КОНКУРСНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Іванова Інна

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Анотація: *у статті висвітлено аспекти розв'язування геометричних конкурсних задач, що сприяють розвитку логічного мислення, поглибленню знань з математики і можуть бути використані для підготовки учнів до олімпіад та позакласної роботи.*

Ключові слова: *олімпіадні геометричні задачі, векторний метод розв'язування, метод координат.*

Актуальність. Демократизація системи освіти України вимагає від математичної науки пошуку нових методичних технологій, які б забезпечили поряд із високим рівнем теоретичної і практичної підготовки з математики переорієнтацію навчально-виховного процесу на особистість учня, сприятливі умови для досягнення кожним учнем обраного рівня знань. В умовах сучасної школи дієвим засобом формування мотивації до навчання, підвищення пізнавальної активності учнів, розвитку їх творчих здібностей, поглиблення і розширення знань учнів з предмету є предметні олімпіади школярів, які сприяють розвитку умінь розв'язувати задачі підвищеної складності. Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що метод координат разом з використанням інших фактів, наприклад, векторної алгебри, спрощує розв'язання багатьох складних конкурсних геометричних задач [1].

Мета. Проаналізувати геометричні завдання XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка 2016-2017 н.р. та III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики поточного навчального року, розглянути завдання, що можуть бути розв'язані з використанням даних методів, навести власні розв'язання цих завдань.

Задача 1 «Спільний ортоцентр» (XIX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, 2016-2017 н.р.**)**. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмітили точки K і N. Доведіть, що ортоцентри трикутників BCK і ACN збігаються тоді й тільки тоді, коли BN/AK= tg^2A.

Розв'язання. **1 спосіб**.

Розглянемо ∆BCK і ∆ACN: точка O_1 – ортоцентр ∆ACN, точка O_2 – ортоцентр ∆BCK. Обидва трикутники мають спільну висоту CD, а тому $O_1 \in CD$ і $O_2 \in CD$. Оскільки $NQ \perp AC$ і $BC \perp AC \Rightarrow NQ \parallel BC$. Аналогічно, $FK \parallel AC$ (рис. 1).

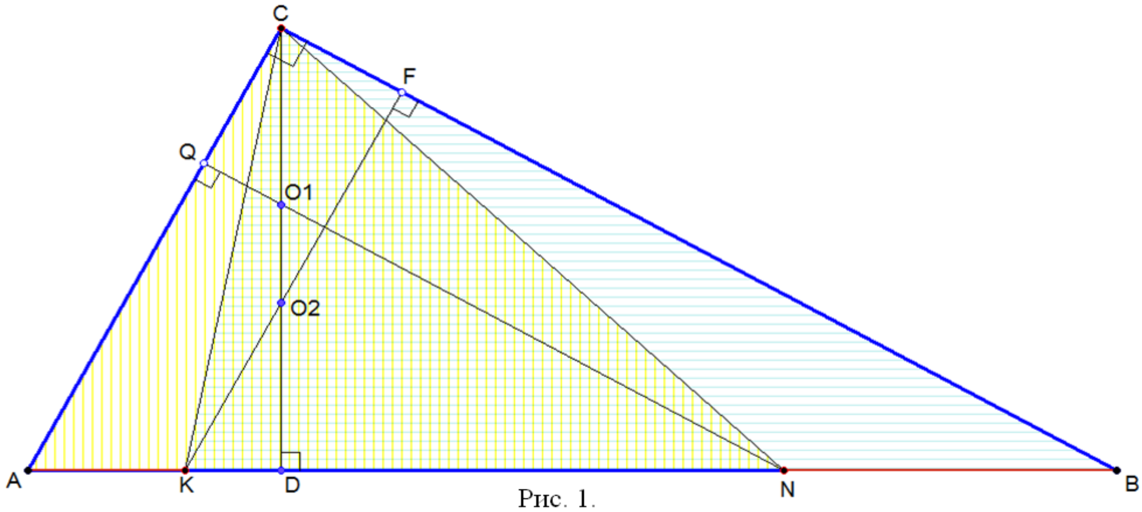

Рис. 1.

Проаналізуємо, які положення займуть точки K і N, якщо ортоцентри співпадуть? Скоригуємо рисунок (див. рис. 2):

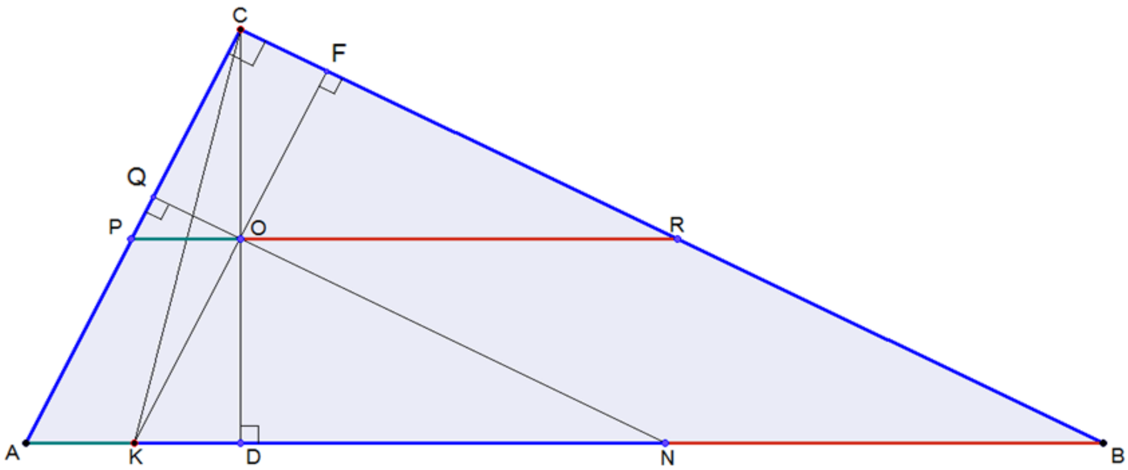

Рис. 2.

Відмітимо точку K∈AB. Через точку K проведемо пряму KF паралельно до катета AC. З вершини C опустимо на гіпотенузу AB перпендикуляр, отримаємо висоту CD та відмітимо точку O – точку перетину цієї висоти і прямої KF. Через точку O проведемо пряму QO паралельно до катета CD. Ця пряма перетинає гіпотенузу в точці N. Через точку O проведемо пряму паралельно до гіпотенузи AB. Ця пряма перетинає катети в точках P і R (рис. 2).

Очевидно, що PO=AK (оскільки APOK – паралелограм), аналогічно OR=NB. Доведемо, що PO/RO=AD/BD. Справді, з подібності трикутників ∆ACD і ∆PCO ⇒ AD/PO=CD/CO; з ∆CDB ~ ∆COR ⇒ CD/CO=BD/OR, звідки AD/PO=BD/OR, тоді PO/RO=AD/BD, або BD/AD=RO/PO. Але RO=BN, а PO=AK, тоді

BD/AD=BN/AK. (1)

Задача звелася до доведення, що tg^2A=BD/AD. Оскільки катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу, то a^2=BD·AB, b^2=AD·AB, звідки $tg^2A=a^2/b^2$ або tg^2A=(BD·AB)/(AD·AB)⇒tg^2A=BD/AD. Враховуючи формулу (2), маємо: tg^2A=BN/AK. Чим і завершується доведення.

2 спосіб. Метод координат.

1. Вибір системи координат. Виберемо прямокутну систему координат: нехай точки A і B належать вісі абсцис, причому додатний напрям вісі – від A до B. Точка O (основа висоти, проведеної з вершини прямого кута C на гіпотенузу) – початок координат. Точка A знаходиться лівіше від O, B – правіше. Точка C належить вісі ординат, ігреки збільшуються у напрямку від O до C (рис. 3).

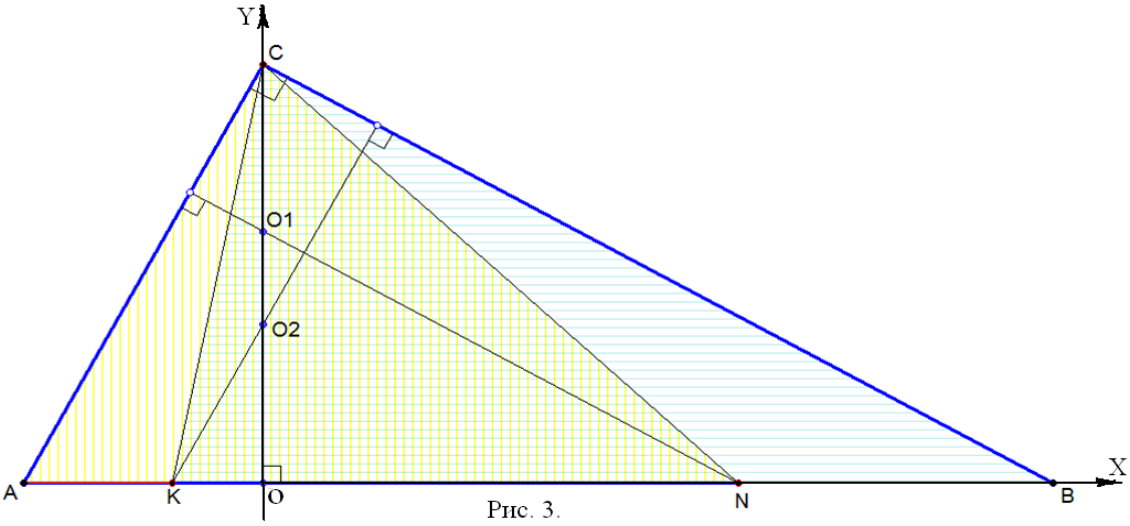

Рис. 3.

2. Присвоєння усім точкам координат. Нехай одиничний відрізок даної системи координат дорівнює відрізку CO. Тоді координати точки C(0; 1). Нехай K(a;0), N(b;0), $O_1(0;y_1)$, $O_2(0;y_2)$. Нехай ∠CAB=α, тоді ∠CBA=90°–α. Розглянемо ∆AOC: ∠O=90°; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{AO}{OC}$; AO=OC·ctg α; OC=1⟹AO= ctg α. Так

як точка O – початок координат, то відрізок AO – це відстань від нуля до точки A, причому A лежить лівіше від O, а тому точка A має координати A(–ctg α; 0).

Розглянемо ΔCOB: $\angle$O=90°; $\angle$B=90°$-$ α$\Rightarrow\angle$C=α; tg $\alpha = \frac{BO}{OC}$; BO=OC·tg α; OC=1$\Rightarrow$BO= tgα; BO – це відстань від початку координат до точки B, а тому координати точки B(tgα; 0).

3. <u>Застосування методу координат</u>.

Оскільки, скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю, то: $AO_1 \cdot CN$=0 $\Rightarrow$(–ctgα; $-y_1$) · (b; $-$ 1)=0 $\Rightarrow$ y_1 = b· ctgα. Аналогічно,

$BO_2 \cdot CK$=0 $\Rightarrow$(– tgα; y_2)·(a; $-$ 1)=0 $\Rightarrow$ y_2 = –a· tgα.

Якщо точка O_1 і точка O_2 збігаються, то координати цих точок рівні:

(0; y_2)=(0; y_1) $\Rightarrow$ $y_2 = y_1$, звідки –a· tgα= b· ctgα. (2)

З іншого боку, розглянемо рівність $\frac{BN}{AK}$ = tg^{2}α. (3)

BN =BO–ON=tgα– b; AK=|AO– OK|=ctgα +a; тоді рівність (3) перепишеться у вигляді $\frac{\text{tg}\alpha - \text{b}}{\text{ctg}\alpha + \text{a}}$ = tg^{2}α; розкриємо пропорцію, отримаємо після спрощення

tgα–b = tgα+ tg^{2}α·a, звідки b= –a · tg^{2}α, а це рівносильне (2), що і треба було довести.

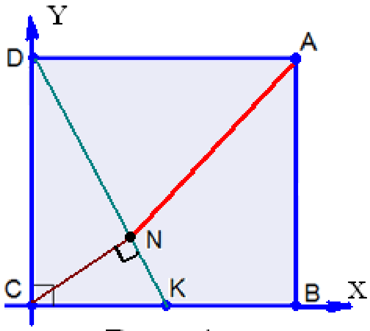

Рис. 4.

Задача 2. (III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2016-2017 н.р., 10 клас). Заданий квадрат ABCD. Нехай точка K – середина сторони BC, а N – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DK. Доведіть, що AB=AN.

Розв’язання.

Введемо прямокутну систему координат (див. рис. 4), початок – точка C(0;0), вісь іксів напрямлена вздовж сторони квадрата BC, вісь ігреків – вздовж CD. Нехай одиничний відрізок дорівнює CK. Тоді координати K(1;0), B(2;0), D(0;2), A(2;2), N(x;y). Вектори CN і DK ортогональні, а тому скалярний добуток дорівнює нулю, отримаємо перше співвідношення: (x;y)·(1;–2)=0 або x–2y=0, звідки x=2y. Вектори KN і DK колінеарні, а тому їхні координати пропорційні:

$(x-1;y)||(1;-2) \Rightarrow -2\cdot(x-1)=y$. Розв'язуючи отриману систему, отримаємо, що координати точки N(0.8; 0.4), а тоді відстань між двома точками A і N дорівнює $\sqrt{(2-0.8)^2+(2-0.4)^2}=2$, і сторона квадрата AB теж дорівнює двом, що і треба було довести.

Задача 3. Точка N знаходиться в площині квадрата ABCD і NA=6см, NC=4см, ND= $\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу квадрата [2].

Розв'язання. Виберемо систему координат з початком у точці A, вісь ординат направимо у бік точки B, вісь абсцис – у бік точки D: A(0;0), B(0;a), C(a;a), D(a;0), N(x;y), де a – довжина сторони квадрата. Запишемо довжини усіх відрізків, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ (x-a)^2+y^2=2, & \big|\cdot(-1) \\ (x-a)^2+(y-a)^2=16, \end{cases}$$

Віднімемо почергово від першого рівняння друге, від другого третє, отримаємо вирази для x і y через a, підставимо їх у перше рівняння, отримаємо $a^4-52a^2+676=0 \Leftrightarrow (a^2-26)^2=0 \Leftrightarrow a^2=26$.

Відповідь: площа квадрата дорівнює 26 см^2.

Висновки. Розв'язання конкурсних задач на уроках, гуртках та інших видах позакласних занять дозволяє учням накопичувати досвід у зіставленні, спостереженні, виявляти нескладні математичні закономірності, висловлювати гіпотези, які потребують доведень. Від ефективності використання задач у навчанні математиці значною мірою залежить не тільки якість навчання, виховання і розвитку учнів, але і ступінь їхньої практичної підготовленості до наступної за навчанням діяльності в будь-якій сфері народного господарства і культури.

Список літератури:

1. Ізюмченко Л.В. Використання векторної алгебри та методу координат у розв'язанні конкурсних геометричних задач //Педагогічний вісник. – Кіровоград: Кіровоградський обласний інститут післядипломної освіти ім. Василя Сухомлинського, 2009, № 3-4. – С. 13–21.
2. Вишенський В.А., Нагорний В.Н., Перестюк М.О., Плахотник В.В. Десять математичних олімпіад. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2006. – 208 с.

Відомості про автора:

Іванова Інна Вікторівна – студентка VII курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.