ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

Ярослава Соколова

Науковий керівник: канд.ф-м наук, доцент Ключник І.Г.

Кіровоградський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка

Анотація: *Для деякої системи диференціальних рівнянь будується її розв'язок в околі регулярної особливої точки.*

Ключові слова: *Диференціальні рівняння, регулярна особлива точка.*

Теорія звичайних диференціальних рівнянь почала розвиватися одночасно з виникненням диференціального й інтегрального числення. Важливу роль у розвитку теорії диференціальних рівнянь відіграє застосування сучасних електронних обчислювальних машин. Дослідження диференціальних рівнянь часто полегшує можливість провести обчислювальний експеримент для виявлення тих чи інших властивостей їх розв'язок, які потім, можуть бути теоретично обґрунтовані і служать фундаментом для подальших теоретичних досліджень. Теорія звичайних диференціальних рівнянь являє собою багату, широко розгалужену теорію.

Теорія асимптотичних методів знаходить своє застосування в розвитку таких прикладних областей, як теорія автоматичного регулювання, квантова механіка, газодинаміка, кінематика та інші. В. Вазов, Й. Сібуйя, Г. Лангер, Сяо Линь. Дж. Біркгоф [1] розглядав загальну теорію диференціальних рівнянь та теорію динамічних систем. С.А. Ломов [2] запропонував метод інтегрування лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, також розглядав сингулярно збурене диференціальне рівняння з регулярною особливістю. Американський математик Ф. Олвер [3] досліджував асимптотичні наближення розв'язку рівняння з великим параметром. М. В. Федорюк [4] розглядав аналітичне рішення в комплексній площині рівнянь з аналітичними коефіцієнтами, зокрема явище Стокса. А.Б.Васильєвой та В.Ф. Бутузовим [5] запропоновано асимптотичний розклад по малому параметру розв’язування нелінійних систем з малим параметром при частині похідних. Розв’язування таких систем визначається деякими додатковими умовами, використовуючи більш просту систему рівнянь, яка отримується з цієї, коли формально покласти $\varepsilon = 0$, у випадку, якщо система не має малого параметра при похідній. Причому права частина залежить від параметра ε регулярним чином. Однак, початкове рівняння не належить до типу рівнянь з регулярною правою частиною. Це відразу створює додаткові і причому значні труднощі при дослідженні. Однією з проблем, які не виникають для цього випадку, є розв’язування виродженого рівняння, яке отримується при $\varepsilon = 0$ і має нижчий порядок порівняно з вихідними рівнянням, принципово не може задовольняти всім додатковим умовам, якими визначається досліджуваний розв’язок початкової системи, і тому, отримавши за допомогою скороченого рівняння наближену формулу для цього розв’язку, потрібно з’ясувати питання про те, які з визначальних його умов потрібно зберегти, а які відкинути для побудови розв’язку скороченого рівняння.

Аналітичні розв'язки нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійними відхиленнями аргументів досліджував А. М. Самойленко [6]. Він же вперше побудував асимптотичні розв’язки нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь при наявності імпульсного впливу. Метод асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем з виродженою в точці матрицею при похідній, з використанням степеневої функції, запропоновано Г.В. Завізіоном в [7].

Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$xY' = A(x)Y \qquad (1)$$

де $A(x)$ голоморфна матриця.

Зробимо у рівнянні (1) заміну

$$Y = P(x)Z$$

Рівняння (1) прийме вигляд

$$xZ' = B(x)Z \qquad (2)$$

де

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) = xP^{-1}(x)P'(x) \tag{3}$$

Причому, рівняння (3) еквівалентне рівнянню

$$xP'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x) \tag{4}$$

Покладемо

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r, A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r, B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^r \tag{5}$$

Підставимо матриці вигляду (5) у рівняння (4) та почленно перемноживши і прирівнявши члени з однаковими степенями x в обох частинах отриманої рівності, отримаємо рівняння вигляду:

$$A_0 B_0 - P_0 B_0 = 0 \tag{6}$$

$$(A_0 - rI)P_r - P_r B_0 = -\sum_{s=0}^{r-1} (A_{r-s} P_s - P_s B_{r-s}), r \geq 0$$

У (6) найпростіше вибрати B_0, вважаючи $B_0 = A_0$, тоді $P_0 = I$. У [8] доведена наступна теорема.

Теорема. Якщо $A(x)$ голоморфна при $x = 0$ і якщо жодні два власних значення $A(0)$ не відрізняються на додатне ціле число, то диференціальне рівняння

$$xY' = A(x)Y$$

має матричний розв'язок вигляду

$$Y = P(x)x^{A(0)}, P(0) = I \tag{7}$$

причому $P(x)$ голоморфна при $x = 0$, I - одинична матриця. Степеневий розклад $P(x)$ можна отримати за допомогою раціональних операцій над коефіцієнтами A_r розкладу

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$$

Розглянемо матричне диференціальне рівняння вигляду

$$xY' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix} Y \tag{8}$$

Представимо матрицю $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix}$ для диференціального рівняння (8), у вигляді (5):

$$A_n=\frac{A^{(n)}(0)}{n!},\ A(0)=A_0,\ A_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2=\frac{\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right|_{x=0}}{2!}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Власні значення матриці A_0

$$\lambda_{1,2}=0, \lambda_1-\lambda_2=0.$$

не відрізняються на ціле додатне число, тому згідно теореми, розв'язок рівняння шукаємо у вигляді (7), де I - (2×2) розмірна одинична матриця.

$$P_0=I,\ \ B_0=A_0, r=1$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$(A_0-I)P_1-P_1B_0=-(A_0P_0-P_0B_0)$$

З цього рівняння знайдемо P_1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Після елементарних перетворень отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1+x_3=0 \\ -x_2+x_4-x_1=0 \\ -x_3=0 \\ -x_4=0 \end{cases}$$

З якої $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$, отже

$$P_1\equiv 0$$

Знайдемо матрицю P_2 з наступного рівняння:

$$(A_0-2I)P_2-P_2B_0=-(A_1P_0-P_0B_1)$$

Розв'язавши останню систему рівнянь, маємо

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0,$$

отже

$$P_2 \equiv 0$$

Таким чином, врахувавши знайдені значення маємо шуканий розв'язок диференціального рівняння з точністю до x^2.

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 \right) x^{A(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{A(0)}.$$

Висновок: для деякої системи диференціальних рівнянь з регулярною особливою точкою побудований наближений ров'язок.

Список літератури:

1. Биркгоф Дж. Природа, влияние и значение относительности.- Ижевск: НИЦ.-2001.-176 с.

2. С.А.Ломов Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука. -1981. - 400 с.

3 .Ф. Олвер Введение в асимптотические методы и специальные функции.- М.:Наука.- 1978 .-376 с.

4. М.В. Федорюк Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Наука. - 1983.- 352 с.

5. В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённых уравнений .-М.:Наука.-1973.-272с.

6. А.М Самойленко, А.Г. Пелюх Асимптотически ограниченные на всей оси решения систем ленейно дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. - 1994. –Т.46,№11. - С.1597-1601.

7.Г.В. Завизион Система линейных дифференциальных уравнений с вырожденностью в точке // Мат. Заметки.-2008.-Т.83, вып.5.-С.796-800.

8. Wasow W. Linear Turning Point Theory. -NewYork, Springer-Verlag 1985.

Відомості про автора:

Соколова Ярослава Анатоліївна - студентка VII курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка