

Тренувальні завдання для підготовки до участі у Всеукраїнській олімпіаді ЦДПУ ім.В.Винниченка з математики та ЗНО:

1. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-5}{\sqrt[4]{a}+5}-\frac{\sqrt[4]{a}+5}{\sqrt[4]{a}-5}\right):\frac{10\sqrt[4]{a}}{25-\sqrt{a}}$.
2. Розкладіть число 24 на два доданки так, щоб сума кубів цих доданків була найменшою.
3. Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 3^{2x} + 3^x \cdot 4^x - 3 \cdot 4^{2x} = 0$.
4. Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{x-1} - \frac{3}{\sqrt{x-1}} = 5$.
5. Розв'яжіть нерівність: $\log_2(x^2 - 7x + 13) > 0$.
6. Знайдіть найменше значення функції $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на відрізку [1; 4].
7. У коробці знаходиться 30 карток, що пронумеровані натуральними числами від 1 до 30. З коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записане число, яке не є дільником 30?
8. Модуль вектора $\vec{a}(2; m-5; -6)$ дорівнює 7. Знайдіть m .
9. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.
10. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}; \\ y^2 - x^2 = 12. \end{cases}$$
11. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt{5-x^2}$ у точці $x_0 = -2$.
12. Точка рухається за законом $S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^4 - \frac{2}{3} \cdot t^3 + \frac{3}{2} \cdot t^2 + t + 1$. Знайдіть швидкість і прискорення точки через 2 с після початку руху (S в м).
13. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:
а) $y = -x^2 - 2x + 3$; б) $y = x^2 - 6x + 8$.
14. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} x+1 < 4(x-2); \\ 2x-3 \geq 3(4-x). \end{cases}$$
15. Визначте ДОБУТОК коренів рівняння $|2x-1|=13$.
16. Розв'яжіть рівняння $(x+8)\sqrt{x+6}\sqrt{x+9}=0$.
17. Ціну товару спочатку знизили на 20%, потім одержану ціну товару знизили ще на 10%. Знайдіть на скільки відсотків всього знизили ціну товару?
18. Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -19 . Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $(x+12)(x-9)^2(x-5)^3 \leq 0$.
20. На прямій a вибрано три точки A, B, C так, що $AB=3,8$ см, $AC=4,1$ см. Обчисліть відстань між точками B і C .
21. Периметр трикутника дорівнює 12 см, а довжина однієї із сторін $- 5$ см. Знайти довжини решти сторін трикутника, якщо вони виражені натуральними числами.
22. У трапеції $ABCD$ основи BC і AD відносяться як 2:5. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника BCD дорівнює 6 см^2 .
23. Точка M віддалена на 10 см від центра кола, радіус якого дорівнює 12 см. Через цю точку проведено хорду завдовжки 15 см. Обчисліть довжини відрізків, на які ділить точка M хорду.

24. Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 40 см. Точка дотику кола до сторони AC ділить її у відношенні 3:4, рахуючи від точки A , а точка дотику до сторони BC віддалена від точки B на 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
25. Знайдіть довжину відрізка прямої, паралельної основам трапеції, яка проходить через точку перетину діагоналей, якщо основи трапеції рівні 9 см та 18 см.
26. У квадраті $ABCD$ сторона AB дорівнює 1,5. Знайдіть скалярний добуток $\overline{AC} \cdot \overline{CD}$.
27. Обчисліть сторону AB трикутника ABC (у см), якщо $AC=24$ см і $BC=31$ см, а градусна міра кута BAC дорівнює 120° .
28. Кожну сторону трикутника збільшили на 10 %. На скільки відсотків збільшиться площа круга, обмеженого вписаним у даний трикутник колом?
29. Периметр правильного трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$ см, а відстані від деякої точки до кожної із сторін трикутника – 10 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.
30. Висота конуса дорівнює 5 см, а різниця твірної і радіуса основи – 1 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.