РОЗКЛАД В СТЕПЕНЕВИЙ РЯД ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ РЕКУРЕНТНОСТЕЙ

Пеліпака Ольга

Науковий керівник: докт. ф-м наук, професор Волков Ю.І.

Кіровоградський державний педагогічній університет імені Володимира Винниченка

Анотація: *На конкретних прикладах проілюстровано як методом рекурентних співвідношень можна знаходити явні формули для коефіцієнтів степеневих рядів дробово-раціональних функцій. Зокрема, показано як отримати документи натуральних чисел із заданими частинами.*

Ключові слова: *рекурентність, формула Біне, числа Люка, послідовність Перріна, денумерант.*

Нехай $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ дробово-раціональна функція, де $P(z) = a_0 + a_1 z \ldots + a_k z^k$, $Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m,\ y_0 \neq 0, k < m$.

Оскільки функція $R(z)$ аналітична в крузі, радіус якого дорівнює найменшому модулю нулів многочлена $Q(z)$, то її можна розкласти в степеневий ряд $R(z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_n z^n + \cdots$

З теорії степеневих рядів відомо, що коефіцієнти цього ряду можна знайти за формулами $y_k = (\frac{d}{dz})^n\, R(z)|z = 0$, та отримати прості явні формули для y_k в більшості випадків складно.

Метою роботи є показати, як за допомогою рекурентних співвідношень для чисел y_k отримати інші формули для цих коефіцієнтів.

Перепишемо співвідношення $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ так: $R(z)Q(z) = P(z)$, або $(y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z зліва і справа, матимемо систему (1)

$$\begin{cases} y_0\, b_0 = a_0 \\ y_1 b_0 + y_0 b_1 = a_1, \\ y_2 b_0 + y_1 b_1 + y_0 b_2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m b_0 + y_{m-1} b_1 + \cdots + y_1 b_{m-1} + y_0 b_m = a_m \end{cases}$$

……………………………..

(2) $y_{n+m}b_0 + y_{n+m-1}b_1 + \cdots + y_n b_m = 0$, якщо $n + m > k$

…………………………

Система (1)+(2) це трикутна система лінійних рівнянь відносно невідомих $y_0, y_1, \ldots$, яка легко розв'язується послідовним знаходженням невідомих, та y_n можна отримати з рекурентного співвідношення (2). Це лінійне однорідне різницеве рівняння з постійними коефіцієнтами для якого рівняння $Q\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ є характеристичним. Добре відомо (див., наприклад, [1]) як розв'язати такі рівняння.

Спочатку знаходиться загальний розв'язок такого рівняння, який залежатиме від довільних сталих $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$, які знаходити з початкових значень $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, - розв'язок системи (1).

Приклад 1. Знайти коефіцієнти y_n розкладу в степеневий ряд функції $R(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$

В даному випадку маємо $a_0 = 0, a_1 = a_2 = \cdots = 0;\ b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = -1$

(3) $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$.

Характеристичне рівняння $z^2 - z - 1 = 0$, $y_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$.

Для знаходження C_1 і C_2 знаходимо y_0 і y_1 з системи $\begin{cases} y_0 b_0 = a_0 \\ y_1 b_0 + y_0 b_1 = a_1, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y_0 * 1 = 1 \\ y_1 * 1 + y_0(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow y_0 = y_1 = 1$ і для знаходження C_1 і C_2 розв'язуємо систему таких рівнянь

(4) $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 z_1 + C_2 z_2 = 1 \end{cases}$

Звідси $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};\ C_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Тому (5) $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)$

Рекурентне співвідношення (2) породжує таку послідовність 1,1,2,3,5,8,13,21,34,… Тобто це послідовність чисел Фібоначчі, а формули (5) це знаменита формула Біне для цих чисел.

Приклад 2. Знайти коефіцієнти y_n розкладу в степеневий ряд функції $R(z) = \frac{2-z}{1-z-z^2}$.

В даному випадку маємо $a_0 = 2;\ a_1 = 1;\ b_0 = 1;\ b_1 = -1;\ b_2 = -1;$ $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$, тобто таке ж рекурентне співвідношення як і у прикладі 1, і, отже, $y_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$, але в цьому випадку $y_0 = 2$; $y_1 = 1$ і система для знаходження C_1 і C_2

тут така $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 z_1 + C_2 z_2 = 1 \end{cases}$ Звідси $C_1 = C_2 = 1$, тому $y_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, а послідовність (y_n) тут така: 2,1,3,4,7,11,18,29,47,… Це послідовність чисел Люка.

Приклад 3. Знайти коефіцієнти y_n розклад в степеневий ряд функції $R(z) = \frac{3-z^2}{1-z^2-z^3}$.

В даному випадку a_0; $b_1 = 0$; $b_2 = -1$; $b_3 = -1$; $y_{n+3} - y_{n+1} - y_n = 0$ (6)

Характеристичне рівняння $z^3 - z - 1 = 0$.

Розв'язками цього рівняння будуть числа $z_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27-3\sqrt{69}}{2}} = 1{,}32471795\ldots$

$z_{2,3} = -\frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{27-3\sqrt{69}}{2}} - \frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{2}}$;

$$\rho = |z_{2,3}| = 0{,}868369618\ldots$$

$$\varphi = arg z_2 = 2{,}4377349322\ldots$$

Система (1) для цього випадку дає $y_0 = 3$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$.

Загальний розв'язок рекурентності (6) такий: $y_n = C_1 z_1^n + g^n(C_2 \cos n\varphi + C_3 \sin n\varphi)$

З початкових умов знаходимо, що $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 0$. Отже, $y_n = z_1^n + 2\rho^n \cos n\varphi$, а послідовність (y_n) така: 3,0,2,3,2,5,5,7,10,12,17,22,29,39,…(7)

Послідовність (7) це відома послідовність Перріна (див. [3],[4]).

Приклад 4. Є монети достоїнством в 1 копійку, 2 копійки, 5 копійок. Скількома способами можна розміняти 1 гривню? Шукана кількість способів дорівнює кількості розв'язків у невід'ємних цілих числах рівняння $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 100$.

Кількість розв'язків такого типу рівнянь називається денумерантом. Згідно теорії денумерантів, [2], кількість розв'язків такого рівняння дорівнює денуміранту числа 100 з частинами 1,2,5, і, отже, дорівнює коефіцієнту при z^{100} в розкладі функції $R(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$ в степеневий ряд. Знайдемо цей розклад. Як і в попередніх прикладах маємо: $a_0 = 1, a_1 = a_2 = \cdots = 0$; $b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = -1, b_3, b_4 = 1, b_5 = -1, b_6 = 1, b_7 = 1, b_8 = -1$, то в цьому випадку

$$Q(z) = (1-z)(1-z^2)(1-z^5) = 1 - z - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 + z^7 - z^8,$$

Маємо для коефіцієнтів y_n розкладу в ряд функції $R(z)$ рекурентність

(8) $y_{n+8} - y_{n+7} - y_{n+6} + y_{n+5} - y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$

Характеристичне рівняння для цієї рекурентності таке: $Q(z) = 0$.

Корені цього рівняння:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 1, z_4 = -1, z_5 = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), z_6 = \exp\left(-\frac{2\pi i}{5}\right),$$

$$z_7 = \exp\left(\frac{4\pi i}{5}\right), z_8 = \exp\left(-\frac{4\pi i}{5}\right).$$

Тому загальний розв'язок рекурентності (8) такий:

$$y_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + C_4(-1)^n + C_5 \cos\frac{2\pi n}{5} + C_6 \sin\frac{2\pi n}{5} +$$

$+C_7 \cos\frac{4\pi n}{5} + C_8 \sin\frac{4\pi n}{5}$. Для знаходження сталих $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ спочатку знаходимо $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$ з системи лінійних рівнянь (1) для цього випадку матимемо: $y_0 = 1; y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = 2; y_4 = 3; y_5 = 4; y_6 = 5; y_7 = 6$. Далі розв'язуємо систему рівнянь

$$(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + C_4(-1)^n + C_5 \cos\frac{2\pi n}{5} + C_6 \sin\frac{2\pi n}{5} + C_7 \cos\frac{4\pi n}{5} + C_8 \sin\frac{4\pi n}{5} = y_n,$$

$$n = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

Матимемо:$C_1 = \frac{27}{40}, C_2 = \frac{2}{5}, C_3 = \frac{1}{20}, C_4 = \frac{1}{8}, C_5 = \frac{5-\sqrt{5}}{50}, C_6 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, C_7 = \frac{5+\sqrt{5}}{50}, \quad C_8 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

Отже,

$$y_n = \frac{27}{40} + \frac{2}{5}n + \frac{n^2}{20} + (-1)^n \frac{1}{8} + \frac{5-\sqrt{5}}{50}\cos\frac{2\pi n}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\frac{2\pi n}{5} + \frac{5+\sqrt{5}}{50}\cos\frac{4\pi n}{50} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{50}}\sin\frac{4\pi}{50}, \forall n \in N.$$

Якщо переписати цей вираз у вигляді $y_n = \frac{(n+4)^2}{20} + r_n$ і замітити, що $|r_n| < 0,5$, то y_n можна записати більш компактно так: $y_n = \left|\left|\frac{(n+4)^2}{20}\right|\right|$, символ ||a|| означає найближче до а натуральне число. Остаточно матимемо: $y_{100}\left\|\left|\frac{104^2}{20}\right|\right\| = 541$ і одночасно матимемо ще й таку рівність: $(\frac{d}{dz})^{100}\{(1-z)^{-1}(1-z^2)^{-1}(1-z^5)^{-1}\}|_{z=0} = 541$

$(1\backslash\{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)\})_z^{(100)}|_{z=100} = 541$

Примітка: Багато явних формул для денумерантів натуральних чисел із заданими частинами можна знайти в статті [5].

Список літератури:

1. Волков Ю.І., Войналович Н.М., Елементи дискретної математики, Кіровоград, 2000.
2. Риордан Дж, Введение в комбинаторный анализ, М. : Ил,1963.
3. https: ||oeis, org|Aoo|608
4. Adams W., Shenks D., Strong primality taste that are not sufficient, Mathematics of Campution American Mathematical Society, (1982), 39 (159), 205-300
5. Popovicice T., Asupra unej problem de partitie a numirelor, Cluj,(1953), 7-18.

Відомості про авторів:

Пеліпака Ольга Валеріївна – студентка VII курсу фізико математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.