ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ В КОНКУРСНИХ ЗАДАЧАХ

Коваленко Артем

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Анотація: *у статті наведено використання теоретико-числових функцій для розв'язання олімпіадних задач шкільного курсу математики.*

Ключові слова: *функція Ейлера, кількість простих на проміжку, сума і кількість натуральних дільників числа.*

Актуальність. Завдання з теорії чисел, у тому числі задачі з використанням теоретико-числових функцій, зустрічаються на різних математичних змаганнях, олімпіадах, починаючи з сьомого класу. Як правило, такі задачі викликають значні труднощі не тільки у школярів та студентів педагогічних внз, а й у досвідчених вчителів, оскільки потребують нестандартних підходів чи певних спеціальних прийомів.

Мета та завдання. Розглянути теоретико-числові задачі математичних олімпіад нашого регіону, до них навести власні розв'язання.

Нагадаємо, що функція називається числовою, якщо вона визначена при всіх натуральних значеннях аргументу. У цій статті ми розглянемо теоретико-числові функції $[x]$, $\pi(n)$, $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$.

Задача 1. Визначити, скількома нулями закінчується число $\frac{150!}{(50!)^2}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що цілою частиною $[x]$ числа x називається найбільше ціле число, яке його не перевищує. Показник степеня, з яким входить у канонічний розклад $n!$ простий множник p, визначається за формулою: $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\left[\frac{n}{p^4}\right]+\ldots$ [1, с. 50].

Для визначення кількості нулів у записі 150! обчислюємо кількість п'ятірок у розкладі 150! на прості множники (потрібні множники «два» та «п'ять», але «двійок» значно більше, а «п'ятірок» – менше, тому множників «десять» буде стільки, скільки у розкладі даного числа 150! буде «п'ятірок»):

$5^{\alpha}:\alpha=\left[\frac{150}{5}\right]+\left[\frac{150}{5^2}\right]+\left[\frac{150}{5^3}\right]+\ldots=30+6+1=37.$ Тоді у розкладі на прості множники 150! міститься рівно 37 множників «п’ять», а тому можна утворити максимум 37 «десяток», отже число 150! закінчується 37 нулями. Для числа 50! маємо $5^{\beta}:\beta=\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{5^2}\right]+\left[\frac{50}{5^3}\right]+\ldots=10+2+0=12.$ А тому $(50!)^2$ закінчується 12·2=24 нулями, а отже $\frac{150!}{(50!)^2}$ закінчується 37–24=13 нулями.

Відповідь: число закінчується 13 нулями.

Задача 2. У числі 34!=295232799039*0414084761860964352*000000 дві цифри в записі замінено на зірочки. Які саме цифри було замінено?

Розв’язання. Оцінимо, скільки у запису 34! є нулів, для цього обчислимо показник степеня, з яким входить у розклад на прості множники числа 34! число 5 (оскільки двійок значно більше): $\left[\frac{34}{5}\right]+\left[\frac{34}{5^2}\right]+\left[\frac{34}{5^3}\right]+\ldots=6+1+0=7$.

Оскільки 34! ділиться на 10^7, то остання пропущена цифра – 0.

Число 34! також ділиться на 9. За ознакою подільності на 9, сума його цифр ділиться на 9. Оскільки сума записаних цифр і однієї знайденої дорівнює $S=138\equiv 3(\mathrm{mod}\,9)$, то першою пропущеною цифрою є 6.

Відповідь: пропущені цифри 6 і 0.

Вправа 1. Обчисліть значення функції $\pi(45)$.

Розв’язання. Нагадаємо ознаку простого числа: якщо натуральне число n ($n>1$) не ділиться на жодне просте, що не перевищує $\sqrt{n}$, то воно просте [2, с.4]. Для визначення кількості простих чисел $\pi(n)$, що не перевищують $n=45$, скористаємося решетом Ератосфена, для чого випишемо усі числа від 1 до 45. Обчислимо $\sqrt{45}<7$ та випишемо усі прості, які $p\le\sqrt{45}<7$ $(2,3,5)$. Викреслимо число 1, воно не є простим. Наступне у запису число 2 є простим, викреслюємо кожне друге число, воно не є простим, так як ділиться на 2 і більше за два (викреслюємо 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44). Наступне у запису число 3 є простим, викреслюємо кожне третє число, воно не є простим, так як ділиться на 3 і більше за 3 (викреслюємо 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45). Наступне у запису число 5 є простим, викреслюємо кожне п’яте число, воно не є простим (викреслюємо 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45); процес завершено; усі невикреслені числа – прості: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. А тому кількість простих чисел $\pi(45) = 14$.

Відповідь: кількість простих чисел, що не перевищує 45, $\pi(45) = 14$.

Вправа 2. Доведіть, що число 2017 є простим.

Розв’язання. Обчислимо $\sqrt{2017} < 45$, усі прості, що не перевищують 45, обчислені у попередній вправі, їх 14; 2017 не ділиться на 2; 5, бо остання цифра не ділиться на 2 і 5; не ділиться на 3, бо сума цифр дорівнює 10 і не ділиться на 3; альтернативна сума тріад 017–2=15 не ділиться на 7; 11; 13. Аналогічно показуємо, що число не ділиться на решту чисел 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, а тому є простим. Під час розв’язання використали ознаки подільності [2, с.16].

Задача 3. Натуральне число має 2017 дільників. Яку кількість різних натуральних дільників може мати куб цього числа?

Розв’язання. Нагадаємо, що кількість $\tau(n)$ натуральних дільників натурального числа n, канонічний розклад якого на прості множники є: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, визначається за формулою: $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ [2, с. 3].

Число 2017 є простим, це ми обґрунтували у вправі 2. Оскільки за умовою $\tau(n) = 2017$ – просте і $\tau(n) = \alpha + 1 = 2017$, $\alpha = 2016$, тому $n = p^{2016}$ і його куб $n^3 = \left(p^{2016}\right)^3 = p^{6048}$. А тоді $\tau(n^3) = 6048 + 1 = 6049$.

Відповідь: 6049 дільників.

Задача 4. Знайдіть усі натуральні числа, які кратні 10 і мають 33 різних натуральних дільників. Чому дорівнює найменше таке число?

Розв’язання. Оскільки $10 = 2 \cdot 5$, тому шукане число n ділиться на прості числа 2 і 5. Тоді, за умовою задачі, маємо значення функції $\tau(n)$: $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots = 3 \cdot 11 = 33.$ У цій рівності ліворуч перші два множники більші, ніж 1, а праворуч – добуток двох простих чисел. Отже, шукане число не має простих дільників, відмінних від 2 чи 5. Таким чином: $\alpha_1 + 1 = 3, \cdot \alpha_2 + 1 = 11$, а тоді звідси $\alpha_1 = 2, \cdot \alpha_2 = 10$ або навпаки $\alpha_1 = 10, \cdot \alpha_2 = 2$, тобто $2^2 \cdot 5^{10} = 39062500$ або $2^{10} \cdot 5^2 = 25600$. Найменше число $2^{10} \cdot 5^2 = 25600$.

Відповідь: $2^2 \cdot 5^{10}$ або $2^{10} \cdot 5^2$, найменше число $2^{10} \cdot 5^2 = 25600$.

Задача 4. Доведіть, що число є повним квадратом, якщо воно має непарну кількість натуральних дільників.

Розв'язання. За умовою задачі $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ число непарне, тоді кожен множник є непарним числом, а тому числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ є парними: $\alpha_1 = 2\beta_1, \ldots, \alpha_k = 2\beta_k$, а це означає, число $n = \left(p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}\right)^2$ є повним квадратом.

Задача 5. Знайдіть усі непарні числа з проміжку (500; 1000), у кожного з яких сума останніх цифр усіх дільників, враховуючи 1 і саме це число, дорівнює 33.

Розв'язання. Оскільки за умовою шукані числа є непарними, то і усі їхні дільники є числами непарними. Так як число 33 є непарним, то воно є сумою непарної кількості непарних чисел. Тобто шукане число має непарну кількість дільників, а тому є повним квадратом, див. попередню задачу. Перебираємо непарні 23^2=529 (1, 23, 529, сума останніх цифр 13 – не підходить), 25^2=625 (1, 5, 25, 125, 625, сума 21 – не підходить), <u>27^2=729</u> (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, сума 33 – підходить), 29^2=841 (1, 29, 841, сума 11 – не підходить), 31^2=961 (1, 31, 961, сума 3 – не підходить), 33^2>1000.

Відповідь: єдине число 729.

Задача 6. Дано 15 складених чисел, які не перевищують 2017. Доведіть, що якісь два з них мають спільний дільник, більший від одиниці.

Розв'язання. За умовою задачі числа є складеними, для кожного числа n_i розглянемо його найменший простий дільник p_i. Оскільки число n_i складене, воно не менше p_i^2. Звідси $p_i^2 \le 2017$, а тому $p_i < 45 \Rightarrow p_i \le 43$ (квадрат наступного простого числа вже більше за 2017). Простих чисел в списку 2, 3, 5, ..., 43 є 14 (дивись вправу 1). Оскільки чисел 15, а різних простих дільників усього 14, то за принципом Діріхле якісь два дільника у різних чисел повинні співпасти, а тому їхній спільний дільник більший від одиниці.

Вправа 3. Доведіть, що число 496 є досконалим.

Розв'язання. Нагадаємо, що сума $\sigma(n)$ натуральних дільників числа

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою $\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$. Число n називається досконалим, якщо сума усіх його натуральних дільників дорівнює подвоєному числу [2, с. 4].

Запишемо розклад числа 496 на прості множники: $496 = 2^4 \cdot 31$, тоді сума усіх його натуральних дільників $\sigma(496) = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{31^2-1}{31-1} = 31 \cdot 32 = 992 = 496 \cdot 2$ дорівнює подвоєному числу, а тому число є досконалим.

Використовуючи функцію суми $\sigma(n)$ натуральних дільників, можна довести, наприклад, що числа 1184, 1210 є дружніми, тобто сума всіх дільників першого (за винятком самого числа) дорівнює другому числу, а сума всіх дільників другого числа (за винятком самого числа) дорівнює першому числу.

Задача 7. Знайдіть дві останні цифри числа 2017^{482}.

Розв'язання. Дві останні цифри числа $n = 2017^{482}$ є остачею від ділення числа на сто. Теорему Ейлера застосувати можна, бо $(2017;100) = 1$, маємо $2017^{\varphi(100)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 100)$.

Обчислимо функцію Ейлера $\varphi(100)$: $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$, а тому $2017^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 100)$. Поділимо 482 на 40, маємо: $482 = 40 \cdot 12 + 2$, а тоді $2017^{482} = (2017^{40})^{12} \cdot 2017^2$, врахуємо, що $2017^2 \equiv 17^2 \equiv 289 \equiv 89 (\mathrm{mod}\, 100)$, а тоді $2017^{482} = (2017^{40})^{12} \cdot 2017^2 \equiv 1^{12} \cdot 2017^2 \equiv 1 \cdot 89 \equiv 89 \equiv r (\mathrm{mod}\, 100)$.

Відповідь: дві останні цифри числа є 89.

Висновки. Теоретико-числові функції зустрічаються на математичних турнірах, змаганнях, у рівняннях з цілою і дробовою частинами, текстових задачах та ін. Розв'язування теоретико-числових задач сприяє розвитку розумових здібностей, збагаченню математичної культури кожного, хто цікавиться математикою.

Список літератури:

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. – Москва: Просвещение, 1965. – 384 с.
2. Ізюмченко Л.В. Практикум з теорії чисел / Л.В. Ізюмченко. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. – 76 с.

Відомості про автора:

Коваленко Артем Миколайович – студент V курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.