z частини комплексного числа $\frac{(2-2i)(2\sqrt{3}-6i)}{(2\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}-i)}$.	$\operatorname{Re} z=\sqrt{3}$; $\operatorname{Im} z=-\sqrt{3}$
60. Розв’яжіть систему: $\begin{cases} 2z_1-i\cdot z_2=3+i \\ (1-i)z_1+2z_2=5-3i \end{cases}$	$z_1=2+i$; $z_2=1-i$

Розв'яжіть систему: $\begin{cases}(4+3i)z_1+(5-2i)z_2=2+i\\(3+i)z_1+(2-3i)z_2=1+3i\end{cases}$	$z_1=\frac{17}{5}-\frac{4}{5}i$; $z_2=-2-2i$
Розв'яжіть систему: $\begin{cases}(2+i)z_1+(-2+i)z_2=-8+3i\\(2-i)z_1+(2+i)z_2=6+7i\end{cases}$	$z_1=i$; $z_2=3+i$
61. Виконайте дії з числом, попередньо записавши його у тригонометричній формі: $(1-i)^{40}$.	2^{20}
Виконайте дії з числом, попередньо записавши його у тригонометричній формі: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{30}$.	-2^{30}
Виконайте дії з числом, попередньо записавши його у тригонометричній формі: $\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)^{15}$.	-2^{30}
Виконайте дії з числом, попередньо записавши його у тригонометричній формі: $(-2-2i)^{16}$	2^{24}
62. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n=\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^n$.	3
Знайдіть найменше натуральне число n таке, що $\left(3+\sqrt{3}\,i\right)^n=\left(3-\sqrt{3}\,i\right)^n$.	6
Знайдіть найменше натуральне число n таке, що $(3+3i)^n=(3-3i)^n$.	4
63. Розв'яжіть рівняння: $z^2+5z+4+10i=0$.	$-2i$; $-5+2i$
Розв'яжіть рівняння: $z^2+7z-7-9i=0$.	$1+i$; $-8-i$
Розв'яжіть рівняння: $z^2+4z-11+8i=0$.	$2-i$; $-6+i$
64. Побудуйте усі комплексні корені: $\sqrt[3]{-i}$.	
65. Укажіть усі значення комплексного параметра a, при яких модуль добутку коренів квадратного рівняння $az^2+(2+i)z+(12-5i)=0$ менше або дорівнює 26.	

Предметний покажчик.

Зміст

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Цілі та комплексні числа

Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів

Людмила Володимирівна Ізюмченко
Вікторія Вікторівна Нічишина
Ренат Ярославович Ріжняк

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ. Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 25.11.2009. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф.
Ум. др. арк. 4,6. Тираж 300. Зам. № 5755.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84. Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua