ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Волошинова Ірина

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Анотація: *у статті висвітлено зв'язок алгебри многочленів і математичного аналізу, що сприяють поглибленню знань з математики і можуть бути використані для підготовки учнів до олімпіад та позакласної роботи.*

Ключові слова: *схема Горнера, теорема Безу, корені многочлена.*

Актуальність. Завдання курсу математики полягає в тому, щоб забезпечити в учнів свідоме оволодіння математичними знаннями, вміння застосовувати математику до розв'язування практичних проблем і задач. Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що використання знань алгебри многочленів спрощує розв'язання багатьох прикладних задач.

Мета. Проаналізувати завдання алгебри многочленів, підібрати задачі, що мають прикладне значення, навести приклади розв'язання таких задач.

Приклад 1. Розкласти многочлен $f(x)=x^3-5x^2-2x+12$ за степенями $(x-3)$.

Розв'язання. Використаємо схему Горнера:

	1	–5	–2	12
3	1	–2	–8	–12
3	1	1	–5	
3	1	4		
3	1			

Отримали розклад многочлена: $f(x)=(x-3)^3+4(x-3)^2-5(x-3)-12$.

Приклад 2. Спростити вираз $f(x)=3(x-2)^4-2(x-2)^3+4(x-2)^2+25(x-2)-8$.

Розв'язання. Задачу можна переформулювати так: розкласти многочлен за степенями *x*. Якщо ввести заміну $x-2=y$, звідки $x=y+2$, отримаємо задачу, описану в прикладі 1: розкласти многочлен $3y^4-2y^3+4y^2+25y-8$ за степенями $(y+2)$, маємо $y_0=-2$. Використаємо схему Горнера:

	3	–2	4	25	–8
–2	3	–8	20	–15	22
–2	3	–14	48	–111	
–2	3	–20	88		
–2	3	–26			
–2	3				

Отримали $3y^4-2y^3+4y^2+25y-8=3(y+2)^4-26(y+2)^3+88(y+2)^2-111(y+2)+22$ або $f(x)=3x^4-26x^3+88x^2-111x+22$.

Задача 1. Використовуючи схему Горнера, знайти значення многочлена $f(x)=2x^4+3x^3+3x^2+7x+2$ і його похідних при $x_0=-1$.

Розв'язання. Використаємо схему Горнера

	2	3	3	7	2
–1	2	1	2	5	–3
–1	2	–1	3	2	
–1	2	–3	6		
–1	2	–5			
–1	2				

Тоді $f(-1)=-3$, $\frac{f'(-1)}{1!}=2$, $\frac{f''(-1)}{2!}=6$, $\frac{f^{(3)}(-1)}{3!}=-5$, $\frac{f^{(4)}(-1)}{4!}=2$, звідки $f(-1)=-3$, $f'(-1)=2$, $f''(-1)=12$, $f^{(3)}(-1)=-30$, $f^{(4)}(-1)=48$, $f^{(n)}(-1)=0, n\geq 5$.

Задача 2. Використовуючи схему Горнера, скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=2x^4-22x^3+85x^2-145x+98$ в точці $x_0=2$.

Розв'язання. Як відомо, рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ має вигляд $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$. За схемою Горнера обчислимо значення функції і її першої похідної в точці $x_0=2$:

	2	–22	85	–145	98

2	2	–18	49	–47	4
2	2	–14	21	–5	

Звідки $f(2)=4$, $f'(2)=-5$, і рівняння дотичної $y=-5\cdot(x-2)+4$ або $y=-5\cdot x+14$.

Задача 3. Кут повороту тіла навколо осі змінюється в залежності від часу по закону $\varphi(t)=0{,}2t^2-0{,}3t+0{,}1$. Знайти кутову швидкість (в *рад/с*) обертання в момент часу $t=5$ *с*.

Розв'язання. Як відомо з курсу фізики, кутова швидкість в момент часу $t=t_0$ є значенням похідної кутового переміщення від часу при $t=t_0$. Для обчислення похідної скористаємося схемою Горнера:

	0,2	–0,3	0,1
5	0,2	0,7	3,6
5	0,2	1,7	

Отже, кутова швидкість 1,7 *рад/с*.

Задача 4. Тіло, маса якого $m=3$ *кг*, рухається прямолінійно по закону $x(t)=0{,}5t^2+t+3$ *(м)*. Знайти кінетичну енергію тіла через 5 *с* після початку руху.

Розв'язання. Як відомо, швидкість є похідна від переміщення. Знайдемо значення похідної функції $x(t)$ при $t=5$ за схемою Горнера:

	0,5	1	3
5	0,5	3,5	20,5
5	0,5	6	

Тобто $v=6$ (*м/с*). Тоді кінетична енергія $E=\dfrac{m\cdot v^2}{2}$, $E=\dfrac{3\cdot 6^2}{2}=54$ (*Дж*).

Задача 5. Використовуючи схему Горнера, обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+7x+13}{(x+1)^3}, x=0, x=1, y=0.$

Розв'язання. Функція $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+7x+13}{(x+1)^3}$ приймає невід'ємні значення для всіх невід'ємних x, зокрема і для $x\in[0;1]$. Тоді площа шуканої фігури є визначений інтеграл: $S=\int_0^1\dfrac{x^3+3x^2+7x+13}{(x+1)^3}dx.$

Розкладемо многочлен $p(x)=x^3+3x^2+7x+13$ за степенями $(x+1)$:

	1	3	7	13
–1	1	2	5	8
–1	1	1	4	
–1	1	0		
–1	1			

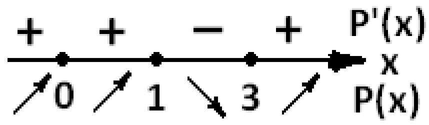
Маємо розклад многочлена за степенями $p(x)=(x+1)^3+0(x+1)^2+4(x+1)+8$, а тоді $f(x)=\frac{(x+1)^3+0(x+1)^2+4(x+1)+8}{(x+1)^3}=1+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{8}{(x+1)^3}$. Звідки матимемо, що площа

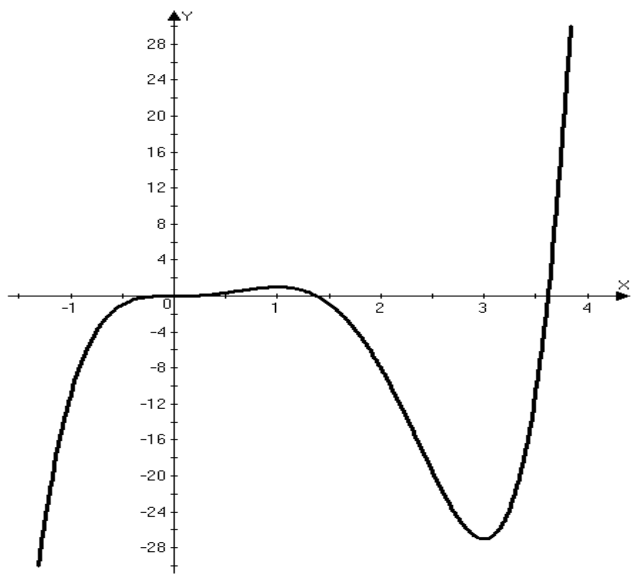
$$S=\int_0^1\frac{x^3+3x^2+7x+13}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\left(1+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{8}{(x+1)^3}\right)dx=\left(x-\frac{4}{(x+1)}-\frac{4}{(x+1)^2}\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=(1-2-1)-(0-4-4)=6.$$

Відповідь: площа фігури 6 кв.од.

Задача 6. Скільки коренів має многочлен $p(x)=x^5-5x^4+5x^3-a$ у залежності від значення параметра a (Задача заочного туру олімпіади мех.-мат. факультету КНУ 2015 р.)?

Розв’язання. Розглянемо многочлен $p(x)=x^5-5x^4+5x^3-a$, його похідна $p'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)=5x^2(x-1)(x-3)$ має двократний корінь $x=0$ і однократні корені $x=1,\ x=3$. Знаки похідної $p'(x)$ і поведінку многочлена $p(x)$ (проміжки монотонності та екстремуми) покажемо на схемі:





Тобто маємо $x_{\max}=1, y_{\max}=1;$ $x_{\min}=3, y_{\min}=-27$. Зобразимо схематично графік многочлена $P(x)=x^5-5x^4+5x^3$ та перетнемо його горизонтальними прямими $y=a$.

Звідки при $a\in(-\infty;-27)\cup(1;\infty)$

даний в умові многочлен $p(x)$ має один корінь, при $a \in \{-27;1\}$ має два корені, при $a \in (-27;1)$ – три корені.

Висновки. Наведеними прикладами не обмежується застосування алгебри многочленів в шкільному курсі математики і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів. Від ефективності використання задач у навчанні математиці значною мірою залежить не тільки якість навчання, виховання і розвитку учнів, але і ступінь їхньої практичної підготовленості до наступної за навчанням діяльності в будь-якій сфері народного господарства і культури. Розглянутий матеріал можна використати на факультативах чи позакласній роботі.

Відомості про автора:

Волошинова Ірина Вікторівна – студентка V курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.