

Вказівки до розв'язань

1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	А	А	В	Г	А	В	Б	В	А

2. Функція $f(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ дорівнює певній константі на певному проміжку. Знайдіть цю константу і цей проміжок.

Вказівки до розв'язання

Знайдемо похідну цієї функції:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Таким чином, похідна дорівнює нулю при $|x| < 1$ і не дорівнює нулю при $|x| > 1$. Враховуючи, що в точці $x=1$ функція не визначена, а в усіх інших точках дійсної прямої неперервна, отримаємо, що функція $f(x)$ є константою на проміжку $[-1; 1)$. Підставивши, наприклад, $x=0$, отримаємо, що $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}, [-1; 1)$

3. Знайдіть на комплексній площині геометричне місце тих точок z , які можна представити у вигляді $\frac{1-xi}{1+xi}$, де $x \in \mathbf{R}$.

Вказівки до розв'язання

Очевидно, що при довільному $x \in \mathbb{R}$ $\left| \frac{1-xi}{1+xi} \right| = 1$. Окрім того, рівняння $\frac{1-xi}{1+xi} = -1 \Leftrightarrow 1-xi = -1-xi$ розв'язків не має. Таким чином, шукане ГМТ є підмножиною одиничного кола $|z|=1$ з виколотою точкою $z=-1$.

Доведемо тепер, що довільна точка вказаної множини може бути надана у вигляді $\frac{1-xi}{1+xi}$, де $x \in \mathbb{R}$. Нехай $|z|=1, z \neq -1$. Тоді рівняння $z = \frac{1-xi}{1+xi}$ відносно змінної x має розв'язок $x = -i \frac{1-z}{1+z}$, і залишається довести, що цей розв'язок є дійсним

числом. Справді, якщо $|z|=1$, то $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $x = -i \frac{1-z}{1+z} = -i \frac{1-\cos \varphi - i \sin \varphi}{1+\cos \varphi + i \sin \varphi}$ і після перетворень отримаємо $x = -\frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} \in \mathbb{R}$.

Відповідь: коло $|z|=1$ з виколотою точкою $z = -1$

4. Позначимо через S клас функцій, що визначені на множині $0; +\infty$ і приймають значення в цій самій множині, для якого виконуються наступні властивості:

- функції $e^x - 1$ і $\ln(x+1)$ належать до класу S ;
- якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ належать до S , то їх сума $f(x)+g(x)$ і композиція $f(g(x))$ також належать до S ;
- якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ належать до S і $f(x)-g(x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$, то їх різниця $f(x)-g(x)$ також належить до S .

Доведіть, що для будь-яких функцій $f(x)$ і $g(x)$ з класу S їх добуток $f(x)g(x)$ також належить до S .

Вказівки до розв'язання

Нехай $f(x), g(x) \in S$. Тоді:

- $\ln f(x)+1 \in S, \ln g(x)+1 \in S$ на підставі властивостей (а), (б)
- $\ln f(x)+1 + \ln g(x)+1 = \ln f(x)g(x) + f(x)+g(x)+1 \in S$ на підставі властивості (б) і пункту (1)
- $f(x)g(x) + f(x)+g(x) \in S$ на підставі властивостей (а), (б) і пункту (2)
- $f(x)+g(x) \in S$ на підставі властивості (б)
- $f(x)g(x) \in S$ на підставі властивості (с) і пунктів (3), (4)

■

5. На площині задані еліпс F , його центр O і точка A у зовнішній області еліпса F . Обґрунтуйте, як за допомогою циркуля і лінійки побудувати проведені з точки A дотичні до еліпса F .

Вказівки до розв'язання

Розглянемо довільне коло F' з центром O' . Його можна вважати образом еліпсу F при деякому афінному перетворенні. Тоді O переходить в O' .

Побудуємо далі образ точки A . Проведемо відрізок OA і позначимо точку його перетину з еліпсом через K . В якості образа K' точки K можна обрати довільну точку K' на колі F' . За властивостями афінних перетворень $\frac{OK}{KA} = \frac{O'K'}{K'A'}$, що дає можливість побудувати точку A' .

Побудуємо дотичні $A'E'$ і $A'T'$ з точки A' до F' (точки E' і T' є відповідно образами точок E і T , які нам потрібно побудувати) і знайдемо точку перетину $A'O'$ з $E'T'$, яку позначимо Q' . За властивостями афінних перетворень $\frac{OQ}{OA} = \frac{O'Q'}{O'A'}$, що дає можливість побудувати точку Q . Нехай $C'D'$ – діаметр кола F' , перпендикулярний до $O'A'$, причому точки C' і D' є образами точок C і D відповідно. Тоді CD – діаметр еліпсу F , спряжений до діаметру, що лежить на прямій OA . Побудуємо діаметр CD . Оскільки $E'T' \parallel C'D'$, то і $ET \parallel CD$ і ми отримаємо точки E і T як точки перетину еліпсу F з прямою, що проходить через Q паралельно CD .

■