Відповіді до завдань

очного туру олімпіади з математики

1. Спростіть вираз: $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$.

Розв'язання:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos\alpha}{\sin \alpha} = 2\cos\alpha .$$

Відповідь: $2\cos\alpha$**.**

2. Обчисліть: $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}$.

Розв'язання:

$$\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5} = \log_2\left(5 \cdot \frac{8}{5}\right) = \log_2 8 = 3.$$

Відповідь: 3.

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{4x^2 + 5x - 2} = 2$.

Розв'язання:

$$\sqrt{4x^2 + 5x - 2} = 2$$

$$4x^2 + 5x - 2 = 4;\ 4x^2 + 5x - 6 = 0;$$

$$D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 25 + 96 = 121 = 11^2.$$

$$x_1 = \frac{-5 - 11}{8} = -2;\ x_2 = \frac{-5 + 11}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Перевірка:

$$\sqrt{4 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2} = \sqrt{16 - 10 - 2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt{4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{15}{4} - 2} = \sqrt{\frac{24}{4} - 2} = \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Відповідь: -2, $\frac{3}{4}$**.**

4. Розв'яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} 2x - (x - 4) \le 6, \\ x \ge 3(2x - 1) + 18. \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x-(x-4)\le 6, \\ x\ge 3(2x-1)+18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-x+4\le 6, \\ x\ge 6x-3+18. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2, \\ -5x\ge 15. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2, \\ x\le -3. \end{cases} \Rightarrow x\le -3.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;-3]$**.**

5. Розв'яжіть рівняння: $\cos 5x=-1$.

Розв'язання:

$\cos 5x=-1$;

$5x=\pi+2\pi k, k\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2\pi k}{5}, k\in Z$.

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2\pi k}{5}, k\in Z$.

6. Знайдіть корінь рівняння: $4^x+6\cdot 2^x-7=0$.

Розв'язання:

$4^x+6\cdot 2^x-7=0$

Заміна: $2^x=t>0$

$t^2+6t-7=0$.

$t_1=1, t_2=-7<0$ - сторонній корінь.

$2^x=1,\ x=0$.

Відповідь: $x=0$.

7. Знайдіть похідну функції $f(x)=(2x-1)\sin x$.

Розв'язання:

$$f'(x)=(2x-1)'\sin x+(\sin x)'(2x-1)=2\sin x+\cos x(2x-1)=2\sin x+2x\cos x-\cos x$$

Відповідь: $f'(x)=2\sin x+2x\cos x-\cos x$**.**

8.Обчисліть $\int\limits_1^3(2x+1)dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_1^3(2x+1)dx=\frac{2x^2}{2}+x\Big|_1^3=x^2+x\Big|_1^3=9+3-(1+1)=12-2=10$$

Відповідь: 10.

9. При якому значенні a вектори $\bar{a} = (5;-4;a)$ і $\bar{b} = (4;-2;-7)$ будуть перпендикулярні?

Розв'язання:

$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$;

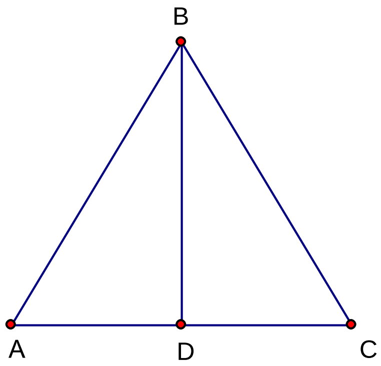
$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 5 \cdot 4 + (-4) \cdot (-2) + a \cdot (-7) = 0$; $20 + 8 - 7a = 0$; $28 - 7a = 0$; $-7a = -28$;

$a = 4$.

Відповідь: *a*=4.

10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см. Висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

Розв'язання:



Нехай AC=2x, тоді DC=AD=x, BD=2x-6, AB=BC=15 см.

ΔADB $(\angle D = 90°)$

За теоремою Піфагора: $15^2 = x^2 + (2x-6)^2$

$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 225$;

$5x^2 - 24x - 189 = 0$;

$D = 24^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-189) = 576 + 3780 = 4356 = 66^2$;

$x_1 = \frac{24-66}{10} = -\frac{42}{10} = -4{,}2$ – сторонній корінь

$x_2 = \frac{24+66}{10} = \frac{90}{100} = 9$ (см).

AC=2x= $2 \cdot 9 = 18$ (см).

Відповідь: 18 см.