## *Відповіді до завдань дистанційного етапу олімпіади з математики*

1. Обчисліть значення виразу $\log_3 \frac{1}{27}$.

*Розв'язання:* $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3\left(\frac{1}{3^3}\right) = \log_3 (3)^{-3} = -3 \cdot \log_3 3 = -3 \cdot 1 = -3$.

**Відповідь: -3**

2. Розв'яжіть рівняння: $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

*Розв'язання:* $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ – біквадратне рівняння

Заміна: $t = x^2$, $t \ge 0$

$4t^2 - 5t + 1 = 0$

$D = 9 > 0, \sqrt{D} = 3$

$t_1 = \frac{5+3}{8} = 1$; $t_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;

$x^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$.

**Відповідь:** $\pm 1$, $\pm \frac{1}{2}$

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt[3]{x-44} = 9$.

*Розв'язання:* $\sqrt[3]{x-44} = 9$; $\left(\sqrt[3]{x-44}\right)^3 = 9^3$; $x - 44 = 729$; $x = 773$.

**Відповідь: 773**

4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 5x - 3y = 3. \end{cases}$

*Розв'язання:* метод підстановки

З першого рівняння виражаємо $x = 11 - 2y$ і підставляємо у друге рівняння

$5(11 - 2y) - 3y = 3$; $55 - 10y - 3y = 3$; $-13y = -52$; $y = 4$.

Підставляємо отримане значення змінної у: $x = 11 - 2y = 11 - 2 \cdot 4 = 3$.

**Відповідь: (3;4)**

5. Розв'яжіть рівняння: $6^{x^2+4x-12} = 1$.

*Розв'язання:* $6^{x^2+4x-12} = 1$ – показникове рівняння, яке необхідно звести до однієї основи.

$6^{x^2+4x-12} = 6^0$; $\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$;

$D = 64 > 0, \sqrt{D} = 8$,

$x_1 = \frac{-4-8}{2} = -6$; $x_2 = \frac{-4+8}{2} = 2$.

**Відповідь: -6; 2**

6. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt[4]{2x-7}$.

*Розв'язання:*

Областю визначення заданої функції є множина всіх значень аргументу, при яких підкореневий вираз невід'ємний: $2x-7\geq 0$; $2x\geq 7$; $x\geq 3{,}5$.

**Відповідь:** $D(y)=[3{,}5;+\infty)$

7. Знайдіть похідну функції $f(x)=x^2+4x-8$.

*Розв'язання:* $f'(x)=\left(x^2+4x-8\right)'=\left(x^2\right)'+(4x)'-(8)'=2x+4$.

**Відповідь:** $f'(x)=2x+4$

8. Знайти п'ятий член арифметичної прогресії: 19,15…

*Розв'язання:* задана арифметична прогресія, де $a_1$=19, $a_2$=15, $d$= $a_2$ - $a_1$;

$d$=15-19= -4;

$a_5$ знайдемо за формулою: $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, при $n=5$.

$a_5=a_1+(5-1)\cdot d=19+4\cdot(-4)=19-16=3$;

**Відповідь:** $a_5=3$.

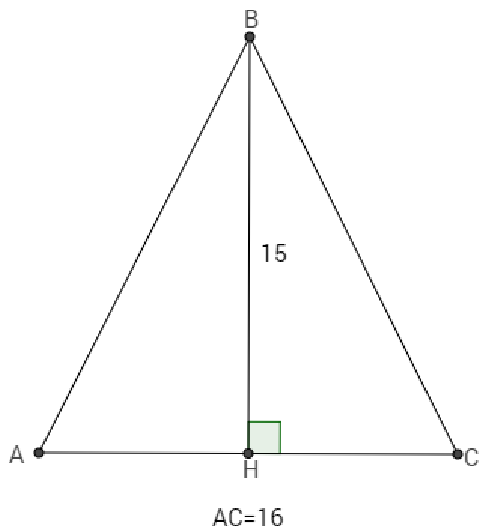
9. У класі 30 учнів, 10 % з них навчаються на «відмінно». Скільки відмінників у класі?

*Розв'язання:* знайдемо 10% від числа 30: $30\cdot 10\%=30\cdot 0{,}1=3$.

**Відповідь: у класі 3 учні навчаються на «відмінно»**

10. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а висота – 15 см.

*Розв'язання:*




**<u>Перший випадок:</u>**

Нехай $\Delta ABC$ – рівнобедрений, AB=BC, основа AC=16 см, висота *проведена до основи* BH=15 см.

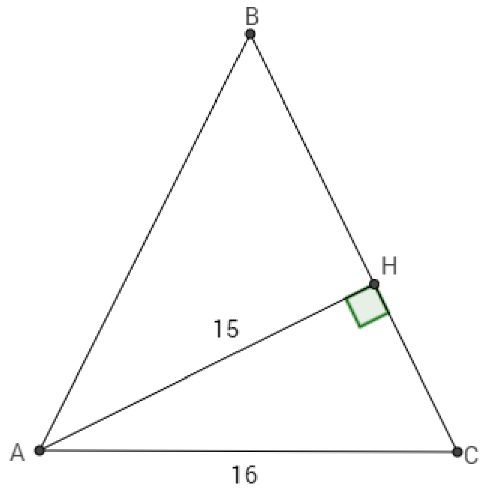
Розглянемо прямокутний трикутник $\Delta BHC$ ( $\angle H=90°$): BH=15 см за умовою,

$HC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 16=8$ (см), бо BH – медіана.

Тоді за теоремою Піфагора: $BC^2=BH^2+HC^2$;

$BC^2=15^2+8^2$; $BC^2=289$; $\Rightarrow$ $BC=17$ (см).

**Відповідь: бічна сторона трикутника 17 см.**




**Другий випадок:**

Нехай $\Delta ABC$ – рівнобедрений, AB=BC, основа AC=16 см, висота *проведена до бічної сторони* AH=15 см.

Розглянемо прямокутний трикутник $\Delta AHC$ ( $\angle H = 90°$). За теоремою Піфагора:

$AC^2 = AH^2 + HC^2$;

$16^2 = 15^2 + HC^2$; $HC^2 = 256 - 225 = 31$; $\Rightarrow$

$HC = \sqrt{31}$ (см).

Позначимо x=BH, тоді BC=AB=x+$\sqrt{31}$.

Розглянемо прямокутний трикутник $\Delta AHB$ ( $\angle H = 90°$). За теоремою Піфагора:

$AB^2 = BH^2 + HA^2$;

$(x+\sqrt{31})^2 = x^2 + 15^2$; $x^2 + 2\sqrt{31}x + 31 = x^2 + 225$; $2\sqrt{31}x = 194$; $x = \frac{194}{2\sqrt{31}} = \frac{97\sqrt{31}}{31}$.

Таким чином, бічна сторона трикутника $\Delta ABC$ становить:

BC=AB=x+$\sqrt{31}$ = $\frac{97\sqrt{31}}{31}$ + $\sqrt{31}$ = $\frac{128\sqrt{31}}{31}$ (см).

**Відповідь: бічна сторона трикутника $\frac{128\sqrt{31}}{31}$ см.**