Вказівки до розв'язань

1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	Г	Б	Г	А	В	В	Г	В	Б

2. Знайдіть найменше можливе значення виразу a^2+b^2, при якому квадратний тричлен $x^2+ax-b+1$ має принаймні один дійсний корінь.
   Вказівки до розв'язання

Застосуємо теорему Вієта: $a=-x_1-x_2$, $1-b=x_1x_2 \Leftrightarrow b=1-x_1x_2$, де x_1, x_2 – корені даного рівняння. Тоді $a^2+b^2=(-x_1-x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1$, що очевидно не менше, ніж 1. Очевидно також, що при $a=0$, $b=1$ тричлен $x^2+ax-b+1=x^2$ має дійсний корінь і a^2+b^2 в точності дорівнює 1.

Відповідь:1

3. Зобразіть на площині множину точок $M(x,y)$, координати яких в прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівняння

$$\left(x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)^2+\left(y-\left[y+\frac{1}{2}\right]\right)^2=\frac{1}{16}$$

   (тут через $[x]$ позначена ціла частина числа x – найбільше ціле число, що не перевищує x).
   Вказівки до розв'язання

Очевидно, що дана множина переходить сама в себе при паралельному переносі $(x,y)\to(x+1,y)$ та при паралельному переносі $(x,y)\to(x,y+1)$. Тому достатньо зобразити ту частину множини, що знаходиться, наприклад, в квадраті $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})\times[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, а потім розповсюдити її на всю площину за допомогою зсувів на одиницю праворуч, ліворуч, вниз і вгору.

Але очевидно, що при $(x,y)\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})\times[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $\left[x+\frac{1}{2}\right]=0$ та $\left[y+\frac{1}{2}\right]=0$, тому дане в умові рівняння спроститься до $x^2+y^2=\frac{1}{16}$, що є рівнянням кола радіусу $\frac{1}{4}$ з центром в початку координат, яке, очевидно, повністю лежить всередині множини $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})\times[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

Таким чином, дана в умові множина є об'єднанням кіл радіусу $\frac{1}{4}$ з центрами (m,n), m, n – довільні цілі числа.

4. Довжина дороги дорівнює n км ($n-$ натуральне число). На кожному кілометрі дороги стоїть стовпчик, на якому записані відстані в кілометрах до обох її кінців: $(1;n-1)$, $(2;n-2)$, …, $(n-1;1)$. Виявилось, що на кожному стовпчику сума всіхнаписаних на ньому цифр (в обох числах) дорівнює 14. Знайдіть n.

Вказівки до розв'язання

По-перше, n не може бути одноцифровим числом, бо тоді на першому стовпчику $(1;n-1)$ сума цифр менша ніж 10.

По-друге, n не може містити три або більше цифр, бо тоді стовпчиків не менше 100 і на 99-му стовпчику $(99;n-99)$ сума цифр не менша ніж 18.

Значить, $n-$ двоцифрове число. В такому випадку, на дорозі будуть стовпчики $(9;n-9)$ і $(10;n-10)$, причому суми цифр на них однакові і дорівнюють 14. Це означає, що сума цифр числа $n-10$ має бути на 8 більша ніж сума цифр числа $n-9$. Це відбувається лише в тому випадку, коли $n-9$ закінчується на 0, тобто n закінчується на 9. Оскільки на першому стовпчику $(1;n-1)$ сума цифр дорівнює 14, то $n=59$. Нескладно переконатись, що в цьому випадку на всіх стовпчиках сума цифр також дорівнює 14**.**

Відповідь:59

5. Із зовнішньої точки P до кола ω провели дотичні PT_1 і PT_2. На дузі кола ω_1 з центром у точці P радіуса PT_1, яка знаходиться всередині кола ω, обрали довільну точку K. В колі ω через точку K провели хорди T_1D_1 і T_2D_2. Доведіть, що точки D_1 і D_2 є діаметрально протилежними точками кола ω.

Вказівки до розв'язання

Позначимо $\angle T_1PK=\alpha$, $\angle T_2PK=\beta$. Оскільки $PT_1=PK=PT_2$, то трикутники ΔPT_1K, ΔPT_2K і ΔPT_1T_2 є рівнобедреними і $\angle PT_1K=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, $\angle PT_2K=\dfrac{\pi-\beta}{2}$, $\angle PT_1T_2=\dfrac{\pi-\alpha-\beta}{2}$.
За властивістю кута між дотичною і хордою на колі ω дуга $T_{1T_2}D_1$ дорівнює $\pi-\alpha$, дуга $T_{2T_1}D_2$ дорівнює $\pi-\beta$, дуга T_2T_1 дорівнює $\pi-\beta-\alpha$. В такому випадку дуга D_1D_2 дорівнює $\pi-\alpha+\pi-\beta-\ \pi-\alpha-\beta\ =\pi$.

■