# ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПАКЕТІВ ПРИ ЇХ РОЗВ’ЯЗАННІ

**Заболотня Анна**

***Науковий керівник:*** **кандидат педагогічних наук, доцент Нічишина В.В.**

**Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка**

***Анотація***: *В статті розглядається застосування диференціальних рівнянь для описання процесів в різних науках. Також коротко описуються можливості математичних пакетів при вирішенні диференціальних рівнянь.*

***Ключові слова:*** *диференціальні рівняння, математичні пакети, Mathematica, Maple, MathCad.*

В сучасному світі положення математики далеко вже не те, яким було сто чи навіть сорок років тому. Застосування методу математичного моделювання і електронно-обчислювальних машин стали невід’ємною частиною науково-технічного прогресу. Таке широке застосування математики пов’язане з тим, що можливості описового методу вичерпали себе і подальший успіх у розвитку всіх наук можливий лише на базі використання точних кількісних методів дослідження, тобто застосування математичного апарату. І ще однією причиною є те, що сама математика досягла такого розвитку, який дозволяє створити потужні електронно-обчислювальні машини, які здатні виконувати великі об’єми громіздких обчислень.

Як і сама математика, диференціальні рівняння стали широко використовуватися не лише в математиці, але в багатьох інших науках. Отож, наскільки важливими є диференціальні рівняння і як часто ми їх зустрічаємо в реальному житті?! Можливо для декого це буде неочікувано, але насправді, диференціальні рівняння відіграють величезну роль в нашому житті і це стосується не тільки математиків, фізиків, але й людей, які зовсім не пов’язані з наукою. Їхню значущість можна оцінити з можливості математично описати, або моделювати, реальні життєві ситуації. Диференціальні рівняння описують різноманітні процеси в таких дисциплінах як екологія, хімічна кінетика, архітектура, фізика, машинобудування, демографія, механіка, електротехніка, будівництво, медицина, метрологія, економіка і взагалі, якщо існує явище зміни однієї величини відносно іншої, то воно може бути описане диференціальним рівнянням або системою рівнянь.

Тож розглянемо декілька реальних життєвих процесів.

За допомогою диференціальних рівнянь можна математично описати процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$– кількісний стан популяції в момент $t$, $A$ – число, яке відповідає кількості народжених, $B$– умираючих в одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою:

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{1.1}$$

В (1.1) $A$ і $B$ можуть залежати від $x$. Наприклад,

$$A = ax, B = bx, \tag{1.2}$$

де $a$ – коефіцієнт народжуваності, $b$ – смертності.

Підставляючи (1.2) в (1.1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{1.3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (1.3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}. \tag{1.4}$$

З розв'язку (1.4) видно, що при $a > b$ популяція виживаюча, а при $a < b$ – вимираюча. Рівняння (1.3) в деяких випадках береться нелінійним

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \ (a > 0, b > 0). \tag{1.5}$$

Це рівняння Бернулі при $n = 2$ і його розв'язок можна записати в такому вигляді:

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + (\frac{a}{b} - x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \qquad (1.6)$$

З формули (1.6) видно, що при $t \to \infty, x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі випадки:

$$\frac{a}{b} = x_0, \ \frac{a}{b} > x_0, \text{ та } \frac{a}{b} < x_0.$$

Рівняння (1.5) описує еволюцію популяцій деяких бактерій
Можна говорити і про більш складні рівняння, системи рівнянь.

Розглянемо більш детально двохвидову модель «хижак-жертва».

Нехай $x(t)$ – число великих риб-хижаків, $y$ – число малих риб-жертв в момент часу $t$. Тоді число риб-хижаків буде рости до того часу, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменшуватися і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель такого прикладу має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases}, \qquad (2.1)$$

де $a, b, c, d$ – додатні константи.

В (2.1) доданок $bxy$ виражає залежність приросту великих риб від числа малих, $-dxy$ – зменшення числа малих риб від великих. Система таких диференціальних рівнянь називають системою (або моделлю) Лотки-Вольтерри

В біології, наприклад, можна знайти залежність площі $S$ молодого листка, що має форму круга, від часу $t$. Відомо, що швидкість зміни площі $\frac{dS}{dt}$ в момент $t$ пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинусу кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot cos\varphi(t), \tag{3.1}$$

де $\varphi(t) = at + b \geq 0$, $a, b$ – const, $\varphi \leq \pi$, $k$ – коефіцієнт пропорційності. Розв'язуючи рівняння (3.1), ми отримаємо таку залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot Sin(at + b)\right)^{-2}, \tag{3.2}$$

$c$ – довільна стала.

Також наше життя тісно пов'язане з економікою: купуємо товари, користуємося різними послугами, дехто можливо робить і продає свої ручні роботи. Завжди відбувається обмін товарів і грошей. В економіці це називається законом попиту і пропозиції і описується цей закон диференціальними рівняннями.

Нехай $p(t)$ – ціна, наприклад, на овочі, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит $q$ і пропозиція $S$ задаються лінійними залежностями, наприклад

$$q = 4p' - 2p + 39,$$
$$S = 44p' + 2p - 1$$

Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно $(p = S)$

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$\begin{aligned} &40p' + 4p - 40 = 0, \\ &4dp = -4(p - 10), \\ &\frac{10dp}{p-10} = -dt,\ p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Припустимо, що в момент $t = 0$ 1кг овочів коштував $p(0) = 1$ грн. Тоді $1 = c - 10$, $c = -9$. Отже

$$p = -9e^{\frac{1}{10}t} + 10. \tag{4.2}$$

Це закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

Існує ще безліч рівнянь, які описують найрізноманітніші процеси в різних областях науки.

Архітектура: форму найбільшого пам’ятник в США, арка в Сент-Луїс, можна описати диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{C}{L}\cdot\sqrt{\left(\frac{AC}{L}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

де *y* – це висота арки на відстані *x* від одного кінця основи. Константи *A, C* і *L* відповідають довжині, вершині і центроїду. Арка має форму перевернутої ланцюгової лінії. Ланцюгова лінія являє собою криву, форму якої приймає під дією сили тяжіння гнучка однорідна і нерозтяжна нитка, кінці якої закріплені на одному рівні. Рівняння, за яким була проектована форма цієї арки написане на ній.

В квантовій механіці – це незалежне від часу рівнянням Шредінгера для одномірного простого гармонійного осцилятора:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0.$$

Осцилятор Ван дер Поля є одним з класичних прикладів неконсервативного коливання з нелінійним загасанням. Система задовольняє звичайне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0;$$

де *x* (насправді функція часу *x(t)*) означає позицію точки в одномірному фазовому просторі, $\mu$ скалярний параметр, який контролює не лінійність та загасання. Коли $\mu = 0$, тобто коли загасання відсутнє, рівняння спрощується до консервативного гармонійного осцилятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Диференційне рівняння Лежандра, яке є одним з декількох рівнянь, які використовуються для розрахунку енергетичних рівнів атома водню:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\lambda(\lambda+1)y=0.$$

В медицині диференціальні рівняння використовуються для визначення швидкості коровотоку, швидкості руху клапанів і стінок серця (ехокардіографія), визначення в’язкості крові та інших параметрів гемодинаміки; для опису медико-біологічних додатків ультразвуку: ехоенцифолограма, УЗД, УЗ фізіотерапія, УЗ локація і кардіографія; для опису процесів фізіологічної акустики, яка вивчає будову і роботу звукосприймаючих та звуковідтворюючих органів людини і тварин.

В астрономії диференціальні рівняння використовуються для опису руху планет по законам Кеплера. В фізиці описуються найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях. Але ж далеко не всі вміють і знають як їх розв’язувати або як інтерпретувати отримані результати. Не кожен готовий витратити свій час і енергію для вивчення такої складної і об’ємної теми як «Диференційні рівняння». Але це не привід забувати про свій інтерес і бажання попрактикуватися в зацікавленій Вас задачі. В сучасному світі існує багато помічників, які прийдуть людині на допомогу. Математичні пакети – це і є ті помічники, за допомогою яких розв’язання складних для нас задач стане простішим і доступнішим. В математичних пакетах результати можна отримувати як в аналітичному вигляді, так і в графічному. Також можна легко змінювати початкові умови і по отриманим результатам робити висновки.

Існує велика кількість математичних пакетів спрямованих на різні типи завдань. Розглянемо деякі з них з точки зору можливостей розв’язання диференціальних рівнянь.

Система *Mathematica* – це багатофункціональний інтегрований пакет, який дозволяє достатньо ефективно оперувати різноманітними алгебраїчними і числовими розрахунками, текстовою і графічною інформацією. Він володіє широкими можливостями вирішення звичайних диференційних рівнянь і їх систем в символьному виді. Для цього використовується функція DSolve, в алгоритмі якої реалізовано більшість відомих на сьогоднішній день аналітичних методів. Функція має наступний синтаксис DSolve[рівняння,y,x]. Вона визначає функцію *y*, вважаючи *x* незалежною змінною рівняння. Перший аргумент – рівняння (або список рівнянь), записане в термінах функцій і її похідних ($y[x]$, $y'[x]$, $y''[x]$ і т.д.), але можливо використовувати й інші варіанти запису похідних (наприклад, $D[y[x],x]$, $y^{(2)}[x], \partial_x y[x], \partial_{xx} y[x]$ й інші). Другий аргумент – ім’я шуканої функції. Третій аргумент – незалежна змінна.

*Maple* являє собою один з найбільш потужних математичних пакетів. Його можливості охоплюють достатньо велику кількість розділів математики і можуть з користю використовуватися на різних рівнях, включаючи рівень серйозних наукових досліджень. Він дозволяє розв’язувати диференційні рівняння або систему диференціальних рівнянь як аналітично, так і в числовому вигляді. Для розв’язання простих диференційних рівнянь використовується, як і в *Mathematica*, функція DSolve в різних формах запису:

```
dsolve(ODE)
dsolve(ODE, y(x), extra_args)
dsolve({ODE, ICs}, y(x), extra_args)
dsolve({sysODE, ICs}, {funcs}, extra_args)
```

Тут *ODE* – це одне звичайне диференційне рівняння або система з диференційних рівнянь першого порядку з задаванням початкових умов, *y(x)* – функція однієї змінної, *ICs* – вираз, який задає початкові умови, *{sysODE}* – множина диференційних рівнянь, *{funcs}* – множина невизначених функцій, *extra_argument* – опція, яка задає тип розв’язку.

*MathCad* – це програмне оточення для виконання на комп’ютері різноманітних математичних і технічних розрахунків. Він має простий для засвоєння і роботи графічний інтерфейс, який надає користувачу інструменти для роботи с формулами, числами, графіками і текстом. В оточенні MathCad існує більше сотні операторів і логічних функцій, призначених для числового і символьного розв’язання математичних задач різної складності. Його основною перевагою є те, що математичні вирази записуються в їх загальноприйнятому вигляді: чисельник знаходиться зверху, а знаменник – знизу; в інтегралах границі інтегрування також розташовані на своїх звичних місцях. Це робить його зрозумілішим не тільки для комп'ютера, але й для користувача. Необхідно відразу відзначити, що MathCad не в змозі видати символьний розв'язок диференційного рівняння в вигляді готової функції. Можливості програми дозволяє отримати лише числовий результат. Для розв'язання спочатку записується слово Given (дано). Потім записуємо саме диференційне рівняння. Також необхідно написати початкові умови. Всі вирази записуються через логічне «дорівнює». Після перших кроків записується оператор розв'язання диференційного рівняння: y:=odesolve(t,b). Ця функція знаходить розв'язок рівняння. Результатом роботи функції буде шукана функція y(t). Тобто, розв'язавши рівняння, ми можемо побудувати графік шуканої функції або знайти значення цієї функції в будь-якій точці, але сам вид функції в аналітичному вигляді ми знайти не зможемо.

Таким чином, диференційними рівняннями можна описати величезну кількість процесів з якими ми зустрічаємося не тільки при вивченні математики чи фізики, але й в повсякденному житті. Їхню роль в сучасному світі важко переоцінити, як і роль самої математики. Математичне моделювання і точні кількісні методи дослідження є запорукою науково-технологічного прогресу і кращого розуміння всіх процесів від найпростіших до найскладніших. Нажаль, не завжди людина самотужки здатна розв'язати складні математичні задачі. Але з розвитком комп'ютерних технологій, розвивається і програмування, і вже існує величезна кількість математичних пакетів, спрямованих на розв'язання завдань різної складності. Тож сьогоднішній рівень розвитку науки і техніки вимагає користуватися надійними помічниками.

Тому, важливим завданням вищих навчальних закладів педагогічного спрямування залишається ширше вивчення теми «Диференціальні рівняння»; розгляд реальних прикладів їх застосування; ознайомлення з можливостями різних математичних пакетів і використання їх в процесі вивчення теми.

## *Список літератури:*


1. Кучерявий В.П. Екологія. – Львів: Світ, 2001 – 500 с: іл.
2. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с
3. Leigh C. Becker Ordinary Differential Equations: Concepts, Methods, and Models. – Christian Brothers University Memphis, TN 2012–2013 Edition
4. Інтернет-ресурс [http://hypertextbook.com/eworld/packages/]


## *Відомості про автора:*


***Заболотня Анна Валеріївна*** – студентка VII курсу фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.