ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ У ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВИХ ЗАДАЧАХ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Петрунчак Вікторія

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Анотація: *у статті висвітлено аспекти розв'язування конкурсних задач з теорії чисел, що спираються на принцип Діріхле, які можуть бути використані для підготовки учнів до математичних змагань, гурткової та дослідницької роботи.*

Ключові слова: *принцип Діріхле, подільність, прості числа.*

Актуальність. Життя ставить серйозні вимоги щодо підготовки вчителя – лише добре провести урок сьогодні замало. Факультативні заняття, гурткова робота, дослідницька діяльність учнів – це ті необхідні форми роботи, які диктує життя. Дана стаття сприяє поглибленню та розширенню знань з математики учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

Метою статті є надання методичної допомоги учням, студентам педагогічних вишів і вчителям у використанні одного з розділів теорії чисел у поєднанні з принципом Діріхле та розв'язуванні конкурсних задач такого типу.

Завдання: проаналізувати конкурсні задачі теорії подільності, що розв'язуються із застосуванням принципу Діріхле, підібрати та осучаснити приклади такого типу і навести до них власні розв'язання.

У більшості випадків розв'язування конкурсних задач потребує індивідуального підходу, проте часто допомагає принцип Діріхле, який формулюється так: У кожній сукупності з n множин, де загальна кількість елементів перевищує n, є принаймні одна множина, в якій міститься не менше двох елементів [1, с. 4].

Задача 1. Чи завжди серед будь-яких 2017 цілих чисел знайдеться два числа, різниця яких ділиться на 2016?

Розв'язання. Нехай $n_1, n_2, ..., n_{2017}$ – довільні цілі числа. Для кожного n_i знайдуться цілі невід'ємні числа q_i і r_i, $r_i \in \{0, 1, ..., 2015\}$ (частка і остача від ділення від ділення на 2016) такі, що $n_i = 2016 \cdot q_i + r_i$, $i = \overline{1,2017}$. Тоді різниця $n_i - n_j = 2016 \cdot (q_i - q_j) + (r_i - r_j)$. Звідси випливає, що на 2016 буде ділитися різниця тих чисел, які при діленні на 2016 мають однакові остачі. Оскільки чисел є 2017, то є усього 2017 остач: $r_1, r_2, ..., r_{2017}$, а значення, яких вони можуть набувати, тільки 2016: $r_i \in \{0,1,...,2015\}$, то за принципом Діріхле серед них обов'язково є дві однакові: $\exists i,k : r_i = r_k$, тоді різниця чисел n_i й n_k a_j буде ділитися на 2016.

Зауваження. Розв'язуючи таку задачу вперше, бажано взято, наприклад, **чотири** числа, записавши їх під диктовку учнів на дошці, порахувати усі можливі остачі від ділення на **три**, обчислити різниці та «відчути», що існує хоч би одна така пара, яка ділиться на три, а потім спробувати узагальнити на 2017 чисел.

Задача 2. Доведіть, що для довільного $n \in N$ існує $m \in N$, для якого $\left(2017^m - 1\right) \vdots 5^n$ [2, с. 63].

Доведення. **1 спосіб.**

Етап 1. Аналіз розв'язання задачі та висунення робочої гіпотези.

Оскільки $n \in N$, починаємо з $n = 1$. Очевидно, існує $m = 4$ таке, що $\left(2017^4 - 1\right) \vdots 5^1$ і умова задачі виконується, оскільки $(2017,5) = 1; 2017^{\varphi(5)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5)$ і $\varphi(5) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$, маємо $2017^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5)$ за теоремою Ейлера.

При $n = 2$ прагнемо підібрати m так, щоб $\left(2017^m - 1\right) \vdots 5^2$. Оскільки $(2017,25) = 1;\ 2017^{\varphi(25)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 25)$ і $\varphi(25) = 25 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$, то за теоремою Ейлера маємо, що $2017^{20} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 25)$, тобто $\left(2017^{20} - 1\right) \vdots 5^2$.

При $n = 3$ підбираємо m так, щоб $\left(2017^m - 1\right) \vdots 5^3$. Аналогічно: $(2017,125) = 1;\ 2017^{\varphi(125)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 125)$ і $\varphi(125) = 125 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$, тоді за теоремою Ейлера маємо, що $2017^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 125)$, тобто $\left(2017^{100} - 1\right) \vdots 5^3$.

Порівнюючи три отримані результати, висуваємо гіпотезу: $(\forall n \in N)(\exists m \in N)\ \left(2017^m - 1\right) \vdots 5^n \Rightarrow \left(2017^{5m} - 1\right) \vdots 5^{n+1}$.

Етап 2. Доведення робочої гіпотези проводиться нескладно методом математичної індукції.

Із означення подільності маємо: $\left(2017^m-1\right) \vdots 5^n \Leftrightarrow 2017^m-1=A\cdot 5^n,\ A\in Z$ або (що те ж саме) $2017^m=A\cdot 5^n+1,\ A\in Z$.

Доведення (індукція по n).

1. База індукції $n=1$ перевірена при висуненні робочої гіпотези: для $n=1$ існує $m=4$.

2. Індукційне припущення: $(\forall n\in N)(\exists m\in N)$, що $2017^m=A\cdot 5^n+1,\ A\in Z$.

3. Індукційний крок: покажемо, що $(\forall n+1)(\exists m')$ таке, що $2017^{m'}=B\cdot 5^{n+1}+1,$ причому $B\in Z,\ m'=5m$.

$$2017^{m'}=2017^{5m}=\left(A\cdot 5^n+1\right)^5=\underbrace{\left(A\cdot 5^n\right)^5+5\left(A\cdot 5^n\right)^4+10\left(A\cdot 5^n\right)^3+10\left(A\cdot 5^n\right)^2+5\cdot\left(A\cdot 5^n\right)}_{\vdots\, 5^{n+1}}+1.$$

Вираз, що містить перші п’ять доданків ділиться націло на 5^{n+1}, тобто дорівнює цілому числу $B,\ B\in Z$, помноженому на 5^{n+1}. А тоді $2017^{5m}=B\cdot 5^{n+1}+1\ (B\in Z)\Leftrightarrow\left(2017^{5m}-1\right)\vdots 5^{n+1}$. Отже, твердження виконується для усіх натуральних значень n.

2 спосіб.

Наведемо інше доведення, використавши принцип Діріхле.

При діленні на 5^n усі натуральні числа дають 5^n остач (скінченне число): $0,1,2,\ldots,5^n-2,5^n-1$. Оскільки натуральних чисел виду 2017^m нескінченно багато, то за принципом Діріхле $\exists m_1,m_2\in N$, $m_1\neq m_2$ такі, що 2017^{m_1} та 2017^{m_2} дають однакові остачі при діленні на 5^n (не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $m_1>m_2$). А тоді різниця $\left(2017^{m_1}-2017^{m_2}\right)\vdots 5^n$. Очевидно, що $\left(2017^{m_1}-2017^{m_2}\right)\vdots 5^n \Leftrightarrow 2017^{m_2}\left(2017^{\Delta m}-1\right)\vdots 5^n$, де $\Delta m=m_1-m_2$. Оскільки $(2017,5)=1$, то і будь-які їхні натуральні степені також взаємно прості, тобто $(5^n,2017^{m_2})=1$. А тоді $\left(2017^{\Delta m}-1\right)\vdots 5^n$. Чим завершується доведення.

Перш, ніж розглянемо наступну задачу, проговоримо про функцію π(n), що показує кількість простих чисел на проміжку [2; n], наприклад, π(10)=4, бо простими числами з проміжку [2; 10] є лише чотири числа 2; 3; 5; 7. Відомо, що у першій сотні 25% простих чисел, тобто π(100)=25.

Задача 3. Дано 25 складених чисел, які не перевищують 9000. Доведіть, що які-небудь два з них мають спільний дільник, більший від одиниці.

Доведення. Скористаємось ознакою простого числа: число (більше від одиниці) є простим, якщо воно не ділиться на жодне просте, що не перевищує кореня із цього числа, обчислимо $\sqrt{9000} < 95$. Простими на проміжку [2; 100] є числа 2; 3; …, 89; 97, усього 25, тоді π(95)=24, бо число 97 не входить у проміжок [2; 95].

Розглянемо усі складені числа $n_1, n_2, ..., n_{25}$, їх 25, та поставимо кожному у відповідність його найменший простий дільник: $n_1 \mapsto p_1, n_2 \mapsto p_2, ..., n_{25} \mapsto p_{25}$. Тоді кожен простий дільник p_i не перевищує кореня із числа n_i; оскільки усі числа не перевищують 9000, то $\sqrt{n_i} < 95$. Чисел у нас 25, а простих дільників, що не перевищують корінь із n_i, усього двадцять чотири, а тому за принципом Діріхле принаймні двом числам буде поставлений у відповідність один і той самий простий дільник, а отже саме ці два числа і не будуть взаємно простими, тобто матимуть спільний дільник, більший від одиниці.

Висновки. У даній роботі теоретико-числові конкурсні задачі розв'язані з використанням різних способів та прийомів, проте один із способів спирався на принцип Діріхле. Ми притримуємося думки, що краще одну задачу розв'язати кількома способами, ніж кілька однотипних задач одним способом, тому прагнули навести розв'язання задач хоч би двома способами. Матеріал адресований учням, що цікавляться математикою, студентам педагогічних вишів та учителям математики.

Список літератури:

1. Вороний О.М. Вибрані задачі шкільної математики. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – 232 с.

2. Ізюмченко Л.В., Макарчук О.П. Розв'язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких

робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 124 с.

Відомості про автора:

Петрунчак Вікторія Михайлівна – студентка VII курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.