ЗНАХОДЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ СУМ МЕТОДОМ ГЕНЕРАТРИС

Смолік Тетяна

Науковий керівник: доктор ф-м наук, професор Волков Ю.І.

Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Анотація: *В статті розглядається знаходження скінченних сум методом генератрис, на конкретних прикладах проілюстровано як можна знаходити скінченні суми методом генератрис.*

Ключові слова: *суми, метод генератрис, послідовність, числа Фібоначчі.*

Нехай задана числова послідовність $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

В багатьох розділах математики відшукують замкнені формули для сум

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

В шкільній математиці також розглядаються питання про знаходження сум арифметичної та геометричної прогресій. Існує цілий ряд методів для знаходження сум.

Мета даної статті полягає в тому, щоб детальніше розглянути ще один метод знаходження сум – метод генератрис.

Термін генератриса добре відомий і знаходить широке застосування в дискретній математиці, в теорії ймовірностей і в інших математичних дисциплінах.

Властивості генератрис розглядаються практично в кожній книзі з дискретної математики (див., наприклад [1], глава 7; [2], глава 10; [4], ch 7.)

Генератрисою послідовності $\{a_n\} = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ називається сума степеневого ряду
$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$, яку позначатимемо символом A(z).

Записуватимемо це так: $\{a_n\} \doteqdot A(z)$, або $A(z) \doteqdot \{a_n\}$. З теорії степеневих рядів відомо, що $a_n = \frac{A(n)(a)}{n!}$, та ця формула не завжди допомагає знайти a_n в замкненому вигляді, тому розроблено ряд властивостей генератрис, які спрощують пошуки загального члена послідовності $\{a_n\}$.

В нашій роботі ми використовуємо властивості, які запишемо у вигляді лем.

Лема 1. Якщо $\{a_n\} \doteqdot A(z), \{b_n\} \doteqdot B(z)$, а C_1 і C_2 довільні сталі, то $\{C_1 a_n + C_2 a_n\} \doteqdot C_1 A(z) + C_2 B(z)$.

Лема 2. Якщо $\{a_n\} = \{1, a, a^2, \dots a^n, \dots\}$, то A(z) $\doteqdot \frac{1}{1-az}$, $a \neq 0$.

Зокрема, якщо $\{a_n\} = \{1,1, \dots ,1, \dots\}$, то A(z)= $\frac{1}{1-az}$,

Лема 3. Якщо $\{a_n\} \doteqdot A(z)$, то $\{na_n\} \doteqdot zA'(z)$.

Лема 4. Якщо $\{a_n\} \doteqdot A(z)$ і $r < n$, то $\{a_{n-r}\} \doteqdot z^r A(z)$.

Лема 5. Якщо $\{a_n\} \doteqdot A(z)$, $\{b_n\} \doteqdot B(z)$, то $\{c_n\} = \{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0\} \doteqdot A(z)B(z)$.

Теорема. Якщо $\{a_n\} \doteqdot A(z)$, то $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \doteqdot \frac{A(z)}{1-z}$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \doteqdot \frac{A(z)}{1-z},$$

Доведення. Позначимо генератрису послідовності $\{S_n\}$ через S(z), тобто, $\{S_n\} \doteqdot$ S(z). Тоді в силу леми 4, $\{S_{n-1}\} \doteqdot$ zS(z).

І, отже, матимемо S(z)-zS(z)=A(z), а звідси S(z)=$\frac{A(z)}{1-z}$.

Далі, на конкретних прикладах буде показано, як застосовується ця теорема для знаходження сум.

Приклад 1. За допомогою генератрис вивести формулу для суми членів геометричної прогресії із знаменником рівним числу $a \neq 0$.

Маємо, $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, а в силу леми 2 $\{a_n\} \doteqdot \frac{1}{1-az}$, отже, застосувавши теорему, отримаємо $\{S_n\} \doteqdot S(z) = \frac{1}{(1-z)(1-az)}$.

Розкладаємо S(z) на елементарні дроби, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо $S(z) = \frac{1}{a-1}(\frac{a}{1-az} - \frac{1}{1-z})$, а звідси, в силу лем 1 і 2 отримаємо $\{a_n = \frac{1}{a-1}\ (aa^n - 1) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\}$

Приклад 2. Знайти послідовність $\{a_n\}$ для якої генератрисою служить функція $A(z) = \frac{1}{(1-az)^m}, m \in N$.

Скористаємось відомим розкладом y степеневий ряд функції

$y = (1+x)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ (біноміальний ряд)

Візьмемо в якості $\alpha = -m, x = -az$, отримаємо

$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-m}^n (-az)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-m+1}^{m-1}\, a^n z^n$, отже

$$a_n = a^n C_{n+m-1}^{m-1} \doteqdot \frac{1}{(1-az)^m}. \quad (1)$$

зокрема $\frac{1}{(1-z)^m} \doteqdot \{C_{n+m-1}^{m-1}\}$.

Приклад 3. Знайти $S_n = \sum_{k=0}^{n} ka^k \doteqdot S(z)$в силу леми 3 $\{ka^k\} \doteqdot$ $z\left(\frac{1}{1-az}\right)_z^1 = \frac{az}{(1-az)^2}$

Тому $S(z) = \frac{az}{(1-az)^2(1-z)}$ використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладаємо S(z) на елементарні дроби, матимемо

$$S(z) = \frac{az}{(1-az)^2(1-z)} + \frac{a}{(a-1)(1-az)^2} - \frac{a^2}{(a-1)^2(1-az)}$$

Далі застосовуємо (1), отримаємо $S(z) \doteqdot S_n = \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{a}{a-1} C_{n+1}^1 a^n - \frac{a^2}{(a-1)^2} a^n$

Звідси остаточно $\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{a}{(a-1)^2}(1 - a^n(1 + n - an))$, (2)

Зокрема, якщо $a = 2$, то $\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2(1 + (n - 1)2^n)$

Приклад 4. Знайти суму $S_n \sum_{k=0}^{n} k^2 a^k$

Використовуючи лему 3 і те що $\{ka^k\} \doteqdot \frac{az}{(1-az)^2}$, матимемо $\{k^2 a^k\} \doteqdot z\left(\frac{az}{(1-az)^2}\right)'_z = \frac{a(z+az^2)}{(1-az)^3}$. Тому генератрисою шуканої суми буде функція

$S(z) = \frac{a(z+az^2)}{(1-z)(1-az)^3}$.

Розкладаємо S(z) на елементарні дроби матимемо

$S(z) = \frac{a+a^2}{(1-z)(1-a)^3} - \frac{2a}{(1-a)(1-az)^3} + \frac{a-3a^2}{(1-a)^2(1-az)^2} - \frac{a^2(1+a)}{(1-a)^3(1--az)}$. Далі використовуємо співвідношення (1) і лему 4, отримаємо $\sum_{k=0}^{n} k^2 a^k = \frac{a(-1-a+a^n+a^{1+n}+2na^n-2na^{1+n}+a^n n^2-2n^2 a^{1+n}+n^2 a^{2+n})}{(a-1)^3}$,

Зокрема, якщо $a = 2$, то $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k = 2^{n+1}(3 - 2n + n^2) - 6$;

Приклад 5. Нехай $\{f_n\} = \{1,1,2,3,5,8, \dots\}$ послідовність чисел Фібоначчі.

Знайти $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

Відомо, що генератрисою послідовності $\{f_n\}$ є функція F(z)=$\frac{1}{1-z-z^2}$.

Тому генератрисою суми S_n буде функція S(z)=$\frac{1}{(1-z)(1-z-z^2)}$.

Функцію S(z) розкладаємо на елементарні дроби.

Матимемо: S(z)=$\frac{2+z}{1-z-z^2}$ - $\frac{1}{1-z}$,далі використовуючи лему отримаємо:$S_n = 2f_n + f_{n-1} - 1 = f_n + (f_n + f_{n-1}) - 1 = f_n + f_{n+1} - 1 = f_{n+2} - 1$

Остаточно, $\sum_{k=0}^{n} f_n = f_{n+2} - 1$

Приклад 6. Нехай $\{l_n\}$={2,1,3,4,7,11,…} послідовність чисел Люка. Знайти S_n=$\sum_{k=0}^{n} f_n$. Генератрисою послідовності $\{l_n\}$ є функція L(z)=$\frac{2-z}{1-z-z^2}$. Тому генератрисою суми S(n) буде функція

S(z) = $\frac{2-z}{(1-z)(1-z-z^2)} = \frac{3+z}{1-z-z^2} - \frac{1}{1-z} \neq 3f_n + f_{n-1}$

А через те що $l_n = f_n + f_{n-2}$, то остаточно напишемо $\sum_{k=0}^{n} l_k = l_{n+2} - 1$.

Приклад 7. Знайти суму $\sum_{k=0}^{n}(n+k)fk = nf_0 + (n-1)f_1 + (n-2)f_2 + \cdots + (n-k)f_k$, де f_k – числа Фібоначчі.

Через те, що $\{f_n\} \doteqdot \frac{1}{1-z-z^2}$, $\{n\} \doteqdot \frac{z}{(1-z)^2}$, то

$$S_n = \frac{z}{(1-z)^2(1-z-z^2)} = \frac{3-2z}{1-z-z^2} - \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{2}{1-z} \doteqdot 3f_n + 2f_{n1-1} + (-1)^{n+1}C_{-2}^{n} - 2 =$$

$$f_n + 2f_{n+1} - (n+1) - 2 = f_{n+1} + f_{n+2} - n - 3 = f_{n+3} + \mathrm{n} - 3$$

скористались тим, що числа Фібоначчі f_n задовольняють рекурсивне співвідношення $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$). Отже, $\sum_{k=0}^{n}(n-k)f_k = f_{n+3} - n - 3$

<u>Наслідок.</u> $\sum_{k=0}^{n} kf_k = nf_{n+2} - f_{n+3} + 3$

Випливає з того, що $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$ (див. приклад 5)

Приклад 8. Знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx = cosx + 2cos2x + 3cos3x + \cdots + ncosnx$$

В силу формули Ейлера $\cos\alpha = Re\, e^{i\alpha}$ матимемо $\sum_{k=1}^{n} kcoskx = Re\sum_{k=1}^{n} ke^{ikx}$

Далі скористаємося співвідношенням (2), де в якості основи a візьмемо e^{ix}.

Отримаємо $\sum_{k=1}^{n} ke^{ix} = \frac{e^{ix}(1-e^{ix}-ne^{ix}+ne^{ix})}{(e^{ix}-1)^2}$.

Залишається знайти дійсну частину цього виразу враховуючи те, що $e^{ix} = cosx + isinx$, $e^{ix} = cosnx + isinnx$.

В результаті громіздких технічних перетворень (корисно в таких випадках використати математичний пакет, наприклад «Mathematica», або «Maple») отримаємо $\sum_{k=1}^{n} kcoskx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)ctg\,\frac{x}{2} + \sin\left(\frac{x}{2}+nx\right) + 2nsin\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right) - 1 - ctg^2\frac{x}{2}\right)$.

Приклад 9. Довести, що $\sum_{k\geq 0} C_{n-k}^{k} = f_n$ (n-те число Фібоначчі)

S(z)=$\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k\geq 0} C_{n-k}^{k} = \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} C_{n-k}^{k} z^n = \sum_{k\geq 0} z^k \sum_{n\geq 0} C_{n-k}^{k} z^{n-k} =$
$\sum_{k\geq 0} z^k (1+z)^k = \sum_{k\geq 0} (z+z^2)^k = \frac{1}{1-z-z^2} \doteqdot f_n.$

Висновок. Розглянуті приклади показують, що метод знаходження за допомогою генератрис є ефективним.

Список літератури:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. – М.: Мир, 1998.
2. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики, Кіровоград, РВН, КДПУ ім. В.Винниченка, 2000.
3. Ядренко М.Й., Дискретна математика, Київ, «ТВіМС», 2004.
4. Richard A. Bruadli, Introductory Combinatorics, New Jersy, Pearson Prentice Hall, 2004

Відомості про автора:

Смолік Тетяна Сергіївна – студентка VII курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.