«ЗОЛОТА ПРОПОРЦІЯ» НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Бардиш Наталія
Науковий керівник: канд.пед. наук, доцент Войналович Н.М.
Кіровоградський державний педагогічний університет імені В. Винниченка

***Анотація**: В статті розглядаються деякі методичні рекомендації щодо застосування елементів розділу «Системи числення з ірраціональною основою» на уроках математики в школі.*

***Ключові слова**: послідовність Фібоначчі, золота пропорція, золотий трикутник та прямокутник, формула Біне.*

Тема дослідження: «Системи числення з ірраціональною основою», застосування в шкільному курсі математики.

Серед системи числення з ірраціональною основою особливий інтерес викликають ті, які пов'язані з відомими числами Фібоначчі та «Золотою пропорцією». Означена тема є актуальною, тому, що досить цікава як для студентів, під час вивчення її у курсі «Система числення» з наголосом на розширення поняття про послідовність, рекурентні співвідношення і т.п.; так і для школярів, адже застосування цих понять можливе до розв'язування задач з алгебри та геометрії упродовж всього шкільного курсу математики.

У класах гуманітарного профілю, учні яких орієнтуються на поглиблене вивчення історії, літератури, мови, мистецтва тощо і при цьому мають низький рівень інтересу й мотивації до вивчення математики, проведення уроків на тему «Золота пропорція» допоможе змінити ставлення цих учнів до математики: стане додатковим фактором формування позитивної мотивації при вивченні математики, а також розуміння положення про універсальність математичних знань. У класах з поглибленим вивченням математики впровадження теми «Системи числення» та її розділів про золоту пропорцію та послідовність Фібоначчі, допоможуть поглибити знання з математики, з'ясувати зв'язки математики з іншими галузями знань та сферами життя, сформувати в учнів математичний стиль мислення.

Завдання:

- визначити основні напрямки застосування означеної теми у шкільному курсі математики
- розробити певні методичні рекомендації щодо використання елементів курсу «Системи числення з ірраціональною основою» з адаптацією до знань умінь та навичок школярів.

Пропонуємо методичні рекомендації щодо застосування в шкільному курсі математики розглядуваного матеріалу. Почнемо з 6 класу, де вивчається тема «Пропорції та відношення».

Нестандартні уроки – це неординарні підходи до викладання навчальної дисципліни, його мета проста – пожвавити нудне, захопити творчістю, зацікавити повсякденним, тому, що інтерес – це каталізатор навчальної діяльності. Нестандартний урок – це завжди свято, коли активними є всі учні, де кожен має можливість відчути себе успішним, спроможним бути активним та цікавим для оточуючих.

Тема «Золотий перетин», може стати тим нестандартним цікавим уроком для учнів, що передбачає досить широкий вибір прийомів, методів та форм викладення матеріалу. Тема має неабиякий запас цікавих фактів, пов'язаних з багатьма проявами навколишнього світу, що можуть зацікавити учнів, тому пропонується її розглянути у якості нестандартного уроку – урок-гра, урок-подорож тощо. Але, особливий інтерес викликає математичний характер даного поняття – учні мають побачити на прикладах, що математика, це не тільки «сухі» цифри, це прояв гармонійного дивовижного устрою світу, тим самим підвищити зацікавленість учнів до вивчення математики.

Мета уроку: повторити та узагальнити знань з теми «Пропорції»; познайомити учнів із застосуванням відношення «золотого перерізу»; виховувати інтерес до математики через показ практичного застосування математичних знань в житті людини; розвивати логічне і творче мислення.

Тема «Золота пропорція» надзвичайно багата на приклади та застосування саме цього відношення у природі, мистецтві, архітектурі та навіть представлена у пропорціях людського тіла. Тому і завдання та конкурси можуть бути різноманітними за змістом, формою проведення.

На першому етапі доцільно провести короткий історичний екскурс з приводу послідовності Фібоначчі, його задач про пелюстки квітів та розмноження кроликів. Далі ознайомити учнів з поділом відрізка у відношенні золотого перерізу та числом 1,618.

Конкурси можуть включати такі завдання: порахувати відношення висоти колони до висоти перекриття та фронтону Парфенону (давньогрецька споруда); порахувати пропорції людського тіла; підготувати повідомлення на тему «Золота пропорція у музиці, скульптурі та живописі»; розв'язати кросворд, в якому використовуються поняття, пов'язані з золотим перерізом.

У підсумку зазначити, що математика є не лише цифри та формули, вона присутня у всьому: в устрої рослин, в тілі людини, в музиці і за її законами будується всесвіт. Математика і закони прекрасного, ідеального пов'язані нерозривно.

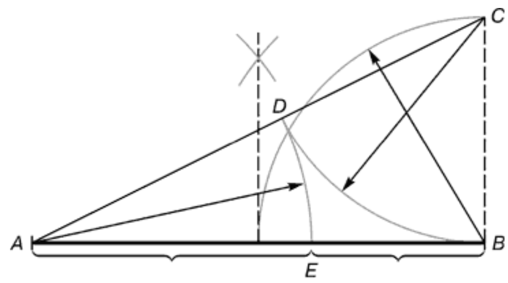
Задачі на побудову

У систематичному курсі геометрії 7 класу спеціально виокремлюють задачі на побудову, які розв'язуються лише за допомогою циркуля і лінійки. Ці задачі мають значну дидактичну цінність, оскільки не тільки формують практичні навички виконання основних побудов, а й розвивають логічне мислення, формують евристичну діяльність.

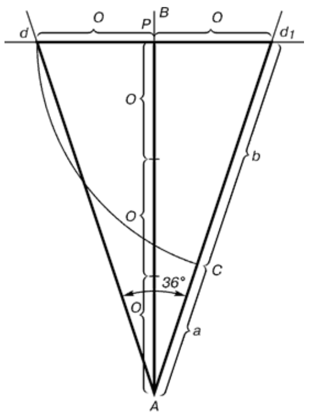
Після того, як учні оволодіють знаннями з основних побудов та вмітимуть їх практично застосовувати, варто провести урок, що буде сприяти актуалізації знань через повторення вже знайомих побудов та набуття нових, завдяки розширенню відомостей про побудову трикутника та поділу відрізка.

Мета уроку: повторити та узагальнити знань учнів про правила побудови геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки; розширити відомості про трикутник та його властивості; пригадати поняття «золотої пропорції»; формувати навички самостійної дослідницької роботи; розвивати абстрактне та логічне мислення.

Практичне знайомство з золотою пропорцією починають з поділу відрізка прямої у відношенні золотої пропорції за допомогою циркуля та лінійки.



1. Креслимо пряму, на якій позначимо відрізок AB.
2. З точки будуємо перпендикуляр, який дорівнює ½AB.
3. Отримуємо точку C, яку з'єднуємо з точкою A.
4. На AC відкладаємо відрізок, рівний BC, отримуємо точку D.
5. Довжину відрізка AD відкладаємо на відрізку AB, отримали точку E, яка і ділить AB у відношенні золотої пропорції.



Після побудови пригадуємо, що золотий перетин – це такий пропорційний поділ відрізка на нерівні частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як сама більша частина відноситься до меншої. Пропонується учням перевірити цей факт, за допомогою лінійки кожен має виміряти довжину відрізка та його поділу, знайти число золотої пропорції.

Побудова золотого трикутника.

1. Проводимо вертикально пряму AB. Від точки A три рази відкладаємо відрізок довільної величини O, отримуємо точку P.
2. Через точку P проводимо перпендикуляр до AB, на отриманій прямій в обидві сторони відкладаємо відрізки O.
3. Отримані точки *d* і *d1* з'єднуємо прямими з точкою A.
4. Відрізок *dd1* відкладаємо на відрізок A*d1*, отримали точку C, саме вона ділить сторону трикутника у відношенні золотої пропорції.

Отримали рівнобедрений трикутник, кут при вершині дорівнює 36°, кути при основі, відповідно 72°. Саме такий золотий трикутник лежить в основі правильного п'ятикутника або пентаграми. [2]

Він володіє певними властивостями, які пропонуються учням дослідити самостійно. По-перше, побудувати бісектрису будь-якого кута при основі та дослідити: отримані трикутники, відношення сторін отриманих після побудови бісектриси; відношення бічних сторін до основи, знайти число золотої пропорції.

Задачі підвищеної складності

Тема «Золота пропорція» та послідовність Фібоначчі стане корисною при розгляді арифметичної та геометричної послідовностей у якості додаткового матеріалу на факультативних заняттях.

Мета: розширити поняття «послідовність», ввести поняття «рекурентне співвідношення», формула Біне, як результат – розв'язування геометричної задачі за допомогою формули Біне.

На початку уроку варто пригадати відомі послідовності: арифметичну та геометричну, правила знаходження членів послідовності. Далі вводимо поняття послідовність Фібоначчі: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, 89, 144…Учні мають на інтуїтивному рівні з'ясувати, яким чином утворюється кожен наступний член послідовності. Отже, якщо u_n – *n*-й член послідовності, то $u_1 = 1, u_2 = 1$ і при $n \geq 2$ елементи u_{n-1}, u_n, та u_{n+1} пов'язані рекурентним співвідношенням $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Рекурентним співвідношенням називається вираз, який дозволяє визначити наступні члени послідовності через попередні. Розв'язання рекурентного співвідношення це формула, яка дозволяє отримати елемент послідовності, що задається рекурсією, по його номеру, без обчислення попередніх елементів.

Особливу роль при вивченні властивостей чисел Фібоначчі відіграє формула

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

яку називають формулою Біне (Жак Біне (1786 – 1856 рр.) - французький математик і астроном).

Існують різні обґрунтування цієї формули, для учнів достатньо перевірити, що числа u_n, які визначаються рівністю задовольняють рекурентне співвідношення: при *n*=1*і n*=2, $u_1 = 1, u_2 = 1$. Якщо ж $n \geq 2$, то

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

де $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

Але тоді права частина формули дорівнює u_{n+1} і, отже, члени послідовності $u_{1,} u_{2,} \dots, u_n, \dots$ задовольняють рекурентне співвідношення, тобто збігаються з відповідними членами послідовності чисел Фібоначчі.

Розглянемо задачу на використання формули Біне до розв'язування задач геометрії.

Задача. В одиничне півколо вписано коло радіуса $r_0 = \frac{1}{2}$. Потім послідовно вписуються кола, які дотикаються діаметра півкола, його дуги та попередньо вписаного кола. Нехай $R_n = \frac{1}{r_n}$ *(n=0,1,2,…),* де r_n – радіус n – го кола. Довести, що

$$R_n = 1 + \frac{1}{2}\left[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\right] \qquad (1).$$

Більш того, як буде показано,

$$R_n = \frac{1}{2}[(\sqrt{2+1})^n + (\sqrt{2}-1)^n] \qquad (2).$$

Розв'язання. Нехай *O* – центр півкола, O_n – центр *n*-го вписаного кола, A_n та B_n – точки його дотику до діаметра та дуги півкола і $O_{n+1}C_n \perp O_nA_n$. З

$\Delta O_{n+1} O_n C_n$, враховуючи співвідношення: $A_n A_{n+1} = O_{n+1} C_n$, $O_{n+1} O_n = r_n + r_{n+1}$, $O_n C_n = r_n - r_{n+1}$, отримуємо рівність

$$A_{n+1} A_n = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}. \qquad (3)$$

Але тоді, $A_{n+1} A_n = A_{n+1} O - A_n O = \sqrt{1 - 2r_{n+1}} - \sqrt{1 - 2r_n}$. (4)

Отже, на основі рівностей (3) та (4) $\sqrt{1 - 2r_{n+1}} - \sqrt{1 - 2r_n} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$, звідки після піднесення до квадрату маємо: $\sqrt{(1 - 2r_n)(1 - 2r_{n+1})} = 1 - (r + r_{n+1}) - 2r_n r_{n+1}$.

Підносячи обидві частини цієї рівності до другого степеня та зводячи подібні доданки, одержуємо таке співвідношення:

$$(1 + 2r_n)^2 {r_{n+1}}^2 + 2r_n(2r_n - 3) r_{n+1} + {r_n}^2 = 0 \qquad (5)$$

Ліва частина в (5) упорядкована за степенями r_{n+1}. Цей же вираз можна упорядкувати й за степенями r_n:

$$(1 + 2r_n)^2 {r_n}^2 + 2r_{n+1}(2r_{n+1} - 3) r_n + {r_{n+1}}^2 = 0 \qquad (6)$$

Замінивши в (6) *n на n* – 1, дістанемо таке співвідношення:

$$(1 + 2r_n)^2 {r_{n-1}}^2 + 2r_{n+1}(2r_{n+1} - 3) r_{n-1} + {r_{n+1}}^2 = 0 \qquad (7)$$

Розглядаючи рівності (5) та (7), бачимо, що r_{n+1} та r_{n-1} є коренями квадратного рівняння $(1 + 2r_n)^2 x^2 + 2r_n(2r_n - 3)x + {r_n}^2 = 0$.

Але тоді за формулами Вієта $r_{n+1} + r_{n-1} = \frac{2r_n(3 - 2r_n)}{(1 + 2r_n)^2}$, $r_{n+1} r_{n-1} = \frac{{r_n}^2}{(1 + 2r_n)2}$. З останніх двох рівностей випливає $r_n(r_{n+1} + r_{n-1}) - (6 - 4r_n) r_{n+1} r_{n-1}$.

Розділимо обидві частини цієї рівності на добуток $r_{n+1} r_{n-1}$. Тоді, враховуючи рівність $R_k = \frac{1}{r_n}$, маємо таке співвідношення:

$$R_{n-1} R_{n+1} = 6R_n - 4 = 6(R_n - 1) + 2. \qquad (8)$$

Нехай $v_k = R_k - 1$. Тоді рівність (8) перепишеться у вигляді

$$v_{n+1} = 6v_n - v_{n-1} \qquad (9).$$

Отже, $v_0, v_1, v_2, \dots$ є рекурентною послідовністю другого порядку. Тому загальний член цієї послідовності v_n можемо обчислити за формулою Біне. При цьому $r_0 = \frac{1}{2}$ і, отже, $a = v_0 = R_0 - 1 = \frac{1}{r_0} - 1 = 1$.

З рівності (5) при *n*=0 знаходимо $r_1 = \frac{1}{4}$. Тому, $b = v_1 = 3$. Крім того, на підставі (9) $\alpha = 3$, $\beta = -1$. Але тоді $\gamma = 0$ і отже,

$$v_n = \frac{1}{2}[(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n], \qquad (10)$$

що й доводить рівність (1).

Щоб обґрунтувати рівність (2), досить помітити, що

$$3 \pm 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2, \quad \left(\sqrt{2} + 1\right)^n \left(\sqrt{2} - 1\right)^n = 1 \qquad (11)$$

Тоді на підставі (1) і (11)

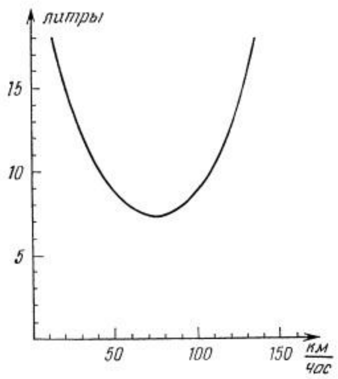
$$2R_n = 2(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n + \left((\sqrt{2}+1)^n\right)^2 + \left((\sqrt{2}-1)^n\right)^2 = \left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n\right]^2$$

що й доводить рівність (2).[3,52-59]

Для старших класів профільної школи цікавим є матеріал, пов'язаний з золотим прямокутником та логарифмічною спіраллю. В межах статті заглиблюватися в теорію і практику не будемо в силу громіздких математичних викладок. Задачний матеріал до цієї теми можна знайти в [4,498].

Задачі прикладного змісту з числами Фібоначчі

Якісна підготовка школярів передбачає озброєння їх математичними методами пізнання реальної дійсності. Цьому сприяє зближення методів розв’язування задач, що розглядають у курсі математики, з методами розв’язання задач, що виникають на практиці. Тому використання прикладних задач під час вивчення математики є важливим аспектом свідомого сприйняття навчального матеріалу учнями, адже саме прикладні задачі викликають у школярів активізацію розумової діяльності, сприяють виникненню особистих мотивів навчання. Прикладні задачі, що побудовані на основі знань про послідовність Фібоначчі, безперечно зацікавлять учнів, адже на перший погляд, не містять складних формул та доведень, лише логіка. У задачі з автомобілем потрібні знання з вищої математики, хоча учням здається, що все досить легко розв’язується.



Розглянемо наступну практичну задачу. Потрібно визначити, за якої швидкості автомобіль буде найбільш економічним, тобто за якої швидкості витрати палива на 100 км шляху будуть найменшими. Побудувавши графік залежності витрат палива (вимірюється кількістю бензину в літрах, що використовується двигуном автомобілем на відстані 100 км) від швидкості (км/год), отримаємо таку криву на мал.2

Нескладно переконатися, що на цій кривій є лише одна точка мінімуму. При наближенні до неї зліва крива спадає, а пройшовши точку мінімуму, починає зростати. Нам необхідно знайти швидкість x, що відповідає найменшим витратам палива, тобто мінімуму кривої. Бажано навчитися визначати найбільш економічну швидкість із заданою точністю за найменшу кількість вимірювань. Можна довести, що якщо найбільш економічна швидкість існує в інтервалі від a до b і її потрібно визначити з найменшою помилкою за задану кількість вимірювань n, то зручно по перше розділити інтервал $[a,b]$ на F_n рівних частин та розглянути значення функції в F_{n-1} та F_{n-2} точках.

Наприклад, якщо оптимальну швидкість потрібно визначити за 5 вимірювань, то задача розв’язується наступним чином. Оберемо інтервал швидкостей, що містить найбільш економічну швидкість, наприклад, інтервал 0 – 160 км/год, поділимо його на $F_5 = 8$ рівних частин та границями наступного інтервалу будемо вважати точки з номерами $F_3 = 3$ та $F_4 = 5$, тобто швидкості 60 та 100 км/год. Вимірюючи витрати палива при цих швидкостях, отримаємо значення функції $f(60)$ та $f(100)$. Неважко переконатися, що при $f(60) \geq f(100)$ найбільш економічна швидкість знаходиться між 60 та 160 км/год, а при $f(60) \leq f(100)$, найбільш економічна швидкість знаходиться між 0 та 100 км/год. Нехай $f(60) \leq f(100)$, тоді в нас залишилося тільки 4 заміри, тому інтервал швидкостей необхідно поділити на 5 рівних частин та розглянути другу точку ділення, тобто швидкість 40 км/год. Вимірюючи витрати палива при швидкості 40 км/год, отримаємо значення $f(40)$. Нехай $f(40) > f(60)$, тоді можна стверджувати, що оптимальна швидкість знаходиться в інтервалі від 60 км/год до 80 км/год. Для визначення в нас залишилося одне вимірювання. Поділивши інтервал швидкостей 60 – 80 км/год навпіл та вимірявши витрати палива в його середині, тобто при швидкості 70 км/год, отримаємо значення функції $f(70)$. Якщо $f(70) < f(60)$, то це значить, що оптимальна швидкість більше 70 км/год, але менше 80 км/год. Можна довести,що ніяким іншим способом не можна визначити оптимальну швидкість за 5 замірів з найменшою похибкою.

Розглянута задача є однією з цікавих проблем математичної теорії пошуку, розв'язування якої приводить до чисел Фібоначчі. Описаний вище спосіб дозволяє знайти оптимальну кількість оборотів бабіни ткацького верстата або найбільш ефективний план капіталовкладень.[5,326-352]

У результаті проведеного дослідження ми з'ясували, що тема «Золота пропорція», що є невід'ємною частиною вузівського курсу «Системи числення з ірраціональною основою», дозволить учням не тільки глибше зануритися в математику, а й навчить застосовувати знання на практиці, сприятиме досягненню учнями високого рівня математичної підготовки; дозволить поглибити світогляд, зрозуміти тісний зв'язок математики з оточуючим світом. Для вчителів методичні рекомендації стануть у нагоді при підготовці до додаткових занять з математики, у якості завдань під час проведення нестандартних уроків, підготовки до олімпіади тощо.

Проведене дослідження застосування послідовності Фібоначчі та властивостей золотої пропорції дає змогу виокремити напрями подальших досліджень:

– з'ясування методів активізації пізнавальної діяльності учнів шляхом зацікавлення їх вивченням цікавих закономірностей та задач з математики;
– більш глибоке вивчення означеної теми на предмет застосування у шкільному курсі математики;
– дослідження теми «Золота пропорція» у якості наочного прикладу зв'язку математики з іншими предметами (міжпредметні зв'язки): біологія, інформатика, історія, астрономія тощо.

Список літератури:

1. Лаврус Віктор. Золотое сечение [Електронний ресурс]/ Віктор Лаврус// Елек-

тронная библиотека Наука и техника.- 2016.- Режим доступу: http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm
2. Кужель О.В. Узагальнена формула Біне та її застосування/ О.В. Кужель// У світі математики.-К.: Видавництво: ТВіМС,1997.-Том 3, випуск 3.-С.52-59.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике: учебник/ И.А. Каплан.-Х.:Книжная фабрика им.Фрунзе,1967.-С.947
4. Реньи Альфред. Трилогия о математике/Альфред Реньи.-М.:Мир, 1980.-С.326-352

Відомості про автора:

Бардиш Наталія Олександрівна – студентка VII курсу фізико – математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені В. Винниченка.