Ю.І.ВОЛКОВ

ДОДАТНІ ОПЕРАТОРИ НАБЛИЖЕННЯ ІМОВІРНІСТЬ

Київ НМК ВО 1992

УДК 517.51

Додатні оператори. Наближення. Імовірність / Ю.І.Волков. - К.: НМК ВО, 1992. - 200 с.

В книзі дається виклад основ теорії додатних лінійних операторів типу 𝔹. Систематично вивчаються апроксимаційні та асимптотичні властивості послідовностей цих операторів. На базі операторів типу 𝔹 впроваджується новий клас багатовимірних розподілів /розподілів типу 𝔹/. Вивчаються їх властивості. Досліджуються статистичні оцінки параметрів розподілів типу 𝔹.

Для наукових робітників, викладачів, аспірантів і студентів старших курсів вузів.

Бібліогр.: 126 назв.

Рецензенти: В.К.Дзядик, чл.-кор. АН України /інститут математики АН України/; О.А.Панков, д-р фіз.-мат.наук, проф. /Вінницький політехнічний інститут/

Рекомендовано вченою радою Вінницького політехнічного інституту. Протокол № 6 від 6 березня 1992 р.

ISBN 5-7763-1436-0

Навчальне видання

Волков Юрій Іванович

Додатні оператори
Наближення
Імовірність

Редактор Л.В.Білоусова
Коректор Г.С.Чуб

Підп. до друку 11.11.92. Формат 60×84 1/16. Папір друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 11,62 Ум. фарбо-відб. 11,73
Облік.-вид. арк. 6,98. Тираж 100.
Зам. № 2-2291. Ціна 35 к.

НМК ВО Міністерства освіти України
252070, Київ-70, вул. П. Сагайдачного, 37.

РОВО «Укрвузполіграф».
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

1. Позначення загального характеру

$:=$ - символ рівності за означенням

$\mathbb{R}^m$ - m-мірний дійсний евклідів простір

$x = (x_1,\dots,x_m)$, $t = (t_1,\dots,t_m)$, $s = (s_1,\dots,s_m)$ - елементи $\mathbb{R}^m$

$e_1 = (1,0,\dots,0),\dots,e_m = (0,\dots,1)$ - стандартний базис в $\mathbb{R}^m$

$'$ - (штрих) - символ операції транспонування матриць

$st' := s_1t_1 + \dots + s_mt_m$ - скалярний добуток s і t

$\|t\| := \sqrt{tt'}$ - евклідова норма вектора t

$|t| := t_1 + \dots + t_m$, якщо $m > 1$

$\mathbb{C}^m$ - m-мірний комплексний евклідів простір

$z = (z_1,\dots,z_m)$ - елемент $\mathbb{C}^m$

$\mathrm{Re}z := (\mathrm{Re}z_1,\dots,\mathrm{Re}z_m)$

$\|z\| := (z_1\bar{z}_1 + \dots + z_m\bar{z}_m)^{1/2}$

$\mathbb{N}^m$ - множина мультиіндексів розмірності m

$\mathbb{N}^m_+$ - множина мультиіндексів з додатними координатами

$\nu = (\nu_1,\dots,\nu_m)$, $k = (k_1,\dots,k_m)$ - елементи $\mathbb{N}^m$

$k \geqslant \nu \iff k_1 \geqslant \nu_1, \dots, k_m \geqslant \nu_m$

$|\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_m$ - норма мультиіндекса ν

$\nu! := \nu_1!\dots\nu_m!$; $t^\nu := t_1^{\nu_1}\dots t_m^{\nu_m}$; $0^0 := 1$

$\binom{k}{\nu} := k!/(\nu!(k-\nu)!)$

$(k)_\nu := k_1(k_1-1)\dots(k_1-\nu_1+1)\dots k_m(k_m-1)\dots(k_m-\nu_m+1)$

$\mathrm{tr}V$ - слід матриці V

$[a]$ - ціла частина числа a

$\delta_{k\nu}$ - символ Кронекера: $\delta_{kk}=1$, $\delta_{k\nu} = 0$ $(k \neq \nu)$

$$f^{(\nu)}(t) := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} f(t) = \frac{\partial^{|\nu|} f(t)}{\partial t_1^{\nu_1} \ldots \partial t_m^{\nu_m}}$$

$\operatorname{grad} f = df/dt := (\partial f/\partial t_1, \ldots, \partial f/\partial t_m)$ – градієт функції f

$\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ – гессіан функції f

$\mathbb{M}$ – символ математичного сподівання

$\mathbb{D}$ – символ дисперсії

∂A – границя множини A

$\rho(A,B)$ – віддаль між множинами A та B

2. Спеціальні позначення

д.л.о. – додатний лінійний оператор

п.Л. – перетворення Лапласа

$+$ – символ переходу від міри до її п.Л.

Λ – клас мір

$\mu * \nu$ – згортка мір μ і ν

$\mu^{*(n-1)}$ – $(n-1)$-кратна згортка міри μ

$\int_{\mathbb{R}^m} f(t)\mu(dt)$ – інтеграл від функції f за мірою μ

$\delta(t)$ – міра, яка зосереджена в точці $t \in \mathbb{R}^m$ та має в цій точці одиничну масу

$\sum_{i=1}^{k} p_i \delta(t_i)$ – міра, яка зосереджена в точках $t_i \in \mathbb{R}^m$, та має в них маси відповідно рівні числам p_i

$u(z)$ – п. Л. міри μ

$s(x)$ – s-характеристика міри μ

$\varphi(z,x)$ – φ-характеристика міри μ

$W(x) - (w_{ij}(x)), i,j=\overline{1,m}$ – інформаційна матриця міри, операторів

$V(x) = (v_{ij}(x)) := W^{-1}(x)$ – коваріаційна матриця міри, операторів

$\mathbb{E}$, $\mathbb{E}^r$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}^r$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^r$, $\mathbb{H}^{\omega}$, $\mathbb{H}^{\alpha}$, $\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\omega}$, $\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\alpha}$, $\mathbb{Z}^{\omega}$, $\mathbb{Z}^{\alpha}$, $\mathbb{W}^r\mathbb{Z}^{\omega}$, $\mathbb{W}^r\mathbb{Z}^{\alpha}$ – класи функцій

$\omega_1(f;\delta;A)$, $\omega_1(f;\delta)$, $\omega_2(f;\delta;A)$, $\omega_2(f;\delta)$ – модулі неперервності 1-го і 2-го порядків

$$\|f\|_{C(A)} := \sup_{t \in A} |f(t)|, \quad \|f\|_{\mathbb{C}^r(A)} := m^{r/2} \max_{|\nu|=r} \sup_{t \in A} |f^{(\nu)}|$$

$$\|f\|_{\mathbb{E}} := \sup_{t \in \mathbb{R}^m} \left(e^{-\alpha\|t\|}|f(t)|\right), \quad \|f\|_{\mathbb{E}^r} := \max_{|\nu|=r} \sup_{t \in \mathbb{R}^m} \left(e^{-\alpha\|t\|}|f^{(\nu)}(t)|\right)$$

$\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда

A^{ρ} – множина всіх точок $t \in \mathbb{R}^m$, віддаль від яких до множини A менша за ρ

$A^{-\rho}$ – множина всіх точок $t \in \mathbb{R}^m$, таких, що відкрита куля радіуса ρ з центром у точці t вміщується в A.

3. Система нумерації та посилань

Нумерація параграфів в кожній главі самостійна, як і нумерація теорем (лем, прикладів тощо) в кожному параграфі. Використовуються різні системи для посилань. Якщо робиться посилання, наприклад, на лему 1 і співвідношення (13) параграфа, що читається, то посилання матимуть такий вигляд: лема 1, співвідношення (13). Якщо робиться посилання на лему 1 і співвідношення (13) одного з попередніх параграфів у цій главі (наприклад, §4), то посилання матиме такий вигляд: лема 4.1, співвідношення (4.13). Нарешті, якщо посилання відноситься до іншої глави, то буде появлятися ще покажчик номера глави (перша цифра).

П Е Р Е Д М О В А

Однією з фундаментальних теорем, що започаткували теорію наближення, є теорема Вейєрштрасса [125] про те, що довільну неперервну на відрізку функцію f можна як завгодно точно наблизити многочленами. Основна ідея Вейєрштрасса при доведенні цієї теореми по суті полягала в тому, що спочатку дістають наближення, які мають вигляд інтегралів $W_n(f;x) := \sqrt{n/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-n(t-x)^2)dt$, $x \in \mathbb{R}$,

а потім ці інтеграли наближуються многочленами.

Те, що $f(x) \approx W_n(f;x)$, коли n буде достатньо великим, можна вбачити з таких простих імовірнісних міркувань. Розглянемо послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, які незалежні та однаково розподілені за нормальним законом з параметрами $(x, 1/\sqrt{2})$. Тоді, внаслідок закону великих чи ел (у формі Хінчина), для кожної неперервної і обмеженої функції f $W_n(f;x) = \mathbb{M}f((\xi_1+\ldots+\xi_n)/n) \to f(\mathbb{M}((\xi_1+\ldots+\xi_n)/n)) = f(x)$, коли $n \to \infty$ ($\mathbb{M}$–знак математичного сподівання).

Пізніше, в 1912 році, користуючись імовірнісними міркуваннями, С.Н.Бернштейн [10] відразу, без застосування проміжних апроксимацій, знайшов у явному вигляді многочлени, які наближують функцію f. Це многочлени $B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathbb{M}((\xi_1+\ldots+\xi_n)/n)$, де випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n \ldots$ мають розподіл Бернуллі з параметром $p=x$, $0<x\leqslant 1$.

Зрозуміло, що наведені приклади підказують загальну схему для отримання і інших апроксимаційних засобів подібного типу. А саме: задамо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ Нехай $\eta_n := (\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$. Покладемо $L_n(f;x) := \mathbb{M}f(\eta_n)$. Тоді, як і вище, матимемо наближення $L_n(f;x) \approx f(x)$ для достатньо великих n, коли функція f буде неперервною. Задаючи

той чи інший розподіл, дістанемо той чи інший конкретний засіб для наближення функцій.

Операція переходу від функції f до $L_n(f;x)$–це додатна лінійна операція, яка визначена на певному лінійному просторі функцій. В теорії наближення значення цих операцій, тобто $L_n(f;x)$, традиційно прийнято називати операторами. Отже, оператори Вейєрштрасса, многочлени Бернштейна–це додатні лінійні оператори. Вже перші дослідження цих операторів показали, що вони мають багато цінних властивостей (і не тільки апроксимаційних), якими, взагалі кажучи, не володіють додатні лінійні оператори, що породжені довільними розподілами. Тому виникла задача пошуку таких операторів (а, отже, і відповідних розподілів), для яких мали б місце властивості, аналогічні властивостям многочленів Бернштейна або операторів Вейєрштрасса (і властивостям відповідних їм розподілів). По цим питанням була створена численна література.

В 1941 році Г.М.Міракьян [60] дослідив поліноми $e^{-nx}\sum_{k=0}^{m} C_{k,n}x^k$, апроксимаційні властивості яких грунтуються на тому, що вони є частинними сумами ряду

$$e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)(nx)^k/k! = \mathbb{M}f((\xi_1+\ldots+\xi_n)/n)),$$

де випадкові величини $\xi_1, \ldots \xi_n, \ldots$ мають розподіл Пуассона

А оператор $M_n(f;x) := e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)(nx)^k/k!$, $x>0$ почав досліджувати Сас [122], його назвали оператором Міракьяна–Саса і позначили символом $M_n(f;x)$.

В 1957 році В.О.Баскаков на основі від"ємного біноміального розподілу побудував оператори $Б_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}$, $x > 0$, які потім були названі операторами Баскакова.

Ряд результатів стосовно наближення функцій операторами $\mathbb{M}f(\eta_n)$ при достатньо загальних припущеннях щодо випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ були отримані І.Й.Гіхманом [39] в 1952 році.

Після 1947 року з"являються роботи про наближення функцій багатовимірними многочленами Бернштейна та іншими багатовимірними додатними операторами (наприклад, А.Ф.Іпатов [49, 50]; В.А.Баскаков[4], Н.В.Карташов [54]).

Результати досліджень за теорією поліномів $B_n(f;x)$ до 1952 року систематизовано в книзі Лорентца [106]. Результати про наближення функцій операторами Вейєрштрасса викладено в книзі Хіршмана та Уіддера,[83]. Доречним тут потрібно згадати і книжку П.П.Коровкіна [57], в якій з"явились загальні результати про наближення функцій додатними операторами. Є досить повні бібліографічні огляди робіт, які присвячені д.л.о. до 1986 року [65,95,96,121]. Більшість з них відносяться до одновимірного випадку.

Звичайно, значну частину результатів теорії додатних лінійних операторів (д.л.о.) було отримано і без застосування імовірнісної інтерпретації цих операторів. Тим самим автоматично з"явилось багато нових результатів і для імовірнісних розподілів. Отже, як бачимо, питання наближення функцій за допомогою д.л.о. та деякі питання імовірнісних розподілів, зв"язаних з законом великих чисел і граничними теоремами, тісно поєднані між собою. Тому таке взаємопроникнення імовірнісних ідей та ідей теорії наближення функцій є дуже корисним для обох цих розділів математики.

В процесі вивчення д.л.о. з"являлись і накопичувались нові задачі, зокрема задача про природне компактне описування множини різноманітних сімей д.л.о., про знаходження нетривіальних багатовимірних аналогів одержаних раніше результатів; проблеми, які зв"язані з вивченням композицій диференціальних операторів з

д.л.о.(продиференційовних операторів) як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках. Довгий час залишались нерозв"язаними задачі про виділення головного асимптотичного члена величини $(d/dx)^r \Delta_n(x)$, $r>0$, про знаходження локальних констант Нікольського, про властивості продиференційовних багатовимірних поліномів Бернштейна та інші. Для розв"язування цих задач потрібна була нова ідея, притому ще й така, щоб можна було охопити всю громаду досліджень по д.л.о., про які йшла мова вище. Така ідея з"явилась і значною мірою була реалізована в працях автора [19-37]. На основі цих праць і написана монографія.

Вихідним пунктом досліджень є новий клас рівнянь, який визначається так.

Нехай: $\mathbb{E}$ - множина функцій f, визначених і неперервних на $\mathbb{R}^m$ і які ростуть на нескінченності не скоріше експоненціальних функцій; X - деяка область в $\mathbb{R}^m$; $\mathbb{A}(X)$ - множина функцій, які аналітичні в X. Позначимо через $L_n = L_n(f;x)$ лінійні оператори $L_n\colon \mathbb{E} \to \mathbb{A}(X)$, де $x=(x_1,\dots,x_m) \in X$, $n \in \mathbb{N}_+$ (або $n>0$); через $W(x)=(w_{ij}(x),)$, $i,j=\overline{1,m}$ позначимо симетричну додатно визначену матрицю з аналітичними в X елементами. Рівняння вигляду

$$\operatorname{grad}(L_n(f;x)) = nL_n((t-x)f(t);x)W(x), \qquad (1)$$

за умови $L_n(f;x) = 1$, в яких невідомими є оператори L_n, називаються рівняннями типу $\mathbb{B}$. В монографії розглядаються рівняння типу $\mathbb{B}$, розв"язками яких є д о д а т н і лінійні оператори. Такі розв"язки називаються операторами типу $\mathbb{B}$. Наприклад, всі згадані вище класичні д.л.о. є операторми типу $\mathbb{B}$.

В монографії встановлена структура розв"язків рівнянь (1) ; знаходяться в явному вигляді розв"язки конкретних рівнянь типу $\mathbb{B}$, зокрема, знайдені в с і одновимірні д.л.о. типу $\mathbb{B}$, для яких функція $V(x):=(W(x))^{-1}$ є многочленом третього степеня, довільною степеневою функцією, показниковою функцією; досліджуються різноманітні властивості операторів типу $\mathbb{B}$ і властивості композицій диференціальних операторів з операторами типу $\mathbb{B}$; досліджуються апроксимаційні та асимптотичні властивості послідовностей операторів типу $\mathbb{B}$ і послідовностей продиференційовних операторів.

Оператори типу $\mathbb{B}$ тісно зв"язані з розподілами, які були названі розподілами типу $\mathbb{B}$. В главі 6 досліджуються властивості цих розподілів і дано застосування разробленої теорії в математичній статистиці.

Побудовані та досліджені нетривіальні кратні послідовності д.л.о., які є узагальненнями послідовностей операторів типу $\mathbb{B}$.

Відзначимо, що результати, які ввійшли в книгу, обговорювались на семінарах в Інституті математики АН України, в Математичному інституті імені В.А.Стеклова, в Московському та Київському університетах. Учасникам семінарів, які приймали участь в обговоренні цих результатів, автор виражає глибоку подяку.

Автор щиро вдячний академіку С.М.Нікольському, чл.-кор. АН України М.И.Ядренку, проф. О.І.Степанцю, проф. В.О.Баскакову, проф. В.С.Віденському, проф. В.М.Тихомирову, наукові контакти з якими були важливим стимулом у його роботі, а також вважає своїм приємним обов"язком виразити глибоку подяку В.К.Дзядику за ту увагу та цінні поради, які постійно отримував протягом всієї своєї наукової діяльності.

Глава 1

ПОСЛІДОВНОСТІ ДОДАТНИХ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ МІРАМИ

Основним методом дослідження д.л.о. є метод перетворення Лапласа мір. В § 1 викладено властивості цього перетворення. Для мір, які мають п.Л., вводяться характеристики: s-характеристика, φ-характеристика, w-, v-характеристики. За допомогою цих характеристик далі формулюються одержані результати.

В § 2 дається означення основного об"єкта дослідження: послідовності д.л.о. типу $\mathbb{B}$. В § 3 доводиться теорема про структуру, яка описує будову операторів типу $\mathbb{B}$. В § 4 вводяться поняття деформації і лінійної деформації операторів, наведено приклади. В § 5 розроблюється методика побудови д.л.о. типу $\mathbb{B}$ в одновимірному випадку. Ця методика грунтується на застосуванні степеневих рядів. В § 6 повністю розв"язується задача про знаходження всіх д.л.о., коваріація яких є многочленом третього степеня. В § 7 розв"язується задача про знаходження всіх операторів, коваріації яких є степеневими функціями, показниковою функцією. Наведено два приклади операторів, коваріація яких є многочленом четвертого степеня.

В § 8 вивчаються основні властивості д.л.о. типу $\mathbb{B}$. Зокрема, досліджуються значення $S_{n,v}(x)$ операторів L_n на степеневих функціях. Доводиться теорема про монотонне спадання послідовності $L_n(f;x)$ у випадку, коли функція f опукла на $\mathbb{R}^m$.

§ 1. Перетворення Лапласа мір

Теорія перетворення Лапласа (п.Л.) мір (в одновимірному випадку застосовується термін - двобічне перетворення Лапласа) досить добре розроблена, наприклад, у [16]. Нагадаємо основні означення та наведемо декілька властивостей цього перетворення, які потрібні для подальшого викладу.

Нехай на вимірному просторі $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m)$ задана σ-скінченна міра μ ($\mathfrak{B}^m$ – σ-алгебра підмножин простору $\mathbb{R}^m$).

О з н а ч е н н я 1. Будемо говорити, що міра μ належить до класу Λ, якщо існує імовірнісна міра P, додатна константа C та вектор $\tau \in \mathbb{R}^m$ такі, що

$$\mu(dt) = C\exp(\tau t')P(dt)$$

і внутрішність множини

$$S: = \{x \in S \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-xt')\mu(dt) < \infty\}$$

непуста. Множина S опукла.

О з н а ч е н н я 2. Перетворенням Лапласа міри $\mu \in \Lambda$ називається функція

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-zt')\mu(dt),$$

яка визначена в смузі

$Z := \{z \in \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Re}\, z \in S\}$ і пишеться $\mu + u(z)$. Відомо [16, стр. I79], що внутрішність множини Z непуста і функція $u(z)$ аналітична всередині Z.

Переходимо до викладу властивостей п.Л. мір з класу Λ.

Зауважимо спочатку, що коли $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ таке відображення, що $h(\mathfrak{B}^m) \subset \mathfrak{B}^m$, то μh – міра, яка визначається співвідношенням $(\mu h)(B) = \mu(h(B))$ для будь-якого $B \in \mathfrak{B}^m$.

В л а с т и в і с т ь 1. Нехай A невироджена матриця порядку m, x – фіксований вектор з $\mathbb{R}^m$, відображення $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ визначається рівністю $h(t) = x + tA$, $\mu + u(z)$. Тоді

$$\mu h + u(z(A^{-1})')\exp(z(xA^{-1})').$$

Дійсно, якщо провести заміну змінних, то

$$\mu h : \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-zt')(\mu h)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-z((h-x)A^{-1})')\mu(dh) =$$

$$= \exp(z(xA^{-1})') \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-z(A^{-1})'h')\mu(dh) =$$

$$= u(z(A^{-1})')\exp(z(xA^{-1})').$$

В л а с т и в і с т ь 2. Нехай $s \in \mathbb{R}^m$, $\mu + u(z)$, $\lambda(dt) = \exp(-st')\mu(dt)$. Тоді $\lambda + u(z + s)$.

Безпосередньо випливає з означення

В л а с т и в і с т ь 3. Якщо $\mu + u(z)$, то

$$u^{(\nu)}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} (-t)^{\nu}\exp(-zt')\mu(dt) \quad \forall z \in \mathring{Z},\ \forall \nu \in \mathbb{N}^m. \qquad (1)$$

Випливає з аналітичності функції $u(z)$ в області $\mathring{Z}$ ($\mathring{Z}$ – внутрішність Z)

Н а с л і д о к. Якщо $\mu(\mathbb{R}^m) < \infty$, то $0 \in Z$, $u(0) = \mu(\mathbb{R}^m)$ і $u^{(\nu)}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} (-t)^{\nu}\mu(dt)$. Зокрема,

$$\frac{du}{dz}\Big|_{z=0} = -\int_{\mathbb{R}^m} t\mu(dt) = -\left(\int_{\mathbb{R}^m} t_1\mu(dt), \ldots, \int_{\mathbb{R}^m} t_m\mu(dt)\right), \qquad (2)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}\Big|_{z=0} =: K = (k_{ij}) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} t_i t_j \mu(dt)\right), \quad i, j = \overline{1,m}. \qquad (3)$$

Матриця K додатно визначена, бо якщо $a \in \mathbb{R}^m$ – довільний ненульовий вектор, то

$$aKa' = \sum_{i,j=1}^{m} k_{ij}a_i a_j = \int_{\mathbb{R}^m} (a_1t_1 + \ldots + a_mt_m)\mu(dt) > 0. \qquad (4)$$

О з н а ч е н н я 3. Згорткою мір μ і ν називається міра $\mu * \nu$, яка визначається співвідношенням

$$(\mu * \nu)(B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mu(B-t)\nu(dt) \quad \forall B \in \mathfrak{B}^m.$$

В л а с т и в і с т ь 4 (Барра, [16 , с.180]). Нехай $\mu_1 \div u_1(z)$, $\mu_2 \div u_2(z)$. Тоді

$$\mu_1 * \mu_2 \div u_1(z).u_2(z). \tag{5}$$

Нехай $\mu^{*0} := \mu$, $\mu^{*} := \mu * \mu, \dots, \mu^{*(n-1)} := \mu * \dots * \mu$ – $(n-1)$-кратна згортка міри μ. Тоді , якщо $\mu \div u(z)$, то

$$\mu^{*(n-1)} \div (u(z))^n. \tag{6}$$

Якщо функція $u(z) \div \mu$ і $r>0$ – довільне дійсне число, то функція $(u(z))^r$ не завжди є перетворенням Лапласа якоїсь міри, але якщо це так, то відповідну міру називатимемо r-згорткою міри μ і позначатимемо символом μ_r. Якщо $r \in \mathbb{N}$, то r-згортка співпадає з $(r-1)$-кратною згорткою міри μ.

Л е м а. Якщо $\mu \in \Lambda$ і $\check{S} \subset S$ така область в $\mathbb{R}^m$, що відображення $x(s) := -(d/ds)\ln u(s)$ є ін"єкцією області $\check{S}$ в $\mathbb{R}^m$, то відображення $x(s)$ є гомеоморфізмом області $\check{S}$ на $X := x(\check{S})$, який неперервно диференційовний разом зі своїм оберненим гомеоморфізмом $s = s(x)$, при цьому $ds/dx = (dx/ds)^{-1}|_{s=s(x)}$.

Д о в е д е н н я. Візьмемо який-небудь вектор $s \in \check{S}$ і розглянемо функцію $\phi(z) = (u(s))^{-1}u(s + z)\exp(x(s)z')$. Ця функція є перетворенням Лапласа такої міри P, що $P(\mathbb{R}^m) = 1$. Отже, згідно з наслідком з властивості 3 матриця

$$(d/dz)^2\phi(z)\Big|_{z=0} = (d/ds)^2\ln u(s) = -dx/ds$$

додатно визначена, що і доводить справедливість леми.

Відображення $s(x), x \in X$ називається s-характеристикою міри μ. Матриця $W(x) = (w_{ij}(x), i,j=\overline{1,m}) := -ds/dx$ називається w-характеристикою міри μ, ця матриця симетрична, додатно визначена і її елементи є функціями, які аналітичні в області X, крім того,

$$\partial w_{kj}(x)/\partial x_i = \partial w_{ki}(x)/\partial x_j, \quad i,j,k = \overline{1,m}.$$

Матриця $V(x) = (v_{ij}(x), i,j=\overline{1,m}) := (W(x))^{-1}$ називається v-характеристикою міри μ.

За аналогією до попереднього можна визначити s -, w - характеристики узагальнених мір (зарядів), для яких існує п.Л. і до того ж $u(s) > 0$ та $(d/ds)^2\ln u(s) > 0$, $s \in S$.

Нарешті, функцію $\varphi(z,x) = (u(s(x)))^{-1}u(s(x+z))$, $z \in \{z \mid s(x) + \operatorname{Re} z \in \check{S}\}$ називатимемо φ-характеристикою міри μ . Для кожного фіксованого x φ-характеристика є перетворенням Лапласа міри $Q(x)$, яка визначається співвідношенням:

$$Q(x)(B) = (u(s(x)))^{-1}\int_B \exp(-s(x)t')\mu(dt) \ \forall\, B \in \mathfrak{B}^m. \tag{7}$$

φ-характеристика має такі властивості:

$$\varphi(0,x) = 1; \ (d/dz)\,\varphi(z,x)|_{z=0} = -x; \tag{8}$$

$$(d/dz)^2\left\{\varphi(z,x)\exp(zx')\right\}\Big|_{z=0} = V(x). \tag{9}$$

Отже,

$$V(x) = (v_{ij}(x)) = \left(\int_{\mathbb{R}^m}(t_i - x_i)(t_j - x_j)Q(x)(dt) \right), \ i,j = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Внаслідок (8) і (9)

$$\varphi(z,x) = 1 - zx' + o(\|z\|), z \to 0, \tag{11}$$

$$\exp(zx')\varphi(z,x) = 1 + zV(x)z' + o(\|z\|^2), \ z \to 0. \tag{12}$$

В л а с т и в і с т ь 5. Нехай $\mu_1 \div u_1(z)$, $C > 0$ і $a \in \mathbb{R}^m$ - довільний вектор. Тоді w-характеристики мір μ_1 і $\mu_2 = C\exp(at')\mu_1$ збігаються.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_2(z) \div \mu_2$. Тоді внаслідок властивості 2 $u_2(z) = Cu_1(z - a)$, $z \in Z + a$, а звідси $-(d/ds)\ln u_1(s) = x_1(s - a)$, де $x_1(s) = -(d/ds)\ln u_1(s)$, $s \in S$. Отже, s-характеристикою міри μ_2 є функція $s_2(x) = s_1(x) + a$, а звідси $W_2(x) = -ds_2(x)/dx = ds_1(x)/dx = W_2(x)$.

3-2-2291

В л а с т и в і с т ь 6. Якщо міри μ_1 і μ_2, взагалі кажучи, узагальнені, мають однакові w-характеристики, то існує число $C>0$ і вектор $\gamma \in \mathbb{R}^m$ такі, що $\mu_2(dt) = C\exp(\gamma t')\mu_1(dt)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(z) \div \mu_1$, $u_2(z) \div \mu_2$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ – відповідно s-характеристики мір μ_1, μ_2, а функція $w(x)$, $x \in \mathbb{X}$, їх w-характеристика. Оскільки $ds_1/dx = ds_2/dx = -W(x)$, то знайдеться вектор γ такий, що $s_1(x) = s_2(x) + \gamma$. Звідси випливає, що коли відображення $x_1(s)$ обернене до відображення $s_1(x)$, а $x_2(s)$ – до відображення $s_2(x)$, то $x_1(s) = x_2(s - \gamma)$. Якщо через $b(s)$ позначити таку функцію, що $db/ds = x_2(s)$, то $db(s-\gamma)/ds = -x_1(s)$, а оскільки $(d/ds)\ln u_1(s) = -x_1(s)$ і $(d/ds)\ln u_2(s) = -x_2(s)$, то $\ln u_1(s) = b(s-\gamma) + C_3$ і $\ln u_2(s) + C_4$, де C_3 і C_4 – деякі константи. Звідси, з одного боку,

$$\exp(b(s)) = \exp(-C_3)u(s + C_2) + \exp(-C_3 + C_2 t)\mu_1(dt),$$

з іншого боку,

$$\exp(b(s)) = \exp(-C_4)u_2(s) + \exp(-C_4)\mu_2(dt);$$

покладаючи $C = \exp(C_4 - C_3)$, дістанемо потрібне твердження.

Розглянемо декілька прикладів.

П р и к л а д 1. Нехай міра μ зосереджена в точках 0 і 1 числової осі та має в них одиничні маси, тобто $\mu = \delta(0)+\delta(1)$. Тоді $u(z)=1 + \exp(-z), z \in \mathbb{C}$; $s(x) = \ln((1-x)/x)$; $W(x)=(x(1-x))^{-1}$; $\varphi(z,x) = 1 - x + x\exp(-z)$; $\mathbb{X} = \{x \mid 0 < x < 1\}$;

$$\mu^{*(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta(k).$$

П р и к л а д 2. Нехай $m = 1$, $\mu(dt) = \exp(-t^2)dt$. Тоді

$u(z) = \sqrt{\pi}\exp(z^2/4), z \in \mathbb{C}$; $s(x) = -2x$; $W(x) = 2$; $\varphi(z;x) = \exp(-2x + z^2/4)$, $x = \mathbb{R}$; $\mu_n = (\sqrt{\pi})/\sqrt{n}\exp(-t^2/n)$.

П р и к л а д 3. Нехай $m = 2$, $\mu = \delta((0,0)) + \delta((1,0)) + \delta((0,1))$. Тоді $u(z) = 1 + \exp(-z_1) + \exp(-z_2), (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$; $s_1 = \ln((1-x_1-x_2)/x_1)$, $s_2 = \ln((1-x_1-x_2)/x_2)$; $\varphi(z_1,z_2,x_1,x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1\exp(-z_1) + x_2\exp(-z_2)$; $\mathbb{X} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, 0 < x_1 + x_2 < 1\}$;

$$W(x_1,x_2) = (1 - x_1 - x_2)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (1-x_2)/x_1 & 1 \\ 1 & (1-x_1)x_2 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Основне означення

Позначимо через $\mathbb{E}$ клас функцій f, які визначені та неперервні на $\mathbb{R}^m$ і ростуть на нескінченності не швидше ніж показникові функції. Нехай $\mathbb{X}$ деяка область в $\mathbb{R}^m$.

О з н а ч е н н я 1. Послідовність (сім"я) додатних лінійних операторів $\{ L_n(f;x) \}$, $n \in \mathbb{N}_+ (n > 0)$, $f \in \mathbb{E}$, $x \in \mathbb{X}$, належить до класу $\mathbb{B}$, якщо

(i) $L_n(1;x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+(n > 0), \forall x \in \mathbb{X}$;

(ii) в області $\mathbb{X}$ функції $L_n(f;x)$ диференційовні;

(iii) існує симетрична додатно визначена матриця $W(x) = (w_{ij}(x)), i,j = \overline{1,m}$, така, що

$$(d/dx)L_n(f;x) = nL_n((t-x)f(t);x)W(x), \tag{1}$$

крім того, функції $w_{ij}(x)$ аналітичні в області $\mathbb{X}$ і

$$\frac{\partial w_{ki}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial w_{kj}(x)}{\partial x_i}, \quad i,j,k = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Матрицю $W(x)$ називатимемо інформаційною характеристикою операторів L_n. Матрицю, обернену до матриці $W(x)$, позначимо через $V(x)$ і називатимемо коваріаційною характеристикою операторів L_n, або просто – коваріацією.

П р и к л а д 1. Многочлени Бернштейна належать до класу $\mathbb{B}$, для них $W(x) = 1/(x(1-x))$, $0<x<1$.

П р и к л а д 2. Оператори Вейєрштрасса належать до класу $\mathbb{B}$, для них $W(x) = 2$, $-\infty < x < \infty$.

П р и к л а д 3. Двовимірні многочлени Бернштейна

$$B_n^L(f;x;y) := \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} f(k/n, l/n) \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!} x^k y^l (1-x-y)^{n-k-l}$$

належать до класу $\mathbb{B}$, для них матриця $W(x,y)$збігається з матрицею W з прикладу 3 § 1.

З а у в а ж е н н я. Д.л.о. з послідовності (сім"ї) операторів класу $\mathbb{B}$ називатимемо операторами класу $\mathbb{B}$.

§ 3. Структура операторів типу $\mathbb{B}$

Т е о р е м а 1 (про структуру). Якщо послідовність (сім"я) операторів (L_n) належить до класу $\mathbb{B}$, то існує міра $\mu \in \Lambda$ така, що

$$L_n(f;x) = (u(s(x)))^{-n} \int_{\mathbb{R}^m} f(t/n)\exp(-s(x)t')\mu_n(dt), \qquad (1)$$

де μ_n – $(n-1)$-кратна згортка (n-згортка) міри μ, $u(z)$ – перетворення Лапласа міри μ , $s(x)$ – s-характеристика міри μ, а w-характеристикою міри μ є матриця $W(x)$.

Д о в е д е н н я. Будемо ще вважати (без великої втрати загальності), що оператори L_n мають вигляд

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t/n)\lambda_n(x)(dt),$$

де $\lambda_n(x)$ -деяка сім"я мір, що залежать від n і x.

Оскільки функція $\varphi(t) = \exp(-nzt') \in \mathbb{E}$, то для будь-якого $z \in \mathbb{C}^m$ визначена функція $\varphi_n(z,x) = L_n(\varphi(t);x)$ і ця функція є перетворенням Лапласа міри $\lambda_n(x)$. Далі, внаслідок (2.1), функція $\varphi_n(z,x)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_n}{\partial z}W(x) + nzW(x)\varphi_n = 0. \qquad (2)$$

крім того, через те, що $L_n(1;x) = 1 \quad \forall x \in X$, то

$$\varphi_n(0;x) = 1. \qquad (3)$$

Згідно з (3) функція $\varphi_n(z,x)$ – єдиний розв"язок рівняння (2). Виразимо його інакше. Для цього зафіксуємо довільну точку $(z,x) \in \mathbb{C}^m \times X$ і позначимо через $s(x)$ якийсь частинний розв"язок рівняння $ds/dx = -W(x)$ (існує згідно умов узгодженості 2.2). Оскільки $\forall x \in X$ матриця $W(x)$ додатно визначена ,то існує такий окіл δ точки x, що в ньому відображення $s(x)$ має обернене. Позначимо його через $x(s)$, $s \in \delta$. Далі розглянемо рівняння $db/dx = x(s)$. Оскільки $\partial x_i/\partial x_j = \partial x_j/\partial x_i$, $i,j = \overline{1,m}$, (внаслідок симетрії матриці $W(x)$),то це рівняння має принаймні один розв"язок. Позначимо аналітичне продовження цього розв"язку на смугу $T_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}^m | \mathrm{Re}\zeta \in s(\delta)\}$ через $b(s)$. Тоді безпосередньою підстановкою в рівняння (2) перевіряється, що

$$\varphi_n(z,x) = \exp(n(b(s(x)) - b(s(x) + z))). \qquad (4)$$

Розглянемо міру

$$\mu_n(dt) = \exp(s(x)t' - b(s(x))\lambda_1(x)(dt). \qquad (5)$$

Ця міра не залежить від x, бо її перетворенням Лапласа є функція $u(z) = \exp(-b(z))$, $z \in T_\delta$. Доведемо, що міра μ шукана. Дійсно, розглянемо послідовність операторів

$$\Lambda_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t/n)q_n(x)(dt),$$

де

$$q_n(x)(dt) = (u(s(x)))^{-n}\exp(-s(x)t')\mu_n(dt).$$

Оператори $\Lambda_n(f;x)$ визначені для функцій $f \in \mathbb{E}$, бо $\exists\, M > 0$ і $C > 0$ такі, що $|f(t)| \leqslant M\exp(C\|t\|) < M \sum_{\gamma} exp(-\gamma t')$ $\forall t \in \mathbb{R}^m$, де підсумовування проводиться за всіма векторами γ, координати яких приймають значення C і $-C$, а $\Lambda_n(\exp(-\gamma t');x)$ існує. Перетворенням Лапласа міри $Q_n(x)$ є функція $\exp(n(b(s(x))-b(s(x)+z)))$, тобто $\varphi_n(z,x)$, а внаслідок взаємно однозначної відповідності між мірами і їх перетвореннями Лапласа це означає, що $q_n(x) = \lambda_n(x)$ і, отже, $\Lambda_n(f;x) = L_n(f;x)$.

Те, що $\mu \in \Lambda$, вбачається з співвідношення (5).

З а у в а ж е н н я 1. Якщо оператори $L_n(f;x)$ записати у вигляді

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)Q_n(x)(dt), \tag{6}$$

то $Q_n(x) + (\varphi(z/n,x))^n$, де $\varphi(z,\cdot)$ - φ-характеристика міри μ.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо апріорі задати міру μ і за формулою (1) побудувати послідовність операторів (L_n), то ця послідовність належить до класу $\mathbb{B}$. Отже, одержуємо зручний спосіб побудови операторів типу $\mathbb{B}$. В зв"язку з цим говориться, що оператори L_n породжуються мірою μ. Наприклад, многочлени Бернштейна породжуються мірою $\delta(0) + \delta(1)$, оператори Вейерштрасса - мірою $\mu(dt) = \exp(-t^2)dt$, а многочлени $B_n^L(f;x,y)$ породжуються мірою $\delta((0,0)) + \delta((1,0)) + \delta((0,1))$.

Крім запису операторів $L_n(f;x)$ у формі (1) і (6) використовуватимемо ще одну форму запису. Нехай $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - відображення, яке визначається рівністю $h(t) = x+tn^{-1/2}$. Покладемо $P_n(x) := Q_n(x)h$, тоді

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x+tn^{-1/2})P_n(x)(dt). \tag{7}$$

Наприклад, для многочленів $B_n(f;x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\, \delta((k/n - x)\sqrt{n}).$$

§ 4. Деформації операторів

О з н а ч е н н я 1. Нехай $h(t): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ диференційовний гомеоморфізм і r таке додатне число, що існує оператор L_{nr}. Перехід від оператора L_n до оператора $\mathcal{L}_n$ за формулою $\mathcal{L}_n(f;x) = L_{nr}(f(h^{-1}(t);h(x))$ називається деформацією операторів L_n. Якщо відображення h - лінійне, то - лінійною деформацією.

Т е о р е м а 1. Якщо $(L_n) \in \mathbb{B}$, то оператори $\mathcal{L}_n$ задовольняють співвідношення

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}_n(f;x) = nr\mathcal{L}_n((h(t) - h(x))f(t);x)W(h(x)\frac{dh}{dt}. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення операторів $\mathcal{L}_n$ і співвідношення (3.1), дістанемо

$$\mathcal{L}_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(h^{-1}(t/(nr))\exp\left\{-s(h(x))t - nr\ln u(s(h(x))\right\}\mu_{nr}(dt),$$

а оскільки

$$\frac{d}{dx}\left\{s(h(x))t' + nr\ln u(s(h(x))\right\} = t\left(\frac{ds}{dh}\cdot\frac{dh}{dx}\right) - nrx(s(h(x))) \times$$

$$\times \frac{ds}{dh}\cdot\frac{dh}{dx} = -nr(h(h^{-1}(t/(nr))) - h(x)W(h(x))\frac{dh}{dx},$$

то звідси випливає співвідношення (1).

Н а с л і д о к 1. Нехай $h(t) = \beta + r^{-1}tA$, де $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $r>0$, A-довільна невироджена матриця. Тоді $(\mathcal{L}_n) \in \mathbb{B}$ з коваріацією $\tilde{V}(x) = r(A^{-1})'V(\beta + r^{-1}xA)A^{-1}$. Отже, лінійні деформації операторів типу $\mathbb{B}$ не виводять їх з цього класу.

Н а с л і д о к 2. Нехай д.л.о. $\mathcal{L}_n(f;x)$ задовольняють співвідношення $\left(\frac{d\mathcal{L}_n}{dx}\right)\cdot \mathcal{V}(x) = n\mathcal{L}_n((h(t)-h(x))f(t);x)$, де $\mathcal{V}(x)$ невироджена матриця з аналітичними елементами. Тоді оператори

$L_n(f;x) = \mathcal{L}_n(f(h(t));h^{-1}(x))$ належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією $V(x) = \mathcal{V}(h^{-1}(x))\frac{dh}{dx}$.

П р и к л а д 1. Продеформуємо оператори В.А.Баскакова [5]

$$Б_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k},\ x > 0,$$ взявши

$h(x)=x/(1-x)$. Матимемо оператори Майер-Кйоніга і Целлера $\tilde{M}_n(f;x)$, які задовольняють співвідношення

$x d\left[\tilde{M}_n(f;x)\right]/dx = n\,\tilde{M}_n\left[(t/(1-t) - x/(1-x))f(t);x\right]$ ([98, с.456]) .

П р и к л а д 2. Нехай S – m-мірний невироджений симплекс з вершинами $a_0 = (a_{10},\dots,a_{m0})$, $a_1 = (a_{11},\dots,a_{m1}),\dots,$ $a_m = (a_{1m},\dots,a_{mm})$. Позначимо через A матрицю $((a_1-a_0)',(a_2-a_0)',\dots,(a_m-a_0)')$. Відображення $h(t) = (t-a_0)A^{-1}$ переводить симплекс S в одиничний координатний симплекс S_0. Якщо виконати деформацію багатовимірних многочленів Бернштейна $B_n(f;x_1,\dots,x_m):=$

$$= \sum f\left(\frac{k_1}{n},\dots,\frac{k_m}{n}\right)\frac{n!}{k_0!k_1!\dots k_m!}\,x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}(1-x_1-\dots-x_m)^{k_0},$$

$k_0+k_1\dots+k_m = n$, $k_0\geq 0,\dots,k_m\geq 0$, $x_1>0,\dots,x_m>0$, $1-x_1-\dots-x_m>0$, які належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією $V(x)=(x_i(\delta_{ij}-x_j))$, $i,j=\overline{1,m}$, то дістанемо симпліціальні многочлени Бернштейна

$$B_n^{\Delta}(f;x) = B_n(f(a_0+tA);(x-a_0)A^{-1})$$

з коваріацією $\tilde{V}(x) = A'V((x-a_0)A^{-1})A$, $x \in S$.

П р и к л а д 3. Оператори $Б_n(f;x,y):=\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} f(k_1/n,\ k_2/n)\times$

$\times\ \Gamma(n+k_1+k_2)/(\Gamma(n)k_1!k_2!)x^{k_1}y^{k_2}(1+x+y)^{-n-k_1-k_2}$, $n>0$, $x > 0$, $y > 0$ належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією

$$V(x,y) = \begin{bmatrix} x(1+x) & xy \\ xy & y(1+y) \end{bmatrix}.$$

Продеформуємо ці оператори, використовуючи перетворення

$h(t,s) = (t,s)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Дістанемо оператори

$$\beta_n(f;x,y) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} f\left[(2k_1+k_2)/n,(k_1+k_2)/n\right]\Gamma(n+k_1+k_2)\times$$

$\times(k_1!k_2!\Gamma(n))^{-1}(x-y)^{k_1}(2x-y)^{k_2}(1+y)^{-n-k_1-k_2}$, які належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією

$$V(x,y) = \begin{bmatrix} 3x-2y+x^2 & x+xy \\ x+xy & y+y^2 \end{bmatrix},\ (x,y) \in X=\{(x,y)\,|\,y<x,y>x/2\}.$$

Далі в цьому параграфі разглядатимуться тільки одновимірні д.л.о. типу $\mathbb{B}$.

У цьому випадку наведемо ще один наслідок з теореми 1.

Н а с л і д о к 3. Нехай α $(\alpha\neq 0)$, β, $\gamma(\gamma>0)$ – довільні числа, $N = n\gamma^{-1}\alpha^{-2}$, і нехай існує N-згортка міри μ, що породжує оператори L_n. Тоді , якщо функція $v(x)$ – коваріація операторів $L_n(f;x)$, $x \in X$, то функція $V(x)=\gamma v(\alpha x+\beta)$-коваріація операторів $\mathcal{L}_n(f;x) = L_N(f((t-\beta)/\alpha);\ x\alpha+\beta)$, $x\in(X-\beta)/\alpha$.

Далі, до кінця глави 1, під деформацією операторів матиметься на увазі перехід від операторів L_n до операторів $\mathcal{L}_n$ за останньою формулою.

Т е о р е м а 2. Будь-який квадратичний тричлен $V(x)=$ $=ax^2+bx+c$ (крім випадку: $a<0$, $b^2-4ac<0$, $(-n/a)$ - не натуральне) може і бути коваріацією деякої послідовності (сім"ї) операторів.

Д о в е д е н н я. Розглянемо можливі випадки.

1) $a>0, b^2-4ac>0$. Нехай $x_1<x_2$ - нулі $V(x)$. Покладемо $\alpha=$ $=1/(x_2-x_1)$, $\beta=x_2/(x_2-x_1)$, $\gamma=a(x_2-x_1)^2$. Тоді, деформуючи оператори Баскакова $Б_n(f;x)$, дістанемо оператори з коваріацією $V(x)$, $x>x_2$.

2) $a<0$, $b^2-4ac<0$. Нехай $x_1<x_2$ - нулі $V(x)$. Покладемо $\alpha=$ $=1/(x_2-x_1)^{-1}$, $\beta=-x_1(x_2-x_1)^{-1}$, $\gamma=-a(x_2-x_1)^2$. Тоді, якщо число $(-n/a)$ натуральне, то лінійна деформація многочленів Бернштейна $B_n(f;x)$ дає оператори з коваріацією $V(x), x_1<x<x_2$.

3) $a>0$, $b^2-4ac=0$. Нехай $\alpha=1, \beta=b/(2a), \gamma=a$. Тоді, деформуючи оператори Феллера-Уіддера (див., наприклад, [98, с.454]).

$$F_n(f;x):=(x^n\Gamma(n))^{-1}\int_0^\infty f(t/n)e^{-t/x}t^{n-1}dt,\ x>0,\ n>0,\ v(x)=x^2,$$

дістанемо оператори з коваріацією $V(x), x>-b/(2a)$.

4) $a>0$, $b^2-4ac<0$. Нехай $\alpha=2a(4ac-b^2)^{-1/2}, \beta=b(4ac-b^2)^{-1/2}$, $\gamma=c-b^2/(4a)$. Тоді, деформуючи оператори T_n [98] дістанемо оператори з коваріацією $V(x)$. Теорема доведена.

§ 5. Оператори, що породжуються степеневими рядами

Л е м а 1. Нехай функції $\varphi(z)$ і $\Omega(z)$ є аналітичними в крузі $\{z:|z|<\rho_1\}$ і мають такі властивості:

1) $\varphi(0)>0$, $\Omega(0)\geqslant 0$;

2) $\varphi(z)>0$, $\Omega(z)>0$ $\forall z\in(0,\rho_1)$;

3) числа $c_{k,1}:=(k_1!)^{-1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left\{\Omega'(z)(\varphi(z))^k\right\}\Big|_{z=0}$,

$k=1,2,\ldots,$ - невід"ємні.

Тоді існує проміжок $(0,\rho)$, на якому функція $x(z)=z(1-z\varphi'(z)/\varphi(z))^{-1}\Omega'(z)/\Omega(z)$ монотонно зростає.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\varphi(0)>0$, то знайдеться проміжок $(0,\rho_2)$, де $\varphi(z)-z\varphi'(z)>0$. Покладемо $(0,\rho)=(0,\rho_1)\cap(0,\rho_2)$ і доведемо, що на цьому проміжку функція $x(z)$ монотонно зростає. Для цього розглянемо допоміжну функцію $\Phi(t,z)=t^{-x}(\varphi(tz))^x\Omega(tz)$, $0<t\leqslant 1$, і позначимо через $\mathfrak{L}(d/dt)$ диференціальний оператор

$$(t\varphi(tz)(\varphi(tz)-tz\varphi'(tz))^{-1}d/dt)^2.$$

Тоді, з одного боку, $\mathfrak{L}(d/dt)\Phi(t,z)|_{t=1}=z\Omega(z)(\varphi(z))^{x+1}\times$ $\times(\varphi(z)-z\varphi'(z))^{-1}dx/dz$, а з іншого боку, внаслідок теореми Лагранжа [80, с.186]

$$\Omega(tz)=\Omega(0)+\sum_{k=1}^\infty c_{k,1}(tz)^k(\varphi(tz))^{-k},\quad \mathfrak{L}(d/dt)\Phi(t,z)|_{t=1}=$$

$$=\sum_{k=1}^\infty c_{k,1}(k-x)^2z^k(\varphi(z))^{-k}>0,\ z\in(0,\rho).$$ Отже, $(dx/dz)>0$, що і потрібно було довести.

Т е о р е м а 1. Нехай виконуються умови леми 1 і нехай $z=z(x)$, $x\in X=x((0,\rho))$, - функція, обернена до функції $x=x(z)$. Тоді оператори

$$L_n(f;x) = (\Omega(z(x)))^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n) c_{k,n} (z(x))^k (\varphi(z(x)))^{-k},$$

де $c_{0,n} := (\Omega(0))^n$,

$$c_{k,n} := (k!)^{-1} (d/dz)^{k-1} \left[n(\Omega(z))^{n-1} \Omega'(z) (\varphi(z))^k \right] \Big|_{z=0}, \quad k,\ n_+ \in \mathbb{N},$$

належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією

$$v(x) = x\Omega(z(x)) (d/dx\, \Omega(z(x)))^{-1}, x \in \mathcal{X}.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо міру $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,1} \delta(k)$, тобто міру, зосереджену в точках $k=0,1,2,\ldots$, з масами, відповідно рівними $c_{k,1}$. Покажемо, що міра μ породжує оператори L_n. Цим буде доведено, що оператори L_n належать до класу $\mathbb{B}$. Перетворенням Лапласа міри μ є функція $\omega(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,1} y^k$, де $y=e^{-s}$. Оскільки цей ряд (згідно з теоремою Лагранжа) є степеневим рядом функції $\omega(y)=\Omega(\xi)$, де функція $\xi=\xi(y)$ задана неявно за допомогою рівняння $y=\xi(\varphi(\xi))^{-1}$, то s-характеристикою міри μ буде функція $s(x)=-\ln(z(x)/\varphi(z(x)))$ і $u(s(x))=\Omega(z(x))$.

Далі, $(n-1)$-кратною згорткою міри μ є міра $\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} \delta(k)$, бо $(n-1)$-кратною згорткою послідовності $(c_{k,1})$ є послідовність $(c_{k,n})$. Нарешті, застосувавши теорему про структуру, дістанемо оператори $L_n(f;x)$.

Н а с л і д о к 1. Нехай $\varphi(z)=1$. Тоді $\omega(y)=\Omega(y), z(x)=y(x)$, де $y=y(x)$ функція, обернена до функції $x=y\omega'(y)/\omega(y)$, і оператори L_n в цьому випадку такі:

$$L_n(f;x) = (\omega(y(x)))^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n) c_{k,n} (y(x))^k,$$

$v(x) = y(x)/y'(x),\ x \in \mathcal{X}$.

З а у в а ж е н н я . Часто числа $c_{k,n}$ є невід"ємними для будь-якого $n > 0$. В цьому випадку можна говорити не тільки про послідовність операторів, але і про сім"ю операторів, що залежить від параметра n.

П р и к л а д 1.

$$\omega(y) = \exp y = \sum_{k=0}^{\infty} y^k / k!,$$

цей ряд породжує оператори Міракьяна-Саса [60, 122]:

$$M_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)(nx)^k / k!,\ V(x) = x,\ x > 0,\ n > 0.$$

П р и к л а д 2.

$$\omega(y) = (1-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k,$$

цей ряд породжує оператори Баскакова (див. приклад 1.4.1).

П р и к л а д 3.

$$\omega(y) = \ln(1-y)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} y^k / k,$$

цей ряд породжує оператори

$$\Lambda_n(f;x) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k/n) \sigma_{k,n} (1-1/\lambda(x))^k (\ln\lambda(x))^{-n},$$

$V(x) = x(\lambda(x) - x),\ x > 1,\ n \in \mathbb{N}_+,$

де

$$\sigma_{k,n} = \sum_{\begin{cases} t_1+\ldots+t_n=k \\ t_1>0,\ldots,t_n>0 \end{cases}} (t_1\ldots t_n)^{-1}; \ \lambda(x)$$ – функція, обернена

до функції $x = (\lambda - 1)/\ln\lambda$, $\lambda \geqslant 1$ $(x(1):= 1)$.
Оператори $\Lambda_n(f;x)$ називатимемо логарифмічними операторами.

§ 6. Оператори з кубічною коваріацією

Т е о р е м а 1. Нехай $v(x)=A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $A>0$, $x_1<x_2<x_3$, $x>x_3$.

Тоді існують оператори з коваріацією $V(x)$.

Д о в е д е н н я. Покладемо $\Omega(z)=1+z$, $\varphi(z)=(1+z)^a, a>1$, $0\leqslant z<1$.

Оскільки $\Omega(0)>0$ і $(k!)^{-1}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{n(1+z)^{n-1}(1+z)^{ka}\right\}\Big|_{z=0} =$

$= \dfrac{n}{ak+n}\begin{pmatrix} ak+n \\ k \end{pmatrix} > 0$ для $k=1,2,\ldots$ і для будь-якого $n>0$, то можна застосувати теорему 5.1. Дістанемо оператори $K_n(f;x;a) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\frac{n}{ak+n}\begin{pmatrix} ak+n \\ k \end{pmatrix} x^k(1+(a-1)x)^{n+k(a-1)}(1+ax)^{-n-ka}, \quad (1)$$

які належать до класу $\mathfrak{B}$ з коваріацією $v(x) = x(1+(a-1)x)(1+ax)$, $x>0$.

Нехай, далі, $a=(x_3-x_1)(x_2-x_1)^{-1}$, $a=(x_2-x_1)(x_3-x_1)^{-1}\times$ $\times(x_3-x_2)^{-1}$; $\beta= x_3(x_1-x_2)(x_3-x_1)^{-1}$, $\gamma=A(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2(x_2-x_1)^{-1}$.
Деформуючи оператори $K_n(f;x;a)$, дістанемо оператори з коврiацією $V(x)$, що і потрібно було довести.

Н а с л і д о к 1. Нехай $V(x)= A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $a<0$, $x_1<x_2<x_3$, $x<x_1$. Тоді існують оператори з коваріацією $V(x)$.

Дійсно, спочатку побудуємо оператори з коваріацією $v(x) =$

$= - A(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)$, $x>-x_1$, потім продеформуємо одержану послідовність операторів, взявши $\gamma=1$, $\alpha=-1$, $\beta=0$.

П р и к л а д 1. Позначимо через $K_n(f;x)$ оператори $K_n(f;x;2)$. Дістанемо

$$K_n(f;x;) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n}{2k+n}\begin{pmatrix} 2k+n \\ k \end{pmatrix} x^k(1+x)^{n+k}(1+2x)^{-n-2k},$$

$v(x) = x(1+x)(1+2x), x>0$.
Ці оператори називатимемо операторами Каталана, а оператори $K_n(f;x;a)$ – узагальненими операторами Каталана (числа $\dfrac{n}{2k+n}\begin{pmatrix} 2k+n \\ k \end{pmatrix}$ – числа Каталана).

П р и к л а д 2. Якщо взяти $\gamma=4$, $\alpha=1/2$, $\beta=-1/2$, то лінійна деформація операторів Каталана дає оператори

$$\mathfrak{B}_n(f;x;) = \sum_{k=n}^{\infty} f\left(\frac{2k}{n}-1\right)\frac{n2^{n-2k}}{2k-n}\begin{pmatrix} 2k-n \\ k \end{pmatrix} x^{n-2k}(x+1)^k(x-1)^{k-n},$$

з коваріацією $V(x)=x^3-x$, $x>1$. Оператори $\mathfrak{B}_n(f;x)$ називатимемо операторами блукань (вони можуть використовуватися при вивченні випадкових блукань точки на прямій).

Л е м а 1. Коефіцієнти многочленів

$$g_k(t):=t^{-1}\left(\frac{d}{dy}\right)^{k+1}\left\{e^{t\arcsin y}\right\}\Big|_{y=0}, \quad (2)$$

$k=0,1,2,\ldots$–невід"ємні, до того ж, якщо число k парне, то функції $g_k(t)$ – парні, якщо k – непарне, то – непарні.

Д о в е д е н н я. Якщо розкласти функцію $\exp(t\arcsin y)$ в ряд за степенями y, використовуючи теорему Лагранжа[80, с.186], то дістанемо інше зображення для многочленів $g_k(t)$, а саме:

$$g_k(t)=\left(\frac{d}{dz}\right)^k\left\{e^{tz}\left(\frac{z}{\sin z}\right)\right\}\Big|_{z=0}, \quad k=0,1,2,\ldots . \quad (3)$$

Якщо застосувати до правої частини співвідношення (3) формулу Бруно для знаходження похідних вищих порядків від складних функцій, то дістанемо явне зображення для поліномів $g_k(t)$:

$$g_k(t) = \sum k!(r_1!r_2!\ldots r_{2m}!)^{-1}(k+1)^{r_2+r_4+\ldots+r_{2m}}\,2^{k-r_1}t^{r_1}\times$$

$$\times\left(\frac{B_2}{2\times 2!}\right)^{r_2}\cdot\left(-\frac{B_4}{4\times 4!}\right)^{r_4}\ldots\left((-1)^{m+1}\frac{B_{2m}}{2m\times(2m)!}\right)^{r_{2m}}, \qquad (4)$$

де підсумовування проводиться за всіма натуральними розв"язками рівняння $r_1+2r_2+4r_4+\ldots+2mr_{2m}=k$, $m=[k/2]$,

$B_n:=\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left(e^z/(e^z-1)\right)\Big|_{z=0}$ – числа Бернулі, $n=2,4,\ldots$.

Оскільки $(-1)^{k+1}B_{2k}>0$, коли $k\geqslant 1$, то з (4) випливає, що всі коефіцієнти многочленів $g_k(t)$ невід"ємні. Наприклад, старший коефіцієнт будь-якого такого многочлена дорівнює 1.

Наведемо невелику таблицю коефіцієнтів многочленів

$$g_k(t)=\sum_{j=0}^{k}a_{kj}t^j,\quad 0\leqslant k\leqslant 8.$$

$k \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	1	0	1						
3	0	4	0	1					
4	9	0	10	0	1				
5	0	64	0	20	0	1			
6	225	0	259	0	35	0	1		
7	0	2304	0	784	0	56	0	1	
8	11025	0	12916	0	1974	0	84	0	1

Т е о р е м а 2. Нехай $V(x)=A(x-x_0)((x-\lambda)^2+\delta^2)$, $A>0$, $\lambda\leqslant x_0, x>x_0$.

Тоді існують оператори з коваріацією $V(x)$.

Д о в е д е н н я. Покладемо $\Omega(z)=\exp(z), \varphi(z)= = b\exp(az)z/(\sin(bz))$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (якщо $b=0$, то $\sin(bz)/b:=z$), $z\geqslant 0$. Оскільки $\Omega(0)=1>0$, а внаслідок леми 1 і співвідношення (3)

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{n\exp((n+ak)z)\left(\frac{bz}{\sin(bz)}\right)^k\right\}\Big|_{z=0}=nb^{k-1}g_{k-1}\left(\frac{n+ak}{b}\right)>0$$

для $k=1,2,\ldots$, і для будь-якого $n>0$, то можна застосувати теорему 5.1. Дістанемо оператори $A_n(f;x;a;b):=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f(k/n)\,\frac{nb^{k-1}}{k!}\,g_{k-1}\left(\frac{n+ak}{b}\right)x^k((a^2+b^2)x^2+2ax+1)^{-k/2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{n+ak}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{1+ax}\right),$$ де $g_{-1}(t):=t^{-1}$, які належать до класу $\mathbb{B}$ з коваріацією $V(x)=x(1+2ax+(a^2+b^2)x^2)$, $x>0$.

Нехай, $\alpha=1, \beta=-x_0$, $\gamma=A(\delta^2+(x_0-\lambda)^2)$, $a=(x_0-\lambda)((x_0-\lambda)^2+\delta^2)^{-1}$; $b=\delta((x_0-\lambda)^2+\delta^2)^{-1}$ ($\delta\neq 0$, якщо $x_0=\lambda$).

Тоді, деформуючи оператори $A_n(f;x;a;b)$, дістанемо оператори з коваріацією $V(x)$.

Якщо $\delta=0$ і $x_0=\lambda$, то $V(x)=A(x-x_0)^3$. Покладемо в цьому випадку $\alpha=1$, $\beta=-x_0$, $\gamma=A$. Деформуючи оператори Ізмаїла-Мея $\Omega_n(f;x)$ (див. с. 128), дістанемо оператори з коваріацією $V(x)$. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 2. Нехай $V(x)=A(x-x_0)((x-\lambda)^2+\delta^2)$, $A<0$, $x_0\leqslant\lambda$, $x<x_0$. Тоді існують оператори з коваріацією $V(x)$.

Дійсно, побудуємо спочатку оператори з коваріацією

$\upsilon(x) = -A(x+x_0)((x+\lambda)^2+\delta^2)$, потім продеформуємо одержані оператори, взявши $\gamma=1$, $\alpha=-1$, $\beta=0$.

Наведемо конкретні приклади.

П р и к л а д 3. Нехай $b=0$. Тоді

$$A_n(f;x;a;0)= \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\frac{n}{k!}(n+ak)^{k-1}x^k(1+ax)^{-k}\exp\left[-\frac{x}{1+x}(n+ak)\right],$$

$\upsilon(x)=x(ax+1)^2$, $x>0$.

П р и к л а д 4. Нехай $b=0$. Тоді

$$A_n(f;x;0;b):=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\frac{nb^{k-1}}{k!}g_{k-1}\left(\frac{n}{b}\right)x^k(b^2x^2+1)^{-k/2}\exp\left\{-\frac{n}{b}\operatorname{arctg}(bx)\right\},$$

$\upsilon(x)= x(1+b^2x^2)$, $x>0$.

П р и к л а д 5. Нехай $\gamma=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$. Тоді, деформуючи оператори $A_n(f;x;1;0)$, дістанемо оператори

$$BT_n(f;x)= \sum_{k=n}^{\infty} f(k/n)\frac{n}{(k-n)!}k^{k-n-1}(1-1/x)^{k-n}\exp\left[-k(1-1/x)\right],$$

$\upsilon(x)=(x-1)x^2$, $x>1$.

Оператори BT_n називатимемо операторами Бореля-Таннера (їх можна використати для вивчення імовірнісного розподілу з такою самою назвою).

П р и к л а д 6. Нехай $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Тоді $A_n(f;x;\lambda_2/\lambda_1;0)=$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)\frac{n\lambda_1}{k!}(n\lambda_1+k\lambda_2)^{k-1}x^k(\lambda_1+\lambda_2x)^{-k}\exp\left[-\frac{n\lambda_1+k\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2x}x\right],$$

$\upsilon(x)=x(1+x\lambda_2/\lambda_1)^2$, $x>0$.

Ці оператори називатимемо операторами Пуассона-Пуассона і позначатимемо символом $PP_n(f;x)$ (їх можна використати для вивчення

імовірнісного розподілу з такою самою назвою).

П р и к л а д 7. Нехай $\gamma=3$, $\alpha=1$, $\beta=-1$. Тоді, деформуючи оператори $A_n(f;x;1/2;1/(2\sqrt{3})$, дістанемо оператори $\mathfrak{A}_n(f;x;):=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f(k/n+1)n2^{1-k}3^{-1/2}g_{k-1}\left(\frac{2n+3k}{\sqrt{3}}\right)(x-1)^k(x^2+x+1)^{-k/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{2n+3k}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{(1+x)\sqrt{3}}\right\},\quad \upsilon(x) = x^3-1,\ x > 1.$$

З а у в а ж е н н я 2. Оператори $A_n(f;x;0;0)$ збігаються з операторами Міракьяна-Саса $M_n(f;x)$.

Позначимо через $\mathbb{P}_+$ множину всіх можливих поліноміальних коваріацій, що фігурують в теоремах 4.2,1,2, а через $\mathbb{P}$ – множину всіх поліномів степеня не більше, ніж три.

Т е о р е м а 3. Якщо $\upsilon(x) \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}_+$, то не існує додатних операторів типу $\mathbb{B}$ з коваріацією $\upsilon(x)$.

Д о в е д е н н я. Для доведення досить розглянути такі випадки:

1)) $\upsilon(x)=ax^2+bx+c$, $a<0$, $b^2-4ac>0$, $-n/a \notin \mathbb{N}$;

2) $\upsilon(x)=A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $A>0$, $x_1<x_2<x_3$, $x_1<x<x_2$;

3) $\upsilon(x)=x((a^2+b^2)x^2+2ax+1)$, $x>0$, $a<0$, $b\geq0$.

Через те, що методика доведення в усіх випадках однакова, то обмежимося випадком 3 .

Припустимо супротивне, тобто припустимо, що $\upsilon(x)$ – коваріація деякої сім"ї додатних операторів. Тоді знайдеться така міра μ, що породжує цю сім"ю. Її υ-характеристикою є функція $\upsilon(x)$. Розглянемо заряд

$$\nu=\sum_{k=0}^{\infty}(k!)b^{k-1}g_{k-1}((ak+1)/b)\delta(k),$$

де $g_k(t)$ – многочлени, які визначені за допомогою співвідношення (3), якщо $k=1,2,\ldots$, $g_{-1}(t):=t^{-1}$. Перетворенням Лапласа цього заряду є функція $u(s)=\exp z(s)$, де функція $z(s)$ задана неявно за допомогою рівняння $\exp(-s)=\exp(-az)\sin(bz)/b$. Тоді s-характеристикою заряду ν є функція

$$s(x) = \frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{1+ax} + \frac{1}{2}\ln\left[(a^2+b^2)x^2+2ax+1)\right]-\ln x,$$ а звідси

v-характеристикою заряду ν є функція $v(x)=x((a^2+b^2)x^2+2ax+1)$, $x>0$. Отже, заряд ν і міра μ мають однакові v-характеристики, тому внаслідок властивості 5 §1 знайдуться такі числа C_1 і C_2, що $\mu(dt)=C_1\exp(C_2t)\nu(dt)$. Тоді $\mu(0)=C_1$, і, отже, повинно бути $C_1>0$. Нехай $k>[-1/a]$. Тоді $\mu(2k+2)=C_1\exp(C_2(2k+1))g_{2k+1}(b^{-1}(1+a(2k+1)))$, а оскільки функція $g_{2k+1}(t)$ непарна і $a<0$, то $\mu(2k+2)<0$. А це протирічить тому, що μ – міра. Теорема доведена.

§ 7. Оператори зі степеневою коваріацією

Т е о р е м а 1. Нехай $v(x)=x^r$, $x>0$, $r \in (-\infty;0]\cup[1;\infty)$. Тоді існують оператори з коваріацією $v(x)$.

Д о в е д е н н я. Якщо $r = 0,1,2,3,3/2$, то оператори з коваріаціями $v(x)=x^r$ були відомі, це, відповідно, оператори Вейєрштрасса, оператори Міракьяна-Саса, оператори Феллера-Уіддера, оператори Ізмаїла-Мея. Розглянемо решту випадків.

1) $r>2$. Спочатку побудуємо оператори, що породжуються стійким розподілом з щільністю $g(t,\alpha,1,0,\lambda)$, $\lambda>0$, $0<\alpha<1$. Відомо [47, с. 136], що перетворенням Лапласа цієї щільності є функція $u(s)= \exp(-\lambda s^\alpha)$, $s>0$. Звідси випливає,

що s-характеристикою міри $\mu(dt)=g(t,\alpha,1,0,\lambda)dt$ є функція

$s(x)=(x/(\alpha\lambda))^{1/(\alpha-1)}$, а v-характеристикою – функція

$v(x)=(1-\alpha)(\alpha\lambda)^{1/(\alpha-1)}x^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}$, $x > 0$. Оскільки $(u(s))^n= \exp(-n\lambda s^\alpha)$, то $\mu_n(dt)=g(t,\alpha,1,0,n\lambda)dt$, і тоді, використовуючи

теорему про структуру, дістанемо оператори, що породжує міра μ:

$$G_n(f;x;\alpha) = \exp\left\{n\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f(t/n)\exp\left\{-(\alpha\lambda))^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{1}{1-\alpha}}t\right\}\times g(t,\alpha,1,0,n\lambda)dt.$$

Якщо покласти тут $\alpha = \frac{r-2}{r-1}$, $\lambda = (r-1)^{\frac{r-2}{r-1}}/(r-2)$, то дістанемо оператори з коваріацією $v(x)=x^r, r>2, x>0$.

2) $r<0$. Спочатку побудуємо оператори, що породжуються стійким розподілом з щільністю $g(t,\alpha,-1,\lambda)$, $\lambda>0$, $1<\alpha\leq2$. Відомо [47, с.136], що перетворенням Лапласа цієї щільності є функція $u(s)=\exp(\lambda(-s)^\alpha)$, $s<0$. Звідси випливає, що

s-характеристикою міри $\mu(dt)=g(t,\alpha,-1,0,\lambda)dt$ є функція $s(x) = - (x\alpha^{-1}\lambda^{-1})^{1/(\alpha-1)}$, а v-характеристикою – функція $v(x) = (\alpha-1)(\alpha\lambda)^{1/(\alpha-1)}x^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}$, $x > 0$.

Аналогічно дістанемо оператори, які породжує міра μ:

$$G_n(f;x;\alpha)= \exp\left\{n\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f(t/n)\exp\left\{-(\alpha\lambda))^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{1}{1-\alpha}}t\right\}\times g(t,\alpha,-1,0,n\lambda)dt.$$

Покладаючи тут $\alpha = \frac{2-r}{r-1}$, $\lambda = (r-1)^{\frac{2-r}{r-1}}/(r-2)$, дістанемо оператори з коваріацією $v(x)=x^r, r>0, x>0$.

3) $1<r<2$. Нехай

$$g(z,\alpha):=\sum_{k=1}^{\infty}z^k/(k!\Gamma(\alpha k)),\ \alpha>0.$$

Розглянемо міру, зосереджену на додатній півосі,

$$\mu(dt) = (\delta(t) + t^{-1}g(\lambda t^{\alpha}, \alpha))dt, \lambda>0.$$

Перетворенням Лапласа міри μ є функція $u(s)= \exp(\lambda s^{-\alpha})$, $s>0$.

Звідси випливає, що s-характеристикою міри μ є функція

$s(x)=(\alpha\lambda x^{-1})^{1/(1+\alpha)}$, а υ-характеристикою - функція

$\upsilon(x)=(1+\alpha)(\alpha\lambda)^{1/(\alpha+1)}x^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}, x>0$.

Оскільки $(u(s))^{n}= \exp(n\lambda s^{\alpha})$, то $\mu_n(dt)=(\delta(t) + t^{-1}g(n\lambda t^{\alpha},\alpha))dt$.

Крім того, $(u(s(x)))^{-n} = \exp\left\{-n\lambda(\alpha\lambda x)^{-\alpha/(1+\alpha)}\right\}$, і тоді,

використовуючи теорему про структуру,

дістанемо оператори, що породжує міра μ:

$$G_n(f;x;\alpha) =$$

$$=\exp\left\{n\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f(t/n)\exp\left\{-(\alpha\lambda))^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{1}{1-\alpha}}t\right\} \times$$

$$\times\ g(t,\alpha,1,0,n\lambda)dt.$$

Якщо покласти тут $\alpha = \frac{r-2}{r-1}$, $\lambda = (r-1)^{\frac{r-2}{r-1}}/(r-2)$, то дістанемо оператори з коваріацією $\upsilon(x)=x^{r}, r>2, x>0$.

2) $r<0$. Спочатку побудуємо оператори, що породжуються стійким розподілом з щільністю $g(t,\alpha,-1,\lambda), \lambda>0, 1<\alpha\leq 2$. Відомо [47, с.136], що перетворенням Лапласа цієї щільності є функція $u(s)=\exp(\lambda(-s)^{\alpha})$, $s<0$. Звідси випливає, що

s-характеристикою міри $\mu(dt)=g(t,\alpha,-1,0,\lambda)dt$ є функція $s(x) = - (x\alpha^{-1}\lambda^{-1})^{1/(\alpha-1)}$, а υ-характеристикою - функція $\upsilon(x) =$

$(\alpha-1)(\alpha\lambda)^{1/(\alpha-1)}x^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}$, $x > 0$.

Аналогічно дістанемо оператори, які породжує міра μ: $G_n(f;x;\alpha)=$

$$=\exp\left\{n\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f(t/n)\exp\left\{-(\alpha\lambda))^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{1}{1-\alpha}}t\right\} \times$$

$$\times\ g(t,\alpha,-1,0,n\lambda)dt.$$

Покладаючи тут $\alpha = \frac{2-r}{r-1}$, $\lambda = (r-1)^{\frac{2-r}{r-1}}/(r-2)$, дістанемо оператори з коваріацією $\upsilon(x)=x^{r}, r>0, x>0$.

3) $1<r<2$. Нехай

$$g(z,\alpha):=\sum_{k=1}^{\infty}z^{k}/(k!\Gamma(\alpha k)),\ \alpha>0.$$

Розглянемо міру, зосереджену на додатній півосі,

$$\mu(dt) = (\delta(t) + t^{-1}g(\lambda t^{\alpha}, \alpha))dt, \lambda>0.$$

Перетворенням Лапласа міри μ є функція $u(s)= \exp(\lambda s^{-\alpha})$, $s>0$.

Звідси випливає, що s-характеристикою міри μ є функція

$s(x)=(\alpha\lambda x^{-1})^{1/(1+\alpha)}$, а υ-характеристикою - функція

$\upsilon(x)=(1+\alpha)(\alpha\lambda)^{1/(\alpha+1)}x^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}, x>0$.

Оскільки $(u(s))^{n}= \exp(n\lambda s^{\alpha})$, то $\mu_n(dt)=(\delta(t) + t^{-1}\times$ $\times\ g(n\lambda t^{\alpha},\alpha))dt$, Крім того, $(u(s(x)))^{-n} = \exp\left\{-n\lambda \times\right.$ $\left.\times(\alpha\lambda x)^{-\alpha/(1+\alpha)}\right\}$ і тоді, використовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори, які породжує міра μ: $G_n(f;x;-\alpha) =$

$$=\exp\left\{-n\alpha^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1+\alpha}}x^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right\}\int_{0}^{\infty}f(t/n)\exp\left\{-(\alpha\lambda))^{\frac{1}{1+\alpha}}x^{\frac{-1}{1+\alpha}}t\right\} \times$$

$$\times\ (\delta(t) + t^{-1}g(n\lambda t^{\alpha},\alpha))dt.$$

Покладаючи тут $\alpha = \frac{2-r}{r-1}$, $\lambda = (r-1)^{\frac{r-2}{r-1}}/(2-r)$, дістанемо оператори з коваріацією $\upsilon(x)=x^{r}$, $1<r<2$, $x>0$. Теорема доведена.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо $0<r<1$, то подібно до того, як це робилось при доведенні теореми 6.3, можна показати, що не існує додатних операторів з коваріацією $v(x)=x^r$.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо скористатися стійким розподілом з щільністю $g(t,1,1,1,1)dt$, то подібно до попереднього знаходимо, що міра $\mu(dt)=g(t,1,1,1,1)dt$ породжує оператори

$$\mathcal{E}_n(f;x) = \exp(-ne^{-x}(x+1))\int_{-\infty}^{\infty} f(t/n)\exp(-e^{-x}t)g(t,1,1,1,n)dt$$

з коваріацією $v(x)=e^x$, x - будь-яке.

З а у в а ж е н н я 3. Можна шукати оператори, у яких коваріація є многочленом степеня вище, ніж 3, але при цьому, як правило, виникають великі технічні труднощі. В цьому випадку вдалось знайти дві сім"ї операторів, у яких коваріація є многочленом четвертого степеня.

П р и к л а д 1. Оператори з коваріацією $v(x)=x(x+1)^3$, $x>0$, мають вигляд: $L_n(f;x) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n}{k!}\, c_{k-1,n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k \exp\left(-(2k+n)\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}(k+n)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right),$$

$$c_{-1,n} = c_{0,n} = 1,$$

$$c_{k,n} = (k+n+1)^{k/2}\left\{ He_k\left(\frac{2k+n+2}{\sqrt{k+n+1}}\right) \frac{k}{\sqrt{k+n+1}}\, He_{k-1}\left(\frac{2k+n+2}{\sqrt{k+n+1}}\right)\right\},$$

де $He_k(x)=(-1)^k\exp(x^2/2)(\exp(-x^2/2))^{(k)}$ - многочлени Ерміта (наприклад, $c_{1,n}=n+1, c_{2,n} = n^2+9n+21, c_{3,n} = n^3+18n^2+111n+236$).

Ці оператори породжуються степеневим рядом функції $\omega(y) = \exp(z-z^2/2)$, де функція $z=z(y)$ задана неявно за допомогою рівняння $y=z\exp(-2z+z^2/2)$, $z \geqslant 0$.

П р и к л а д 2. Оператори з коваріацією $v(x)=(x^4-1)/4$, $x>1$, мають вигляд:

$$L_n(f;x) = n2^n\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^n \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)(k!)^{-1}c_{k,n}\exp\left(-2k\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\right),$$

$$c_{k,n} = \frac{d^k}{dz^k}\left\{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^{n-1}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\exp(2k\operatorname{arctg} z)\right\}\Big|_{z=0},\ k=1,2,\ldots,$$

n - натуральне

(наприклад, $c_{0,1}=1$, $c_{1,1}=4$, $c_{2,1}=30$, $c_{3,1}=352$, $c_{4,1}=5720$).

Одержані оператори породжуються степеневим рядом функції $\omega(y) = z(1+z^2)^{-1}$, де функція $z=z(y)$ задана неявно за допомогою рівняння $y = z\exp(-2\operatorname{arctg} z)$, $z \geqslant 0$.

§ 8. Властивості операторів типу B

В л а с т и в і с т ь 1. Нехай $S_{k,n}:= L_n((t-x)^k;x)$, $k=(k_1,\ldots,k_m)$ - довільний мультиіндекс. Тоді справедливі рекурентні співвідношення

$$nS_{k+e_l,n}(x) = \sum_{r=1}^{m} v_{lr}(x)\left\{\frac{\partial S_{k,n}(x)}{\partial x_r} + k_r S_{k-e_r,n}(x)\right\}, \qquad (1)$$

$S_{0,n}=1$, $S_{k-e_l,n}(x) = 0$, якщо хоча б одна з координат мультиіндекса $k-e_l$ від"ємна.

Д о в е д е н н я. Перепишемо співвідношення (2.1) так:

$$nL_n((t-x)'f(t);x)=\left[d/dx(L_n(f;x))\right]'V(x), \quad \text{де } V(x)=W^{-1}(x),$$

або в координатній формі:

$$nL_n((t_l-x_l)f(t);x)= \sum_{r=1}^{m} v_{lr}(x)L_n^{(e_r)}(f;x),\ l=\overline{1,m}.$$

Покладаючи в останньому співвідношенні $f(t) = (t-x)^k =$

$=(t_1-x_1)^{k_1}\ldots(t_m-x_m)^{k_m}$, одержимо (1).

Н а с л і д о к 1.

$$L_n(t;x) = x \,. \tag{2}$$

Дійсно, покладаючи в (1) $k=(0,\ldots,0)$, одержимо $S_{e_l,n}(x) = 0$, $l=\overline{1,m}$, що рівносильно (2).

Н а с л і д о к 2.

$$L_n((t_l-x_l)(t_j-x_j);x) = v_{lj}(x)n^{-1}, \quad l,j=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Дійсно, покладаючи в (1) $k=e_j$ та враховуючи (2), одержимо (3). Звідси

$$L_n(t_l t_j;x) = x_l x_j + n^{-1}v_{lj}(x). \tag{4}$$

Н а с л і д о к 3. Якщо $\nu= e_p + e_q + e_l$, то

$$S_{\nu,n} = n^{-2}\sum_{r=1}^{m} v_{lr}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}v_{pq}(x). \tag{5}$$

Дійсно, досить в (1) покласти $k = e_p+e_q$.

Н а с л і д о к 4. Якщо $\nu= e_p+e_q+e_r+e_l$, то

$S_{\nu,n} =$

$$= n^{-2}\left[n^{-1}\sum_{l,j=1}^{m} v_{lj}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_{rl}\frac{\partial}{\partial x_l}v_{pq}\right] + v_{pq}v_{lr}+v_{pr}v_{lq}+v_{qr}v_{lp}\right]. \tag{6}$$

Н а с л і д о к 5.

$$L_n((t-x)^k;x) = A_{k,n}(x)n^{-[(|k|+1)/2]}, \tag{7}$$

де $A_{k,n}(x)$ – деякий многочлен від $v_{lj}(x)$, від похідних $v_{lj}(x)$ і від n^{-1}. Крім того, для кожного фіксованого $x \in X$

$$A_{k,n}(x) = O(1), \quad n \to \infty.$$

В л а с т и в і с т ь 2. Для будь-яких натуральних n_1 і n_2 має місце співвідношення:

$$L_{n_1+n_2}(f;x) = L_{n_1}\left[L_{n_2}\left[f\left(\frac{n_1t^1+n_2t^2}{n_1+n_2}\right);x\right];x\right], \tag{8}$$

де t^1 – зв"язана ("німа") змінна для оператора L_{n_1}, а t^2-для L_{n_2}.

Д о в е д е н н я. Внаслідок теореми 3.1 матимемо:

$L_{n_2}(f((n_1t^1+n_2t^2)(n_1+n_2)^{-1});x) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} f\left(\frac{n_1t^1+t^2}{n_1+n_2}\right)\exp\left[-s(x)t^{2'} - n_2\ln u(s(x))\right]\mu^{*(n_2-1)}(dt^2).$$

Подіємо на це співвідношення оператором L_{n_1}. Матимемо, використовуючи теорему Фубіні та властивості згортки мір,

$L_{n_1}(L_{n_2}(f((n_1t^1+n_2t^2)(n_1+n_2)^{-1});x);x) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} f\left[\frac{t^1+t^2}{n_1+n_2}\right]\exp\left[-s(x)(t^1+t^2)' - (n_1+n_2)\ln u(s(x))\right] \times$$

$$\times\, \mu^{*(n_1-1)}(dt^1)\mu^{*(n_2-1)}(dt^2) = \int_{\mathbb{R}^m} f\left[\frac{t}{n_1+n_2}\right]\exp\left[-s(x)t'-(n_1+n_2)\times\right.$$

$$\left.\times\, \ln u(s(x))\right]\mu^{*(n_1+n_2-1)}(dt) = L_{n_1+n_2}(f;x).$$

Н а с л і д о к 6. Для будь-яких натуральних $n_1,\ldots,n_k$ має місце співвідношення:

$$L_{n_1+\ldots+n_k}(f;x)=L_{n_1}\left[\ldots L_{n_k}\left[f\left(\frac{n_1t^1+\ldots+n_kt^k}{n_1+\ldots+n_k}\right);x\right]\ldots;x\right], \tag{9}$$

де t^1-зв"язана змінна для оператора $L_{n_1},\ldots,$ t^k-для оператора L_{n_k}.

В л а с т и в і с т ь 3. Нехай $f \in \mathbb{E}$. Тоді існують такі числа $M>0$ і $C>0$, що для будь-якого фіксованого $x \in \mathbb{X}$ для досить великих n справедлива нерівність:

$$L_n(|f(t)|;x) \leqslant 1 + M \sum_{\gamma} \exp(-\gamma x'), \tag{10}$$

де підсумовування проводиться за всіма векторами $\gamma \in \mathbb{R}^m$, координати яких приймають значення C і $-C$.

Д о в е д е н н я . Оскільки $f \in \mathbb{E}$, то $\exists\, M>0,\ C>0$ такі, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}^m$ $|f(t)| \leqslant M \exp(C\|t\|)$, але $\exp(C\|t\|) \leqslant \sum_{\gamma} \exp(-\gamma t')$, тому, враховуючи зауваження 3.1, дістанемо

$$L_n(|f(t);x) \leqslant \sum_{\gamma} L_n(\exp(-\gamma t');x) = M \sum_{\gamma} (\varphi(\gamma/n,x))^n, \tag{11}$$

де $\varphi(z,x)$ – φ – характеристика міри μ, що породжує послідовність $\{L_n(f;x)\}$. Оскільки, внаслідок (1.11), $(\varphi(\gamma/n,x))^n = (1-n^{-1}\gamma x' + o(n^{-1}))^n$, $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi(\gamma/n,x))^n = \exp(-\gamma t';x)$, і, отже, для досить великого n $(\varphi(\gamma/n,x))^n \leqslant \exp(-\gamma t') + M^{-1}2^{-m}$, і тоді з нерівності (11) дістанемо (10).

Т е о р е м а 1. Нехай функція f належить до класу $\mathbb{E}$ і є опуклою на $\mathbb{R}^m$. Тоді для кожного фіксованого $x \in \mathbb{X}$ послідовність $\{L_n(f;x)\}$ не зростає.

Д о в е д е н н я. Для доведення теореми потрібно показати, що $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$L_{n+1}(f;x) \leqslant L_n(f;x). \tag{12}$$

Доведення проведемо індукцією за n. Для $n=1$ внаслідок співвідношення (8), внаслідок опуклості f і того, що $L_n(1;x) = 1$, маємо

$L_2(f;x)=L_1\left[L_1\left[f((t^1+t^2)/)2;x\right];x\right] \leqslant L_1\left[L_1\left[(f(t^1)+f(t^2))/2;x\right];x\right] = L_1(f;x)$. Припустимо, що нерівність (12) справедлива для числа $n>1$. Тоді внаслідок (7)

$L_{n+1}(f;x)=L_1\left[L_n\left(f\left(\frac{t^1+t^2n}{1+n}\right);x\right);x\right]$. А внаслідок опуклості функції f

$$f\left(\frac{t^1+t^2n}{1+n}\right) \leqslant \frac{n}{1+n} f\left[n^{-1}(t^1+(n-1)t^2)\right] + \frac{1}{1+n} f(t^2),$$

тому згідно з припущенням індукції і співвідношенням (7) дістанемо

$$L_{n+1}(f;x) \leqslant \frac{n}{n+1} L_1(L_{n-1}(f(n^{-1}(t^1+(n-1)t^2));x);x) +$$

$+ \frac{1}{1+n} L_n(f;x) = L_n(f;x)$, що і потрібно було довести.

Г л а в а 2

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЗНАЧЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ТИПУ $\mathbb{B}$

В § 1 визначаються оператори $L_n^{(\nu)}$. Якщо функція f не залежить від x, то $L_n^{(\nu)}(f;x) = (L_n(f;x))_x^{(\nu)}$.

В § 2 досліджуються значення операторів $L_n^{(\nu)}$ на степеневих функціях. Знайдено головний асимптотичний член величини $L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x)$ для $n \to \infty$.

В § 3 вводиться поняття q-разбиття m-індекса ν (мультиіндекса розмірності m). Використовуючи це поняття, встановлюється формула для знаходження похідних вищих порядків від складної функції в багатовимірному випадку. З цієї формули, зокрема, випливає відома формула Бруно для знаходження похідних вищих порядків від складної функції в одновимірному випадку.

За допомогою узагальнення формули Бруно в § 4 доводиться основна теорема глави 2 - теорема про подання.

Проміжні результати, які одержані в процесі доведення теореми про подання, дозволили (в § 5) одержати явний вираз для багатовимірних многочленів Чебишова-Ерміта.

§ 1. Оператори $L_n^{(\nu)}$

Нехай $(L_n) \in \mathbb{B}$. Тоді функції $L_n(f;x)$ аналітичні в області $\mathfrak{X}$, і якщо функція f не залежить від x, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\Big[\exp(-n\vartheta(x)t'-n\ln u(\vartheta(x))\Big]_x^{(\nu)} \tilde{\mu}_n(dt), \qquad (1)$$

де $\tilde{\mu}_n = \mu^{*(n-1)}h$, μ - міра, що породжує послідовність $(L_n(f;x))$, а відображення $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ визначається співвідношенням $h(t) = n^{-1}t$; ν - довільний мультиіндекс.

Співвідношення (1) ставить у відповідність функції f з класу $\mathbb{E}$ аналітичну в області $\mathfrak{X}$ функцію. Позначимо через $A(\mathfrak{X})$ множину функцій, аналітичних в області $\mathfrak{X}$. Тоді співвідношення (1) визначає деякий оператор, що діє з класу $\mathbb{E}$ в клас $A(\mathfrak{X})$. Цей оператор позначатимемо через $L_n^{(\nu)}$, причому $L_n^{(0)} := L_n$.

Зробимо декілька зауважень відносно термінології, яка використовується. По-перше, слово "оператор" часто використовується в двох смислах: оператор - як відображення одного класу функцій в інший клас, оператор - як значення відображення на деякій функції. З контекста ясно як розуміти цей термін.

По-друге, коли ми діємо оператором на функцію, то іноді потрібно вказати аргумент цієї функції, цей аргумент є зв"язаною змінною для оператора і кругом в цій работі така змінна позначається буквою t або цією буквою з індексами. Аргумент значень операторів завжди позначатимемо буквою x.

Нарешті, операторами $L_n^{(\nu)}$ іноколи потрібно діяти на функції вигляду $f(t,x)$, в цьому випадку рівність $L_n^{(\nu)}(f;x) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} L_n(f;x)$ вже невірна, тому підкреслимо ще раз, що символ $L_n^{(\nu)}$ застосовується для позначення оператора, визначеного за допомогою правої частини співвідношення (1), і остання рівність справедлива тільки тоді, коли функція, на яку діють оператором $L_n^{(\nu)}$, не залежить від x.

З означення 1.2.1 випливає, що оператори $L_n^{(\nu)}$ певним чином можна виразити через оператори L_n. У випадку $|\nu|=1$ і $|\nu|=2$ ці вирази легко виписати.

Якщо переписати співвідношення (1.2.1) в координатній формі, то дістанемо:

$$L_n^{(e_i)}(f;x) = nL_n\left[f(t)\sum_{k=1}^{m}(t_k-x_k)w_{ik}(x);x\right], \quad i=\overline{1,m}. \qquad (2)$$

В одновимірному випадку ($m=1$) маємо:

$$L_n^{(1)}(f;x) = nW(x)L_n((t-x)f(t);x). \qquad (3)$$

Далі,

$$L_n^{(e_l+e_j)}(f;x) = nL_n\Big\{f(t)\Big(\sum_{k=1}^{m}(t_k-x_k)\frac{\partial w_{jk}(x)}{\partial x_l} + n\sum_{1\leqslant r,k\leqslant m}(t_r-x_r)\times$$

$$\times(t_k-x_k)w_{jr}(x)w_{lk}(x) - w_{lj}(x)\Big);x\Big\}. \qquad (4)$$

В одновимірному випадку формула (4) перепишеться так:

$$L_n^{(2)}(f;x) = nL_n\Big\{f(t)((t-x)\frac{\partial W(x)}{\partial x} + n((t-x)W(x))^2 - W(x));x\Big\}. \qquad (5)$$

Одержане співвідношення можна застосувати для знаходження оцінок похідних від операторів. Наприклад, нехай $\sup\limits_{f\in\mathbb{R}^m}|f(t)| < M$, тоді з співвідношення (2), використовуючи нерівність Коші-Буняковського і співвідношення (1.8.11), дістанемо

$$|(\partial/\partial x_l)L_n(f;x)| \leqslant M\sqrt{n\,\mathrm{tr}V(x)\sum_{k=1}^{m}w_{lk}^2(x)}, \quad l=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Зокрема, в одновимірному випадку

$$|(d/dx)L_n(f;x)| \leqslant M\sqrt{n/v(x)}. \qquad (7)$$

§2. Значення операторів $L_n^{(\nu)}$ на степеневих функціях

Т е о р е м а 1. Нехай k і ν довільні мультиіндекси з $\mathbb{N}^m$. Тоді $\forall x \in X$, коли $n \to \infty$

$$L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) =$$

$$= k!\Big\{\delta_{k\nu} + (2n)^{-1}\sum_{1\leqslant l,j\leqslant m}\begin{bmatrix}\nu\\ k-e_l-e_j\end{bmatrix}v_{lj}^{(\nu-k+e_l+e_j)}(x)\Big\} + O(n^{-2}), \ldots, (1)$$

де $\delta_{k\nu}=0$, якщо $k \neq \nu$; $\delta_{k\nu}=1$, якщо $k=\nu$.

З а у в а ж е н н я. Якщо хоча б одна з координат мультиіндекса $k-e_l-e_j$ більша, ніж відповідна координата мультиіндекса ν або від"ємна, то відповідний доданок в (1) вважається рівним нулеві.

Д о в е д е н н я. Розглянемо тотожність

$$(t-x)^k = \sum_{0\leqslant r\leqslant k}\binom{k}{r}(-x)^{k-r}t^r. \qquad (2)$$

Якщо продиференціювати цю тотожність $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ раз і покласти в ній $t=(1,\ldots,1)$, $x=(1,\ldots,1)$, то дістанемо

$$\sum_{0\leqslant r\leqslant k}\binom{k}{r}(-1)^{|k-r|}(r)_\beta = \begin{cases} 0, & \text{коли } \beta\neq k;\\ k!, & \text{коли } \beta=k.\end{cases} \qquad (3)$$

Далі, якщо подіяти на обидві частини тотожності (2) оператором $L_n^{(\nu)}$, то дістанемо

$$L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) = \sum_{0\leqslant r\leqslant k}\begin{bmatrix}k\\ r\end{bmatrix}(-x)^{k-r}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^r L_n(t^r;x). \qquad (4)$$

Оскільки $\quad t^r = x^r + \sum\limits_{l=1}^{m}(t_l-x_l)(\partial/\partial x_l)x^r +$

$+ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant l,j\leqslant m}(t_l-x_l)(t_j-x_j)\dfrac{\partial^2 x^r}{\partial x_l\partial x_j} + R(t,x)$, де $R(t,x)$ – многочлен степеня $\geqslant 3$ відносно $t_1-x_1,\ldots,t_m-x_m$, то використовуючи формулу (1.8.7), дістанемо

$$L_n(t^r;x) = x^r + (2n)^{-1}\sum_{1\leqslant l,j\leqslant m}v_{lj}(x)\frac{\partial^2 x^r}{\partial x_l\partial x_j} + L_n(R(t,x);x).$$

Отже, з (4), враховуючи (1.8.10), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) = \sum\nolimits_{\mathrm{I}} + (2n)^{-1}\sum\nolimits_{\mathrm{II}} + O(n^{-2}),\ n \to \infty, \qquad (5)$$

де

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}} = \sum_{0\leqslant r\leqslant k}\begin{bmatrix}k\\ r\end{bmatrix}(-x)^{k-r}(x^r)^{(\nu)},$$

$$\sum_{II} = \sum_{0\leqslant r\leqslant k} \binom{k}{r}(-x)^{k-r} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left[v_{ij}(x)\frac{\partial^2 x^r}{\partial x_i \partial x_j}\right]^{(\nu)} .$$

Підрахуємо ці суми. З (3) випливає, що

$$\sum_{I} = \begin{cases} 0, & \text{коли } k \neq \nu; \\ \nu!, & \text{коли } k=\nu. \end{cases} \qquad (6)$$

Якщо поміняти порядок підсумовування в Σ_{II} та використати формулу Лейбніца, то дістанемо

$$\sum_{II} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \sum_{III} , \qquad (7)$$

де $\Sigma_{III}=$

$$= \sum_{0<p\leqslant k-e_i-e_j} \binom{\nu}{p} v_{ij}^{(\nu-p)}(x) \sum_{0\leqslant r\leqslant k} \binom{k}{r}(-x)^{k-r}(x^r)^{(p+e_i+e_j)}.$$

Знайдемо цю суму. Матимемо, використовуючи (3):

$\Sigma_{III} =$

$$= \binom{\nu}{k-e_i-e_j} v_{ij}^{(\nu-k+e_i+e_j)}(x)(k)_k + \sum_{0\leqslant p\leqslant k-e_i-e_j} \binom{\nu}{p} v_{ij}^{(\nu-p)}(x) \times$$

$$\times\, x^{k-p-e_i-e_j} \sum_{0\leqslant r\leqslant k} \binom{k}{r}(-1)^{|k-r|}(r)_{p+e_i+e_j} = k! \binom{\nu}{k-e_i-e_j} \times$$

$\times\, v_{ij}^{(\nu-k+e_i+e_j)}(x)$, отже, з (6) дістанемо

$$\sum_{II} = k! \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \binom{\nu}{k-e_i-e_j} v_{ij}^{(\nu-k+e_i+e_j)}(x). \qquad (8)$$

Нарешті, з (5), використовуючи (6) і (8), дістанемо (1).

Н а с л і д о к 1. Нехай $m=1$. Тоді

$$L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) = k!\left[\delta_{k\nu}+(2n)^{-1}\binom{\nu}{k-2} v^{(\nu-k+2)}(x)\right] + O(n^{-2}), \qquad (9)$$

$n \to \infty$.

§ 3. Розбиття мультиіндексів

Далі буде потрібна формула для знаходження похідних вищих порядків від складної функції в багатовимірному випадку. Для опису такої формули та при її застосуванні зручно ввести нове поняття – q-розбиття m-індекса ν (m-індекс – мультиіндекс з множини $\mathbb{N}^m$).

Нехай $\nu \in \mathbb{N}^m$, $\nu \neq 0$; q-розбиттям мультиіндекса ν називається набір, який складається з різних ненульових мультиіндексів $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ розмірності m і ненульових (не обов"язково різних) мультиіндексів $a_1,\dots,a_k$ розмірності q таких, що

$$|a_1|\alpha_1 + \dots + |a_k|\alpha_k = \nu.$$

Число k називається числом частин розбиття, $1\leqslant k\leqslant|\nu|$, m-індекси $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ називаються базисними індексами розбиття, а q-індекси $a_1,\dots,a_k$ – ваговими.

Два q-розбиття m-індекса ν, за означенням, однакові, якщо вони складаються з одного і того ж числа частин, мають одні і ті ж базисні індекси та однакові відповідні вагові індекси.

Коротко розбиття m-індекса ν позначимо символом $\pi(\nu)$, або детальніше: $\pi(\nu) = (\alpha_1,\dots,\alpha_k; a_1,\dots,a_k)$.

Випишемо, наприклад, всі 2-розбиття 3-індекса $(2,1,0)$.

Розбиття, які складаються з однієї частини:

$((2,1,0);(1,0))$, $((2,1,0);(0,1))$.

Розбиття, які складаються з двох частин:

$((1,1,0),(1,0,0);(1,0),(1,0))$, $((1,1,0),(1,0,0);(1,0),(0,1))$,
$((1,1,0),(1,0,0);(0,1),(1,0))$, $((1,1,0),(1,0,0);(0,1),(0,1))$,
$((2,0,0),(0,1,0);(1,0),(1,0))$, $((2,0,0),(0,1,0);(1,0),(0,1))$,
$((2,0,0),(0,1,0);(0,1),(1,0))$, $((2,0,0),(0,1,0);(0,1),(0,1))$,
$((1,0,0),(0,1,0);(1,1),(1,0))$, $((1,0,0),(0,1,0);(1,1),(0,1))$.

Розбиття, які складаються з трьох частин, не існують.

Т е о р е м а 1. Нехай функції $h_1(t),\dots, h_q(t)$ визначені в області $T \subset \mathbb{R}^m$ і мають в цій області похідні всіх порядків

7*

$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)$, $|\nu| \leqslant r$, і нехай функція $g(h) = g(h_1,\dots,h_q)$, $h \in \mathbb{R}^q$, визначена та має похідні всіх порядків $J=(J_1,\dots,J_q)$, $|J| < r$, в точках $h=(h_1(t),\dots, h_q(t))$, $t \in T$. Тоді похідна порядку ν від функції $f(t)=g(h(t))$ в точці $x \in T$ знаходиться за формулою:

$$f^{(\nu)} = \sum g^{(J)}(h) \frac{\nu!}{a_1!\dots a_k!}\cdot\frac{(h^{(\alpha_1)})^{a_1}}{(\alpha_1!)^{|a_1|}}\cdots\frac{(h^{(\alpha_k)})^{a_k}}{(\alpha_k!)^{|a_k|}}, \qquad (1)$$

де підсумовування ведеться за всіма q-розбиттями m-індекса ν: $\pi(\nu) = (\alpha_1,\dots,\alpha_k;a_1,\dots,a_k)$, $1\leqslant k\leqslant|\nu|$, $J = a_1 +\dots+ a_k$,

$f^{(\nu)} = f^{(\nu)}(x)$, $g^{(J)}(h) = g^{(J)}(h(x))$, $a_1=(a_{11},\dots,a_{1q}),\dots$, $a_k=(a_{k1},\dots,a_{kq})$, $(h^{(\alpha_1)})^{a_1}=(h_1^{(\alpha_1)}(x))^{a_{11}}\dots(h_q^{(\alpha_1)}(x))^{a_{1q}},\dots$ $\dots, (h^{(\alpha_k)})^{a_k}=(h_1^{(\alpha_k)}(x))^{a_{k1}}\dots(h_q^{(\alpha_k)}(x))^{a_{kq}}$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи формулу Тейлора, одержимо: з одного боку,

$$f(t) = \sum_{0\leqslant|J|\leqslant r} (J!)^{-1}g^{(J)}(h(x))\Big[\sum_{0\leqslant|k_1|\leqslant r} (k_1!)^{-1}h_1^{(k_1)}(x)(t-x)^{k_1} \Big]^{J_1}\dots$$

$$\dots\Big[\sum_{0\leqslant|k_q|\leqslant r} (k_q!)^{-1}h_q^{(k_q)}(x)(t-x)^{k_q} \Big]^{J_q} + o(\|t-x\|^r),\ t\to x, \qquad (2)$$

з іншого боку,

$$f(t)= \sum_{0\leqslant|\tau|\leqslant r} (\tau!)^{-1}f^{(\tau)}(x)(t-x)^{\tau} + o(\|t-x\|^r),\ t\to x. \qquad (3)$$

Якщо тепер прирівняти коефіцієнти при $(t-x)^{\tau}$ в правих частинах рівностей (2) і (3), то дістанемо

$$(\nu!)^{-1}f^{(\nu)}(x) = \sum (J!)^{-1}g^{(J)}(h(x))(\beta_1!)^{-1}h_1^{(\beta_1)}(x) \times\dots\times$$

$$\times (\beta_{J_1}!)^{-1}h_1^{(\beta_{J_1})}(x)\dots(\omega_1!)^{-1}h_q^{(\omega_1)}(x)\dots(\omega_{J_q}!)^{-1}h_q^{(\omega_{J_q})}(x), \qquad (4)$$

де підсумовування ведеться за всіма такими невпорядкованими наборами переставлень ненульових m-індексів

$$(\beta_1,\dots,\beta_{J_1}),\dots(\omega_1,\dots,\omega_{J_q}), \qquad (5)$$

що $\beta_1 +\dots+ \beta_{J_1} +\dots+ \omega_1 +\dots+ \omega_{J_q} = \nu$.

Нехай серед m-індексів (5) є k різних m-індексів $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Серед m-індексів $\beta_1,\dots,\beta_{J_1}$ є a_{11} індексів, рівних $\alpha_1,\dots,a_{k1}$ індексів рівних $\alpha_k;\dots$; серед m-індексів $\omega_1,\dots,\omega_{J_q}$ є a_{1q} індексів рівних α_1, ..., a_{kq} індексів рівних α_k. Ясно, що

$$a_{11}+\dots+a_{k1} = J_1,\ \dots,\ a_{1q}+\dots+a_{kq} = J_q.$$

Отже, всіх наборів m-індексів (5) буде

$$\frac{J_1!}{a_{11}!\dots a_{k1}!}\cdots\frac{J_q!}{a_{1q}!\dots a_{kq}!} = \frac{J!}{a_1!\dots a_k!},$$

де $a_1=(a_{11},\dots,a_{1q})$, ..., $a_k=(a_{k1},\dots,a_{kq})$, крім того, $J=(J_1,\dots,J_q)= a_1 +\dots+ a_k$. Тоді з (4) випливає (1), що і потрібно було довести.

Нехай $h^{\pi(\nu)} = h^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k;a_1,\dots a_k)} :=$

$$= \frac{\nu!}{a_1!\dots a_k!}\cdot\frac{(h^{(\alpha_1)})^{a_1}}{(\alpha_1!)^{|a_1|}}\cdots\frac{(h^{(\alpha_k)})^{a_k}}{(\alpha_k!)^{|a_k|}}.$$

Тоді формула (1) перепишеться так:

$$f^{(\nu)}=\sum g^{(J)}(h)h^{\pi(\nu)}, \qquad (6)$$

де підсумовування ведеться за всіма q-розбиттями m-індекса ν.

В одновимірному випадку формулу (1) можна записати так:

$$f^{(\nu)}(x) = \sum g^{(j)}(h(x)) \frac{\nu!}{a_1!\dots a_k!} \left(\frac{h'(x)}{1!}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{h^{(k)}(x)}{k!}\right)^{a_k}, \tag{7}$$

де підсумовування ведеться за всіма сукупностями таких цілих додатних чисел $a_1,\dots,a_k$, $1\leqslant k\leqslant \nu$, що $a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k = \nu$ (тобто, за всіма розбиттями числа ν), до того ж $j=a_1 + \dots + a_k$.

Формула (7)–це відома формула Бруно для знаходження похідних вищих порядків від складної функції в одновимірному випадку (див., наприклад, [14., с.50]), так що формула (1) – багатовимірне узагальнення формули Бруно.

§ 4. Теорема про подання

Мета цього параграфа заключається в тому, щоб подати оператори $L_n^{(\nu)}$ через оператори L_n. Нагадаємо, що оператори $L_n^{(\nu)}$ визначаються за допомогою співвідношення

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\left[\exp(-nw)\right]_x^{(\nu)} \tilde{\mu}_n(dt), \tag{1}$$

де $w=w(s(x),t):=s(x)t'+\ln u(s(x))$, $s(x)$ – s-характеристика міри μ, $u(z)$ – перетворення Лапласа міри μ, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)$ – довільний мультиіндекс.

Щоб отримати шукане подання, потрібно обчислити $(\exp(-nw))_x^{(\nu)}$. Для цього скористаємося формулою (3.1).

Л е м а 1. Справедлива рівність

$$(\exp(-nw))_x^{(\nu)} = e^{-nw} \sum \sum_\beta \sum_2 (-n)^{|\beta|+l_1+\dots+l_t} \binom{\lambda}{\beta} s^{\pi(\nu)} w^{\pi(\lambda-\nu)} (t-x)^\beta, \tag{2}$$

де Σ означає підсумовування за всіма m-розбиттями m-індекса ν: $\pi(\nu) = (a_1,\dots,a_k;\alpha_1,\dots,\alpha_k), 1\leqslant k\leqslant|\nu|$, $\lambda=\alpha_1+\dots+\alpha_k$; Σ_β означає підсумовування за всіма такими m-індексами β, що $0 \leqslant \beta\leqslant \lambda$; Σ_2 означає підсумовування за всіма 1-розбиттями m-індекса $\lambda-\beta$:

$\pi(\lambda-\beta) = (\lambda_1,\dots,\lambda_t;l_1,\dots,l_t;|\lambda_1|\geqslant 2,\dots,|\lambda_t|\geqslant 2), 0\leqslant t\leqslant|\lambda-\beta|$,

до того ж

$$s^{\pi(\nu)} = \frac{\nu!}{a_1!\dots a_k!} \cdot \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} s(x)\right]^{a_1}}{(\alpha_1!)^{|a_1|}} \dots \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_k} s(x)\right]^{a_k}}{(\alpha_k!)^{|a_k|}}, \tag{3}$$

$$w^{\pi(\lambda-\beta)} = \frac{(\lambda-\beta)!}{l_1!\dots l_t!} \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_1} w(s)\right]^{l_1}}{(\lambda_1!)^{l_1}} \dots \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_t} w(s)\right]^{l_t}}{(\lambda_t!)^{l_t}}, \tag{4}$$

де $s=s(x)$.

Д о в е д е н н я. Насамперед зауважимо, що

$$dw/ds|_{s=s(x)} = t-x, \tag{5}$$

$$d^2w/ds^2|_{s=s(x)} = V(x) = W^{-1}(x) \tag{6}$$

де $W(x)$ – інформаційна характеристика міри μ, що породжує оператори L_n.

Далі, застосовуючи до функції $(\exp(-nw))_x^{(\nu)}$ двічі формулу (3.1), дістанемо

$$(\exp(-nw))_x^{(\nu)} = e^{-nw} \sum_{\pi(\nu)} \sum_{\pi(\lambda)} (-n)^{l_1+\dots+l_j} s^{\pi(\nu)} w^{\pi(\lambda)}, \tag{7}$$

$\pi(\nu)= (a_1,\dots,a_k;\alpha_1,\dots\alpha_k)$, $0 \leqslant k \leqslant |\nu|$, $\lambda = \alpha_1+\dots+\alpha_k$;

$s^{\pi(\lambda)}$ визначається за формулою (3), $\pi(\lambda)=(\lambda_1,\dots,\lambda_j;l_1,\dots l_j)$,

$$w^{\pi(\beta)} = \frac{\lambda!}{l_1!\dots l_t!} \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_1} w(s)\right]^{l_1}}{(\lambda_1!)^{l_1}} \dots \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_j} w(s)\right]^{l_j}}{(\lambda_j!)^{l_j}}, \tag{8}$$

де $s=s(x)$.

Серед базисних m-індексів $\lambda_1,\ldots,\lambda_j$ можуть бути і одиничні, тому множину цих індексів можна подати у вигляді об"єднання двох множин: перша множина складається з базисних векторів з одиничною нормою, решта – в другій множині.

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_j) = (e_{j_1},\ldots,e_{j_r}) \cup (\lambda_{j_{r+1}},\ldots,\lambda_{j_k}).$$

У відповідності з цим, множину всіх вагових індексів подамо так:

$$(l_1,\ldots,l_j) = (l_1,\ldots,l_{j_r}) \cup (l_{j_{r+1}},\ldots,l_{j_k}).$$

Нехай $\beta := l_{j_1}e_{j_1}+\ldots+l_{j_r}e_{j_r}$. Тоді

$$w^{\pi(\lambda)} = \frac{\lambda!}{\beta!(\lambda-\beta)!}\left(\frac{\partial w}{\partial s_{j_1}}\right)^{l_{j_1}}\cdots\left(\frac{\partial w}{\partial s_{j_r}}\right)^{l_{j_r}}\frac{(\lambda-\beta)!}{l_{j_{r+1}}!\ldots l_{j_k}!}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_{j_{r+1}}}w(s)\right)^{l_{j_{r+1}}}}{\left(\lambda_{j_{r+1}}!\right)^{l_{j_{r+1}}}}\cdots\frac{\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda_{j_k}}w(s)\right)^{l_{j_k}}}{\left(\lambda_{j_k}!\right)^{l_{j_k}}}\Bigg|_{s=s(x)}.$$

Далі, внаслідок (5)

$$\frac{\partial w}{\partial s_{j_1}}\Big|_{s=s(x)} = t_{j_1}-x_{j_1},\ \ldots,\ \frac{\partial w}{\partial s_{j_r}}\Big|_{s=s(x)} = t_{j_r}-x_{j_r},$$

тому

$$w^{\pi(\lambda)} = \binom{\lambda}{\beta}(t-x)^{\beta}w^{\pi(\lambda-\beta)}. \tag{9}$$

Тепер з (7), враховуючи (9), дістанемо (2).

Н а с л і д о к 1. Має місце подання:

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = \sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|} n^{[|\nu+\beta|/2]}c_{\beta,n}(x)L_n(f(t)(t-x)^{\beta};x), \tag{10}$$

де $c_{\beta,n}(x)$-функції, аналітичні в області $\mathbb{X}$ і $\forall\, x\in\mathbb{X}$.

$$c_{\beta,n}(x) = O(1), n\to\infty,\ c_{0,n}(x):=1.$$

Дійсно, якщо співвідношення (2) переписати у вигляді

$$(\exp(-nw))_x^{(\nu)} = e^{nw}\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|} n^{[|\nu+\beta|/2]}c_{\beta,n}(x)(t-x)^{\beta},$$

то з співвідношення (1) дістанемо (10).

Т е о р е м а 1 (про подання). Нехай $f\in\mathbb{E}, x\in\mathbb{X}, \nu\in\mathbb{N}^m$. Тоді справедливе подання:

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = (\sqrt{n})^{|\nu|}L_n\Big(f(t)(H_\nu((t-x)\sqrt{n}) + K_\nu((t-x)\sqrt{n}));\ x\Big), \tag{11}$$

де $H_\nu(t) = (-1)^\nu\exp(tW(x)t'/2)\Big(\exp(-tW(x)t'/2)\Big)_t^{(\nu)}$ – багатовимірні многочлени Чебишова – Ерміта; $K_\nu(t)$ – деякі многочлени степеня не більше, ніж $|\nu|$, коефіцієнти яких залежать від елементів матриці $W(x)$, до того ж $K_\nu(t) = O(n^{-1/2})$, $n\to\infty$, матриця $W(x)$ – w-характеристика міри μ, що породжує послідовність опера-операторів (L_n).

Д о в е д е н н я. Скористаємося співвідношенням (2). Подамо суму в цьому співвідношенні у вигляді трьох сум:

$$\sum\sum_\beta\sum_2 = \sum_1\sum_\beta\sum_2' + \sum_1\sum_\beta\sum_2'' + \sum_1'\sum_\beta\sum_2, \tag{12}$$

де Σ_1 означає підсумовування за всіма m-розбиттями m-індекса ν: $\pi(\nu) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k;a_1,\ldots,a_k;\ |\alpha_1|=\ldots=|\alpha_k|=1), 1\leqslant k\leqslant|\nu|$; Σ_1' означає підсумовування за всіма іншими m-розбиттями m-индекса ν; Σ_2' означає підсумовування за всіма 1-розбиттями m-індекса $\lambda-\beta$: $\pi(\lambda-\beta) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_t;\ l_1,\ldots,l_t; |\lambda_1|=\ldots=|\lambda_t|=2)$, $1\leqslant t\leqslant|\lambda-\beta|$; Σ_2'' означає підсумовування за всіма іншими 1-розбиттями m-індекса $\lambda-\beta$, які

8-2-2291

застосовуються для знаходженні Σ_2.

Далі, $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| = |\lambda| = |\nu|$, якщо $|\alpha_1| = \ldots = |\alpha_k| = 1$; $l_1 + \ldots + l_t = (|\lambda| - |\beta|)/2$, якщо $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_k| = 2$; $|\lambda| \leqslant |\nu| - 1$, якщо серед m-індексів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ знайдеться хоча б один з нормою, більшою, ніж 1; $l_1 + \ldots + l_t \leqslant (|\lambda| - |\beta| - 1)/2$, якщо серед m-індексів $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ знайдеться хоча б один з нормою, більшою, ніж 2. Тому в першій сумі правої частини (12) число $(-n)$ входить в степені $(|\nu| + |\beta|)/2$, і, отже, число $(|\nu| + |\beta|)$ повинно бути парним. В інших двох сумах правої частини (12) число $(-n)$ входить в степені

$$|\beta| + l_1 + \ldots + l_t \leqslant (|\nu| + |\beta| - 1)/2 . \tag{13}$$

Нехай

$$H_\nu(t) := \sum\nolimits_1 \sum\nolimits_\beta \sum\nolimits_2' (-1)^{(|\nu| + |\beta|)/2} \left[\begin{matrix} \lambda \\ \beta \end{matrix} \right] s^{\pi(\lambda)} w^{\pi(\lambda-\beta)} t^\beta , \tag{14}$$

$$K_\nu(t) := \left[\sum\nolimits_1 \sum\nolimits_\beta \sum\nolimits_2' + \sum\nolimits_1' \sum\nolimits_\beta \sum\nolimits_2 \right] \left[\begin{matrix} \lambda \\ \beta \end{matrix} \right] s^{\pi(\lambda)} w^{\pi(\lambda-\beta)} t^\beta \times$$

$$\times (-n)^{|\beta| + l_1 + \ldots + l_t - (|\nu| + |\beta|)/2} . \tag{15}$$

Тоді з (15), враховуючи (13), випливає, що

$$K_\nu(t) = O(n^{-1/2}), \; n \to \infty. \tag{16}$$

Далі, з (2), враховуючи (12), (14), (15), дістанемо

$$\left[e^{-nv}\right]_x^{(\nu)} = e^{-nv} (\sqrt{n})^{|\nu|} \left[H_\nu((t-x)\sqrt{n}) + K_\nu((t-x)\sqrt{n}) \right]. \tag{17}$$

Для завершування доведення теореми обчислимо $\left[e^{-nv}\right]_x^{(\nu)}$ для того випадку, коли міра μ така:

$$\mu(dt) = \exp(-tWt'/2)dt, \tag{18}$$

де $W = (w_{ij}), i,j = \overline{1,m}$, довільна симетрична додатно визначена матриця з постійними елементами. В цьому випадку перетворенням

Лапласа міри μ є функція (див., наприклад, [58, с.62]):

$$u(z) = (\sqrt{2\pi})^m (\det W)^{-1/2} \exp(zW^{-1}z'/2), \; z \in \mathbb{C}^m. \tag{19}$$

Звідси

$$x(s) = -W^{-1}s, \; -dx/ds = W^{-1}, \; s = -xW, \; w = w(s(x), t) =$$

$$= s(x)t' + s(x)W^{-1}(s(x)'/2 + \ln((\sqrt{2\pi})^m (\det W)^{-1/2}) =$$

$$= (t-x)W(t-x)'/2 + \ln((2\pi)^{m/2} (\det W)^{-1/2}). \tag{20}$$

Тому, з одного боку,

$$(\exp(-nw))_x^{(\nu)} =$$

$$= e^{-nw} \exp(n(t-x)W(t-x)'/2) (\exp(-n(t-x)W(t-x)'/2)_x^{(\nu)}, \tag{21}$$

а з іншого боку, якщо скористатися співвідношенням (17), то оскільки $s(x)$ тут лінійне відображення, а w - квадратична форма відносно s, то $s^{\pi(\nu)} = 0$, як тільки норма хоча б одного з базисних індексів m-розбиття m-індекса ν буде більша одиниці і $w^{\pi(\lambda-\beta)} = 0$, як тільки норма хоча б одного з базисних індексів m-розбиття m-індекса ν буде більша, ніж 2. Отже, з (15) знаходимо, що $K_\nu(t) = 0$, і тому

$$(\exp(-nw))_x^{(\nu)} = e^{-nw} (\sqrt{n})^{|\nu|} H_\nu((t-x)\sqrt{n}). \tag{22}$$

Порівнюючи (21) і (22), знаходимо, що у випадку міри μ, яка визначається за допомогою співвідношення (18),

$$H_\nu(t) = (-1)^\nu \exp(tWt'/2)(\exp(-tWt'/2))_t^{(\nu)}, \tag{23}$$

тобто $H_\nu(t)$ - багатовимірні многочлени Чебишова-Ерміта (означення таких многочленів див., наприклад, у [8, с. 269]).

Оскільки у випадку довільної міри μ коефіцієнти многочленів $H_\nu(t)$ залежать від елементів матриці $W(x)$ і ці елементи не залежать від t, то і в загальному випадку справедлива формула (23), тільки замість елементів матриці W потрібно підставити елементи матриці $W(x)$. Нарешті, якщо підставити в (1) замість $(\exp(-nw))_x^{(\nu)}$

його значення з (17), враховуючи (23), де замість матриці W стоїть матриця $W(x)$, то доведення теореми завершиться.

§ 5. Про багатовимірні многочлени Чебишова-Ерміта

Співвідношення (4.14) дозволяє знайти явний вираз для багатовимірних многочленів Чебишова-Ерміта, що породжуються матрицею W, тобто многочленів, які визначаються за допомогою співвідношення (4.23).

Скористаємося тим, що $s(x)=-xW$, тобто

$s_1(x)=-w_{11}x_1-\ldots-w_{m1}x_m, \ \ldots, \ s_m(x)=-w_{1m}x_1-\ldots-w_{mm}x_m$. Але

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} s(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} s_1(x), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} s_m(x)\right\}'$, і якщо

$\alpha_1=e_{p_1}$, то $-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} s(x) = (w_{p_1 1}, \ldots, w_{p_1 m})' =: w_{p_1}$ – p_1-ий

стовпець матриці W; аналогічно, якщо $\alpha_k=e_{p_k}$, то $-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_k} s(x) =$

$= (w_{p_k 1}, \ldots, w_{p_k m})' =: w_{p_k}$ – p_k-ий стовпець матриці W; отже, якщо

$\pi(\nu)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k;a_1,\ldots,a_k;|\alpha_1|=\ldots=|\alpha_k|=1)$, $1\leqslant k\leqslant\nu$, то

$$s^{\pi(\nu)} = \frac{(-1)^{\nu}\nu!}{a_1!\ldots a_k!}(w_{p_1})^{a_1}\ldots(w_{p_k})^{a_k}. \qquad (1)$$

Нехай $\pi(\lambda-\beta)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t;l_1,\ldots,l_t;)|\lambda_t|=2$, $1\leqslant t\leqslant|\lambda-\beta|$, наприклад, нехай $\lambda_1=e_{p_1}+e_{q_1},\ldots,\lambda_t=e_{p_t}+e_{q_t}$. Тоді $w^{\pi(\lambda-\beta)} =$

$$= \frac{(\lambda-\beta)!}{l_1!\ldots l_t!}\cdot\left[\frac{\partial^2 w/(\partial s_{p_1}\partial s_{q_1})}{(e_{p_1}+e_{q_1})!}\right]^{l_1}\ldots\left[\frac{\partial^2 w/(\partial s_{p_t}\partial s_{q_t})}{(e_{p_t}+e_{q_t})!}\right]^{l_t},$$

а через те, що

$w(s,t)=ts'+sW^{-1}s'/2+\ln((2\pi)^{m/2}(\det W)^{-1/2})$, то

$\partial^2 w/(\partial s_{p_1}\partial s_{q_1}) = v_{p_1q_1}, \ldots, \partial^2 w/(\partial s_{p_t}\partial s_{q_t}) = v_{p_tq_t}$ –

елементи матриці $V=W^{-1}$, отже,

$$w^{\pi(\lambda-\beta)} = \frac{(\lambda-\beta)!}{l_1!\ldots l_t!}\left[\frac{v_{p_1q_1}}{(e_{p_1}+e_{q_1})}\right]^{l_1}\ldots\left[\frac{v_{p_tq_t}}{(e_{p_t}+e_{q_t})!}\right]^{l_t}. \qquad (2)$$

Враховуючи, що $\binom{\lambda}{\beta}=\lambda!(\beta!(\lambda-\beta)!)^{-1}=(a_1+\ldots+a_k)!/(\beta!(\lambda-\beta)!)$, та використовуючи (1) і (2), дістанемо

$$H_\nu(t = \sum_1\sum_\beta\sum_2{}' t^\beta \frac{(-1)^{(|\nu|-|\beta|)/2}\nu!}{\beta!l_1!\ldots l_t!}\cdot\frac{(a_1+\ldots+a_k)!}{a_1!\ldots a_k!}\times$$

$$\times\left(w_{p_1}\right)^{a_1}\ldots\left(w_{p_k}\right)^{a_k}\left[\frac{v_{p_1q_1}}{(e_{p_1}+e_{q_1})!}\right]^{l_1}\ldots\left[\frac{v_{p_tq_t}}{(e_{p_t}+e_{q_t})!}\right]^{l_t},$$

де $\sum_1$ означає підсумовування за всіма m-розбиттями m-індекса ν: $\pi(\nu)=(e_{p_1},\ldots,e_{p_k};a_1,\ldots,a_k)$, $1\leqslant k\leqslant|\nu|$; $\sum_\beta$ означає підсумовування за всіма m-індексами β такими, що $0\leqslant\beta\leqslant a_1+\ldots+a_k$ і $|\nu|+|\beta|$ – парне; $\sum_2'$ означає підсумовування за всіма 1-розбиттями m-індекса $a_1+\ldots+a_k-\beta$: $\pi(a_1+\ldots+a_k-\beta)=(e_{p_1}+e_{q_1},\ldots,e_{p_t}+e_{q_t};l_1,\ldots l_t)$, $1\leqslant t\leqslant|a_1+\ldots+a_k-\beta|$; w_j – j-ті стовпці матриці W, $j=\overline{1,m}$, v_{rs} – елементи матриці $V=(W)^{-1}$, $r,s=\overline{1,m}$.

Зокрема, в одновимірному випадку ($m=1$), якщо взяти $W=1$, дістанемо відоме подання для звичайних одновимірних многочленів Чебишова-Ерміта (див., наприклад, [74, с.581]).

Г л а в а 3

АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ

Результати глави 3 зв"язані з тим фактом (теорема 2.1), що, коли $f \in \mathbb{E}^r$, то $L_n^{(\nu)}(f;x) \to f^{(\nu)}(x)$ $\forall x \in \mathbb{X}$ і $\forall\ \nu: |\nu| \leqslant r$, коли $n \to \infty$. Порядок наближення залежить від класу функцій, до якого належить функція f . Класи функцій, які використовуються, визначаються в § 1.

В § 2 встановлюються різні локальні оцінки порядку наближення функцій $f^{(\nu)}(x)$ операторами $L_n^{(\nu)}(f;x)$.

Для дослідження питань про рівномірне наближення потрібні деякі властивості багатовимірних функцій Стеклова. Такі властивості встановлені в § 3.

Основной результат § 4 - теорема про рівномірне наближення (теорема 4.1).

В § 5 доводиться одна обернена теорема.

В § 6 розглядаються питання про наближення в середньому. Тут за міру відмінності функції f від функції g береться величина $\|f-g\|_{\mathcal{H}}$, де $\mathcal{H}$ - гільбертів простір, структура якого встановлена на множині функцій $\mathbb{E}$ за допомогою скалярного добутку $(f_1, f_2) := L_n(f_1 f_2; x)$.

В цьому параграфі основною теоремою є теорема, яка дає оцінку знизу величини $\left\| f^{(\beta)} - L_n^{(\beta)}(f;x) \right\|_{\mathcal{H}}^2$.

§ 1. Класи функцій

Нехай $\mathbb{A}$-множина в просторі $\mathbb{R}^m$ і на цій множині визначена дійсна функція f. Нехай

$$\omega_1(f;\delta;\mathbb{A}) := \sup_{|x-y|<\delta} |f(x)-f(y)|,\ x,y \in \mathbb{A},$$

а якщо $\mathbb{A}$ - опукла , то введемо ще

$$\omega_2(f;\delta;\mathbb{A}) := \sup_{|x-y|/2<\delta} |f(x) - 2f((x+y)/2) + f(y)|,\ x,y \in \mathbb{A}.$$

Тоді визначимо класи функцій:

$\mathbb{C}(\mathbb{A}) := (f|\ f$ - неперервна та обмежена на $\mathbb{A})$;

$$\|f\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} := \sup_{t\in\mathbb{A}} |f(t)|;$$

$$\mathbb{C}^r(\mathbb{A}) := \quad (f|\ \forall_{|\nu|=r} \exists f^{(\nu)}|\ f^{(\nu)} \in \mathbb{C}(\mathbb{A})),\ \mathbb{C}^0(\mathbb{A}) := \mathbb{C}(\mathbb{A});$$

$$\|f\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A})} := m^{r/2} \max_{|\nu|=r} \sup_{t\in\mathbb{A}} |f^{(\nu)}(t)|;$$

$\mathbb{W}(\mathbb{A}) := (f|\ f$ - рівномірно неперервна та обмежена на $\mathbb{A})$;

$$\mathbb{W}^r(\mathbb{A}) := \quad (f|\ \forall_{|\nu|=r} \exists f^{(\nu)}|\ f^{(\nu)} \in \mathbb{W}),\ \mathbb{W}^0(\mathbb{A}) := \mathbb{W}(\mathbb{A}).$$

Нехай функція $\omega(\delta)$ - модуль неперервності. Тоді

$$\mathbb{H}^\omega(\mathbb{A}) := (f : f \in \mathbb{W}(\mathbb{A}),\ \omega_1(f;\delta;\mathbb{A}) \leqslant \omega(\delta));$$

$$\mathbb{W}^r\mathbb{H}^\omega(\mathbb{A}) := (f|\ \forall_{|\nu|=r} \exists f^{(\nu)}|\ f^{(\nu)} \in \mathbb{H}^\omega(\mathbb{A})),\ \mathbb{W}^0\mathbb{H}^\omega(\mathbb{A}) := \mathbb{H}^\omega(\mathbb{A});$$

$$\mathbb{W}^r\mathbb{H}^\alpha(\mathbb{A}) := (f|f \in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\omega,\ \omega(\delta) = \delta^\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1);$$

$$\mathbb{Z}^\omega(\mathbb{A}) := (f|f \in \mathbb{W},\ \omega_2(f;\delta;\mathbb{A}) \leqslant \omega(\delta));$$

$$\mathbb{W}^r\mathbb{Z}^\omega(\mathbb{A}) := (f|\ \forall_{|\nu|=r} \exists f^{(\nu)}|\ f^{(\nu)} \in \mathbb{Z}^\omega(\mathbb{A})),\ \mathbb{W}^0\mathbb{Z}^\omega(\mathbb{A}) := \mathbb{Z}^\omega(\mathbb{A});$$

$$\mathbb{W}^r\mathbb{Z}^\alpha(\mathbb{A}) := (f|\ f \in \mathbb{W}^r\mathbb{Z}^\omega,\ \omega(\delta) = \delta^\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 2).$$

Якщо $\mathbb{A} = \mathbb{R}^m$, то в позначеннях класів і в позначеннях модулів неперервності символ множини будемо опускати.

$\mathbb{E} := \{f$ - неперервна на $\mathbb{R}^m$; $\exists a > 0,\ M>0 \mid \forall_{t\in\mathbb{R}^m} |f(t)| < M\exp(a\|t\|)\}$;

$\|f\|_{\mathbb{E}} := \sup_{t\in\mathbb{R}^m} (|f(t)|\exp(-a\|t\|))$;

$\mathbb{E}^r := \{f \mid \forall_{|\nu|=r} \exists f^{(\nu)} \mid f^{(\nu)} \in \mathbb{E}\}$, $\mathbb{E}^0 := \mathbb{E}$;

$\|f\|_{\mathbb{E}^r} := \max_{|\nu|=r} \sup_{t\in\mathbb{R}^m} (|f^{(\nu)}(t)|\exp(-a\|t\|))$.

§ 2. Порядкові оцінки

Нехай $f \in \mathbb{E}^r$. Позначимо через

$$T_r(t,x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x)(t-x)^k \tag{1}$$

многочлен Тейлора функції $f(t)$ відносно точки x, а через $\rho_r(t,x)$ - залишковий член формули Тейлора, тобто

$$\rho_r(t,x) = f(t) - T_r(t,x) = \sum_{|k|=r} (k!)^{-1} g_k(t,x)(t-x)^k, \tag{2}$$

де $g_k(t,x) = f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)$, $|\theta_k| \leqslant 1$.

Зазначимо, що коли $|\nu| = r$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} \rho_r(t,x) = f^{(\nu)}(t) - f^{(\nu)}(x). \tag{3}$$

Далі будемо використовувати такі функції, які визначені в області $\mathbb{X}$:

$$a_{k,n}(x) := n^{|k|/2} L_n(|(t-x)^k|;x),\ k \in \mathbb{N}^m; \tag{4}$$

$$b_{q,n}(x) := n^{q/2} L_n(\|t-x\|^q;x),\ q>0; \tag{5}$$

$$s_{\nu,k,n}(x) := n((k!)^{-1} L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) - \delta_{k,\nu}),\ k,\nu \in \mathbb{N}^m. \tag{6}$$

Наведемо деякі властивості цих функцій. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, співвідношення (1.8.3), (1.8.7) і (2.2.1), дістанемо для будь-якого $x \in \mathbb{X}$:

$$a_{k,n}(x)=O(1),\ b_{q,n}(x)=O(1),\ s_{\nu,k,n}(x)=O(1),\ n \to \infty;$$

$$a_{0,n}(x)=1,\ b_{0,n}(x)=1,\ s_{0,0,n}(x)=0;$$

$$a_{e_l,n}(x) \leqslant \sqrt{v_{ll}(x)},\ l=\overline{1,m}; \tag{7}$$

$$a_{2e_l,n}(x) \leqslant v_{ll}(x),\ l=\overline{1,m}; \tag{8}$$

$$b_{1,n}(x) \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}V(x)}; \tag{9}$$

$$b_{2,n}(x) = \operatorname{tr}V(x); \tag{10}$$

$$s_{0,e_l,n}(x)=0,\ s_{0,e_l+e_j,n}(x) = (1+\delta_{lj})^{-1} v_{lj}(x),\ l,j=\overline{1,m}; \tag{11}$$

$$s_{\nu,k,n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{m} \left\{ {\nu \atop k-e_l-e_j} \right\} v_{lj}^{(\nu-k+e_l+e_j)}(x) + O(n^{-2}), \tag{12}$$
$n \to \infty.$

Л е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x) = o(n^{(|\nu|-r)/2}),\ n \to \infty. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи формулу (2.4.10), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x) = \sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|} \sum_{|k|=r} n^{[|\nu+\beta|/2]} \times$$

$$\times (k!)^{-1} c^{*}_{n,\beta}(x) L_n(g_k(t,x)(t-x)^{k+\beta};x). \tag{14}$$

9-2-2291

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо таке $\delta > 0$, щоб $|g_k(t,x)| < \varepsilon$, коли $|t-x|<\delta$ для всіх k, $|k|=r$. Тоді, застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, (1.8.10) і (1.8.7), дістанемо

$$n^{[|\nu+\beta|/2]}|L_n(g_k(t,x)(t-x)^{k+\beta};x)| \leqslant$$

$$\leqslant n^{[|\nu+\beta|/2]}\left[L_n(|t-x|^{2(k+\beta)};x)\right]^{1/2}\left[L_n(g_k^2(t,x);x)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant n^{(|\nu|-r)/2}\left[(L_n(g_k^4(t;x);x))^{1/4}2\delta^{-1}n^{-1/4}\mathrm{tr}V(x)+\varepsilon^2\right] \times$$

$$\times(a_{2(k+\beta),n}(x))^{1/2} + o(n^{(|\nu|-r)/2}),\ n\to\infty,$$

а звідси випливає (13).

Л е м а 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді для будь-якого $x \in X$

$$L_n^{(\nu)}(T_r(t,x);x) = f^{(\nu)}(x) + n^{-1}f_{\nu,r,n}(x), \tag{15}$$

де

$$f_{\nu,r,n}(x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r} f^{(k)}(x)s_{\nu,k,n}(x). \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи (6), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(T_r(t,x);x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) =$$

$$= \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)(k!(\delta_{k\nu} + n^{-1}s_{\nu,k,n}(x)),$$

звідки випливає (15).

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\nu \in \mathbb{N}^m$, $|\nu|\leqslant r$. Тоді послідовність $(L_n^{(\nu)}(f;x))$ збігається до $f^{(\nu)}(x)$ в кожній точці x, $x \in X$.

Д о в е д е н н я. З одного боку, внаслідок (13) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x)= 0$, з іншого боку, використовуючи формулу (15), дістанемо $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x)= L_n^{(\nu)}(f;x) -$

$$- L_n^{(\nu)}(T_r(t,x);x) = L_n^{(\nu)}(f;x) - f^{(\nu)}(x) + o(n^{-1}),\ n\to\infty,$$

звідки і випливає теорема.

Т е о р е м а 2. Нехай $\Delta_{\nu,n} := |f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)|$, $\nu \in \mathbb{N}^m$, $|\nu|=r$. Тоді справедливі імплікації:

$$f \in \mathbb{C}^{r+1} \Rightarrow \Delta_{\nu,n} \leqslant \sigma_{\nu,r,n}(x)n^{-1/2}+|f_{\nu,r,n}(x)|n^{-1}; \tag{17}$$

$$f \in \mathbb{C}^{r+2} \Rightarrow \Delta_{\nu,n} \leqslant (\sigma_{\nu,r+1,n}(x) + |f_{\nu,r+1,n}(x)|)n^{-1}; \tag{18}$$

$$f \in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\omega \Rightarrow \Delta_{\nu,n} \leqslant c_{\nu,r,n}(x)\omega(n^{-1/2}) + |f_{\nu,r,n}(x)|n^{-1}; \tag{19}$$

$f \in \mathbb{W}^{r+1}\mathbb{H}^\omega \Rightarrow$

$$\Delta_{\nu,n} \leqslant c_{\nu,r+1,n}(x)n^{-1/2}\omega(n^{-1/2}) + |f_{\nu,r+1,n}(x)|n^{-1}, \tag{20}$$

де

$$\sigma_{\nu,q,n}(x) = \sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|}\ \sum_{|k|=q}(k!)^{-1}\|f\|_{\mathbb{C}^{q+1}}|c_{n,\beta}(x)|a_{k+\beta,n}(x); \tag{21}$$

$$c_{\nu,q,n}(x) = \sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|}\ \sum_{|k|=q}(k!)^{-1}|c_{n,\beta}(x)|\min(a_{k+\beta,n}(x)+$$

$$+ a_{2(k+\beta),n}(x)\mathrm{tr}V(x))^{1/2};\ a_{k+\beta,n}(x)+\sum_{t=1}^{m}a_{k+\beta+2e_t,n}(x)). \quad (21\ )$$

Д о в е д е н н я. Доведемо імплікацію (17).

Оскільки

$$f(t) = T_r(t,x) + \sum_{|k|=r+1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x+\theta_k(t-x))(t-x)^k, \quad |\theta_k| \leqslant 1,$$

то, застосовуючи лему 2 і співвідношення (2.4.10), дістанемо

$$\Delta_{\nu,n} := |f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)| \leqslant n^{-1} f_{\nu,r,n}(x) +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant|\nu|} \sum_{|k|=r+1} n^{[(r+|\beta|)/2]} (k!)^{-1} \|f\|_{\mathbb{C}^{r+1}} |c_{n,\beta}(x)| \times$$

$\times L_n(|(t-x)^{k+\beta}|;x)$, враховуючи (4), звідки дістанемо (17).

Аналогічно перевіряється імплікація (18).

Для знаходження (19) скористаємось співвідношенням (14). Оцінимо в цьому співвідношенні величину $|g_k(t,x)|$. Матимемо:

$$|g_k(t,x)| = | f^{(\nu)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(\nu)}(x)| \leqslant \omega(\|t-x\|) \leqslant$$
$$\leqslant (1+[\sqrt{n}\,\|t-x\|])\,\omega(1/\sqrt{n}).$$

Далі, використовуючи співвідношення (4), дістанемо

$$|L_n(g_k(t,x)(t-x)^{k+\beta};x)| \leqslant \omega(1/\sqrt{n}) L_n(|(t-x)^{k+\beta}|;x) +$$

$$+ L_n([\sqrt{n}\,\|t-x\|]|(t-x)^{k+\beta}|;x),$$

а внаслідок нерівності Коші-Буняковського, з одного боку,

$$L_n([\sqrt{n}\,\|t-x\|]|(t-x)^{k+\beta}|;x) \leqslant n^{(|k+\beta|/2)} \left[a_{2(k+\beta)}(x)\operatorname{tr}V(x)\right]^{1/2},$$

а з іншого боку,

$$L_n([\sqrt{n}\,\|t-x\|]|(t-x)^{k+\beta}|;x) = \int_{\sqrt{n}\|t-x\|\geqslant 1} [\sqrt{n}\,\|t-x\|]|(t-x)^{k+\beta}| Q_n(x)(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{m} L_n\left[|(t-x)^{k+\beta+2e_l}|;x\right] = (\sqrt{n})^{-|k+\beta|} \sum_{l=1}^{m} a_{k+\beta+2e_l,n}(x).$$

Тому

$$L_n([\sqrt{n}\,\|t-x\|]|(t-x)^{k+\beta}|;x) \leqslant$$
$$\leqslant n^{-|k+\beta|/2} \min\left\{ \left[a_{2(k+\beta)}(x)\operatorname{tr}V(x)\right]^{1/2}; \ \sum_{l=1}^{m} a_{k+\beta+2e_l,n}(x)\right\},$$

а звідси, подібно до попереднього, дістанемо (19).

За аналогією до попереднього встановлюється і співвідношення (20).

Н а с л і д о к 1. Нехай

$$\Delta_n := |f(x) - L_n(f;x)|.$$

Тоді для будь-якого $x \in X$ справедливі імплікації:

$$f \in \mathbb{C}^1 \Rightarrow \Delta_n \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}V(x)/n}\,\|f\|_{\mathbb{C}^1}; \tag{22}$$

$$f \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow \Delta_n \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{tr}V(x)/n\,\|f\|_{\mathbb{C}^2}; \tag{23}$$

$$f \in \mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow \Delta_n \leqslant (1+\operatorname{tr}V(x))\omega(1/\sqrt{n}); \tag{24}$$

$$f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow \Delta_n \leqslant \left[\sqrt{\operatorname{tr}V(x)} + \sqrt{m}\operatorname{tr}V(x)\right]\omega(1/\sqrt{n})/\sqrt{n}. \tag{25}$$

Дійсно, потрібно взяти $r=0$ і врахувати властивості функцій $a_{k,n}(x)$, $b_{q,n}(x)$, $s_{\nu,k,n}(x)$.

§ 3. Деякі властивості багатовимірних функцій Стеклова

Нехай $\delta>0$ - довільне число, $r \in \mathbb{N}_+$, і нехай $k_{rm}(\delta)$ - rm-мірний куб з центром на початку координат і зі стороною, яка дорівнює δ. Покладемо $f_{\delta,0}(t) := f(t)$,

$$f_{\delta,1}(t) := \delta^{-m} \int_{k_m(\delta)} f_{\delta,0}(t+u)\,du = \delta^{-m} \int_{k_m(\delta)} f(t+u)\,du,$$

$$f_{\delta,2}(t) := \delta^{-m} \int_{k_m(\delta)} f_{\delta,1}(t+v)\,dv = \delta^{-2m} \int_{k_{2m}(\delta)} f(t+u+v)\,du\,dv, \tag{1}$$

. . . .

$$f_{\delta,r}(t) := \delta^{-m} \int_{k_m(\delta)} f_{\delta,r-1}(t+w)\,dw =$$

$$= \delta^{-rm} \int_{k_{rm}(\delta)} f(t+u+v+\ldots+w)\,du\,dv\ldots dw. \qquad (2)$$

Функція $f_{\delta,r}(t)$ називається r-ою функцією Стеклова. Нас будуть цікавити властивості першої та другої функції Стеклова (в одновимірному випадку деякі властивості функцій Стеклова викладені в книзі [78, с.177]).

В л а с т и в і с т ь 1. Якщо $f \in \mathbb{M}$, то

$$\|f-f_{\delta,1}\|_{\mathbb{C}} < \omega_1(f;\delta). \qquad (3)$$

Дійсно, для будь-якого $t \in \mathbb{R}^m$

$$|f(t)-f_{\delta,1}(t)| \leqslant \delta^{-m} \int_{k_m(\delta)} |f(t+u)-f(t)|\,du \leqslant \omega_1(f;\delta).$$

В л а с т и в і с т ь 2. Якщо $f \in \mathbb{M}$, то $f_{\delta,1} \in \mathbb{C}^1$ і

$$\|f_{\delta,1}\|_{\mathbb{C}^1} \leqslant \sqrt{m}\,\delta^{-1}\omega_1(f;\delta). \qquad (4)$$

Д о в е д е н н я. Для будь-якого $t \in \mathbb{R}^m$ матимемо

$$\frac{\partial}{\partial t_l} f_{\delta,1}(t) = \frac{\partial}{\partial t_l}\left(\delta^{-m} \int_{k_{m-1}(\delta)} \frac{du}{du_l} \int_{t_l-\delta/2}^{t_l+\delta/2} f(t+u-e_l t_l)\,du_l \right) =$$

$$= \delta^{-m} \int_{k_{m-1}(\delta)} \frac{du}{du_l}\Big[f(t_1+u_1,\ldots,t_l+\delta/2,\ldots,t_m+u_m) -$$

$$- f(t_1+u_1,\ldots,t_{l-1}+u_{l-1},t_l-\delta/2,t_{l+1}+u_{l+1},\ldots,t_m+u_m)\Big],\quad l=\overline{1,m},$$

звідси $\left|\frac{\partial}{\partial t_l} f_{\delta,1}(t)\right| \leqslant \delta^{-1}\omega_1(f;\delta)$, $l=\overline{1,m}$, що і потрібно було довести.

З а у в а ж е н н я . При доведенні властивості 2 використовується символ $\frac{du}{du_l}$ замість $du_1 \ldots du_{l-1}du_{l+1} \ldots du_m$. Для скорочення записів подібна символіка використовується і далі.

В л а с т и в і с т ь 3. Якщо $f \in \mathbb{M}$, то

$$\|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\omega_2(f;\delta). \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$f_{2,\delta}(t) = \delta^{-2m} \int_{k_{2m}(\delta)} f(t-u-v)\,du\,dv, \text{ то } |f(t)-f_{\delta,2}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\omega_2(f;\delta\sqrt{m}\,) \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\omega_2(f;\delta). \qquad (6)$$

В л а с т и в і с т ь 4. Якщо $f \in \mathbb{M}$, то $f_{\delta,2} \in \mathbb{C}^2$ і

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^1} \leqslant \sqrt{m}\delta^{-1}\omega_1(f;\delta), \qquad (7)$$

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^2} \leqslant 8m\delta^{-2}\omega_2(f;\delta). \qquad (8)$$

Д о в е д е н н я. Маємо для $l=1,2,\ldots m$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t_l} f_{\delta,2}(t)\right| = \delta^{-2m}\left| \int_{k_{2m-1}(\delta)} \frac{du\,dv}{du_l} \frac{\partial}{\partial t_l} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(t+u+v)\,du_l\right| =$$

$$= \delta^{-2m}\left| \int_{k_{2m-1}(\delta)} \frac{du\,dv}{du_l} \frac{\partial}{\partial t_l} \int_{t_l-\delta/2}^{t_l+\delta/2} f(t+u+v-e_l t_l)\,du_l\right| =$$

$$= \delta^{-2m} \int_{k_{2m-1}(\delta)} \frac{du\,dv}{du_l}\Big| f(t+u+v-e_l(u_l-\delta/2)) - f(t+u+v-e_l(u_l+\delta/2))\Big| \leqslant$$

$\leqslant \delta^{-1}\omega_1(f;\delta)$, а звідси і випливає нерівність (7).

Для доведення нерівності (8) розглянемо спочатку випадок $l \neq j$.

Матимемо

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t) = \delta^{-2m} \int\limits_{k_{2m-2}(\delta)} \frac{du dv}{du_i du_j} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t_i \partial t_j},$$

де $I = \int\limits_{k_2(\delta)} f(t+u+v) du_i du_j$. Далі, $\frac{\partial^2 I}{\partial t_i \partial t_j} =$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \int\limits_{t_i-\delta/2}^{t_i+\delta/2} \int\limits_{t_j-\delta/2}^{t_j+\delta/2} f(t+u+v-e_i t_i - e_j t_j) du_i du_j =$$

$$= f(t+u+v-e_i(u_i-\delta/2)-e_j(u_j-\delta/2)) - f(t+u+v-e_i(u_i-\delta/2)-$$

$$- e_j(u_j+\delta/2)) - f(t+u+v-e_i(u_i+\delta/2)-e_j(u_j-\delta/2)) +$$

$+f(t+u+v-e_i(u_i+\delta/2)-e_j(u_j+\delta/2))$, в звідси, додаючи і віднімаючи вираз $2f(t+u+v-e_i u_i - e_j u_j)$ і покладаючи

$\Delta^2_{ij}(h,k)f(t) := f(t+e_i h+e_j k) - 2f(t) + f(t-e_i h-e_j k)$, дістанемо

$$\left|\frac{\partial^2 I}{\partial t_i \partial t_j}\right| = \left|\Delta^2_{ij}(v_i+\delta/2, v_j+\delta/2) f(t+u+v-e_i u_i - e_j u_j) -\right.$$

$$\left.- \Delta^2_{ij}(v_i+\delta/2, v_j-\delta/2) f(t+u+v-e_i u_i - e_j u_j)\right| \leqslant 2\omega_2(f;\delta\sqrt{2}) \leqslant$$

$\leqslant 8\omega_2(f;\delta)$. Тому $\left|\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t)\right| \leqslant$

$$\leqslant 8\delta^{-2m} \int\limits_{k_{2m-2}(\delta)} \frac{du dv}{du_i du_j} \omega_2(f;\delta) = 8\delta^{-2}\omega_2(f;\delta). \tag{9}$$

Оцінимо тепер $\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} f_{\delta,2}(t)$. Для цього $f_{\delta,2}(t)$ подамо у вигляді

$f_{\delta,2}(t) = \delta^{-2m} \int\limits_{k_{2m-2}(\delta)} \frac{du dv}{du_i du_j} I$, після чого дістанемо:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \left[\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} dv_i \int\limits_{t_j-\delta/2}^{t_j+\delta/2} f(t+u+v-e_i t_i) du_i \right] =$$

$$= f(t+u+v-e_i(u_i+v_i-\delta)) - 2f(t+u+v-e_i(u_i+v_i)) +$$

$+ f(t+u+v-e_i(u_i+v_i+\delta))$. Звідси $\left|\frac{\partial^2 I}{\partial t_i^2}\right| \leqslant \omega_2(f;\delta)$, враховуючи ще (9), дістанемо (8).

В л а с т и в і с т ь 5. Якщо існує $f^{(\nu)}(t)$, то

$$\left[f^{(\nu)}(t)\right]_{\delta,2} = \left[f_{\delta,2}(t)\right]_t^{(\nu)} = f_{\delta,2}^{(\nu)}(t).$$

Нехай $\mathbb{A}$ множина з $\mathbb{R}^m$ і число $\rho>0$. Через $\mathbb{A}$ позначимо множину всіх точок, віддаль від яких до $\mathbb{A}$ менше, ніж ρ, а через $\mathbb{A}^{-\rho}$ – множину всіх точок t таких, що відкрита куля радиуса ρ з центром в точці t міститься в $\mathbb{A}$.

Тоді, якщо функцію f розглядати на опуклій множині $\mathbb{A}$, то нерівності (6), (7), (8) перепишуться так:

$$\|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\omega_2(f;\delta;\mathbb{A}); \tag{10}$$

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^1(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \delta^{-1}\omega_1(f;\delta;\mathbb{A})\sqrt{m}; \tag{11}$$

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant 8m\delta^{-2}\omega_2(f;\delta;\mathbb{A}). \tag{12}$$

В л а с т и в і с т ь 6 . Якщо $f \in \mathbb{E}^r$, то $f_{\delta,2} \in \mathbb{E}^r$, до того ж $\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{E}^r} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}^r}\exp(a\delta\sqrt{m})$.

Д о в е д е н н я.

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{E}^r} \max_{|\nu|=r} \sup_{t\in\mathbb{R}^m} \left(\exp(-a\|t\|)\left|f_{\delta,2}^{(\nu)}(t)\right|\right) \leqslant$$

$$< \max_{|\nu|=r} \sup_{t\in\mathbb{R}^m} \Big\{ \delta^{-2m} \int_{k_{2m}(\delta)} |f^{(\nu)}(t+u+v)| \exp(-a\|t+u+v\|) \times$$

$$\times \exp(a\|t+u+v\| - \|t\|)\,du\,dv \Big\} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}^r} \exp(a\delta\sqrt{m}),$$ бо $\|t+u+v\| - \|t\| \leqslant \|u\|+\|v\| < \delta\sqrt{m}$.

Н а с л і д о к 1. Якщо $f \in \mathbb{E}^r$, то

$$\|f- f_{\delta,2}\|_{\mathbb{E}^r} < \|f\|_{\mathbb{E}^r}(1+\exp(a\delta\sqrt{m})). \tag{13}$$

В л а с т и в і с т ь 7. Якщо $f \in \mathbb{E}$, то

$$\|f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^2} \leqslant 4m\exp(a(\delta\sqrt{m} + \|t\|))\|f\|_{\mathbb{E}}. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я . При доведенні властивості 4 було встановлено (випадок $i\neq j$), що

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t) \leqslant 8\delta^{-2m} \int_{k_{2m-2}(\delta)} \frac{du\,dv}{du_i du_j} \Big\{ f(t+u+v-e_i(u_i-\delta/2)-$$

$$- e_j(u_j-\delta/2))- f(t+u+v-e_i(u_i-\delta/2) - e_j(u_j+\delta/2)) - f(t+u+v-$$

$$- e_i(u_i+\delta/2)-e_j(u_j-\delta/2))+f(t+u+v-e_i(u_i+\delta/2)-e_j(u_j+\delta/2)\Big\}.$$

Звідси за теоремою про середнє $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t) = \delta^{-2}(f(t^1)-f(t^2)-f(t^3)+f(t^4))$, де t^1, t^2, t^3, t^4 деякі точки з області $\{\tau|\tau \in t+k_m(2\delta)\}$. Аналогічно, в цій області існують такі точки t^5, t^6, t^7, що $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t) = \delta^{-2}(f(t^5)-2f(t^6)+f(t^7))$.

Оскільки $\big|\|t^i\| - \|t\|\big| < \delta\sqrt{m}$, $i=1,2,3,4,4,6,7$, і $|f(t^i)| =$

$$\Big|\exp(-a\|t^i\|)f(t^i)\Big|\exp(a\|t^i\|) \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}} e^{a\|t\|} e^{a(\|t^i\|-\|t\|)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{\mathbb{E}} e^{a\|t\|} e^{a\delta\sqrt{m}},$$ то $\left|\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f_{\delta,2}(t)\right| \leqslant 4\|f\|_{\mathbb{E}} e^{a\|t\|} e^{a\delta\sqrt{m}}$, $i,j=1.m$, що і дає нерівність (14).

Обмежимося в цьому параграфі одним прикладом, який ілюструє застосування функцій Стеклова.

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{W}$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$|f(x)- L_n(f;x)| \leqslant \min\Big\{(2+\sqrt{m})\omega_1(f;\sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n});(4m+(1+[\sqrt{m}])^2)\times$$

$$\times\, \omega_2(f;\sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n}))\Big\}. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я . Нехай r приймає значення 1 або 2 . Тоді

$$|f(x)- L_n(f;x)| \leqslant |L_n(f-f_{\delta,r}; x)| + |f_{\delta,r}(x)- L_n(f_{\delta,r}; x)| +$$

$$+ |f_{\delta,r}(x)- f(x)| \leqslant 2\|f-f_{\delta,r}\|_{\mathbb{C}} + |f_{\delta,r}(x)- L_n(f_{\delta,r}; x)|. \tag{16}$$

Згідно з (3) і (5), якщо $r=1$,

$$\|f-f_{\delta,r}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \omega_1(f;\delta), \tag{17}$$

якщо $r=2$, то

$$\|f-f_{\delta,r}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\omega_2(f;\delta). \tag{18}$$

Далі, якщо $r=1$, то $f_{\delta,r} \in \mathbb{C}^1$, і, внаслідок (2.22) і (4), дістанемо

$$|f_{\delta,r}(x)- L_n(f_{\delta,r}; x)| \leqslant \|f_{\delta,r}\|_{\mathbb{C}^1}\sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{m}\, \delta^{-1}\omega_1(f;\sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n}), \tag{19}$$

а коли $r=2$, то $f_{\delta,r} \in \mathbb{C}^2$, і, внаслідок (2.22) і (2.7), дістанемо

$$|f_{\delta,r}(x)-L_n(f_{\delta,r};x)| \leqslant \frac{1}{2}\|f_{\delta,r}\|_{\mathbb{C}^2}\mathrm{tr}V(x)/n \leqslant$$

$$\leqslant 4m\delta^{-2}\omega_2(f;\delta)\mathrm{tr}V(x)/n. \tag{20}$$

Покладаючи $\delta=\sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n)}$, з (16), враховуючи (17) - (20), дістанемо (15), що і потрібно довести.

Н а с л і д о к 2. Нехай $f \in \mathbb{H}^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тоді

$$|f(x)-L_n(f;x)| \leqslant (2+\sqrt{m})(\mathrm{tr}V(x)/n)^{\alpha/2}. \tag{21}$$

Н а с л і д о к 3. Нехай $f \in \mathbb{Z}^{\alpha}, 0 < \alpha < 2$. Тоді

$$|f(x)-L_n(f;x)| \leqslant (4m + \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2)(\mathrm{tr}V(x)/n)^{\alpha/2}. \tag{22}$$

§ 4. Рівномірні наближення

Т в е р д ж е н н я 1. Для будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}^m$ послідовність $\varphi_n(\gamma,x):= L_n(\exp(\gamma t');x)$, $n=1,2,\dots$ рівномірно збігається до функції $\exp(\gamma x')$ на будь-якому компакті $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$.

Д о в е д е н н я. Внаслідок теореми 2.1 послідовність $(\varphi_n(\gamma,x))$ поточково збігається до функції $\exp(\gamma x')$. Крім того, оскільки функція $\exp(\gamma t')$ опукла на $\mathbb{R}^m$, то внаслідок теореми 1.8.1 послідовність $(\varphi_n(\gamma,x))$ для кожного фіксованого $x \in \mathbb{X}$ монотонно спадає, тому згідно з теоремою Діні (див., наприклад, [71,с.166]) послідовність $(\varphi_n(\gamma,x))$ рівномірно збігається до функції $\exp(\gamma x')$ на будь-якому компакті $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$, що і потрібно було довести.

Н а с л і д о к 1. Послідовність $(\varphi_n(\gamma,x))$ рівномірно обмежена на будь-якому компакті $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ для кожного фіксованого $\gamma \in \mathbb{R}^m$.

Нехай

$$l(\gamma,\mathbb{A}):= \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\max_{x\in\mathbb{X}} \varphi_n(\gamma,x), \tag{1}$$

а $\rho(\partial\mathbb{X},\partial\mathbb{A})$ нехай означає віддаль між границями множин $\mathbb{X}$ і $\mathbb{A}$ (допускається випадок $\rho(\partial\mathbb{X},\partial\mathbb{A}) = \infty$).

Т в е р д ж е н н я 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді існують константи c_1^1, c_2^1, c_3^1, які не залежать від f і n, такі, що $\forall|\nu| = r$, $\forall p > 0$, $\forall\rho_0 < \rho(\partial\mathbb{X},\partial\mathbb{A})$

$$\|L_n^{(\nu)}(f;x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} \leqslant c_1^1\|f\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{\rho_0})} + c_2^1\sum_{l=2}^{r-1}\|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A})}n^{-1} +$$

$$+ c_3^1\|f\|_{\mathbb{E}^r}n^{-p}. \tag{2}$$

З а у в а ж е н н я . Якщо в середньому доданку верхня границя суми опиниться меншою, ніж нижня границя, то вважаємо за означенням, що цей доданок дорівнює нулеві.

Д о в е д е н н я . За формулою Тейлора

$$f(t) = \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{|k|=l}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)(t-x)^k \sum_{|k|=r}(k!)^{-1}f^{(k)}(\xi_k)(t-x)^k,$$

$\xi_k = x + \theta_k(t-x)$, $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$. Звідси, використовуючи співвідношення (2.6) і (2.4.10), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = \sum_{l=2}^{r-1}\sum_{|k|=l}f^{(k)}(x)\, s_{\nu,k,n}(x)n^{-1} + \sum_{|k|=r}\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant r}(k!)^{-1} \times$$

$$\times n^{[(|\nu|+|\beta|)/2]}c_{\beta,n}(x)L_n\Big(f^{(k)}(\xi_k)(t-x)^{k+\beta};x\Big). \tag{3}$$

Оцінимо $L:= \Big|L_n\Big(f^{(k)}(\xi_k)(t-x)^{k+\beta};x\Big)\Big|$. Матимемо:

$$L \leqslant \sum_{|t-x|\leqslant\rho_0} \left|f^{(k)}(\xi_k)\right| |(t-x)^{k+\beta}| Q_n(x)(dt) + \sum_{|t-x|\geqslant\rho_0} \left|f^{(k)}(\xi_k)\right| \times$$

$$\times |(t-x)^{k+\beta}| Q_n(x)(dt) \leqslant \|f^{(k)}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho_0})} L_n\left\{|(t-x)^{k+\beta}|;x\right\} +$$

$$+ \rho_0^{-2p} \int_{\mathbb{R}^m} \|t-x\|^{2p} |(t-x)^{k+\beta}| |f^{(k)}(\xi_k) \exp(-a\|\xi_k\|) \exp(a\|\xi_k\|) \times$$

$$\times Q_n(x)(dt) \leqslant \|f^{(k)}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho_0})} a_{k+\beta,n}(x) n^{-|k+\beta|/2} + \rho_0^{-2p} \|f\|_{\mathbb{E}^r} \times$$

$$\times \exp(2a\|x\|) L_n\left\{\|t-x\|^{2p} |(t-x)^{k+\beta}| \exp(a\|x\|;x\right\}. \tag{4}$$

Оскільки $\exp(a\|t\|) \leqslant \sum_{\gamma} \exp(\gamma t')$, де підсумовування ведеться за всіма векторами γ, координати яких рівні a і $-a$, то, застосовуючи нерівність Коші-Буняковського дістанемо

$$\sup_{x\in\mathbb{A}} \left|L_n(\|t-x\|^{2p} |(t-x)^{k+\beta}| \exp(a\|t\|);x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}\, n^{-p-|k+\beta|/2} \sum_{\gamma} l(\gamma;\mathbb{A}), \tag{5}$$

де c_{11} не залежить від n, і $l(\gamma;\mathbb{A})$ визначається за допомогою співвідношення (1).

З (4), враховуючи (5), дістанемо

$$L \leqslant c_{12} \|f\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho_0})} n^{-|k+\beta|/2} + c_{13} \|f\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p-|k+\beta|/2}, \tag{6}$$

де c_{12} і c_{13} – константи, які не залежать від f і n.

Нарешті, з (3), враховуючи (6), дістанемо (2).

Т е о р е м а 1. **Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\mathbb{X} \supset \mathbb{A}$ – довільний опуклий компакт. Тоді для будь-якого $p > 0$, $\forall\, \rho < \rho(\partial\mathbb{X}, \partial\mathbb{A})$, існують**

константи c_1, c_2, c_3, c_4, які не залежать від n і f, такі, що справедлива нерівність:

$$\|f(x)-L_n(f;x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant c_1 \max_{|k|=r} \omega_2(f^{(k)};1/\sqrt{n};\mathbb{A}) +$$

$$+ c_2 \max_{|k|=r} \omega_1(f^{(k)};1/\sqrt{n};\mathbb{A})/\sqrt{n} + c_3 \sum_{l=2}^{r} \|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})} n^{-1} + c_4 \|f\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p}. \tag{7}$$

З а у в а ж е н н я. Якщо $r=0$ або $r=1$, то $c_2=c_3=0$.

Д о в е д е н н я. Матимемо $\forall \nu \in \mathbb{N}^m$, $|\nu|=r$:

$$\|f^{(\nu)}(x)-L_n^{(\nu)}(f;x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \|L_n^{(\nu)}(f-f_{\delta,2};x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} +$$

$$+ \|L_n^{(\nu)}(f_{\delta,2};x)-f_{\delta,2}^{(\nu)}(x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} + \|f^{(\nu)}(x)-f_{\delta,2}^{(\nu)}(x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})}. \tag{8}$$

Перший доданок в правій частині нерівності (8) оцінимо, скориставшись співвідношеннями (2), (3.5) і (3.12). Дістанемо

$$\|L_n^{(\nu)}(f-f_{\delta,2};x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant c_1' \|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}((\mathbb{A}^{\rho_0})^{-\rho})} +$$

$$+ c_2' \sum_{l=2}^{r-1} \|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})} n^{-1} + c_3' \|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p} \leqslant$$

$$\leqslant c_1' m^{r/2} \frac{1}{2} (1+[\sqrt{m}])^2 \max_{|k|=r} \omega_2(f^{(k)};\delta;(\mathbb{A}^{\rho_0})^{-\rho}) +$$

$$+ 2c_2' \sum_{l=2}^{r} \|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})} n^{-1} + c_3'(1+e^{a\delta\sqrt{m}}) \|f\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p}.$$ Якщо взяти $\rho_0=\rho$, то $(\mathbb{A}^{\rho_0})^{-\rho} = \mathbb{A}$, і тоді $\|L_n^{(\nu)}(f-f_{\delta,2};x)\|_{\mathbb{C}^r(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{2} c_1' m^{r/2} (1+[\sqrt{m}])^2 \max_{|k|=r} \omega_2(f^{(k)};\delta;\mathbb{A}) +$$

$$+\ 2c_2'\sum_{l=2}^{r}\|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})}n^{-1} + c_3'(1+e^{a\delta\sqrt{m}})\|f\|_{\mathbb{E}^r}n^{-p}. \qquad (9)$$

Оцінимо другий доданок в правій частині нерівності (8). За формулою Тейлора

$$f_{\delta,2}(t) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r+1}(k!)^{-1}f_{\delta,2}^{(k)}(x)(t-x)^k + \sum_{|k|=r+2}(k!)^{-1}f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)\,\times$$

$\times\ (t-x)^k$, $\xi_k = x + \theta_k(t-x)$, $0\leqslant\theta_k\leqslant 1$. Подіємо оператором $L_n^{(\nu)}$ на цю рівність. Дістанемо, використовуючи (2.6) і (2.8.10):

$$L_n^{(\nu)}(f_{\delta,2};x) = f_{\delta,2}^{(\nu)}(x) + \sum_{2\leqslant|k|\leqslant r+1}f_{\delta,2}^{(k)}(x)s_{\nu,k,n}(x)n^{-1} +$$

$$+ \sum_{|k|=r+2}(k!)^{-1}\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant r}n^{[(r+|\beta|)/2]'}c_{\beta,n}(x)\,\times$$

$$\times\ L_n\left\{f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)(t-x)^{k+\beta};x\right\}. \qquad (10)$$

Внаслідок співвідношення (3.10) у випадку $|k|=r+1$ матимемо для $x\in\mathbb{A}^{-\rho}$:

$$\|f_{\delta,2}^{(k)}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \delta^{-1}\max_{|k|=r}\omega_1(f^{(k)};\delta;\mathbb{A}). \qquad (11)$$

Для $|k|\leqslant r$:

$$\|f_{\delta,2}^{(k)}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \|f\|_{\mathbb{C}^{|k|}(\mathbb{A}^{-\rho})}. \qquad (12)$$

Нехай, далі, $\delta_0<\rho$. Тоді для $|k| = r+2$:

$$\left|L_n\left\{f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)(t-x)^{k+\beta};x\right\}\right| \leqslant \int_{\|t-x\|\leqslant\delta_0}\left|f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)\right||(t-x)^{k+\beta}|\,\times$$

$+\ Q_n(x)(dt) + \int_{\|t-x\|>\delta_0}\left|f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)\right||(t-x)^{k+\beta}|Q_n(x)(dt)$. Звідси, за нерівностями (3.11), (3.14), (2.4) і (5) дістанемо

$$\left|L_n\left\{f_{\delta,2}^{(k)}(\xi_k)(t-x)^{k+\beta};x\right\}\right| \leqslant 8m\delta^{-2}\max_{|k|=r}\omega_2(f^{(k)};\delta;\mathbb{A})a_{k+\beta,n}(x)\,\times$$

$$\times\ n^{-|k+\beta|/2} + 4\delta^{-2p}e^{a\delta\sqrt{m}}\|f\|_{\mathbb{E}^r}\int_{\mathbb{R}^m}\|t-x\|^{2p}|(t-x)^{k+\beta}|e^{a\|t\|}\,\times$$

$$\times\ Q_n(x)(dt) \leqslant 8m\delta^{-2}\max_{|k|=r}\omega_2(f^{(k)};\delta;\mathbb{A})a_{k+\beta,n}(x)n^{-(r+2+|\beta|)/2} +$$

$$+\ 4\delta^{-2p}e^{a\delta\sqrt{m}}\|f\|_{\mathbb{E}^r}\sum_{\gamma}l(\gamma,\mathbb{A})n^{-(r+2+|\beta|)/2}. \qquad (13)$$

З (10), враховуючи (11), (12) і (13), дістанемо $\forall\nu\in\mathbb{N}^m$, $|\nu|=r$:

$$\|L_n^{(\nu)}(f_{\delta,2};x) - f_{\delta,2}^{(k)}(x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant c_1''\sum_{l=2}^{r}\|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})}n^{-1} +$$

$$+\ c_2''\delta^{-1}\max_{|k|=r}\omega_1(f^{(k)};\delta;\mathbb{A})n^{-1} + c_3''\max_{|k|=r}\omega_2(f^{(k)};\delta;\mathbb{A})\delta^{-2}n^{-1} +$$

$$+\ c_4''\|f\|_{r}n^{-p-1}, \qquad (14)$$

де константи c_1'', c_2'', c_3'', c_4'' не залежать від f і n.

Нарешті, внаслідок (3.5), дістанемо

$$\|f^{(\nu)} - f_{\delta,2}^{(\nu)}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\max_{|\nu|=r}\omega_2(f^{(\nu)};\delta;\mathbb{A}). \qquad (15)$$

Тоді з (8), враховуючи (9), (14), (15) і покладаючи $\delta = 1/\sqrt{n}$, остаточно дістанемо:

$$\|L_n^{(\nu)}(f;x) - f^{(\nu)}(x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant c_1\max_{|\nu|=r}\omega_2(f^{(\nu)};n^{-1/2};\mathbb{A}) +$$

$$+ c_2 n^{-1/2} \max_{|\nu|=r} \omega_1(f^{(\nu)}; n^{-1/2}; \mathbb{A}) + c_3 \sum_{l=2}^{r} \|f\|_{\mathbb{C}^l(\mathbb{A}^{-\rho})} n^{-1} +$$

$+ c_4 \|f\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p}$, де c_1, c_2, c_3, c_4 – константи, які не залежать від f і n.

Доведення теореми завершено.

Н а с л і д о к 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$. Тоді для будь-якого $\nu \in \mathbb{N}^m$, $|\nu| = r$, послідовність $(L_n^{(\nu)}(f;x))$ рівномірно збігається до функції $f^{(\nu)}(x)$ на кожному опуклому компакті $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$.

Н а с л і д о к 3. Нехай $f \in \mathbb{E}$. Тоді

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant$$

$$< c_1 \omega_2(f; n^{-1/2}; \mathbb{A}) + c_4 \|f\|_{\mathbb{E}^r} n^{-p}. \tag{16}$$

Зокрема, якщо $f \in Z^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, то існує константа $M > 0$, яка не залежить від n і f, така, що

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant M n^{-\alpha/2}. \tag{17}$$

Н а с л і д о к 4. Нехай $f \in \mathbb{E}^1$. Тоді

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{\mathbb{C}^1(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \max_{1 \leqslant l \leqslant m} \omega_2(f^{(e_l)}; n^{-1/2}; \mathbb{A}) + c_4 \|f\|_{\mathbb{E}^1} n^{-p} \tag{18}$$

§ 5. Обернена теорема

Результати, які одержані в попередньому параграфі, дають оцінку швидкості наближення функцій додатними лінійними операторами залежно від властивостей функції. В теорії наближення функцій цікавляться і такими питаннями: за швидкістю наближення функції послідовністю д.л.о. визначити властивості

функції. Такого типу результати називаються оберненими теоремами. В одновимірному випадку методика доведення обернених теорем для деяких д.л.о. відома (див., наприклад, [88, 103]). В цьому параграфі обмежимося тільки одним таким результатом.

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}$, $\mathbb{X} \supset \mathbb{A}$ – опуклий компакт і нехай для будь-якого $n \in \mathbb{N}_+$ має місце нерівність

$$\|f(x) - L_n(f;x)\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} \leqslant M n^{-\alpha/2}, \tag{1}$$

M=const, $0 < \alpha < 2$.

Тоді $f \in Z^\alpha(\mathbb{A}^{-\rho})$ для будь-якого $\rho > 0$.

Д о в е д е н н я. Якщо якась функція F неперервна на $\mathbb{A}$, то

$$\omega_2(F;\delta;\mathbb{A}) = \sup_{\|x-y\|<\delta} |F(x) - 2F((x+y)/2) + F(y)| \leqslant 4\|F\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})}, \tag{2}$$

а якщо $F \in \mathbb{C}^2(\mathbb{A})$, то подаючи $F(x)$ і $F(y)$ за формулою Тейлора в околі точки $(x+y)/2$, дістанемо :

$$|F(x) - 2F((x+y)/2) + F(y)| = \frac{1}{8}\left|(x-y)\frac{d^2F(\bar{x})}{dx^2}(x-y)'\right| +$$

$$+ \frac{1}{8}\left|(y-x)\frac{d^2F(\bar{x})}{dx^2}(y-x)'\right| \leqslant \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \|F\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})},$$ отже,

$$\omega_2(F;\delta;\mathbb{A}) \leqslant \frac{\delta^2}{4}\|F\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})}. \tag{3}$$

Оскільки $L_n(f;x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{A})$, то враховуючи (2), (3) і (1), дістанемо

$$\omega_2(f;\delta;\mathbb{A}) \leqslant \omega_2(f(x) - L_n(f;x);\delta;\mathbb{A}) + \omega_2(L_n(f;x);\delta;\mathbb{A}) \leqslant$$

$$\leqslant 4\|f(x) - L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} + \frac{\delta^2}{4}\|L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} \leqslant 4Mn^{-\alpha/2} +$$

$$+ \frac{\delta^2}{4}\|L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})}. \tag{4}$$

Оцінимо $\|L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})}$. Зафіксуємо $\rho > 0$ і нехай $0 < \varepsilon < \rho$. Використовуючи (2.8.10), матимемо

$$\|L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} \leqslant \|L_n(f-f_{\varepsilon,2};x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} + \|L_n(f_{\varepsilon,2};x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\|f-f_{\varepsilon,2}\|_{\mathbb{C}}n + M_2\|f_{\varepsilon,2}\|_{\mathbb{C}^2}, \qquad (5)$$

де $f_{\varepsilon,2}$ -друга функція Стеклова функції f, M_1 і M_2 константи, які не залежать від n і f.

Розглянемо спочатку випадок, коли функція f фінітна і $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{A}^{-\rho}$. В цьому випадку, внаслідок (3.9) і (3.11),

$$\|f-f_{\varepsilon,2}\|_{\mathbb{C}} = \|f-f_{\delta,2}\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant \frac{1}{2}(1+[\sqrt{m}])^2\omega_2(f;\varepsilon;\mathbb{A}),$$

$$\|f_{\varepsilon,2}\|_{\mathbb{C}^2} = \|f_{\varepsilon,2}\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A}^{-\rho})} \leqslant 8m\varepsilon^{-2}\omega_2(f;\varepsilon;\mathbb{A}),$$

отже, з (5) випливає

$$\|I_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} \leqslant \left\{\frac{1}{2}M_1(1+[\sqrt{m}])^2n + 8M_2m\varepsilon^{-2}\right\}\omega_2(f;\varepsilon;\mathbb{A}).$$

Покладаючи $\varepsilon=1/\sqrt{n}$ і $M_3 = \max\left\{\frac{1}{2}M_1(1+[\sqrt{m}])^2;\ 8M_2m\right\}$, дістанемо $\|L_n(f;x))\|_{\mathbb{C}^2(\mathbb{A})} \leqslant M_3n\omega_2(f;1/\sqrt{n};\mathbb{A})$. Тоді з (4), використовуючи (1), матимемо $\omega_2(f;\delta;\mathbb{A}) \leqslant 4Mn^{-\alpha/2} + \frac{1}{4}M_3\delta^2n\omega_2(f;1/\sqrt{n};\mathbb{A})$.

Покладемо, для скорочення записів, $M_4 = \max(4M;M_3/4)$, $\omega(\delta)=\omega_2(f;\delta;\mathbb{A})$. Остання нерівність перепишетья так:

$$\omega(\delta) \leqslant M_4(n^{-\alpha/2} + \delta^2n\omega(n^{-1/2}). \qquad (6)$$

Доведемо, що нерівність (6) тягне співвідношення $\omega(\delta)=O(\delta^{\alpha})$, $\delta \to 0$. Дійсно, виберемо натуральне число N таке, щоб $N^{2-\alpha} > 2M_4$, і

нехай $M_5 = \max\ (\omega(1);\ 2M_4N^{\alpha}\ )$, $\delta_k = N^{-k}$, $k=0,1,2,\dots$, $n_k= N^{2(k-1)}$, $k=1,2,\dots$. З (6) матимемо

$$\omega(N^{-k}) \leqslant M_4\left\{\ N^{-(k-1)\alpha} + N^{-2}\omega(N^{-(k-1)})\right\},\ k=1,2,\dots\ . \qquad (7)$$

Для $k=1$ $\omega(N^{-1}) \leqslant M_4(1+\omega(1)N^{-2}) < \left\{2M_4 \text{ або } 2M_4\omega(1)N^{-2}\right\} \leqslant$

$$\leqslant \left\{2M_4N^{\alpha}N^{-\alpha} \text{ або } \omega(1)N^{-\alpha}\right\} \leqslant M_5N^{-\alpha}. \qquad (8)$$

Доведемо, що для будь-якого $k \geqslant 1$ $\omega(N^{-k}) \leqslant M_5\ N^{-k\alpha}$.

Доведення проведемо індукцією за k. Для $k = 1$ це нерівність (8). З (7) матимемо

$$\omega(N^{-k}) \leqslant \max\left\{2M_4N^{-(k-1)/2}\ ;\ 2N^{-2}\omega(N^{-(k-1)})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{2M_4N^{\alpha}N^{-k\alpha};\ 2N^{-2}M_5N^{-(k-1)\alpha}\ \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{M_5N^{-k\alpha};\ N^{\alpha}N^{-2}M_5N^{-k\alpha}\ \right\} \leqslant M_5N^{-k\alpha}, \text{ бо } 0 < \alpha < 2.$$

Оскільки послідовність (N^{-k}) спадає і $0 < \delta \leqslant 1$, то можна знайти таке k, що $N^{-k} < \delta < N^{-(k-1)}$, а оскільки функція $\omega(\delta)$ неспадна, то $\omega(\delta) \leqslant \omega(N^{-(k-1)}) \leqslant M_5N^{-(k-1)\alpha} = M_5N^{\alpha}(N^{-k})^{\alpha} < M_5N^{\alpha}\delta^{\alpha}$. Отже, $\omega(\delta) \leqslant M_5N^{\alpha}\delta^{\alpha}$, що доводить теорему для випадку, коли функція f фінітна.

Переходимо тепер до випадку, коли функція f не є фінітною. Спочатку дослідимо випадок $0 < \alpha \leqslant 1$. Нехай функція g нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^m$, фінітна, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{A}^{-\rho}$ і $g(t) = 1$ на $\mathbb{A}^{-2\rho}$. Тоді функция fg є фінітною з $\operatorname{supp}(fg) \subset \mathbb{A}^{-\rho}$. Для цієї функції і $x \in \mathbb{A}$: $|L_n(fg;x)-f(x)g(x)| \leqslant |L_n(f(t)(g(t)- g(x));x)| +$

$$+\,|L_n(g(x)(f(t)-f(x));x)| \leqslant M_6/\sqrt{n} + \begin{cases} Mn^{-\alpha/2}, & \text{коли } x \in \mathbb{A}^{-2\rho}, \\ 0, & \text{коли } x \notin \mathbb{A}^{-2\rho} \end{cases}$$

а звідси $\|L_n(fg;x)-fg\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} \leqslant M_8 n^{-\alpha/2}$. Тому, згідно з попереднім, $fg \in \mathbb{Z}^{\alpha}(\mathbb{A})$, а оскільки $g=1$ на множині $\mathbb{A}^{-2\rho}$, то $f \in \mathbb{Z}^{\alpha}(\mathbb{A}^{-2\rho})$. -

Нехай тепер $1 < \alpha < 2$. Оскільки $\|L_n(f;x)-f\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A})} = O(n^{-\alpha/2}) = O(n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то згідно з попереднім $f \in \mathbb{Z}^1(\mathbb{A}^{-2\rho})$, і, отже, $f \in \mathbb{H}^{1-\beta}(\mathbb{A}^{-2\rho})$ для будь-якого β такого, що $0<\beta<1$.

Знову нехай функція g нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^m$, фінітна, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{A}^{-\rho}$ і $g(t) = 1$ на $\mathbb{A}^{-2\rho}$. Тоді $\forall x \in \mathbb{A}^{-2\rho}$

$$|L_n(fg;x)-f(x)g(x)| \leqslant |g(x)(L_n(f;x)-f(x)) +$$

$$+ f(x)(L_n(g;x)-g(x)) + L_n((f(t)-f(x))(g(t)-g(x));x)|. \tag{9}$$

Але внаслідок умови теореми

$$|g(x)||(L_n(f;x)-f(x))| = O(n^{-\alpha/2}),\ x \in \mathbb{A}; \tag{10}$$

$$|f(x)||(L_n(g;x)-g(x))| = O(n^{-1}),\ n \to \infty, \tag{11}$$

бо $g \in \mathbb{C}^1(\mathbb{A})$; а оскільки $|(f(t)-f(x))(g(t)-g(x))| = O(\|t-x\|^{1-\beta}\|t-x\|)$, $t \to x$, то внаслідок (2.5)

$|L_n((f(t)-f(x))(g(t)-g(x);x)| \leqslant M_9 L_n(\|t-x\|^{2-\beta};x) = O(n^{-(1-\beta/2)})$, $n \to \infty$. Оскільки $1 < \alpha < 2$, то, покладаючи $\beta=2-\alpha$, дістанемо

$$|L_n((f(t)-f(x))(g(t)-g(x);x)| = O(n^{-\alpha/2}),\ n \to \infty. \tag{12}$$

Отже, $\forall x \in \mathbb{A}^{-2\rho}$ з (9), враховуючи (10), (11), (12), матимемо $|L_n(fg;x)-f(x)g(x)| = O(n^{-\alpha/2})$, $n \to \infty$, і тоді $fg \in \mathbb{Z}^{\alpha}(\mathbb{A}^{-2\rho})$. Оскільки $g(t) = 1$ на множині $\mathbb{A}^{-2\rho}$, то $f \in \mathbb{Z}^{\alpha}(\mathbb{A}^{-2\rho})$,

що і потрібно було довести.

§ 6. Наближення в середньому

Спочатку наведемо один відомий результат з теорії гільбертових просторів.

Нехай $\mathcal{H}$ - якийсь гільбертів простір, а $\mathbb{S}$ - підпростір $\mathcal{H}$, який є лінійною оболонкою скінченного числа лінійно незалежних елементів $h_1,\dots,h_N$. Нехай h - довільний елемент $\mathcal{H}$ і $G = (g_{ij})$ - матриця Грама системи $h_1,\dots,h_N$, тобто $g_{ij} = (h_i,h_j)$, і нехай $g_i = (h_i,h)$, $1 \leqslant i,j \leqslant N$. Тоді, якщо $\mathbb{P}^{\mathbb{S}}$ - оператор проектування на $\mathbb{S}$, то

$$\mathbb{P}^{\mathbb{S}} h = gG^{-1}\bar{h}' \tag{1}$$

і

$$\|h - \mathbb{P}^{\mathbb{S}}h\|^2_{\mathcal{H}} = \|h\|^2_{\mathcal{H}} - gG^{-1}g', \tag{2}$$

де $g=(g_1,\dots,g_N)$, $\bar{h}' = (h_1,\dots,h_N)$ (цей результат можна знайти, наприклад, в [68, с.224]).

Розглянемо послідовність д.л.о., що породжуються мірою μ,

$L_n(f;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(t)e^{-nw}\,\tilde{\mu}_n(dt)$, де $w = w(s(x),t) = s(x)t' + \ln u(s(x))$, $s(x)$ - s-характеристика міри μ; $u(z)$ - перетворення Лапласа міри μ.

Зафіксуємо число n і вектор x і введемо на класі функцій $\mathbb{E}$ структуру гільбертового простору $\mathcal{H}$, що визначається за допомогою скалярного добутку $(f,g) := L_n(fg;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(t)g(t)e^{-nw}\,\tilde{\mu}_n(dt)$ і нормою $\|f\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{(f,f)}$.

Нехай k - довільне натуральне число і нехай (v) - множина мультиіндексів $\nu \in \mathbb{N}^m$ таких, що $1 \leqslant |\nu| \leqslant k$. Перенумеруємо ці мультиіндекси в якомусь порядку, дістанемо скінченну послідовність мультиіндексов: $\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^N$, $N=N(k)$ $\left[N(k) = \binom{m}{1} + \binom{m+1}{2} + \ldots + \binom{m+k-1}{k}\right]$.

Розглянемо далі систему функцій: $h_t = \exp(nw)(\exp(-nw))_x^{(\nu^t)}$, $t=\overline{1,N}$, і припустимо, що $\det G \neq 0$, де $G = (g_{tj})$, $t,j=\overline{1,N}$, – матриця Грама цієї системи, тобто

$$g_{tj} = L_n\left\{\exp(2nw)(\exp(-nw))_x^{(\nu^t)}(\exp(-nw))_x^{(\nu^j)};x\right\}. \qquad (3)$$

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\beta \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall |\beta| = r$, $\forall k \in \mathbb{N}_+$:

$$\|L_n^{(\beta)}(f;x) - f^{(\beta)}(\bullet)\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant L_n^{\lfloor k \rfloor}(f^{(\beta)};x)\, G^{-1}\left[L_n^{\lfloor k \rfloor}(f^{(\beta)};x)\right]', \qquad (4)$$

де

$$L_n^{\lfloor k \rfloor}(f^{(\beta)};x) := \left[L_n^{(\nu^1)}(f^{(\beta)};x), \ldots, L_n^{(\nu^N)}(f^{(\beta)};x)\right]. \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. З співвідношення (1) випливає:

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant gG^{-1}g'. \qquad (6)$$

Нехай $h(t) = f^{(\beta)}(t) - L_n^{(\beta)}(f;x)$. Оскільки $g_t(h_t,h)$, $t=\overline{1,N}$, то матимемо: $g_t =$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} (f^{(\beta)}(t) - L_n^{(\beta)}(f;x))\exp(nw)(\exp(-nw))_x^{(\nu^t)}\exp(-nw)\tilde{\mu}_n(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} (f^{(\beta)}(t)(\exp(-nw))_x^{(\nu^t)}\,\tilde{\mu}_n(dt) - L_n^{(\beta)}(f;x)\frac{d^{\nu^t}}{dx^{\nu^t}}\left[\int_{\mathbb{R}^m}\exp(-nw)\times\right.$$

$$\left.\times\,\tilde{\mu}_n(dt)\right].$$ Оскільки $\int_{\mathbb{R}^m}\exp(-nw)\tilde{\mu}_n(dt) = 1$ і $|\nu^t| \geqslant 1$, то

$g_t = L_n^{(\nu^t)}(f^{(\beta)};x)$, $t=\overline{1,N}$, і тоді з нерівності (6) дістанемо

нерівність (4).

Н а с л і д о к 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^r$, $\beta \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall |\beta| = r$

$$\|L_n^{(\beta)}(f;x) - f^{(\beta)}(\bullet)\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant$$

$$\geqslant nL_n\left[(t-x)f^{(\beta)};x\right]W(x)L_n\left[(t-x)'f^{(\beta)};x\right], \qquad (7)$$

де $W(x)$ – w-характеристика міри μ, що породжує послідовність $(L_n(f;x))$.

Д о в е д е н н я. Покладемо $k=1$, тоді $N=m$ і

$$L_n^{\lfloor 1 \rfloor}(f^{(\beta)};x) = \left[L_n^{(e_1)}(f^{(\beta)};x), \ldots, L_n^{(e_m)}(f^{(\beta)};x)\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}L_n(f^{(\beta)};x). \qquad (8)$$

Знайдемо матрицю G. В цьому випадку елементи матриці G, внаслідок (3), знаходяться за формулою:

$$g_{tj} = L_n\left[\exp(2nw)\left[\exp(-nw)\right]_x^{(e_t)}\left[\exp(-nw)\right]_x^{(e_j)};x\right], \; t,j=\overline{1,m}. \qquad (9)$$

Крім того (див. §1.1),

$$\frac{d}{dx}e^{-nw} = e^{-nw}\frac{dw}{dx} = e^{-nw}\left[\frac{d\vartheta(x)}{dx}t' + \frac{d\ln u(\vartheta(x))}{dx}\right] =$$

$= -(t-x)W(x)$. Звідси $\left[e^{-nw}\right]_x^{(e_t)} = n\sum_{k=1}^{m} w_{tk}(x)(t_k - x_k)e^{-nw}$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Отже, з (9) дістанемо

$$g_{tj} = n^2\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{1\leqslant k,\,l\leqslant m} w_{tk}(x)w_{jl}(x)(t_k - x_k)(t_l - x_l)e^{-nw}\,\tilde{\mu}_n(dt) =$$

$$= n^2\sum_{1\leqslant k,\,l\leqslant m} w_{tk}(x)w_{jl}(x)L_n\left[(t_k - x_k)(t_l - x_l);x\right]. \qquad (10)$$

Згідно з (1.8.3) $L_n\left[(t_k - x_k)(t_l - x_l);x\right] = n^{-1}v_{kl}(x)$, де $v_{kl}(x)$ – елементи матриці $V(x) = W^{-1}(x)$. Отже, з (10) дістанемо

$$g_{ij} = n \sum_{1 \le k, l \le m} w_{ik}(x) w_{jl}(x) v_{kl}(x) = n w_{ij}(x), \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Таким чином, $G = nW(x)$. Тепер з (4), враховуючи (8), дістанемо нерівність:

$$\left\| L_n^{(\beta)}(f;x) - f^{(\beta)}(\bullet) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq$$

$$\geq n^{-1} \left(\frac{d}{dx} L_n(f^{(\beta)};x) \right) V(x) \left(\frac{d}{dx} L_n(f^{(\beta)};x) \right)', \tag{11}$$

а оскільки $(L_n) \subset \mathbb{B}$, то використовуючи (1.2.1), з (11) дістанемо потрібну нерівність (7).

Глава 4
АСИМПТОТИКА

Методи глави 4 засновані на деяких результатах теорії слабкої збіжності імовірнісних мір. Ці результати викладаються в §1 і 2.

Основні результати глави 4 викладені в § 3-6. В §3 знайдено головний асимптотичний член різниці $L_n^{(\nu)}(f;x) - f^{(\nu)}(x)$ та величини $\| f^{(\nu)} - L_n^{(\nu)}(f;x) \|_{\mathcal{H}}$, коли $n \to \infty$, якщо $f \in \mathbb{E}^{r+2}$, $|\nu| = r$ (теореми 1 і 2). Крім того, в § 3 одержано асимптотичний розклад величини $L_n(f;x)$, коли $n \to \infty$, якщо $f \in \mathbb{E}^{2r}$ (теорема 3).

§ 4 присвячено знаходженню головного асимптотичного члена величини $\sup_{f \in \mathbb{W}^r \mathbb{H}^{\omega}} |f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)|$, коли $n \to \infty$. Зокрема, знайдені локальні константи С.М.Нікольського при наближенні функцій $f^{(\nu)}(x)$ функціями $L_n^{(\nu)}(f;x)$.

В § 5 знайдено головний асимптотичний член так званої локальної міри наближення класу $\mathbb{M}$ операторами L_n, коли $n \to \infty$.

§ 1. Слабка збіжність мір

В даній работі ми маємо справу з послідовностями додатних лінійних операторів вигляду

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t) Q_n(x)(dt), \quad L_n(1;x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

З послідовністю (L_n) зв"язана послідовність мір $(Q_n(x))$, які залежать від параметра x. Ці міри імовірнісні, бо умова $L_n(1;x)=1$ означає, що $Q_n(x)(\mathbb{R}^m)=1$. Далі будуть використовуватися деякі факти з теорії слабкої збіжності імовірнісних мір

Слабка збіжність послідовності (P_n) імовірнісних мір до деякої міри P означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(t)P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)P(x)(dt) \qquad (1)$$

для будь-якої функції f, неперервної і обмеженої на $\mathbb{R}^m$.

Нехай P – деяка імовірнісна міра на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$. Характеристична функція $p(s)$ міри P визначається рівністю:

$$p(s) := \int_{\mathbb{R}^m} \exp(its')P(dt),\ s \in \mathbb{R}^m. \qquad (2)$$

Якщо для міри P існує перетворення Лапласа $u(z)$, то $p(s) = u(-ts)$.

Теорема неперервності: послідовність мір (P_n) слабко збігається до міри P тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} p_n(s) = p(s)$ для кожного $s \in \mathbb{R}^m$ (див., наприклад, [12,с.72]).

Н а с л і д о к. Нехай міри P_n і P належать до класу Λ і нехай $u_n(z) \div P_n$, $u(z) \div P$. Тоді послідовність (P_n) слабко збігається до міри P тоді і тільки тоді, коли $u_n(z) \to u(z)$, коли $n \to \infty$ $\quad \forall z \in \mathbf{Z}$.

Нехай тепер $(L_n) \in \mathbb{B}$. Запишемо оператори L_n у вигляді (1.3.7), тобто у вигляді

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x+t/\sqrt{n})P_n(x)(dt).$$

З означення міри $P_n(x)$ і властивості (1.1.1) перетворення Лапласа мір випливає, що перетворенням Лапласа міри $F_n(x)(dt)$ є функція

$$\psi_n(z,x) = (\varphi(z/\sqrt{n},x))^n \exp(zx'\sqrt{n}). \qquad (3)$$

Л е м а 1. Для кожного $x \in \mathbf{X}$ і для кожного $z \in \mathbb{C}^m$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(z,x) = \exp(zV(x)z'/2), \qquad (4)$$

де $V(x)$ – матриця, обернена до інформаційної матриці міри μ, що породжує послідовність (L_n).

Д о в е д е н н я . Оскільки $\varphi(z,x) = (u(s(x)))^{-1}u(s(x)+z)$, то з (3) дістанемо

$$\psi_n(z,x) = (u(s(x)))^{-n}(u(s(x) + zn^{-1/2}))^n \exp(zx'\sqrt{n}) =$$
$$= \exp(n\ln(u(s(x)) + z/\sqrt{n})) - n\ln u(s(x)) + zx'\sqrt{n}). \qquad (5)$$

Використовуючи формулу Тейлора, співвідношення (1.1.8) і (1.1.9), дістанемо $\ln(u(s(x)) + z/\sqrt{n})) = \ln u(s(x)) - zx'/\sqrt{n} + zV(x)z'/(2n) + o(1/n)$, $n \to \infty$.

Отже, з (5) матимемо

$$\psi_n(z,x) = \exp(n(\ln u(s(x)) - zx'/\sqrt{n} + zV(x)z'/(2n) + o(1/n)) -$$
$$- \ln u(s(x)) + zx'\sqrt{n}) = \exp(zV(x)z'/2 + o(1)),$$ $n \to \infty$, що доводить лему.

Т в е р д ж е н н я 1. Для кожного фіксованого $x \in \mathbf{X}$ послідовність мір $(P_n(x))$ слабко збігається до міри

$$P(x)(dt) = (2\pi)^{-m/2}(\det W(x))^{1/2}\exp(-tW(x)t'/2)dt, \qquad (6)$$

де $W(x)$ – інформаційна матриця міри μ, яка породжує послідовність (L_n).

Д о в е д е н н я. Дійсно, внаслідок (2.4.18) і (2.4.19) перетворенням Лапласа міри $P(x)$ є функція $u(z) = \exp(zW^{-1}z'/2) = \exp(zV(x)z')$.

Згідно з лемою 1, послідовність перетворень Лапласа мір $P_n(x)$ поточково збігається до цієї функції, тому згідно з наслідком до теореми неперервності, послідовність мір $(P_n(x))$ слабко збігається до міри $P(x)$, що і потрібно довести.

Наприклад, послідовність мір

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\delta(\sqrt{n}(k/n-x))$$ для будь-якого $x \in (0,1)$

слабко збігається до міри

$$P(x)(dt) = (2\pi x(1-x))^{-1/2}\exp(-t^2/(2x(1-x))dt.$$

§ 2. Твердження типу теорем Хеллі

Т в е р д ж е н н я 1. Нехай $f \in \mathbb{F}$. Тоді $\forall x \in X$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(t)P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)P(x)(dt) + o(1), \ n \to \infty, \qquad (1)$$

де $P(x)$ - міра, визначена за допомогою співвідношення (1.6), а $P_n(x)$ - міра з правої частини співвідношення (1.3.7).

Д о в е д е н н я Нехай $\varepsilon > 0$ - довільне число. Оскільки для будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}^m$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\gamma t')P(x)(dt) = \exp(\gamma V(x)\gamma'/2),$$

то знайдеться така замкнена область $T \in \mathbb{R}^m$, що

$$\int_{\mathbb{R}^m\setminus T} c(t)P(x)(dt) < \varepsilon/6, \qquad (2)$$

де $c(t) = M \sum_{\gamma} e^{-\gamma t'}$ - функція з правої частини нерівності (1.8.10). Внаслідок леми 1.1 знайдеться таке число N, що для всіх $n > N$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} c(t)P_n(x)(dt) - \int_{\mathbb{R}^m} c(t)P(x)(dt) \right| \leqslant \varepsilon/6. \qquad (3)$$

Крім того, оскільки послідовність $(P_n(x))$ слабко збігається до міри $P(x)$ і функція $c(t)$ неперервна, то

$$\left| \int_T c(t)P_n(x)(dt) - \int_T c(t)P(x)(dt) \right| \leqslant \varepsilon/6. \qquad (4)$$

Тоді, використовуючи (3),(2),(4), матимемо

$$\int_{\mathbb{R}^m\setminus T} c(t)P_n(x)(dt) \leqslant \left| \int_{\mathbb{R}^m} c(t)P_n(x)(dt) - \int_{\mathbb{R}^m} c(t)P(x)(dt) \right| +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^m\setminus T} c(t)P(x)(dt) + \left| \int_T c(t)P_n(x)(dt) - \int_T c(t)P(x)(dt) \right| < \varepsilon/2. \ (5)$$

Оскільки справедлива нерівність (1.8.10), то, використовуючи нерівності (2) і (5), матимемо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m\setminus T} f(t)P_n(x)(dt) - \int_{\mathbb{R}^m\setminus T} f(t)P(x)(dt) \right| < 2\varepsilon/3. \qquad (6)$$

Крім того, оскільки функція f неперервна, а послідовність мір $(P_n(x))$ слабко збігається до міри $P(x)$, то

$$\left| \int_T f(t)P_n(x)(dt) - \int_T f(t)P(x)(dt) \right| < \varepsilon/3, \qquad (7)$$

коли n достатньо велике.

Нарешті, з нерівностей (6) і (7) випливає нерівність

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} f(t)P_n(x)(dt) - \int_{\mathbb{R}^m} f(t)P(x)(dt) \right| < \varepsilon,$$

що доводить твердження 1.

Далі нам будуть потрібні деякі властивості одностайно неперервних сімей функцій.

Сім"я (f_θ), $\theta \in \Theta$, дійсних функцій, визначених на множині $S \subset \mathbb{R}^m$, називається одностайно неперервною в точці $t \in S$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon,t)$, що для всіх θ з умови $|t-\tau| < \delta$ випливає $|f_\theta(t) - f_\theta(\tau)| < \varepsilon$.

Сім"я (f_θ) називається одностайно неперервною на множині S, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\theta \in \Theta$ випливає $|f_\theta(t) - f_\theta(\tau)| < \varepsilon$, коли $|t-\tau| < \delta$, $t,\tau \in S$.

Т в е р д ж е н н я 2. Якщо сім"я (f_θ) одностайно неперервна в кожній точці множини S і S – компакт, то ця сім"я одностайно неперервна на S.

Доведення цього твердження проводиться так само як і доведення теореми 4.19 з книги [71, с.100-100].

Т в е р д ж е н н я 3. Якщо на компакті T сім"я (f_θ) одностайно неперервна і поточково обмежена, то сім"я $(g(t)f_\theta(t))$ також буде одностайно неперервна на T для будь-якої неперервної на T функції $g(t)$.

Це твердження випливає з нерівності

$|g(t)f_\theta(t) - g(\tau)f_\theta(\tau)| \leqslant |g(t)||f_\theta(t) - f_\theta(\tau)| +$

$+|f_\theta(\tau)||g(t)-g(\tau)|$ з урахуванням того, що існують такі константи $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$, що $|g(t)| \leqslant C_1, t \in T$, $|f_\theta(\tau)| \leqslant C_2$, $\tau \in T$, рівномірно за θ.

Т в е р д ж е н н я 4. Якщо послідовність (g_n) одностайно неперервна і рівномірно обмежена на компакті $T \subset \mathbb{R}^m$ і послідовність імовірнісних мір (P_n) слабко збігається до імовірнісної міри P, абсолютно неперервної відносно міри Лебега, то

$$\int_T g_n(t)P_n(dt) = \int_T g_n(t)P(dt) + o(1),\ n \to \infty. \qquad (8)$$

Д о в е д е н н я. Задамо $\varepsilon > 0$. Нехай $(T_{\varepsilon r})$, $r=1,2,\dots,N$, таке разбиття компакта T, що $|g_n(t)-g_n(\tau)| < \varepsilon$ для всіх n, якщо t і τ належать $T_{\varepsilon r}$. Виберемо точки $\tau_1,\dots,\tau_r,\dots\tau_N$ так, щоб $\tau_r \in T_{\varepsilon r}$, $1 \leqslant r \leqslant N$. Тоді $\int_T g_n(t)P(dt) = \sum_{r=1}^N \int_{T_{\varepsilon r}} (g_n(t) - g_n(\tau_r))P(dt) +$

$+\sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P(T_{\varepsilon r})$. Аналогічно, $\int_T g_n(t)P_n(dt) =$

$$= \sum_{r=1}^N \int_{T_{\varepsilon r}} (g_n(t) - g_n(\tau_r))P_n(dt) + \sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P_n(T_{\varepsilon r}).$$

Оскільки послідовність $(g_n(t))$ одностайно неперервна, то

$$\Big|\int_{T_{\varepsilon r}} (g_n(t) - g_n(\tau_r))P(dt)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\sum_{r=1}^N P(T_{\varepsilon r}) \text{ і}$$

$$\Big|\int_{T_{\varepsilon r}} (g_n(t) - g_n(\tau_r))P_n(dt)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\sum_{r=1}^N P_n(T_{\varepsilon r}),$$

і, отже,

$$\int_T g_n(t)P(dt) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\sum_{r=1}^N P(T_{\varepsilon r}) + \sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P(T_{\varepsilon r}), \text{ а}$$

$$\int_T g_n(t)P_n(dt) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\sum_{r=1}^N P_n(T_{\varepsilon r}) + \sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P_n(T_{\varepsilon r}).$$

Оскільки $\sum_{r=1}^N P_n(T_{\varepsilon r}) = P(T) \leqslant 1$ і $\sum_{r=1}^N P(T_{\varepsilon r}) = P(T) \leqslant 1$, то існують такі числа θ, $|\theta| \leqslant 1$ і θ_n, $|\theta_n| \leqslant 1$, що

$$\int_T g_n(t)P(dt) \leqslant \theta\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P(T_{\varepsilon r}) \text{ і}$$

$$\int_T g_n(t)P_n(dt) \leqslant \theta_n\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{r=1}^N g_n(\tau_r)\,P_n(T_{\varepsilon r}).$$

Звідси $\int_T g_n(t)P_n(dt) - \int_T g_n(t)P(dt) =$

$= (\theta_n - \theta)\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{r=1}^{N} g_n(\tau_r)(P_n(T_{\varepsilon r}) - P(T_{\varepsilon r}))$, а оскільки послідовність (g_n) рівномірно обмежена на $T_{\varepsilon r}$, то існує число $M>0$ таке, що $|g_n(\tau)| \leqslant M$ $\forall \tau \in T$. Крім того, $\lim_{n\to\infty} P_n(T_{\varepsilon r}) = P(T_{\varepsilon r})$, $r=1,2,\dots,N$, тому для достатньо великого n $\left|P_n(T_{\varepsilon r}) - P(T_{\varepsilon r})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3MN}$.

Отже, $\left| \int_T g_n(t)P_n(dt) - \int_T g_n(t)P(dt)\right| \leqslant$

$\leqslant |\theta - \theta_n|\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{r=1}^{N} |g_n(\tau_r)||P_n(T_{\varepsilon r}) - P(T_{\varepsilon r})| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon +$

$+ \sum_{r=1}^{N} M\frac{\varepsilon}{3MN} = \varepsilon$, що і потрібно довести.

Л е м а 1. Нехай послідовність (g_n) має такі властивості:
(і) на будь-якому компакті $T \subset \mathbb{R}^m$ послідовність (g_n) одностайно неперервна і рівномірно обмежена;
(іі) члени послідовності (g_n) належать до класу $\mathbb{E}$, до того ж рівномірно для n, $\|g_n\|_{\mathbb{E}} < M$, де $M > 0$ – деяке число.

Тоді $\forall x \in X$

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P(x)(dt) + o(1),\ n \to \infty, \tag{9}$$

де $P_n(x)$ – міра з правої частини співвідношення (1.3.7), а $P(x)$ – міра, визначена за допомогою співвідношення (1.6).

Д о в е д е н н я. Доведення проводиться майже так само, як і твердження 1. Єдина відміна заключається ось в чому: при доведенні твердження 1 використовувалась нерівність (7), яка була наслідком слабкої збіжності послідовності мір $(P_n(x))$ до міри $P(x)$. При доведенні леми 1 також необхідно використати нерівність типу нерівності (7), але вона вже буде наслідком твердження 4.

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^{r+2}$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall\ |\nu|=r$, $\forall x \in X$ справедлива асимптотична рівність

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = f^{(\nu)}(x) + (2n)^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \left[v_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_x^{(\nu)} + o(1/n),\ n \to \infty, \tag{1}$$

де $v_{ij}(x)$ – елементи матриці $V(x)$ – v-характеристика міри μ, що породжує послідовність (L_n).

Д о в е д е н н я. Подамо функцію $f(t)$ за формулою Тейлора в околі точки x:

$$f(t) = T_{r+2}(t;x) + \rho_{r+2}(t;x).$$

Внаслідок теореми 2.2.1

$$L_n^{(\nu)}(T_{r+2}(t;x);x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant r+2} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x) = f^{(\nu)}(x) +$$

$$+(2n)^{-1} \sum_{2\leqslant|k|\leqslant r+2} f^{(k)}(x) \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \binom{\nu}{k-e_i-e_j} v_{ij}^{(\nu-k+e_i+e_j)}(x) + O(n^{-2}),\ n\to\infty.$$

Змінюючи порядок підсумовування, дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(T_{r+2}(t;x);x) = f^{(\nu)}(x) +$$

$$+(2n)^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\ \sum_{0\leqslant|k|\leqslant|\nu|} \binom{\nu}{k} v_{ij}^{(\nu-k)}(x) \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_x^{(k)} + O(n^{-2}) =$$

$$= f^{(\nu)}(x) + (2n)^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\ \sum_{0\leqslant|k|\leqslant|\nu|} \left[v_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_x^{(k)} + O(n^{-2}),\ n \to \infty. \tag{2}$$

Крім того, з леми 3.2.1 випливає, що

$$L_n^{(\nu)}(\rho_{r+2}(t;x);x) = L_n^{(\nu)}(f;x) - L_n^{(\nu)}(T_{r+2}(t;x);x) = o(n^{-1}),$$

$n \to \infty$. Звідси, враховуючи (2), дістанемо (1). Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^2$. Тоді $\forall x \in \mathcal{X}$ $L_n(f;x) =$

$$= f(x) + (2n)^{-1} \sum_{1 \le i, j \le m} v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + O(n^{-2}),\ n \to \infty . \qquad (3)$$

Зокрема, звідси випливає, що коли $f \in \mathbb{E}^2$ і $\forall x \in \mathcal{X}$ $|f(x) - L_n(f;x)| = o(n^{-1})$, то в області $\mathcal{X}$ функція f є розв"язком еліптичного рівняння

$$\sum_{1 < i, j \le m} v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$ і є аналітичною в області $\mathcal{X}$.

Н а с л і д о к 2. Нехай $m = 1$, $f \in \mathbb{E}^{r+2}$. Тоді $\forall x \in \mathcal{X}$

$$L_n^{(r)}(f;x) = f^{(r)}(x) + (2n)^{-1} \frac{d^r}{dx^r}\left[V(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right] + o(1/n), n \to \infty, \qquad (4)$$

зокрема, якщо $r=0$, то в одновимірному випадку

$$L_n(f;x) = f(x) + (2n)^{-1} V(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + o(1/n), n \to \infty. \qquad (5)$$

Т е о р е м а 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^{r+2}$, $\nu \in \mathbb{N}_+^m$. Тоді $\forall |\nu| = r$, $\forall x \in \mathcal{X}$ справедлива асимптотична рівність:

$$\left\| f^{(\nu)} - L_n^{(\nu)}(f;x) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = n^{-1} \left[\frac{df^{(\nu)}(x)}{dx} \right] V(x) \left[\frac{df^{(\nu)}(x)}{dx} \right]' + o(n^{-1}),$$
$$n \to \infty, \qquad (6)$$

де $\mathcal{H}$ - гільбертів простір, який породжений оператором $L_n(f;x)$.

Д о в е д е н н я. Маємо

$$\left\| f^{(\nu)} - L_n^{(\nu)}(f;x) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = L_n\left[(f^{(\nu)} - L_n^{(\nu)}(f;x))^2; x \right] =$$

$$= L_n\left[(f^{(\nu)})^2; x \right] + \left[L_n^{(\nu)}(f;x) \right]^2 - 2L_n^{(\nu)}(f;x) L_n(f^{(\nu)};x). \qquad (7)$$

Згідно з теоремою 1 і наслідком 1

$$L_n(f^{(\nu)};x) = f^{(\nu)}(x) +$$
$$+ (2n)^{-1} \sum_{1 \le i, j < m} v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} + o(1/n), n \to \infty; \qquad (8)$$

$$L_n((f^{(\nu)})^2;x) = (f^{(\nu)}(x))^2 + n^{-1} \sum_{1 \le i, j \le m} \left[f^{(\nu)}(x) \frac{\partial^2 f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f^{(\nu)}(x)}{\partial x_j} \right] v_{ij}(x) + o(n^{-1}),\ n \to \infty; \qquad (9)$$

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = f^{(\nu)}(x) +$$
$$+ (2n)^{-1} \sum_{1 \le i, j \le m} \left[v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]^{(\nu)} + o(1/n),\ n \to \infty; \qquad (10)$$

$$\left[L_n^{(\nu)}(f;x) \right]^2 = \left[f^{(\nu)}(x) \right]^2 +$$
$$+ n^{-1} f^{(\nu)}(x) \sum_{1 \le i, j \le m} \left[v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]^{(\nu)} + o(1/n),\ n \to \infty. \qquad (11)$$

Тоді з (7), використовуючи (8)-(11), дістанемо

$$\left\| f^{(\nu)} - L_n^{(\nu)}(f;x) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = n^{-1} \sum_{1 \le i, j \le m} v_{ij}(x) \frac{\partial f^{(\nu)}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f^{(\nu)}(x)}{\partial x_j} +$$

$+o(1/n)$, $n \to \infty$, що рівносильно (6). Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3. Нехай $m=1$, $f \in \mathbb{E}^{r+2}$. Тоді $\forall x \in \mathcal{X}$

$$\left\| f^{(r)} - L_n^{(r)}(f;x) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = n^{-1} V(x) \left[f^{(r+1)}(x) \right]^2 + o(1/n),\ n \to \infty. \qquad (12)$$

Л е м а 1. Нехай $k=(k_1,\dots,k_m)$ і $S_{k,n}(x) = L_n((t-x)^k;x)$.

Тоді, якщо $|k| = 2r$, то

$$S_{k,n}(x) = \frac{n^{-r}}{2^r r!} \frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_m^{k_m}} \left[zV(x)z'\right]^r + o(n^{-r}),\ n \to \infty. \qquad (13)$$

Д о в е д е н н я. Якщо скористатися поданням оператора L_n у вигляді (1.3.7), то

$S_{k,n}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (n^{-1/2}t)^k P_n(x)(dt)$, і якщо $|k| = 2r$, то

$S_{k,n}(x) = n^{-r} \int_{\mathbb{R}^m} t^k P_n(x)(dt)$, а оскільки $t^k \in \mathbb{E}$, то внаслідок твердження 2.1

$$S_{k,n}(x) = n^{-r} \int_{\mathbb{R}^m} t^k P(x)(dt) + o(n^{-r}),\ n \to \infty, \qquad (14)$$

де $P(x)$ - міра, визначена за допомогою співвідношення (1.6). Перетворенням Лапласа міри $P(x)$ є функція $u(z) = \exp(zV(x)z'/2)$. Внаслідок властивості (1.1.3) для будь-якого $k \in \mathbb{N}^m$

$u^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} (-t)^k \exp(-zt')P(x)(dt)$, а звідси, якщо $|k| = 2r$,

$$u^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} t^k P(x)(dt). \qquad (15)$$

Далі, за формулою Тейлора для експоненти

$$u(z) = 1 + \frac{1}{2} zV(x)z' + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} zV(x)z'\right)^2 + \ldots + \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2} zV(x)z'\right)^r + \ldots$$

Продиференціюємо цей ряд k ($|k| = 2r$) раз і після цього покладемо $z=0$. Оскільки $zV(x)z'$ - квадратична форма відносно z, то

$$u^{(k)}(0) = \frac{1}{r!2^r} \frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_m^{k_m}} \left[zV(x)z'\right]^r,$$

і, отже, враховуючи (1.5), матимемо:

$$\int_{\mathbb{R}^m} t^k P(x)(dt) = \frac{1}{r!2^r} \frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_m^{k_m}} \left[zV(x)z'\right]^r, \qquad (16)$$

тоді з (14) випливає потрібне твердження.

Н а с л і д о к 4. Якщо $m=1$, то

$$S_{2r,n}(x) = \frac{(2r)!!}{2^r r!} \frac{(V(x))^r}{n^r} + o(n^{-r}),\ n \to \infty. \qquad (17)$$

Дійсно, в цьому випадку $zV(x)z' = V(x)z^2$, і тоді

$$\frac{d^{2r}}{dz^{2r}}\left[V(x)z^2\right]^r = (V(x))^r (2r)!.$$

Т е о р е м а 3. Нехай $f \in \mathbb{E}^{2r}$, $r \geq 1$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\lim_{n\to\infty} n^r \left[L_n(f;x) - \sum_{0 \leq |k| \leq 2r-1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{r!2^r} \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) \frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_m^{k_m}} \left[zV(x)z'\right]^r. \qquad (18)$$

Д о в е д е н н я. Подамо функцію $f(t)$ за формулою Тейлора в околі точки $t=x$:

$$f(t) = T_{2r}(t,x) + \rho_{2r}(t,x).$$

Подіємо на цю рівність оператором L_n. Дістанемо:

$$L_n(f;x) - L_n(T_{2r-1}(t,x);x) = \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) +$$

$+ L_n(\rho_{2r}(t,x);x)$, і теорема 3 негайно випливає з співвідношення (13) і (3.2.13).

Н а с л і д о к 5. Якщо взяти $m=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^r \left[L_n(f;x) - \sum_{k=0}^{2r-1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x)\right] = \frac{f^{(2r)}(V(x))^r}{2^r r!}. \qquad (19)$$

Зокрема, якщо $r=1$, то знову дістанемо співвідношення (5).

§ 4. Основна теорема

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\omega$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = 0$ рівномірно для $\lambda > 0$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall |\nu|=r$, $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\sup_{f\in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\omega} \left| f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)\right| = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}\int_{\mathbb{R}^m} \omega(\|t\|/\sqrt{n}) \times$$

$$\times \exp(-tW(x)t'/2)dt + o(\omega(1/\sqrt{n}), \ n \to \infty, \qquad (1)$$

де $W(x)$ – w-характеристика міри μ, що породжує послідовність операторів (L_n).

Д о в е д е н н я. За формулою Тейлора $f(t) = \rho_r(t,x) + T_r(t,x)$, звідси

$$L_n^{(\nu)}(f;x) = L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x) + L_n^{(\nu)}(T_r(t,x);x). \qquad (2)$$

Внаслідок теореми 2.4.1 про подання і співвідношення (1.3.7),

$$L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x) = n^{r/2}L_n\left\{\rho_r(t,x)K_\nu((t-x)\sqrt{n});x\right\} +$$

$$+ n^{r/2}L_n\left\{\rho_r(t,x)H_\nu((t-x)\sqrt{n});x\right\}. \qquad (3)$$

Оцінимо кожний доданок в (3). Використовуючи (3.2.2), матимемо

$$n^{r/2}\left|L_n\left[\rho_r(t,x)K_\nu((t-x)\sqrt{n});x\right]\right| \leqslant n^{r/2} \int_{\mathbb{R}^m} |\rho_r(x+t/\sqrt{n},x)K_\nu(t)| \times$$

$$\times P_n(x)(dt) \leqslant n^{r/2} \sum_{|k|=r} (k!)^{-1}\int_{\mathbb{R}^m} |f^{(k)}(x+\theta_k t/\sqrt{n}) - f^{(k)}(x)| \times$$

$$\times n^{-r/2}|t^k||K_\nu(t)|P_n(x)(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|=r} (k!)^{-1}\int_{\mathbb{R}^m} \omega(\|t\|/\sqrt{n})|t^k||K_\nu(t)|P_n(x)(dt).$$ Звідси , враховуючи

те, що $K_\nu(t) = O(1/\sqrt{n})$, $n \to \infty$, дістанемо:

$$n^{r/2}L_n\left[\rho_r(t,x)K_\nu((t-x)\sqrt{n});x\right] = O(\omega(1/\sqrt{n})/\sqrt{n}), \ n \to \infty. \qquad (4)$$

Далі, розглянемо допоміжну послідовність

$$g_n(t) = \frac{n^{r/2}}{\omega(1/\sqrt{n})}\rho_r(x+t/\sqrt{n},x)H_\nu(t), \ n=1,2,\ldots,$$ де $H_\nu(t)$ – багатовимірні многочлени Чебишова-Ерміта, які породжені матрицею $W(x)$. Використовуючи співвідношення (3.2.2), властивості модуля неперервності, дістанемо:

$$|g_n(t)| \leqslant \frac{n^{r/2}}{\omega(1/\sqrt{n})} \sum_{|k|=r} (k!)^{-1}\omega(\|t\|/\sqrt{n})n^{-r/2}|t^k||H_\nu(t)| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\|t\|)|H_\nu(t)| \sum_{|k|=r} (k!)^{-1}|t^k|,$$

а звідси випливає, що члени послідовності $(g_n(t))$ належать до класу $\mathbb{E}$ і ця послідовність рівномірно обмежена на кожному компакті $T \subset \mathbb{R}^m$. Доведемо, що ця послідовність також одностайно неперервна на $\mathbb{R}^m$. Внаслідок твердження 2.3 для цього досить довести, що одностайно неперервною є послідовність

$$\varphi_n(t) = (\omega(1/\sqrt{n}))^{-1}\left[f^{(k)}(x+\theta_k t/\sqrt{n}) - f^{(k)}(x)\right], \ n = 1,2,\ldots .$$

Дійсно, $|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| =$

$$=(\omega(1/\sqrt{n}))^{-1}\left|f^{(k)}(x+\theta_k t_1/\sqrt{n}) - f^{(k)}(x+\theta_k t_2/\sqrt{n})\right| \leqslant \frac{\omega(\|t_1-t_2\|/\sqrt{n})}{\omega(1/\sqrt{n})},$$

а оскільки внаслідок умови теореми $\dfrac{\omega(\|t_1-t_2\|/\sqrt{n})}{\omega(1/\sqrt{n})} \to 0$, коли $t_1 \to t_2$ рівномірно для n, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta>0$, що як тільки $|t_1-t_2| < \delta$, то $\dfrac{\omega(|t_1-t_2|/\sqrt{n})}{\omega(1/\sqrt{n})} < \varepsilon$ для будь-якого n.

Отже, для послідовності $\{g_n(t)\}$ виконуються всі умови теореми 2.1, тому згідно з (2.9)

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P(x)(dt) + o(1),\ n \to \infty, \text{ або}$$

$$n^{r/2} \int_{\mathbb{R}^m} \rho_r(x+t/\sqrt{n},x)H_\nu(t)P_n(x)(dt) =$$

$$= n^{r/2} \int_{\mathbb{R}^m} \rho_r(x+t/\sqrt{n},x)H_\nu(t)P(x)(dt) + o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n \to \infty.$$

Оскільки

$$H_\nu(t)P(x)(dt) = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}\left[\exp(-tW(x)t'/2)\right]_t^{(\nu)}(-1)^\nu dt,$$

то, інтегруючи ν раз частинами в останньому інтегралі і використовуючи (3.2.3), дістанемо:

$$n^{r/2} \int_{\mathbb{R}^m} \rho_r(x+t/\sqrt{n},x)H_\nu(t)P_n(x)(dt) = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}I_n(x) +$$

$$+ o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n \to \infty, \tag{5}$$

де

$$I_n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (f^{(\nu)}(x+t/\sqrt{n}) - f^{(\nu)}(x))\exp(-tW(x)t'/2)dt.$$

З (3), враховуючи (4) і (5), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(\rho_r(t,x);x) = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}I_n(x) + o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n\to\infty. \tag{6}$$

Крім того, згідно з (3.2.15)

$$L_n^{(\nu)}(T_r(t,x);x) = f^{(\nu)}(x) + O(1/n),\ n\to\infty. \tag{7}$$

Тоді з (2), враховуючи (6) і (7), дістанемо

$$L_n^{(\nu)}(f;x)-f^{(\nu)}(x) = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}I_n(x)+o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n\to\infty, \tag{8}$$

Звідси

$$\sup_{f\in W^r H^\omega} |f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)| \leqslant (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^m} \omega(|t|/\sqrt{n})\exp(-tW(x)t'/2)dt + o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n\to\infty. \tag{9}$$

Нарешті, відмітимо, що функція $f_\omega(t)$, яка визначається з співвідношення $f_\omega^{(\nu)}(t) = \omega(|t-x|)$, належить до класу $W^r H^\omega$, і, як видно з співвідношення (8), є екстремальною.

Враховуючи ще (9), завершимо доведення теореми.

З а у в а ж е н н я. Оскільки матриця $V(x) = W^{-1}(x)$ симетрична і додатно визначена, то, використовуючи ортогональне перетворення, головний член в правій частині співвідношення (1) (позначимо його через $g_{m,n}(x)$) можна переписати у вигляді

$$g_{m,n}(x)) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \omega\left(\left[\lambda_1(x)\tau_1^2 + \ldots + \lambda_m(x)\tau_m^2 \right]^{1/2}/\sqrt{n}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\tau_1^2 + \ldots + \tau_m^2)\right)d\tau_1\ldots d\tau_m, \text{ де } \lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x) -$$

власні значення матриці $V(x)$.

Покладаючи $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_m)$, $\rho = |\tau|$, $t = \tau/\rho$ і позначаючи через Ω_{m-1} сферу $(\tau: |\tau|=1)$, а через ds - елемент площі поверхні цієї сфери, дістанемо:

$$g_{m,n}(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_0^\infty \rho^{m-1}e^{-\rho^2/2}\left(\int_{\Omega_{m-1}} \omega(\rho|t\Lambda(x)|/\sqrt{n})ds\right)d\rho, \tag{10}$$

де $\Lambda(x) = \mathrm{diag}\left[\sqrt{\lambda_1}(x),\ldots,\sqrt{\lambda_m}(x)\right]$.

Після цих перетворень співвідношення (1) перепишеться так:

$$\sup_{f\in W^r H^\omega} \left|f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)\right| = \ldots$$

$$= (2\pi)^{-m/2} \int_0^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2/2} \left\{ \int_{\Omega_{m-1}} \omega(r\|t\Lambda(x)\|/\sqrt{n})ds \right\} d\rho + o(\omega(1/\sqrt{n})), \quad n \to \infty. \qquad (11)$$

Наведемо приклади модулів неперервності; які задовольняють умову: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = 0$ рівномірно для $\lambda > 0$.

П р и к л а д 1.

$$\omega(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

П р и к л а д 2.

$$\omega(t) = t^\alpha \ln(1/t), \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Дійсно, якщо, наприклад, $0 < \lambda < 0.5$, то

$$\omega(\lambda t)/\omega(\lambda) = t^\alpha\left[\ln(1/t)/\ln(1/\lambda) + 1\right] < t^\alpha\left[\ln(1/t)/\ln 2 + 1\right] \to 0, \quad t \to 0.$$

П р и к л а д 3.

$$\omega(t) = t^\alpha/\ln(1/t); \quad 0 < \alpha < 1.$$

Дійсно,

$$\frac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = t^\alpha \frac{\ln(1/\lambda)}{\ln(1/\lambda) + \ln(1/t)} < t^\alpha, \quad t \to 0.$$

А, наприклад, модуль неперервності $\omega(t) = 1/\ln(1/t)$ умову $\lim\limits_{t\to 0}(\omega(\lambda t)/\omega(\lambda)) = 0$ рівномірно для $\lambda > 0$ не задовольняє.

Н а с л і д о к 1. Нехай $f \in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді

$$\sup_{f\in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\alpha} \left|f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)\right| =$$

$$= \left(\frac{2^{\alpha-2}}{\pi^m n^\alpha}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right) \int_{\Omega_{m-1}} \|t\Lambda(x)\|^\alpha ds + o(n^{-\alpha/2}), \quad n \to \infty. \qquad (12)$$

Дійсно, співвідношення (12) випливає з (11), якщо врахувати

$$\int_0^\infty \rho^{m+\alpha-1} e^{-\rho^2/2} d\rho = (\sqrt{2})^{m+\alpha-2} \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right).$$

Н а с л і д о к 2. Нехай $f \in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $m=1$. Тоді

$$\sup_{f\in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^\alpha} \left|f^{(\nu)}(x) - L_n^{(\nu)}(f;x)\right| =$$

$$= \left(\frac{2V(x)}{n}\right)^{\alpha/2} \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}} + o(n^{-\alpha/2}), \quad n \to \infty. \qquad (13)$$

Коефіцієнти при $n^{-\alpha/2}$ в головних частинах рівностей (12) і (13) називаються локальними константами Нікольського при наближенні функцій $f^{(\nu)}(x)$ функціями $L_n^{(\nu)}(f;x)$. Позначимо ці константи через $N_{m,\alpha}\left(f^{(\nu)}, L_n^{(\nu)}\right)$. Отже, встановлено

Т в е р д ж е н н я 4. Справедливі рівності:

$$N_{m,\alpha}\left(f^{(\nu)}, L_n^{(\nu)}\right) = N_{m,\alpha}\left(f, L_n\right) =$$

$$= \left(\frac{2^{\alpha-2}}{\pi^m}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right) \int_{\Omega_{m-1}} \|t\Lambda(x)\|^\alpha ds. \qquad (14)$$

Зокрема,

$$N_{1,\alpha}\left(f^{(\nu)}, L_n^{(\nu)}\right) = N_{1,\alpha}\left(f, L_n\right) = \left(2V(x)\right)^{\alpha/2} \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}}. \qquad (15)$$

З а у в а ж е н н я. Звертаємо увагу на те, що локальні константи Нікольського не залежать від ν.

§ 5 Локальна міра наближення

Нехай $f \in \mathbb{W}$, тобто, нехай функція f визначена і рівномірно неперервна на $\mathbb{R}^m$. Величину

$$a_{mn}(x) := \sup_{f\in \mathbb{W}} \frac{|L_n(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f;1/\sqrt{n})}, \qquad (1)$$

$f \neq \text{const}$, $x \in \mathbb{X}$, називатимемо локальною мірою наближення класу $\mathbb{W}$ операторами L_n. Мета цього параграфа вивчити поведінку величини $a_{mn}(x)$, коли $n \to \infty$.

Т е о р е м а 1. Справедлива асимптотична рівність:

$$a_{mn}(x) = a_m(x) + o(1),\ n \to \infty, \tag{2}$$

де

$$a_m(x) = 1 + (2\pi)^{-m/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty r^{m-1} e^{-r^2/2} \left(\int_{\Omega_{m-1}} \left[r \left(\lambda_1(x) t_1^2 + \ldots + \lambda_m(x) t_m^2 \right)^{1/2} \right] ds \right) dr, \tag{3}$$

де $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, власні значення матриці $V(x)$ – v-характеристики міри μ, що породжує оператори L_n.

Д о в е д е н н я. Маємо:

$$|L_n(f;x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x+t/\sqrt{n}) - f(x)) P_n(x)(dt) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega_1(f; \|t\|/\sqrt{n}) P_n(x)(dt) \leqslant \omega_1(f; 1/\sqrt{n}) \int_{\mathbb{R}^m} (1 + [\|t\|]) P_n(x)(dt),$$

а звідси

$$\frac{|L_n(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f; 1/\sqrt{n})} \leqslant 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt). \tag{4}$$

Зафіксуємо x і візьмемо функцію

$$g(t) := \begin{cases} 1 + [\|t-x\|\sqrt{n}], & \text{коли } t \neq x; \\ 0, & \text{коли } t = x. \end{cases}$$

Для цієї функції $\omega_1(g; 1/\sqrt{n}) = 1$ і

$L_n(g;x) - g(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt)$, а оскільки функцію g можна як завгодно точно наблизити неперервними функціями, то з (4) випливає, що

$$a_{mn}(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt). \tag{5}$$

Далі,

$$\int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt) = \sum_{k=0}^\infty \int_{(t: k \leqslant \|t\| < k+1)} k P_n(x)(dt) = \sum_{k=1}^\infty P_n(x)(t: \|t\| \geqslant k). \tag{6}$$

Оскільки для будь-якого $x \in \mathcal{X}$ міра $P_n(x)$ – імовірнісна, то за нерівністю Чебишова і співвідношенням (1.8.3) $\forall k \in \mathbb{N}_+$

$$P_n(x)(t: \|t\| \geqslant k) \leqslant k^{-2} \int_{\mathbb{R}^m} \|t\|^2 P_n(x)(dt) = k^{-2} n L_n(\|t-x\|^2; x) =$$

$$= k^{-2} \operatorname{tr} V(x). \tag{7}$$

Аналогічно, для міри $P(x)$, визначеної за допомогою співвідношення (1.6), $\forall k \in \mathbb{N}_+$

$$P_n(x)(t: \|t\| \geqslant k \leqslant k^{-2} \operatorname{tr} V(x). \tag{8}$$

З співвідношень (7) і (8) випливає, що $\forall k \in \mathbb{N}_+$

$$|(P_n(x) - P(x))(t: \|t\| \geqslant k)| \leqslant 2k^{-2} \operatorname{tr} V(x), \tag{9}$$

а оскільки послідовність $(P_n(x))$ слабко збігається до міри $P(x)$, то $\forall k \in \mathbb{N}_+$

$$|(P_n(x) - P(x))(t: \|t\| \geqslant k)| \to 0,\ n \to \infty.$$

З (9) також випливає, що ряд $\sum_{k=1}^\infty |(P_n(x) - P(x))(t: \|t\| \geqslant k)|$ мажорується збіжним рядом $\sum_{k=1}^\infty 2k^{-2} \operatorname{tr} V(x)$. Отже, внаслідок теореми Лебега про мажоровну збіжність

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty |(P_n(x) - P(x))(t: \|t\| \geqslant k)| = 0$. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty P_n(x)(t: \|t\| \geqslant k) = \sum_{k=1}^\infty P(x)(t: \|t\| \geqslant k) = \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P(x)(dt).$$

Тоді з (6) дістанемо $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P(x)(dt)$, а, отже, як видно з (5),

$$a_{mn}(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P(x)(dt) + o(1),\ n \to \infty.$$

Враховуючи далі вираз для міри $P(x)$ і зауваження до теореми 4.1, дістанемо потрібне твердження.

Можна встановити і більш сильне співвідношення, ніж (2). А саме:

Т е о р е м а 2. Справедлива асимптотична рівність:

$$a_{mn}(x) = a_m(x) + O\left(\frac{\log n}{n}\right),\ n \to \infty. \qquad (10)$$

Д о в е д е н н я. Скористаємося поняттям коливання функції f: $\omega_f(t,\delta) := \sup\left\{|f(z) - f(y)| : y,z \in \{\tau : |t-\tau| < \delta\}\right\},\ t \in \mathbb{R}^m$. Наприклад, якщо функція f, визначена на $\mathbb{R}^1$, неспадна, то $\omega_f(t,\delta) = f(t+\delta) - f(t-\delta)$, а, наприклад, якщо $f(t) = [\|t\|]$, $t \in \mathbb{R}^m$, то $\omega_f(t,\delta) = I_A(t)$ – індикатор множини

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t : k-\delta \leqslant \|t\| \leqslant k+\delta\},\ 0 < \delta < 0.5.$$

Оцінимо величину $\bar\omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega_{[\|t\|]}(t,\delta) P(x)(dt)$. Матимемо:

$$\bar\omega = \sum_{k=1}^{\infty} P(x)(: k-\delta \leqslant \|t\| \leqslant k+\delta) = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}\ \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-\delta\leqslant\|t\|\leqslant k+\delta} \exp(-tW(x)t'/2)dt = (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}\ \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-\delta\leqslant\|t\|\leqslant k+\delta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{l_1(x)t_1^2 + \ldots + l_m(x)t_m^2\right\}\right]dt,$$ де

$l_1(x),\ldots,l_m(x)$ – власні значення матриці $W(x)$ – w-характеристики міри μ, що породжує оператори L_n.
Нехай $l(x) = \min\{l_1(x),\ldots,l_m(x)\}$. Тоді

$$\bar\omega \leqslant (2\pi)^{-m/2}\sqrt{\det W(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-\delta\leqslant\|t\|\leqslant k+\delta} \exp\left[-l(x)(t_1^2+\ldots+t_m^2)/2\right]dt.$$

Поклавши $t = \tau/\sqrt{l(x)}$, дістанемо

$$\bar\omega \leqslant (2\pi l(x))^{-m/2}\sqrt{\det W(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-\delta)\sqrt{l(x)}\leqslant\|t\|\leqslant(k+\delta)\sqrt{l(x)}} \exp\left[-\|\tau^2\|/2\right]dt.$$

Покладаючи $r = \|\tau\|$, $t = \tau/r$ і враховуючи те, що площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^m$ дорівнює $2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$, з останньої нерівності дістанемо

$$\bar\omega \leqslant C(x) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-\delta)\sqrt{l(x)}}^{(k+\delta)\sqrt{l(x)}} \exp\left[-\frac{1}{2}r^2\right] r^{m-1} dr,$$

де $c(x) = 2^{2-m/2}(\Gamma(m/2))^{-1}(l(x))^{-m/2}\sqrt{\det W(x)}$.

Далі,

$$\bar\omega \leqslant 2C(x)(l(x))^{-m/2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+\delta)^{m-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\, l(x)(k-\delta)^2\right].$$

Вважаючи, що $0 < \delta < 1$, легко впевнитися в тому, що останній ряд збігається і його сума не перевищує величини

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{[\sqrt{m/l(x)}]} (k+2)^{m-1}\exp(-l(x)k^2/2) + \int_{[\sqrt{m/l(x)}]}^{\infty} (r+2)^{m-1} \times$$

$\times \exp(-l(x)r^2/2)dr$, тому остаточно

$$\bar\omega \leqslant 2^{2-m/2}(\Gamma(m/2))^{-1}\sigma(x)\sqrt{\det W(x)}.$$

Якщо тепер до інтеграла $\int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_n(x)(dt)$ застосувати наслідок 16.5 з книги [15, с.174], то дістанемо (10).

Н а с л і д о к 1. Якщо $m=1$, то

$$a_{1n}(x) = 1 + \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} \left[r\sqrt{V(x)}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr + O\left(\frac{\log n}{n}\right),\ n \to \infty. \quad (11)$$

Глава 5

ПРИКЛАДИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

В § 1-3 наводяться конкретні приклади д.л.о. типу $\mathbb{B}$. Ряд прикладів таких операторів було наведено в главі 1, там же була вказана методика побудови різноманітних сімей д.л.о. типу $\mathbb{B}$.

При наближенні функцій операторами $L_n(f;x)$ має місце явище насичування. В § 5 коротко обговорюються можливості побудови на основі операторів $L_n(f;x)$ операторів, які функцію f наближують краще, ніж оператори $L_n(f;x)$, за умови, що функція f достатньо гладка.

§ 1. Багатовимірні узагальнення многочленів Бернштейна

Важливим прикладом д.л.о. типу $\mathbb{B}$ є многочлени Бернштейна:

$$B_n(f;x):=\sum_{k=0}^{m-1} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Ці многочлени породжуються мірою $\mu = \delta(0) + \delta(1)$, тобто мірою, яка сконцентрована в точках 0 і 1 числової осі і має в цих точках одиничні маси.

Природними багатовимірними узагальненнями многочленів $B_n(f;x)$ є симпліціальні многочлени Бернштейна. В § 4 глави 1 наводились матричні вирази для цих многочленів (див.приклад 1.4.2). В наступному пункті симпліціальні многочлени $B_n^{\Delta}(f;x)$ обговорюються детальніше.

Зауваження. Останнім часом многочлени $B_n^{\Delta}(f;x)$ інтенсивно вивчаються ([89,91-93,107]). Одна з піонерських робіт належить Н.В. Карташову [54].

1. Многочлени $B_n^{\Delta}(f;x)$ можна дістати таким шляхом. Нехай $a_0, a_1,\dots, a_m$ – вершини невиродженого m-мірного симплексу T. Розглянемо міру $\mu = \delta(a_0) + \delta(a_1) + \dots + \delta(a_m)$, тобто міру

сконцентровану в вершинах симплекса T і яка має в них одиничні маси. Міра μ породжує многочлени $B_n^{\Delta}(f;x)$. Для того щоб впевнитися в цьому, необхідно знайти функціональні характеристики міри μ.

Нехай $a_0 = (a_{10},\dots,a_{m0})$, $a_1 = (a_{11},\dots,a_{m1}),\dots,$ $a_m=(a_{1m},\dots,a_{mm})$. Позначимо через $\beta_0=\beta_0(x),\dots,\beta_1=\beta_1(x)$ – барицентричні координати точки $x=(x_1,\dots,x_m)\in T$ відносно вершин симплекса T, тобто

$(\beta_0, \beta_1,\dots, \beta_m)' = A^{-1}(x_1,\dots,x_m,1)'$, де матриця A така:

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$ Перетворенням Лапласа міри μ є функція

$$u(z) = \sum_{j=0}^{m} \exp(-a_j z'),\ z\in\mathbb{C}^m. \qquad (1)$$

З (1) дістанемо відображення $x(s) = -d\ln u(s)/ds$, $s\in \operatorname{Re} z$, або в координатній формі $x_k(s) = -\partial\ln u(s)/\partial s_k$, $k=\overline{1,m}$. Враховуючи вираз для барицентричних координат, дістанемо

$$-\sum_{k=1}^{m} a_{kj}s_k - \ln u(s) = \ln\beta_j(x),\ j=0,1,2,\dots m,$$

а звідси

$$(s_1,\dots, s_m, \ln u(s)) = -(\ln\beta_0, \ln\beta_1,\dots, \ln\beta_m)A^{-1}. \qquad (2)$$

Співвідношення (2) визначає s-характеристику міри μ, тобто відображення $s(x)=-(s_1(x),\dots,s_m(x))$. Після цього неважко знайти v-характеристику міри μ, тобто матрицю

15*

$$V(x) = (v_{ij}(x)) = \left(- \frac{\partial x_j}{\partial s_i} \Big|_{s=s(x)} \right), \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Після необхідних обчислень дістанемо

$$v_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{ik} a_{jk} \beta_k(x) - x_i x_j, \quad i,j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Далі відшукується функция $\varphi_n(z,x) = (u(s(x)+z/n)/u(s(x))^n$. Маємо:

$$\varphi_n(z,x) = \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j(x) \exp(a_j z'/n) \right)^n =$$

$$= \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_0! k_1! \ldots k_m!} \left(\beta_0(x)\right)^{k_0} \left(\beta_1(x)\right)^{k_1} \ldots \left(\beta_m(x)\right)^{k_m} \times$$

$$\times \exp\left[- \left(\frac{k_0}{n} a_0 + \frac{k_1}{n} a_1 + \ldots + \frac{k_m}{n} a_m \right) z' \right].$$

Функція $\varphi_n(z,x)$ є перетворенням Лапласа міри, яка сконцентрована в точках $A_k = \sum_{j=0}^{m} \frac{k_j}{n} a_j$, де $(k_0, k_1, \ldots, k_m)$ всі розв"зки рівняння $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n$ з натуральними координатами, і має в цих точках маси

$$\frac{n!}{k_0! k_1! \ldots k_m!} \left(\beta_0(x)\right)^{k_0} \left(\beta_1(x)\right)^{k_1} \ldots \left(\beta_m(x)\right)^{k_m}.$$

Числа k_0/n, k_1/n, ..., k_m/n – барицентричні координати точки A_k відносно вершин симплекса T.

Отже, міра μ породжує оператори

$$B_n^{\Delta}(f;x) = \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_m=n} f\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{k_i}{n} a_i \right) \frac{n!}{k_0! k_1! \ldots k_m!} \times$$

$$\times \left(\beta_0(x)\right)^{k_0} \left(\beta_1(x)\right)^{k_1} \ldots \left(\beta_m(x)\right)^{k_m}, \tag{4}$$

вони є многочленами n-го степеня від m змінних $x_1, \ldots, x_m$. Зокрема, якщо $m=1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, то дістанемо звичайні многочлени Бернштейна $B_n(f;x)$.

Якщо взяти

$a_0 = (0, \ldots, 0)$, $a_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_m = (0, \ldots, 0, 1)$,

то дістанемо багатовимірні многочлени Бернштейна з прикладу 1.4.2.

Якщо взяти

$a_0 = (0, \ldots, 0)$, $a_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$,

$a_3 = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $a_m = (1, 1, \ldots, 1)$, то дістанемо многочлени

$$B_n^{J}(f;x) = \sum_{n \geq k_1 \geq \ldots \geq k_m \geq 0} f(k_1/n, \ldots, k_m/n) n! (1-x_1)^{n-k_1}/(n-k_1)! \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} (x_i - x_{i+1})^{k_i - k_{i+1}}/(k_i - k_{i+1})!, \tag{5}$$

де $x_{m+1} := 0$, $k_{m+1} = 0$. Для цих многочленів $V(x) = (x_i(1-x_j)$, якщо $i \geq j)$, $i,j = \overline{1,m}$, $\det V(x) = (1-x_1)(x_1-x_2)\ldots(x_{m-1}-x_m)x_m$.

Для многочленів $B_n^{\Delta}(f;x)$ випишемо декілька тверджень, які є наслідками із загальних результатів попередніх глав.

Т в е р д ж е н н я 1. Нехай функція f неперервна і опукла на симплексі T. Тоді для кожного фіксованого $x \in T$ послідовність $(B_n^{\Delta}(f;x))$ не зростає.

Це твердження – наслідок теореми 1.5.1. Зокрема, для $m=1$ з твердження 1 дістанемо результат Араме [87].

Н а с л і д о к 1. Справедлива нерівність

$$\int_T f(x)dx \leq \int_T B_n^{\Delta}(f;x)dx \leq \frac{|\det A|}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m} f(a_k). \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Внаслідок твердження 1, $\forall x \in T, \forall r \in \mathbb{N}_+$

$B^{\Delta}_{n+r}(f;x) \leqslant B^{\Delta}_{n}(f;x) \leqslant B^{\Delta}_{1}(f;x).$

Якщо тут перейти до границі, коли $r \to \infty$, то дістанемо:

$$f(x) \leqslant B^{\Delta}_{n}(f;x) \leqslant B^{\Delta}_{1}(f;x) = \sum_{k=0}^{m} f(a_k)\beta_j(x). \qquad (7)$$

Враховуючи далі те, що $\int\limits_T \beta_j(x) = \frac{|\det A|}{(m+1)!}$, $1 \leqslant j \leqslant m$,

з нерівності (7) шляхом її інтегрування дістанемо нерівність (6).

Т в е р д ж е н н я 2. Нехай $\Delta_n := |f(x)-B^{\Delta}_{n}(f;x)|$. Тоді для будь-якого $x \in T$ справедливі імплікації:

$$f \in \mathbb{C}^1(T) \Rightarrow \Delta_n \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}V(x)/n}\,\|f\|_{\mathbb{C}^1(T)},$$

$$f \in \mathbb{C}^2(T) \Rightarrow \Delta_n \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{tr}V(x)/n\,\|f\|_{\mathbb{C}^2(T)},$$

$$f \in \mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow \Delta_n \leqslant (1+\mathrm{tr}V(x))\omega(1/\sqrt{n}),$$

$$f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow \Delta_n \leqslant \left[\sqrt{\mathrm{tr}V(x)} + \sqrt{m}\,\mathrm{tr}V(x)\right]\omega(1/\sqrt{n})/\sqrt{n},$$

де

$$\mathrm{tr}V(x) = \sum_{k=0}^{m} \left[\sum_{k=0}^{m} a^2_{ik}\beta_k(x) - x^2_i \right].$$

Негайно випливає з наслідку 3.2.1 і співвідношення (3).

З твердження 1, зокрема, випливають відповідно нерівності Поповічіу [112] і Лоренца [106] для звичайних одновимірних многочленів Бернштейна:

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leqslant \begin{cases} 5/4\,\omega(1/\sqrt{n}), & \text{коли } f \in \mathbb{H}^{\omega} \\ 3/2\,\omega(1/\sqrt{n})/\sqrt{n}, & \text{коли } f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega}, \end{cases}$$

оскільки в цьому випадку $\mathrm{tr}V(x) = x(1-x) \leqslant 1/4$, коли $0 < x < 1$.

Т в е р д ж е н н я 3. Нехай $f \in \mathbb{C}^r(T)$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall|\nu| = r$, $\forall x \in T$

$$B^{\Delta}_{n}\left((f^{(\nu)} - (B^{\Delta}_{n}(f;x))^{(\nu)}_x)^2;x\right) \geqslant$$

$$\geqslant n \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} B^{\Delta}_{n}((t_i-t_j)f^{(\nu)}(t);x)B^{\Delta}_{n}((t_j-t_j)f^{(\nu)}(t);x)w_{ij}(x),$$

де $w_{ij}(x)$ елементи матриці $W(x) = V^{-1}(x)$.

Випливає з наслідку 4.6.11. Зокрема, для многочленів $B_n(f;x)$ справедлива нерівність:

$$x(1-x)B_n((f^{(r)} - B^{(r)}_{n}(f;x))^2;x) \geqslant n(B_n((t-x)f^{(r)}(t);x))^2.$$

Т в е р д ж е н н я 4. Нехай $f \in \mathbb{C}^{r+2}$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall|\nu| = r$, $\forall x \in T$.

$$(B^{\Delta}_{n}(f;x) - f(x))^{(\nu)}_x =$$

$$= (2n)^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \left[\left[\sum_{k=0}^{m} a_{ik}a_{jk}\beta_k(x) - x_ix_j\right] \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]^{(\nu)}_x + o(1/n),$$

$n \to \infty$.

Випливає з теореми 4.3.1.

Зокрема, для $r = 0$ дістанемо результат Н.В.Карташова [54], а для многочленів $B_n(f;x)$-це результат Вороновської [38].

Т в е р д ж е н н я 5. Нехай $f \in \mathbb{C}^{r+2}$, $\nu \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall|\nu| = r$, $\forall x \in T$

$$B^{\Delta}_{n}\left((f^{(\nu)} - (B^{\Delta}_{n}(f;x))^{(\nu)}_x)^2;x\right) =$$

$$= n^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \left[\sum_{k=0}^{m} a_{ik}a_{jk}\beta_k(x) - x_ix_j\right] \frac{\partial^{(\nu)} f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial^{(\nu)} f(x)}{\partial x_j} +$$

Випливає з теореми 4.3.2.

Зокрема, для звичайних многочленів Бернштейна

$$B_n((f^{(r)} - B^{(r)}_{n}(f;x);x))^2;x) = n^{-1}x(1-x)(f^{(r+1)}(x))^2 + o(n^{-1}),\quad n \to \infty.$$

Т в е р д ж е н н я 6. Нехай $f \in \mathbb{C}^{2r}(T)$, $r \geqslant 1$, $S_{k,n}(x) = B^{\Delta}_{n}((t-x)^k;x)$, $k \in \mathbb{N}^m$. Тоді $\forall x \in T$

$$\lim_{n\to\infty} n^r\left[B_n^{\Delta}(f;x) - \sum_{0\leqslant|k|\leqslant 2r-1}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)S_{k,n}(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{r!2^r}\sum_{|k|=2r}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)\times$$

$$\times\frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_m^{k_m}}\left\{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} z_iz_j\left(\sum_{k=0}^{m}a_{ik}a_{jk}\beta_k(x) - x_ix_j\right)\right\}^r$$

Випливає з теореми 4.3.3.

Зокрема, для многочленів $B_n(f;x)$ звідси дістанемо результат Бернштейна [11], який узагальнює теорему Е.В.Вороновської:

$$\lim_{n\to\infty} n^r\left[B_n(f;x) - \sum_{k=0}^{2r-1}(k!)^{-1}f^{(k)}(x)\,S_{k,n}(x)\right] =$$

$$= f^{(2r)}(x)(x(1-x))^r/(2^r r!).$$

Т в е р д ж е н н я 7. Нехай $f\in \mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\omega}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = 0$ рівномірно по $\lambda > 0$, $\nu\in\mathbb{N}^m$. Тоді $\forall|\nu|=r$, $\forall x\in \mathcal{X}$

$$\sup_{f\in\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\omega}}\left|f^{(\nu)}(x) - (B_n^{\Delta}(f;x))_x^{(\nu)}\right| = (2\pi)^{-m/2}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} r^{m-1}e^{-r^2/2}\left[\int_{\Omega_{m-1}}\omega(r\,|t\Lambda(x)|/\sqrt{n})ds\right]dr + o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n\to\infty,$$

де $\Lambda(x) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1(x)},\ldots,\sqrt{\lambda_m(x)})$, а $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x)$ – власні значення матриці $V(x)$, яка визначена за допомогою співвідношення (3).

Це – наслідок з теореми 4.4.1.

Н а с л і д о к 2. Нехай $m=1$, $f\in\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\omega}$. Тоді $\forall x\in(0,1)$

$$\sup_{f\in\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\omega}}\left|f^{(r)}(x) - (B_n(f;x))_x^{(r)}\right| =$$

$$= \sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\omega(r\sqrt{x(1-x)/n})dr + o(\omega(1/\sqrt{n})),\ n\to\infty.$$

Якщо покласти $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, то дістанемо

Н а с л і д о к 3. Нехай $f\in\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$. Тоді $\forall|\nu| = r$, $\nu\in\mathbb{N}^m$, $\forall x\in T$

$$\sup_{f\in\mathbb{W}^r\mathbb{H}^{\alpha}}\left|f^{(\nu)}(x) - (B_n^{\Delta}(f;x))_x^{(\nu)}\right| = n^{-\alpha/2}N_{m,\alpha}(f,B_n^{\Delta}) + o(n^{-\alpha/2}),\quad n\to\infty,$$

де

$$N_{m,\alpha}(f,B_n^{\Delta}) = \left(\frac{2^{\alpha-2}}{\pi^m}\right)^{1/2}\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)\int_{\Omega_{m-1}}|t\Lambda(x)|^{\alpha}ds\ -$$

локальні константи Нікольського.

Зокрема, для многочленів $B_n(f;x)$

$$N_{1,\alpha}\left[f^{(r)},B_n^{(r)}\right] = N_{1,\alpha}\left[f,B_n\right] = \left[2x(1-x)\right]^{\alpha/2}\frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}},$$

$0<x<1$. Для $r = 0$ звідси дістанемо результат Соколова [73].

Т в е р д ж е н н я 8. Нехай $f\in\mathbb{H}$. Тоді для будь-якого $x\in T$ справедлива асимптотична рівність:

$$\sup_{f\in\mathbb{H}}\frac{|B_n^{\Delta}(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f;1/\sqrt{n})} = 1 + (2\pi)^{-m/2}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} r^{m-1}e^{-r^2/2}\left[\int_{\Omega_{m-1}}\left[r\left[\lambda_1(x)t_1^2+\ldots+\lambda_m(x)t_m^2\right]^{1/2}\right]ds\right]dr +$$

$$+ O(n^{-1}\log n),\ n\to\infty,\ f\neq\mathrm{const},\ x\in T,$$

де $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x)$ – власні значення матриці $V(x)$.

Випливає з теореми 4.5.5 і співвідношення (4.5.10).

Зокрема, для многочленів $B_n(f;x)$ дістанемо:

$$\sup_{f\in\mathbb{H}} \frac{|B_n(f;x)-f(x)|}{\omega_1(f;1/\sqrt{n})} = 1 + (2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\left[r\sqrt{x(1-x)}\right]dr +$$

$$+ O(n^{-1}\log n),\ n\to\infty,\ f\neq \mathrm{const},\ x\in(0,1),$$ а звідси випливає відомий результат Ессеена [94]:

$$\max_{0\le x\le 1}\sup_{f\in\mathbb{H}} \frac{|B_n(f;x)-f(x)|}{\omega_1(f;1/\sqrt{n})} = 1.04556\ldots .$$

§2. Багатовимірні оператори, що породжені степеневими рядами

п.1. Розглянемо міру

$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} \frac{(k_1+\ldots+k_m)!}{k_1!\ldots k_m!}\, a_{k_1+\ldots+k_m}\delta((k_1,\ldots,k_m))$$

або коротше

$\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^m} (k!)^{-1}|k|a_{|k|}\delta(k)$. Перетворенням Лапласа цієї міри є функція

$$u(s_1,\ldots,s_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{k_1+\ldots+k_m=\nu} a_\nu \frac{\nu!}{k_1!\ldots k_m!}\, e^{-s_1k_1-\ldots-s_mk_m}.$$

Знайшовши функціональні характеристики міри μ і скориставшись теоремою про структуру, побудуємо оператори типу $\mathbb{B}$, які породжує міра μ. Одержані таким способом оператори позначатимемо тими самими символами, що і відповідні їм одновимірні оператори. Матимемо:

$$L_n(f;x_1,\ldots,x_m) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}^m} \frac{(k_1+\ldots+k_m)!}{k_1!\ldots k_m!}\, c_{k_1+\ldots+k_m,n}\left(\frac{x_1}{x_1+\ldots+x_m}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{x_m}{x_1+\ldots+x_m}\right)^{k_m} \times$$

$$\times (y(x_1+\ldots+x_m))^{k_1+\ldots+k_m}(\omega(y(x_1+\ldots+x_m))^{-n}.$$

Для цих операторів $V(x) = V(x_1,\ldots,x_m) = (v_{ij}(x))$, де

$$v_{ij}(x) = \delta_{ij}x_i - x_ix_j + x_ix_j\omega(y(x_1+\ldots+x_m))\omega''(y(x_1+\ldots+x_m))\times$$

$$\times(\omega'(y(x_1+\ldots+x_m))^{-2},\quad i,j=\overline{1,m};$$

$$\det V(x) = x_1\ldots x_m\Big[1-(x_1+\ldots+x_m)\omega(y(x_1+\ldots+x_m))\times$$

$$\times\omega''(y(x_1+\ldots+x_m))(\omega'(y(x_1+\ldots+x_m))^{-2}\Big],\quad x\in\mathbb{X}^m.$$

Область $\mathbb{X}^m$ визначається так: нехай r - радіус збіжності ряду функції $\omega(y)$, а $\mathbb{X}$ - область значень функції $x=y\omega'(y)/\omega(y), 0<y<r$, тоді $\mathbb{X}^m = ((x_1,\ldots,x_m)\colon x_1\in\mathbb{X},\ldots, x_m\in\mathbb{X},\ x_1+\ldots+x_m\in\mathbb{X})$.

Далі використовуватиметься коротша форма запису операторів $L_n(f;x)$, а саме:

$$L_n(f;x) = \left(\omega(y(|x|))\right)^{-n}\sum_{k\in\mathbb{N}^m} f(k/n)c_{|k|,n}\frac{|k|!}{k!}x^k\left[\frac{y(|x|)}{|x|}\right]^{|k|},$$

де $|x| = x_1+\ldots+x_m$, $|k| = k_1+\ldots+k_m$, $x^k = x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}$.

Розглянемо конкретні приклади.

П р и к л а д 1. Оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y) = (1-y)^{-1}$, мають вигляд

$$\mathrm{Б}_n(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} f(k/n)\frac{\Gamma(n+|k|)}{k!\Gamma(n)}x^k(1+|x|)^{-n-|k|},$$

для цих операторів $\mathbb{X}_m = ((x_1,\ldots,x_m)\colon x_1>0,\ldots, x_m>0)$,

$V(x) = (x_i(\delta_{ij}+x_j)),\ i,j=\overline{1,m};$

$\det V(x) = x_1\ldots x_m(1+x_1+\ldots+x_m)$.

П р и к л а д 2. Оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y) = y^{-1}-(y^{-2}-1)^{1/2}$, мають вигляд

$$\mathfrak{B}_n(f;x) = \sum_{|k|\geq n} f(k/n)\frac{n2^{-|k|}|k|!}{|k|k!}\binom{(|k|+n)/2}{|k|} x^k|x|^{-|k|} \times$$

$$\times \left(1-|x|^{-1}\right)^{(|k|-n)/2}\left(1+|x|^{-1}\right)^{(|k|+n)/2}$$

(якщо $(|k|+n)/2$ – непарне, то $\binom{(|k|+n)/2}{|k|} := 0$). Для цих операторів

$$\mathfrak{X}_m = ((x_1,\ldots,x_m):x_1 > 1,\ldots, x_m > 1),$$

$$V(x) = (\delta_{ij}x_i - x_ix_j(2|x|^{-1}-|x|)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\ldots x_m(|x|^2-1).$$

Оператори $\mathfrak{B}_n(f;x)$ – багатовимірні узагальнення операторів блукань, які одержані в § 3 глави 1.

П р и к л а д 3. Оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y) = 1 + \xi(y)$, де функція $\xi(y)$ – обернена до функції $y = \xi(1+\xi)^{-a}$, $a > 1$, мають вигляд

$$K_n(f;x) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{R}^m} f(k/n)\frac{n}{a|k|+n}\binom{a|k|+n}{|k|}\frac{|k|!}{k!}x^k\left(1+(a-1)|x|\right)^{n+(a-1)|k|}\times$$

$$\times \left(1+a|x|\right)^{-n-a|k|}.$$

Для цих операторів

$$\mathfrak{X}_m = ((x_1,\ldots,x_m):x_1 > 0,\ldots, x_m > 0),$$

$$V(x) = (\delta_{ij}x_i - x_ix_j(1-2a+a(1-a)|x|)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\ldots x_m(1-|x|(1-2a+a(1-a)|x|)).$$

П р и к л а д 4. Оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y) = \exp\arcsin y$, мають вигляд

$$A_n(f;x;0;1) = \sum_{k\in\mathbb{P}^m} f(k/n)\frac{n}{k!}g_{|k|-1}(n)\frac{x^k}{\sqrt{(1+|x|^2)^{|k|}}}e^{-n\,\mathrm{arctg}|x|}.$$

Для цих операторів

$$\mathfrak{X}_m = ((x_1,\ldots,x_m):x_1 > 0,\ldots, x_m > 0),$$

$$V(x) = (x_i\delta_{ij} + x_ix_j|x|)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\ldots x_m(1+|x|^2).$$

П р и к л а д 5. Оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y)$, яка задана неявно рівнянням $\omega e^{-\omega}=y$, $\omega(0)=0$, мають вигляд

$$BT_n(f;x) = \sum_{|k|\geq n} f(k/n)\frac{|k|!}{k!}\frac{n|k|^{|k|-n-1}}{(|k|-n)!}\frac{x^k}{|x|^{|k|}}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{|k|-n}\times$$

$$\times \exp(-|k|(1-1/|x|)).$$

Для цих операторів

$$\mathfrak{X}_m = ((x_1,\ldots,x_m):x_1 > 1,\ldots, x_m > 1),$$

$$V(x) = (x_i\delta_{ij}-x_j(|x|^{-1}-|x|+1)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\ldots x_m(|x|^2-|x|).$$

П р и к л а д 6. Нехай $\omega(y) = \exp(-\lambda_1(z(y)-1))$, де функція $z(y)$ задана неявно рівнянням $z\exp(-\lambda_2 z-1) = y$, $z(1) = 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Тоді оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y)$, мають вигляд

$$PP_n(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{R}^m_+} f(k/n)(k!)^{-1}n\lambda_1\left(n\lambda_1+|k|\lambda_2\right)^{|k|-1}\frac{x^k}{(\lambda_1+\lambda_2|x|)^{|k|}}\times$$

$$\times \exp\left(-|x|\frac{n\lambda_1+|k|\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2|x|}\right).$$

Для цих операторів

$$\mathbb{X}_m = \{(x_1,\dots,x_m): x_1 > 0,\dots, x_m > 0\},$$

$$V(x) = (x_i\delta_{ij} + \lambda_2/\lambda_1 x_j(2+\lambda_2/\lambda_1|x|)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\dots x_m(1+\lambda_2/\lambda_1|x|)^2.$$

П р и к л а д 7. Нехай $\omega(y) = e^{z(y)}$, де функція $z(y)$ задана неявно рівнянням $y = e^{-az}\sin(bz)/b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (якщо $b=0$, то $\sin(bz)/b := z$). Тоді оператори, що породжені степеневим рядом функції $\omega(y)$, мають вигляд

$$A_n(f;x;a;b) = \sum_{k\in\mathbb{R}^m} f(k/n)\frac{n}{k!}b^{|k|-1}g_{|k|-1}\left(\frac{n+a|k|}{b}\right) x^k \times$$

$$\times \left\{\sqrt{(a^2+b^2)|x|^2+2a|x|+1}\right\}^{|k|} \exp\left\{-\frac{n+a|k|}{b}\operatorname{arctg}\frac{b|x|}{1+a|x|}\right\},$$

де $g_{-1}(t) := 1/t$, $g_k(t) = d^{k+1}/dy^{k+1}\left\{e^{t\arcsin y}\right\}\Big|_{y=0}$.

Для цих операторів

$$\mathbb{X}_m = \{(x_1,\dots,x_m): x_1 > 0,\dots, x_m > 0\},$$

$$V(x) = (x_i\delta_{ij} + x_i x_j(2a+(a^2+b^2)|x|)),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$\det V(x) = x_1\dots x_m(1+2a|x|+(a^2+b^2)|x|^2).$$

Оператори $E_n(f;x)$, $A_n(f;x;a;b)$, $BT_n(f;x)$, $PP_n(f;x)$ – багатовимірні узагальнення відповідних одновимірних операторів з тими самими позначеннями.

Кількість конкретних прикладів багатовимірних д.л.о. типу $\mathbb{B}$ можна необмежено збільшити, якщо скористатися лінійними деформаціями операторів (див. наслідок 1.4.1). Наприклад, нехай коваріація операторів є діагональною матрицею вигляду

$V(x) = \operatorname{diag}(v_1(x),\dots, v_m(x))$, $x \in \mathbb{X}$. Тоді, якщо такі оператори продеформувати за допомогою лінійного відображення $h(t_1,\dots,t_m) = (t_1-t_2,\ t_2-t_3,\dots,\ t_{m-1}-t_m,\ t_m)$, то дістанемо оператори типу $\mathbb{B}$ з коваріацією $\tilde V(x) = (\tilde v_{ij}(x))$, $i,j = \overline{1,m}$, де

$$\tilde v_{ij}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{m} v_k(xA), & \text{коли } j > i \\ \sum\limits_{k=i}^{m} v_k(xA), & \text{коли } j \leqslant i \end{cases},\quad A \text{ – матриця відображення } h.$$

§ 3. Приклади інтегральних операторів

1. Одновимірний випадок. В главі 1 було наведено цілий ряд прикладів д.л.о. типу $\mathbb{B}$. Тут наведемо ще декілька прикладів.

Нехай міра μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега і $\mu \in \Lambda$. В цьому випадку існує функція $p = p(t)$ така, що $\mu(dt) = p(t)dt$ і для неї існує

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-zt)p(t)dt.$$

φ-характеристикою міри μ є функція $\varphi(z,x) = u(s(x)+z)/u(s(x))$. Використовуючи формули обернення дістанемо функції $q_n(x,t) \div (u(s(x)))^{-n}(u(s(x)+z/n))^n$. Тоді міра μ породжує оператори

$$L_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)q_n(x,t)dt.$$

На практиці, для побудови конкретних прикладів такого типу операторів, використовуються таблиці перетворення Фурье, Лапласа і Мелліна (див., наприклад, [9, 67, 74]).

П р и к л а д 1. Нехай $p(t) = \eta(t)$ – одинична функція Хевісайда. В цьому випадку $u(s) = 1/s$, $x(s) \doteq 1/s$. Звідси $V(x) = x^2$,

$$\varphi_n(z,x) = \left(\frac{n}{n+xz}\right)^n + \left(\frac{n}{x}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}\exp\left(-\frac{n}{x}t\right)\eta(t).$$

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

$$F_n(f;x) = \left(\frac{n}{x}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty f(t)t^{n-1}\exp\left(-\frac{n}{x}t\right)dt,\ x > 0.$$

Оператори F_n – це відомі оператори Феллера-Уіддера [81,с.273].

П р и к л а д 2. Нехай $p(t) = 1/\sqrt{2\pi}t^{-3/2}e^{-1/2t}\eta(t)$.

В цьому випадку $u(s) = \exp(-\sqrt{2s})$, $x = 1/\sqrt{2s}$. Звідси $s = 1/2x^{-2}$,

$$V(x) = x^3,\ \varphi_\nu(z,x) = \exp\left[n/x - \sqrt{2n(z+n/2x^{-2})}\right] +$$

$$+ \sqrt{n/(2\pi)}t^{-3/2}\exp\left(\frac{n}{x} - \frac{n}{2t} - \frac{nt}{2x^2}\right)\eta(t)$$

(див. формулу 5.6(1) з книги [9, с.220]).

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

$$\Omega_n(f;x) = \sqrt{n/(2\pi)} \int_0^\infty f(t)t^{-3/2}\exp\left(\frac{n}{x} - \frac{n}{2t} - \frac{nt}{2x^2}\right)dt,\ x > 0.$$

П р и к л а д 3. Нехай $p(t) = (2\text{ch}(\pi t/2))^{-1}$. В цьому випадку $u(s) = 1/\cos s$. Звідси $x = -\text{tg}s$, $s = -\text{arctg}x$, $V(x) = 1+x^2$,

$$\varphi_n(z,x) = (1+x^2)^{-n}(\cos(z/n-\text{arctg}x))^{-n} +$$

$$+ 2^{n-2}/(\pi\,\Gamma(n))(1+x^2)^{-n/2}\exp(nt\,\text{arctg}x)|\Gamma((n+int)/2)|^2$$

(див. формулу 32 з книги [67, с.236]).

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

$$T_n(f;x) =$$

$$= 2^{n-2}/(\pi\,\Gamma(n))(1+x^2)^{-n/2} \int_0^\infty f(t)\exp(nt\,\text{arctg}x)|\Gamma((n+int)/2)|^2,$$

$x \in \mathbb{R}$.

Доречі, через те що $|\Gamma(iy)|^2 = \pi/(y\,\text{sh}(\pi y))$, а $|\Gamma(1/2 + iy)|^2 = \pi/(\text{ch}(\pi y)$ ([76,с.82], то якщо n парне, дістанемо для $n > 2$

$$|\Gamma(n/2 + int/2)|^2 = 2\pi/n\left[\text{sh}(\pi nt/2)\right]^{-1}\prod_{k=1}^{n/2-1}(k^2+n^2t^2/4),$$

а якщо n непарне, то для $n > 1$

$$|\Gamma(n/2 + int/2)|^2 = \pi\left[\text{ch}(\pi nt/2)\right]^{-1}\prod_{k=1}^{[n/2-1]}(k^2+n^2t^2/4).$$

Оператори $\Omega_n(f;x)$ і $T_n(f;x)$ вперше з"явились у роботі Ізмаїла-Мея [98].

П р и к л а д 4. Нехай $p(t) = t^{-1}I_1(t)\eta(t)$, де $I_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(m!\Gamma(\nu+m+1))^{-1}(t/2)^{\nu+2m}$. В цьому випадку $u(s) = s-\sqrt{s^2-1}$. Звідси $x=1/\sqrt{s^2-1}$, $s = x^{-1}\sqrt{x^2+1}$, $V(x) = x^2\sqrt{x^2+1}$,

$$\varphi_n(z,x) =$$

$$= x^n\left[\sqrt{x^2+1} - 1\right]^{-n}\left[x^{-1}\sqrt{x^2+1} + z/n - \left(\left[x^{-1}\sqrt{x^2+1} + z/n\right]^2 - 1\right)^{1/2}\right]^n +$$

$$+ n\left[x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}}\right]^n\exp\left[-nt\sqrt{1-x^{-2}}\right]I_n(nt)t^{-1}\eta(t)$$ (тут використані таблиці з [9, с.176]).

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

$$\mathfrak{I}_n(f;x) = n\left[x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}}\right]^n \int_0^\infty \exp\left[-nt\sqrt{1-x^{-2}}\right]I_n(nt)t^{-1},x > 0.$$

П р и к л а д 5. Нехай $p(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Тоді $u(s) = 1/(1-s^2)$, Звідси $x = -2s(1-s^2)^{-1}$, $s = x^{-1}(1-\sqrt{1+x^2})$, $V(x) = 1+x^2+\sqrt{1+x^2}$, $\varphi_n(z,x) = 2^n\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]^{-n}\left[1-(s(x)+z/n)^2\right]^{-n} +$

$$+ n^n\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]^{-n}\sqrt{2n/\pi}(\Gamma(n))^{-1}\exp\frac{ntx}{1+\sqrt{1+x^2}}|t|^{n-1/2}K_{n-1/2}(n|t|),$$

де $K_{n-1/2}(z) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}\left[I_{1/2-n}(z) - I_{n-1/2}(z)\right]$.

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

17-2-2291

$$\lambda_n(f;x) =$$

$$= \left[\frac{n}{1+\sqrt{1+x^2}}\right]^n \frac{\sqrt{2n/\pi}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty f(t)\exp\frac{ntx}{1+\sqrt{1+x^2}}\, t^{n-1/2} K_{n-1/2}(n|t|)dt,$$

$-\infty < x < \infty.$

2. Конічні оператори. Як і вище, нехай міра μ, визначена на борелівських підмножинах числової осі, є абсолютно неперервною відносно міри Лебега, належить до класу Λ і нехай $\mu(dt) = p(t)dt$. Позначимо через $\omega(z)$ двобічне перетворення Лапласа функції $p(t)$, а через $p_n(t)$ позначимо функцію, для якої функція $(\omega(z))^n$ є її двобічним перетворенням Лапласа, $n \in \mathbb{N}_1$.

Нехай задані і зафіксовані числа $k_1 > 0, \ldots, k_m > 0$. Визначимо на борелівських підмножинах простору $\mathbb{R}^m$ міру $\mu(dt_1 \ldots dt_m) = \rho(t_1,\ldots,t_m)dt_1\ldots dt_m$, де

$$\rho(t_1,\ldots,t_m) = \prod_{j=1}^{m} p(t_j/k_j - t_{j+1}/k_{j+1}),\ t_{m+1} := 0,\ k_{m+1} := 1.$$

Побудуємо послідовність д.л.о., що породжує ця міра. Перетворенням Лапласа міри ρ є функція $u(s_1,\ldots,s_m) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-t_1s_1-\ldots-t_ms_m)\left[\prod_{t=1}^{m} p(t_j/k_j - t_{j+1}/k_{j+1})\right]dt_1\ldots dt_m =$$

$$= \prod_{t=1}^{m} k_t\omega(k_1s_1+\ldots+k_ts_t).$$

Звідси

$$x_j = -\partial \ln u(s)/\partial s_j = \sum_{r=j}^{m} k_jX(k_1x_1+\ldots+k_rx_r),\ j=\overline{1,m},$$

де $X(y) = -\omega'(y)/\omega(y)$. Позначимо через $\psi(\lambda)$ функцію, обернену до функції $X(y)$. Тоді

$$x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1} = X(k_1x_1+\ldots+k_jx_j),\ j=\overline{1,m},\ x_{m+1}:=0.$$ Звідси

$$k_1x_1+\ldots+k_jx_j = \psi(x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1}),\ j=\overline{1,m},$$ де

$$s_j = k_j^{-1}\left[\psi(x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1}) - \psi(x_{j-1}/k_{j-1} - x_j/k_j)\right],\ j=1,m.$$

Далі,

$$u(s(x)) = \prod_{j=1}^{m} k_j\omega(\psi(x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1})),$$

$$\varphi_n(z,x) = (u(s(x)))^{-n}(u(s(x)+z/n))^n = (u(s(x)))^{-n} \times$$

$$\times \prod_{t=1}^{m} k_t\left[\omega(k_1s_1(x)+\ldots+k_ts_t(x)+k_1z_1/n+\ldots k_tz_t/n)\right]^n +$$

$$+ (u(s(x)))^{-n}n^m\exp(-ns(x)t')\prod_{t=1}^{m} p(t_t/k_t - t_{t+1}/k_{t+1}).$$

Застосовуючи теорему про структуру, дістанемо оператори

$$L_n^{\angle}(f;x) = n^m\left[\prod_{j=1}^{m} k_j\omega(\psi(x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1}))\right]^{-n} \int_{\mathbb{R}^m} f(t_1,\ldots,t_m) \times$$

$$\times \exp\left[-n\left[(\psi(x_1/k_1-x_2/k_2))t_1/k_1+\ldots+(\psi(x_m/k_m)t_m/k_m -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \psi(x_{m-1}/k_{m-1} - x_m/k_m))\right]\right]\left[\prod_{t=1}^{m} p(t_t/k_t - t_{t+1}/k_{t+1})\right]dt_1\ldots dt_m.$$

П р и к л а д 6. Нехай $p(t) = \eta(t)$. Ця щільність породжує оператори

$$F_n^{\angle}(f;x_1,\ldots,x_m) = n^{mn}(\Gamma(n))^{-n}\left[\prod_{j=1}^{m} k_j(x_j/k_j - x_{j+1}/k_{j+1})\right]^{-n} \times$$

$$\times \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty f(t_1,\ldots,t_m)\exp\left[-n(x_1/k_1-x_2/k_2)^{-1}t_1/k_1 -\right.$$

17*

$$- n((x_2/k_2 - x_3/k_3)^{-1} - (x_1/k_1 - x_2/k_2)^{-1})t_2/k_2 - \dots -$$

$$- n(x_m/k_m)^{-1} t_m/k_m \Big] \Big[\prod_{i=1}^{m} (t_i/k_i - t_{i+1}/k_{i+1})\Big]^{n-1} dt_1 \dots dt_m.$$

Для цих операторів

$$\mathfrak{X} = ((x_1, \dots, x_m):\ x_1/k_1 > \dots > x_m/k_m > 0),$$

$$V(x_1, \dots, x_m) = \left[\sum_{r=i}^{m} k_i k_j (x_r/k_r - x_{r+1}/k_{r+1})^2,\ j \le i \right],\ i,j = \overline{1,m}.$$

Якщо взяти $m=1$, $k_1=1$, то дістанемо одновимірні оператори Феллера-Уіддера.

Аналогічно можна було б знайти багатовимірні узагальнення і інших операторів з п.1.

п.3. Багатовимірні оператори Гаусса-Вейєрштрасса. Нехай $V = (\widehat{v_{ij}})$, $i,j = \overline{1,m}$, - довільна симетрична додатно визначена матриця.

Розглянемо міру $\mu(dt) = \exp(-tV^{-1}t'/2)dt$. Перетворенням Лапласа міри μ є функція (див. співвідношення (2.4.19))

$u(z) = (2\pi)^{m/2}\sqrt{\det V}\exp(zVz'/2)$, тому така міра породжує оператори

$\mathbb{W}_n(f;x) = (n/(2\pi))^{m/2}(\det V)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^m} f(t)\exp(-n(t-x)V^{-1}(t-x)'/2)dt$. Для цих операторів коваріаційна характеристика співпадає з матрицею V.

§ 4. Про одну задачу Тихомирова

В 1991 році на семінарі в МГУ В.М. Тихомиров сформулював таку задачу:

знайти аналог поліномів Бернштейна, використовуючи не міру Бернуллі, а міру, зосереджену більше, ніж в двох точках.

Нагадаємо (див.§3 глави 1), що одновимірні многочлени Бернштейна породжуються мірою $\delta(0) + \delta(1)$. За формулою 1.3.1 легко побудувати оператори, що породжуються мірою $\delta(0) + 2\alpha\delta(1/2) + \delta(1)$, де α довільне додатне число. Ці оператори матимуть вигляд

$L_n(f;x;\alpha)=$

$$= \left(\frac{2x(1-x)}{\alpha + \sqrt{1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2}}\right)^n \sum_{k=-n}^{n} f\left(\frac{k+n}{2n}\right) c_{k,n} \left(\frac{\alpha(2x-1)+\sqrt{1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2}}{2(1-x)}\right)^k,$$

для них коваріація $v(x) = \dfrac{x(1-x)\sqrt{1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2}}{\alpha + \sqrt{1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2}}$, $0<x<1$.

Зауважимо, що для $\alpha=0$ ці оператори співпадають з многочленами Бернштейна. І ще одне зауваження. Як говорилося в передмові, многочлени Бернштейна

$B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathbb{M}((\xi_1+\dots+\xi_n)/n)$, де випадкові величини $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ мають розподіл Бернуллі з параметром $p=x$, $0<x\le 1$. З виразу для $L_n(f;x;\alpha)$ видно, що $L_n(f;x;\alpha) = \mathbb{M}((\xi_1+\dots+\xi_n)/n)$, де випадкові величини $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ мають такий самий розподіл, як і розподіл випадкової величини ξ, заданий таблицею:

ξ	p
0	$\dfrac{4x(1-x)^2}{(\alpha+(1+(\alpha^2-1)(2x-1))^{1/2})(\alpha(2x-1)+(1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2)^{1/2})}$
0.5	$4\alpha(x(1-x)(\alpha+(1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2)^{1/2})^{-1}$
1	$\dfrac{x(\alpha(2x-1)+(1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2)^{1/2})}{(\alpha+(1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2)^{1/2}}$

Наведемо аналог одержаних операторів в m-мірному випадку.

Нехай T-m-мірний симплекс з вершинами в точках $a_0, a_1, \dots, a_m$, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ -барицентричні координати точки x відносно вершин симплекса T. Позначимо через $r_\alpha(x)$ величину $\sqrt{1+(\alpha^2-1)(1-2\beta_0)^2}$. Матимемо оператори $L_n(f;x;\alpha)=$

$$=\left(\frac{2\beta_0(1-\beta_0)}{\alpha+r_\alpha(x)}\right)^n \sum_{0\leqslant|k|\leqslant 2n} f\left(\sum_{l=0}^{m}\frac{k_l}{2n}a_l\right) c_{|k|-n,n}\cdot\frac{|k|!}{k!}\beta_1^{k_1}\dots\beta_m^{k_m}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha(1-2\beta)+r_\alpha(x)}{2(1-\beta_0)\beta_0}\right)^{|k|-n}, |k|=k_1+\dots+k_m,\ x\in T.$$

Ці оператори належать класу $\mathbb{B}$ з коваріаційною матрицею

$$V(x)=A\begin{bmatrix}\beta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_m\end{bmatrix}A' - (x-a_0)'(x-a_0)\frac{1-\beta_0+v(1-\beta_0)}{(1-\beta_0)^2}.$$

Тепер розглянемо більш загальну схему. Нехай в $\mathbb{R}^m$ задана скінченна множина точок ξ_k, лінійна оболонка яких має ненульовий об"єм.

$$\xi_k = (\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_m}),\ k=(k_1,\dots k_m)\in\mathbb{K}\subset\mathbb{N}^m.$$

Припишемо цим точкам маси $m_k = a_k y^{\xi_k}$, де $a_k=a_{k_1,\dots,k_m}$ - набір додатних чисел, $y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m_+$, $y^{\xi_k}=y_1^{\xi_{k_1}}\dots y_m^{\xi_{k_m}}$.

Позначимо через $x=x(y)$ центр мас цієї системи точок, тобто

$$x_l = \sum_{k\in\mathbb{K}}\xi_{k_l}a_k y^{\xi_k}/\omega(y),\ l=1,2,\dots,m, \tag{1}$$

де $\omega(y)$-маса всіх цих точок, тобто $\omega(y)=\sum_{k\in\mathbb{K}} m_k = \sum_{k\in\mathbb{K}} a_k y^{\xi_k}$.

Оскільки числа $\lambda_k=a_k y^{\xi_k}/\omega(y)$ невід"ємні і їх сума дорівнює одиниці, то область значень $\mathbb{X}$ відображення (1) $x\colon \mathbb{F}^m \Rightarrow \mathbb{X}$ є лінійною оболонкою точок ξ_k, тобто деякий опуклий многогранник.

Відображення $x(y)$ взаємно однозачне, бо матриця dx/dy додатно визначена для всякого $x\in\mathbb{R}^m$ і відображення $x(y)$ неперервно диференційовне в $\mathbb{R}^m$.

Відображення обернене до відображення (1), позначимо через $y(x,\alpha,\xi)$. Тоді за формулою 1.3.1 будується оператор

$$L(f;x;\alpha;\xi):=(\omega(y(x,\alpha,\xi)))^{-1}\sum_{k\in\mathbb{K}} f(\xi_k)a_k(y(x,\alpha,\xi))^{\xi_k},$$

який належить до класу $\mathbb{B}$ і до того ж

$$V(x)=(v_{lj}(x))=\left(y_j\partial x_l/\partial y_j|_{y=y(x,\alpha,\xi)}\right),\ x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{X}.$$

Одержані оператори розв"язують задачу Тихомирова.

Через $L_n(f;x;\alpha;\xi)$ позначатимемо n-згортку оператора L. Якщо f непрервна на $\mathbb{X}$, то n-згортка, коли $n\to\infty$, прямує до $f(x)$.

П р и к л а д 1. Нехай $r\in\mathbb{N}$ і

$$\omega(y)=1+\left[y_1^{1/r}+\dots+y_m^{1/r}\right]^r.$$

Ця функція породжує оператори

$$B^L_{n,r}(f;x)=\sum_{0\leqslant|l|\leqslant nr} f\left(\frac{l}{rn}\right)\binom{n}{|l|/r}\frac{|l|!}{l!}x^l(1-|x|)^{n-|l|/r}|x|^{|l|(1/r-1)}.$$

Для них коваріаційна матриця складається з таких елементів:

$$v_{lj}(x)=\frac{1}{r}\left[\delta_{lj}x_l + x_l x_j\left(\frac{r-1}{|x|}-r\right)\right].$$

В усіх формулах $|x|=x_1+\dots+x_m$, $l=(l_1,\dots,l_m)$, $|l|=l_1+\dots l_m$.
Для $r=1$ дістанемо багатовимірні поліноми Бернштейна, для $r\geqslant 2$ це нові оператори.

П р и к л а д 2. Нехай $\alpha > 0$. Функція

$$\omega(y) = 1+2\alpha(y_1^{1/2}+\ldots+y_m^{1/2})+(y_1^{1/2}+\ldots+y_m^{1/2})^2$$

породжує оператори

$$B_n^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha) = \left[\frac{2(1-|x|}{\alpha+\rho_\alpha(|x|)}\right]^n \times$$

$$\times \sum_{0\leqslant|l|\leqslant 2n} f\left(\frac{l}{2n}\right)\mathbb{C}_{|l|,n}(\alpha)\frac{|l|!}{l!}\, x^l\left[\frac{\alpha(2|x|-1)+\rho_\alpha(|x|)}{2|x|(1-|x|)}\right]^{|l|-n},$$

де $\mathbb{C}_{l,n}(\alpha):= n! \sum\limits_{\left\{\substack{k_2+2k_3=l\\ 0\leqslant k_2+k_3\leqslant n}\right.} \dfrac{(2\alpha)^{k_2}}{(n-k_2-k_3)!k_2!k_3!}$,

$\rho_\alpha(x):=(1+(\alpha^2-1)(2x-1)^2)^{1/2}$.

Для них коваріаційна матриця складається з таких елементів:

$$v_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij}x_i - \frac{x_i x_j}{|x|}\,\frac{\alpha+(2|x|-1)\rho_\alpha(|x|)}{\alpha+\rho_\alpha(|x|)}\right],\ x \in \mathbb{X}.$$

П р и к л а д 3 (узагальнення пр.1 і 2).

Нехай $r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ і

$$\Omega(y) = 1+2\alpha\left[y_1^{1/(2r)}+\ldots+y_m^{1/(2r)}\right]^r + \left[y_1^{1/(2r)}+\ldots+y_m^{1/(2r)}\right]^{2r}.$$

Ця функція породжує оператори

$$B_{n,r}^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha) =$$

$$=\left[\frac{4(1-|x|)^2|x|}{(\alpha+\rho_\alpha(|x|))(\alpha(2|x|-1)+\rho_\alpha(|x|))}\right]^n \times$$

$$\times \sum_{0\leqslant|l|\leqslant 2nr} f\left(\frac{l}{2rn}\right)\mathbb{C}_{|l|/r,n}(\alpha)\frac{|l|!}{l!}\, x^l\left[\frac{\alpha(2|x|-1)+\rho_\alpha(|x|)}{2|x|^r(1-|x|)}\right]^{|l|/r},$$

$x\in\mathbb{T}$ – одиничний координатний симплекс.

Для операторів $B_{n,r}^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha)$ коваріаційна матриця має такі елементи:

$$v_{ij}(x)= \frac{1}{2r}\left[\delta_{ij}x_i-2rx_ix_j + \frac{x_ix_j}{|x|}\,\frac{\alpha(2r|x|-1)+(2r-1)\rho_\alpha(|x|)}{\alpha+\rho_\alpha(|x|)}\right],\ i,j=\overline{1,m}$$

$x \in \mathbb{X}$.

Зокрема, $B_{n,r}^{\mathsf{L}}(f;x;0) = B_{n,2r}^{\mathsf{L}}(f;x)$; $B_{n,1}^{\mathsf{L}}(f;x)=B_n^{\mathsf{L}}(f;x)$;

$B_{n,1}^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha) = B_n^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha)$; $B_n^{\mathsf{L}}(f;x;0)=B_{n,2}^{\mathsf{L}}(f;x)$.

Якщо $m=1$, то $B_{n,r}^{\mathsf{L}}(f;x;\alpha) = B_n(f;x;\alpha)$ і не залежать від r; а якщо $\alpha=0$, то $B_n(f;x;0) = B_n(f;x)$.

§ 5. Поліпшування збіжності

Оператори $L_n(f;x)$, а особливо многочлени $B_n^{\Delta}(f;x)$ і $B_n^{\square}(f;x)$, можуть застосовуватися в обчислювальній математиці для наближення функцій та їх похідних.

Але, як видно з теореми 4.3.1, функцію $f(x)$ (якщо вона не є розв"язком рівняння $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m} v_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$) за допомогою операторів $L_n(f;x)$ неможливо наблизити краще, ніж з швидкістю порядка n^{-1}, тому практично так можна наближувати негладкі функції. Але ще С.Н.Бернштейн [11, с. 158] вказав на можливість побудови таких многочленів на основі многочленів $B_n(f;x)$, які наближають досить гладкі функції з швидкістю n^{-2}. Пізніше, в одновимірному випадку пропонувались і інші методи побудови многочленів (на основі многочлені. $B_n(f;x)$), які краще наближують функцію f, ніж многочлени $B_n(f;x)$ (див., наприклад, [85, 90]).

Використовуючи асимптотичні розклади для операторів $L_n(f;x)$, одержані в попередніх главах, можна і в нашому випадку будувати оператори (правда, відмовившись від додатності), які здійснюють більш високий порядок наближення, ніж вихідні оператори. Обмежимося трьома прикладами.

П р и к л а д 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^4$. Покладемо

$$L_{n,2}(f;x) := L_n(f;x) - n^{-1} \sum_{1 \le i,j \le m} \frac{v_{ij}(x)}{(e_i+e_j)!} L_n\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}; x\right].$$

Тоді $$\lim_{n\to\infty} n^2(L_{n,2}(f;x) - f(x)) =$$

$$= \sum_{1 \le i,j,p,q \le m} \left[\frac{v_{ij}(x)}{(e_i+e_p+e_q)!} \frac{\partial v_{pq}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_p \partial x_q} + \left[\frac{3}{(e_i+e_j+e_p+e_q)!} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{(e_i+e_j)!(e_p+e_q)!}\right] v_{ij}(x) v_{pq}(x) \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_p \partial x_q} \right]. \qquad (1)$$

Д о в е д е н н я. Внаслідок теореми 4.3.3

$$L_n(f;x) = f(x) + \sum_{2 \le |k| \le 4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) + o(n^{-2}),\ n\to\infty,$$

$$L_n\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}; x\right] = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{|k|=2} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_x^{(k)} S_{k,n}(x) +$$

$+ o(n^{-2})$, $n\to\infty$.

Якщо $k = e_p+e_q$,

$$S_{k,n}(x) = n^{-1} v_{pq}(x) \qquad (2)$$

Якщо $k = e_i+e_p+e_q$,

$$S_{k,n}(x) = n^{-2} \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x) \frac{\partial v_{pq}(x)}{\partial x_j} \qquad (3)$$

(на основі співвідношень (1.8.3) і (1.8.5)). Якщо $k =$ $e_i+e_j+e_p+e_q$, то згідно з співвідношенням (1.8.6) $S_{k,n}(x) =$

$$= n^{-2}(v_{ij}(x)v_{pq}(x)+v_{ip}(x)v_{jq}(x)+v_{iq}(x)v_{jp}(x))+o(n^{-2}),\ n\to\infty. \qquad (4)$$

Тоді $L_{n,2}(f;x) - f(x) =$

$$= \sum_{|k|=3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) + \sum_{|k|=4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) -$$

$$- n^{-1} \sum_{1 \le i,j \le m} \frac{v_{ij}(x)}{(e_i+e_j)!} \sum_{|k|=2} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_x^{(k)} S_{k,n}(x) +$$

$+ o(n^{-2})$, $n\to\infty$. Звідси, враховуючи (2), (3), (4), дістанемо (1).

Зокрема, в одновимірному випадку ($m = 1$)

$$\lim_{n\to\infty} n^2(L_{n,2}(f;x) - f(x)) =$$

$$= \frac{1}{6} V(x)V'(x) f^{(3)}(x) - \frac{1}{8}(V(x))^2 f^{(4)}(x).$$

Якщо $L_n(f;x) = B_n(f;x)$, то $V(x) = x(1-x)$ і

$$\lim_{n\to\infty} n^2(B_{n,2}(f;x) - f(x)) =$$

$$= \frac{1}{6} x(1-x)(1-2x) f'''(x) - \frac{1}{8} x^2(1-x)^2 f^{(4)}(x),$$

що дає результат Бернштейна [11, с.158].

П р и к л а д 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^4$. Покладемо

$$\mathcal{G}_{n,2}(f;x) := L_n(f;x) - n^{-1} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \frac{v_{ij}(x)}{(e_i+e_j)!} \frac{\partial^2 L_n(f;x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\mathcal{G}_{n,2}(f;x) - f(x)) =$

$$= \sum_{1\leqslant i,j,p,q\leqslant m} \left[\left[\frac{1}{(e_i+e_p+e_q)!} \frac{\partial v_{pq}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_p \partial x_q} + \frac{3}{(e_i+e_j+e_p+e_q)!} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times v_{pq}(x) \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_p \partial x_q} - \frac{1}{2(e_i+e_j)!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[v_{pq}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q}\right]\right]\right] v_{ij}(x). \tag{5}$$

Дійсно, внаслідок теореми 4.3.1

$$\frac{\partial^2 L_n(f;x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + (2n)^{-1} \sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \left[v_{pq}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_q}\right] +$$

$+ o(1/n)$, $n \to \infty$, тому

$$\mathcal{G}_{n,2}(f;x) - f(x) = \sum_{3\leqslant |k|\leqslant 4} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) -$$

$$- \frac{1}{2} n^{-2} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \frac{v_{ij}(x)}{(e_i+e_j)!} \sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[v_{pq}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_q}\right] +$$

$+ o(n^{-2})$, $n \to \infty$. Звідси, використовуючи (3) і (4), дістанемо (5).

Зокрема, в одновимірному випадку ($m=1$)

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\mathcal{G}_{n,2}(f,x) - f(x)) = -\frac{1}{4} V(x) V''(x) f''(x) -$$

$$- \frac{1}{3} V(x) V'(x) f'''(x) - \frac{1}{8} (V(x))^2 f^{(4)}(x).$$

Якщо $L_n(f;x) = B_n(f;x)$, то дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty} n^2(B_n(f,x) - (2n)^{-1} x(1-x) B_n''(f;x) - f(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} x(1-x) f''(x) - \frac{1}{3} x(1-x)(1-2x) f'''(x) - \frac{1}{8} x^2 (1-x)^2 f^{(4)}(x),$$

а це результат з роботи [87].

П р и к л а д 3. Нехай $m=1$, $f \in \mathbb{E}^6$. Покладемо

$$L_{n,3}(f;x) := L_n(f;x) - \frac{1}{2n} V(x)\left[1 - \frac{1}{2n} V''(x)\right] L_n''(f;x) +$$

$$+ \frac{1}{3} n^{-2} V(x) V'(x) L_n'''(f;x) + \frac{1}{8} n^{-2} (V(x))^2 L_n^{(4)}(f;x).$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} n^3(L_{n,3}(f,x) - f(x)) = \frac{1}{2} V(x)\left[-f''(x) + 2V'(x) f'''(x) -\right.$$

$$- \frac{1}{2}((V'(x))^2 + V(x)V''(x)) f^{(4)}(x) + \frac{1}{3} V(x) V''(x) f^{(5)}(x) -$$

$$\left.- \frac{1}{24} (V(x))^2 f^{(6)}(x)\right].$$

"Поліпшені" оператори можна використати не тільки для наближення функцій, але і для розв"язування диференціальних і інтегральних рівнянь, оскільки це робиться за допомогою сплайнів.

Наприклад, в одновимірному випадку многочлени Хуана

$$B_n(f;x) - (2n)^{-1} x(1-x) B_n''(f;x)$$

застосовувались для розв"язування рівнянь Фредгольма другого роду, [20].

Більш детально задачі, зв"язані з поліпшуванням збіжності послідовностей операторів типу $\mathbb{B}$, дослідив Д.А.Найко [61, 62].

Глава 6. РОЗПОДІЛИ ТИПУ $\mathbb{B}$

В §1 цієї глави дається імовірнісна інтерпретація додатних лінійних операторів типу $\mathbb{B}$; в §2 — визначення розподілів типу $\mathbb{B}$, вивчаються властивості цих розподілів. В § 3 знайдені рекурентні співвідношення для початкових моментів, центральних моментів, семиінваріантів. Наведено ряд конкретних прикладів.

В § 4 знайдені оцінки імовірностей великих відхилень. В § 5 розглядаються деякі статистичні застосування: одержано декілька результатів, зв"язаних з оцінюванням функцій від незалежних параметрів розподілів типу $\mathbb{B}$ та оцінок типу нерівностей Рао-Краммера.

§ 1. Імовірнісна інтерпретація

Нехай задана послідовність д.л.о. типу $\mathbb{B}$:

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)Q_n(x)(dt).$$

Оскільки $L_n(1;x) = 1$, то міра $Q_n(x)$ – імовірнісна, що залежить від параметра $x \in \mathbb{X}$. В зв"язку з цим багато результатів работи можна сформулювати на імовірнісній мові та застосувати до деяких питань імовірнісних розподілів.

Розглянемо імовірнісний простір $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m, Q)$, де $\mathfrak{B}^m$ – σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}^m$; Q – імовірнісна міра на $\mathfrak{B}^m$. Буквою ξ (з індексами) позначатимемо такий випадковий вектор, що $\xi(t)=t$, $t \in \mathbb{R}^m$.
Тоді міра Q є розподілом вектора ξ, що символічно записуватимемо за допомогою знака $\prec$ так: $\xi \prec Q$.

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів і $\xi_1 \prec Q(x) := Q_1(x)$. Тоді $\mathbb{P}(\xi_1 \in B) = Q(x)(B)$ $\forall B \in \mathfrak{B}^m$, $\mathbb{M}\xi_1 = x$, $\operatorname{cov}\xi_1 = V(x) = W^{-1}(x)$.

Нехай, далі, $\zeta_n = (\xi_1 + \dots + \xi_m)/n$. Тоді справедливий закон великих чисел (У формі Хінчина): послідовність випадкових векторів (ζ_n) збігається за імовірністю до вектора x. Цей результат можна виразити в іншій, еквівалентній формі: для довільної обмеженої і неперервної на $\mathbb{R}^m$ функції f $\mathbb{M}f(\zeta_n) \to f(x)$, коли $n \to \infty$.
Оскільки випадковий вектор $\zeta_n \prec q_n(x) \div (\varphi(z/n, x))^n$, де $\varphi(z,x)$ – перетворення Лапласа міри $Q(x)$, то

$$\mathbb{M}f(\zeta_n) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)Q_n(x)(dt) = L_n(f;x).$$

Отже, оператор $L_n(f;x)$ – це математичне сподівання функції від випадкового вектора ζ_n і це математичне сподівання є функцією від $x = (x_1, \dots, x_m)$, визначеною на множині $\mathbb{X}$.

§ 2. Властивості та приклади розподілів типу $\mathbb{B}$

Якщо $(L_n) \in \mathbb{B}$, то $\dfrac{d}{dx} L_n(f;x) = nL_n((t-x)f(t);x)V^{-1}(x)$.

Покладаючи $f(t) = \exp(-zt')$, взявши $n=1$, і, враховуючи те, що $L_1(\exp(-zt');x) = \varphi(z,x)$, з останнього співвідношення дістанемо, що функція $\varphi(z,x)$ – перетворення Лапласа міри $Q(x) = Q_1(x)$ – задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}V(x) + x\varphi = 0, \quad \varphi(0,x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{X}. \qquad (1)$$

О з н а ч е н н я 1. Будемо говорити, що сім"я розподілів $(Q(x),\ x \in \mathbb{X})$ належить до класу $\mathbb{B}$, якщо існує функція $\varphi(z,x)$ – перетворення Лапласа міри $Q(x)$, і ця функція задовольняє рівняння (1).

Самі розподіли $Q(x)$ називатимемо розподілами типу $\mathbb{B}$.

З теореми 1.3.1 негайно випливає такий критерій належності сім"ї розподілів до класу $\mathbb{B}$:

Для того щоб сім"я розподілів $(Q(x),\ x \in \mathfrak{X})$ належала до класу $\mathbb{B}$, необхідно і достатньо, щоб існувала міра μ, яка домінує розподіли $Q(x)$ так, що

$$Q(x)(dt) = (u(s(x)))^{-1}\exp(-s(x)t')\mu(dt), \qquad (2)$$

де $u(z)$ – перетворення Лапласа міри μ, $s(x)$ –s-характеристика міри μ.

На практиці належність сім"ї розподілів $(Q(x),\ x \in \mathfrak{X})$ до класу $\mathbb{B}$ встановлюється перевіркою співвідношення (1).

Те, що сім"я $(Q(x),\ x \in \mathfrak{X})$ належить до класу $\mathbb{B}$, символічно записуватимемо так: $Q(x) \in \mathbb{B}(x; V(x))$.

Якщо $\xi \prec Q(x)$, то також писатимемо: $\xi \in \mathbb{B}(x;\ V(x))$.

Багато відомих сімей розподілів належать до класу $\mathbb{B}$.

П р и к л а д 1. Біноміальний розподіл $B_p^n \in \mathbb{B}(np;\ np(1-p))$.

П р и к л а д 2. Розподіл Пуассона $\Pi_\lambda \in \mathbb{B}(\lambda;\ \lambda)$.

П р и к л а д 3. Негативний біноміальний розподіл

$$NB_p^n \in \mathbb{B}(n(1-p)p^{-1};\ np^{-2}(1-p)).$$

П р и к л а д 4. Нормальний розподіл $\Phi_{a,\sigma^2} \in \mathbb{B}(a,\ \sigma^2)$.

П р и к л а д 5. Гама-розподіл $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathbb{B}(\lambda/\alpha,\ \lambda/\alpha^2)$, (параметр λ – фіксується). Зокрема, показниковий розподіл $\Gamma_{\alpha,1} \in \mathbb{B}(\alpha^{-1},\ \alpha^{-2})$.

П р и к л а д 6. Багатовимірний нормальний розподіл $\Phi_{a,\sigma^2} \in \mathbb{B}(a,\ \sigma^2)$, де $a = (a_1,\dots,a_m)$, $\sigma^2 = (\sigma_{ij})$, $i,j = \overline{1,m}$.

П р и к л а д 7. Поліноміальний розподіл $B^n_{(p_1,\dots,p_m)} \in \mathbb{B}(n(p_1,\dots,p_m);\ (np_i(\delta_{ij}-p_j)),\ i,j = \overline{1,m})$.

П р и к л а д 3. Негативний поліноміальний розподіл [99, с.292]

$$NB^n_{(P_1,\dots,P_m)} \in \mathbb{B}(n(P_1,\dots,P_m);\ (nP_i(\delta_{ij}+P_j)),\ i,j = \overline{1,m}).$$

П р и к л а д 9. Розглянемо багатовимірний логарифмічний розподіл $\Lambda_{(\theta_1,\dots,\theta_m)}$ [99, С.303], який визначається так: нехай $k = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{N}^m$, $k_1+\dots+k_m \geqslant 1$. Тоді $\xi \in \Lambda_{(\theta_1,\dots,\theta_m)} \Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(\xi = (k_1,\dots,k_m)) = -(k_1+\dots+k_m-1)(k_1!\dots k_m!)^{-1}\theta_1^{k_1}\dots\theta_m^{k_m} \times$$

$$\times(\log(1-\theta_1-\dots-\theta_m))^{-1},\ 0 < \theta_i < 1, \theta_1+\dots+\theta_m < 1.$$

Ця сім"я розподілів належить до класу $\mathbb{B}$:

$$\Lambda_{(\theta_1,\dots,\theta_m)} \in \mathbb{B}\left(-\frac{(\theta_1,\dots,\theta_m)}{(1-|\theta|)\log(1-|\theta|)};\ \left(-\frac{\theta_i}{(1-|\theta|)\log(1-|\theta|}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\delta_{ij}+\frac{\theta_j(1+\log(1-|\theta|))}{(1-|\theta|)\log(1-|\theta|)}\right)\right)\right),\ i,j = 1,m,\ |\theta| = \theta_1+\dots+\theta_m.$$

В одновимірному випадку:

$$\Lambda_\theta \in \mathbb{B}\left(-\frac{\theta}{(1-\theta)\log(1-\theta)};\ -\frac{\theta}{(1-\theta)^2\log(1-\theta)}\left(1+\frac{\theta}{\log(1-\theta)}\right)\right).$$

П р и к л а д 10. Визначимо багатовимірний розподіл блукань $\mathfrak{B}^n_{(p_1,\dots,p_m)}$.

Нехай $k \in \mathbb{N}^m$, $|k| = k_1+\dots k_m$, $0.5 < p_i < 1$, $i = \overline{1,m}$, $p = \frac{1}{2}\left(1+\left(\sum_{i=1}^{m}(2p_i-1)^{-1}\right)^{-1}\right)$. Тоді $\xi \prec \mathfrak{B}^n_{(p_1,\dots,p_m)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k)=$

$$= \frac{n(|k|-1)!}{k!}\binom{(|k|+n)/2}{|k|}p^{|k|+n}(1-p)^{|k|-n}\prod_{t=1}^{m}\left(\frac{2p-1}{2p_t-1}\right)^{k_t}.$$

Маємо:

$$\mathfrak{B}^n_{(p_1,\ldots,p_m)} \in \mathbb{B}\Big[n\big((2p_1-1)^{-1},\ldots,(2p_m-1)^{-1}\big);\ \Big[n(2p_t-1)^{-1}\times$$

$$\times\Big(\delta_{tj} - (2p_j-1)^{-1}(2(2p-1) - (2p-1)^{-1})\Big),\ t,j = \overline{1,m}\Big].$$

В одновимірному випадку:

$$\mathfrak{B}^n_{p} \in \mathbb{B}\Big[n(2p-1)^{-1};\ n(2p-1)^{-1}((2p_t-1)^{-2}-1)\Big].$$

П р и к л а д 11. Визначимо багатовимірний розподіл Бореля-Таннера $BT^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$. Нехай $k \in \mathbb{N}^m$, $0 < \alpha_t < 1$, $t=\overline{1,m}$;

$\alpha = 1 - \Big[\sum_{t=1}^{m}(1-\alpha_t)^{-1}\Big]^{-1}$. Тоді $\xi \prec BT^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) =$

$$= \frac{|k|!}{k!(|k|-n)!}n|k|^{|k|-n-1}\prod_{t=1}^{m}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha_t}\right)^{k_t}\exp(-|k|\alpha)\alpha^{|k|-n}.$$

Матимемо:

$$BT^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} \in \mathbb{B}\Big[n((1-\alpha_1)^{-1},\ldots,(1-\alpha_m)^{-1});\ \Big[n((1-\alpha_t)^{-1}(\delta_{tj}-$$

$$- ((1-\alpha_j)^{-1}(2-((1-\alpha)^{-1}-\alpha))\Big],\ t,j = \overline{1,m}\Big].$$

В одновимірному випадку

$$БТ^n_\alpha \in \mathbb{B}\left[\frac{n}{1-\alpha};\ \frac{n\alpha}{(1-\alpha)^3}\right].$$

До класу $\mathbb{B}$ належить також сім"я розподілів Ноака [111] і так звані натуральні експоненціальні сім"ї з квадратичною дисперсією (NEF-QVF розподіли [109]).

Багато інших конкретних прикладів розподілів типу $\mathbb{B}$ можна дістати, якщо використати приклади операторів $L_n(f;x)$ з попередніх

параграфів.

Т в е р д ж е н н я 1. Нехай $a = (a_{tj})$, $t,j = \overline{1,m}$ – довільна невироджена матриця, $b = (b_1,\ldots,b_m)$ – довільний вектор. Тоді, коли $\xi \in \mathbb{B}(x, V(x))$, то

$$\eta = a\xi + b \in \mathbb{B}(ax+b;\ aV(x)a').$$

Д о в е д е н н я. Для доведення досить впевнитися в справедливості рівності

$$\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial y}V_\eta(y) + y\varphi_\eta = 0,$$

де $y=ax+b$, $\varphi_\eta = \varphi_\eta(z,y)$ – перетворення Лапласа розподілу випадкового вектора η, $V_\eta(y) = \mathrm{cov}\,\eta$. Перевірку вказаної рівності проведемо в координатній формі.

Зауважимо, що $\mathbb{M}\eta = y = ax+b$, а звідси

$y_j = \sum_{k=1}^{m}a_{jk}x_k+b_j$, $j=\overline{1,m}$; $\mathrm{cov}\,\eta = \mathrm{cov}(a\xi+b) = aV(x)a'$, тому

$$V_\eta = \Big[\sum_{k,r=1}^{m} a_{tr}a_{jr}v_{rk}(x)\Big],\ t,j = \overline{1,m},\ \varphi_\eta = \mathbb{M}\exp(-z(a\xi+b)') =$$

$$= \exp(-zb')\varphi(az,x).$$

Покладемо $w = az$, $w = (w_1,\ldots, w_m)$. Тоді

$$\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial z_t} + \sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{k,r=1}^{m} a_{tr}a_{jr}v_{rk}(x)\Big]\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial y_j} + y_j\varphi_\eta =$$

$$= \exp(-zb')\Big[\sum_{r=1}^{m}a_{rt}\frac{\partial\varphi(w,x)}{\partial w_r} + \sum_{q=1}^{m}\frac{\partial\varphi(w,x)}{\partial x_q}\sum_{k,r=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{m}a^{(-1)}_{qj}a_{jk}\Big]\times$$

$$\times\, a_{tr}v_{rk}(x) + \sum_{r=1}^{m} a_{tr}x_r\varphi(w,x)\Big],$$ де $a_{qj}^{(-1)}$-елементи матриці a^{-1}.

Оскільки $\sum_{j=1}^{m} a_{qj}^{(-1)} a_{jk} = \delta_{qk}$, то дістанемо

$$\exp(-zb')\sum_{r=1}^{m} a_{tr}\left[\frac{\partial\varphi(w,x)}{\partial w_r} + \sum_{q=1}^{m}\frac{\partial\varphi(w,x)}{\partial x_q}v_{rq}(x) + x_r\varphi\right] = 0,$$

що і потрібно було довести .

Т в е р д ж е н н я 2. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторов і $\xi_1 \in \mathbb{B}(x;\ V(x))$. Тоді

$$\eta_n = \xi_1+\ldots+\xi_n \in \mathbb{B}(nx;\ nV(x)).$$

Справедливість цього твердження випливає з того, що

$$\varphi_{\eta_n}(z,x) = (\varphi(z,x))^n.$$

Н а с л і д о к 1.

$$\zeta_n := (\xi_1+\ldots+\xi_n)/n \in \mathbb{B}(x;\ n^{-1}V(x)).$$

Т в е р д ж е н н я 3. Якщо $Q(x) \in \mathbb{B}(x;\ V(x))$, то $I(x) = V^{-1}(x)$, де $I(x)$-матриця інформації Фішера сім"ї $(Q(x),\ x \in \mathfrak{X})$.

Д о в е д е н н я. Нехай міра μ домінує розподіли $Q(x)$. Тоді

$$(dQ(x)/d\mu)(t) = p(t,x) = \exp(-s(x)t' - \ln u(s(x))).$$

Позначимо через $q_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,m}$, - елементи матриці $I(x)$ і нехай $\xi \prec Q(x)$. Тоді

$$q_{ij}(x) = \mathbb{M}\left[\frac{\partial\ln p(\xi,x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial\ln p(\xi,x)}{\partial x_j}\right] = \mathbb{M}\left[(p(\xi,x))^{-2}\,\frac{\partial p(\xi,x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial p(\xi,x)}{\partial x_j}\right],$$

і якщо $w := s(x)t' + \ln u(s(x))$, то як встановлено при доведенні наслідку 3.6.1

$$(q_{ij}(x)) = \left[L_1\left[e^{2w}(e^{-w})_x^{(e_i)}\,(e^{-w})_x^{(e_j)};\ x\right] = w_{ij}(x)\right] = W(x) =$$
$$= V^{-1}(x),$$ що і потрібно було довести.

§ 3. Обчислення моментів і семіінваріантів

Т е о р е м а 1. Нехай $Q(x) \in \mathbb{B}(x;\ V(x))$, $\alpha_k = \alpha_k(x)$ - початкові моменти порядку $k = (k_1,\ldots,k_m)$ розподілу $Q(x)$, $\beta_k = \beta_k(x)$ - центральні моменти, $\sigma_k = \sigma_k(x)$ - семіінваріанти. Тоді $\forall k \in \mathbb{N}^m$ справедливі рекурентні співвідношення:

$$\alpha_{k+e_i} = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x)\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j} + x_i\alpha_k,\quad \alpha_{e_i} = x_i,\quad i=\overline{1,m}\ ; \qquad (3)$$

$$\beta_{k+e_i} = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x)\left[\frac{\partial\beta_k}{\partial x_j} + k_j\beta_{k-e_j}\right],\quad \beta_0 = 1,\quad \beta_{e_i} = 0,\quad i=\overline{1,m}; \qquad (4)$$

$$\sigma_{k+e_i} = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x)\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_j},\quad \sigma_{e_i} = x_i,\quad i=\overline{1,m}. \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. Перепишемо співвідношення (1) в координатній формі:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + x_i\varphi = 0,\quad i=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Оскільки $\alpha_k = (-1)^k\varphi^{(k)}(0,x)$, то диференціюючи рівність (6) k разів і покладаючи $z = 0$, дістанемо (3).

Співвідношення (4) випливають з співвідношень (1.4.3), якщо взяти $n=1$.

Для одержання співвідношень (5) зауважимо, що $\sigma_k = (-1)^k(\ln\varphi(z,x))_{z=0}^{(k)}$. Крім того, з співвідношень (1) випливає, що функція $\psi = \ln\varphi(z,x)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} V(x) + x = 0,$$ або в координатній формі

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} v_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + x_i = 0, \; i = \overline{1,m},$$

а звідси дістанемо (5).

Н а с л і д о к 2. В одновимірному випадку ($m = 1$) справедливі співвідношення:

$$\alpha_{k+1} = V(x)\frac{\partial\alpha_k}{\partial x} + x\alpha_k, \; \alpha_1 = x, \; k = 1, 2, \ldots; \qquad (7)$$

$$\beta_{k+1} = V(x)\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial x} + k\beta_{k-1}\right), \; \beta_0 = 1, \; \beta_1 = 0, \; k = 1,2,\ldots; \qquad (8)$$

$$\sigma_{k+1} = V(x)\frac{\partial\sigma_k}{\partial x}, \; \sigma_1 = x, \; k = 1, 2, \ldots . \qquad (9)$$

Одержані рекурентні співвідношення для моментів і семіінваріантів досить зручні для їх обчислення. В деяких випадках з цих співвідношень можна дістати всі моменти і семіінваріанти в явному вигляді..

Обмежимося деякими прикладами для знаходження семіінваріантів, бо є формули, які дають вирази для моментів через семіінваріанти (див., наприклад, [55]).

П р и к л а д 12. Нехай $V(x) = x(ax+b)$, a, b -довільні числа. Тоді розв"зком рівняння (9) (перевіряється безпосередньо) є функції

$$\sigma_{k+1}(x) = x(ax+b)\sum_{m=1}^{k} m!\,b^{k-m}S(k,m)(ax)^{m-1}, \; k = 1,2,\ldots, \qquad (10)$$

де $S(k,m)$-числа Стірлінга другого роду, тобто

$$S(k,m) = (m!)^{-1}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^j(m-j)^k.$$

Зокрема, покладаючи в (10) $a = -1$, $b = 1$, $x = np$, дістанемо явні формули для семіінваріантів біноміального розподілу B_p^n:

$$\sigma_{k+1} = np(1-p)\sum_{m=1}^{k} m!\,S(k,m)p^{m-1}, \; k = 1,2,\ldots; \qquad (11)$$

покладаючи $a = 1$, $b = 1$, $x = n(1-p)p^{-1}$, дістанемо явні формули для семіінваріантів негативного біноміального розподілу NB_p^n:

$$\sigma_{k+1} = np^{-2}(1-p)\sum_{m=1}^{k} m!\,S(k,m)p^{1-m}(1-p)^{m-1}, \; k = 1,2,\ldots; \qquad (12)$$

покладаючи $a = 0$, $b = 1$, $x = \lambda$, дістанемо семіінваріанти пуассонівського розподілу Π_λ:

$$\sigma_k = \lambda, \; k = 1.2,\ldots; \qquad (13)$$

покладаючи $a = \lambda^{-1}$, $b = 0$, $x = \lambda a^{-1}$, дістанемо семііваріанти гама-розподілу $\Gamma_{\lambda,a}$:

$$\sigma_k = (k-1)!\,\lambda a^{-k}. \qquad (14)$$

Співвідношення (13) і (14) були відомі (див., наприклад, [55, с.108 -109]).

П р и к л а д 13. Розглянемо випадкові блукання Бернуллі на прямій: частинка рухається вздовж осі t і в моменти $t = 1,2,\ldots$ вона з імовірністю $p > 1/2$ переміщується вліво, а з імовірністю $q = 1-p$ вправо на один крок. Нехай в початковий момент часу частинка знаходиться в точці $t = n$. Блукання закінчиться, якщо частинка попадає в початок координат. Позначимо через ξ випадкову величину - час блукання. Ця випадкова величина може приймати значення n, $n+2$, $n+4$,... з імовірностями

$$w_{nk} = \frac{n}{k}\binom{k}{(k+n)/2}p^{(k+n)/2}q^{(k-n)/2}, \ k = n,\ n+2, \dots$$ [83, с.349] .

Оскільки твірна функція цього розподілу $u(з) =$ $= \left(1-\sqrt{1-4pqз^2} \right)^n (2qз)^{-n}$, то легко перевірити, що $\xi \in \mathbb{B}\left(\frac{n}{2p-1}; \left(\frac{n}{2p-1}\right)^3 - \frac{n}{2p-1} \right)$, тому семінваріанти випадкової величини ξ задовольняють рівняння:

$$\sigma_{k+1}(x) = (x^3 n^{-2} - x)\sigma_k'(x), \ \sigma_1(x) = x, \ x = \frac{n}{2p-1}, \ k = 1, 2, \dots .$$

Безпосередньо перевіряється, що розв"язком цього рівняння є функція $\sigma_{k+2} = (x^3 n^{-2} - x)\sum\limits_{r=0}^{m} (-1)^{k+r}(2r+1)!!c_{k,r}(xn^{-1})^{2r}$,

де $\quad c_{k,r} = \sum\limits_{m=r}^{k} \left[{k \atop m} \right] 2^{m-r} S(m,r), \ k = 0, 1, 2, \dots .$

Зокрема, для $n=1$ дістанемо

$\sigma_1(x) = x, \ \sigma_2(x) = x^3 - x, \ \sigma_3 = (x^3-x)(-1+3x^2),$

$\sigma_4 = (x^3-x)(1-12x^2+15x^4), \ \sigma_5 = (x^3-x)(-1+39x^2-135x^4+105x^6),$

$\sigma_6 = (x^3-x)(1-120x^2+870x^4-1680x^6+945x^8),$

$\sigma_7 = (x^3-x)(-1+363x^2-4950x^4+17850x^6-23625x^8+135135x^{10}),$

де $x = 1/(2p-1)$.

З а у в а ж е н н я. В прикладі 2.3 були визначені оператори $\mathfrak{B}_n(f;x)$ – це не що інше, як $\mathbb{M}f(\xi/n)$, тому вони були названі операторами блукань.

П р и к л а д 14. Нехай випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ приймає значення $(\nu_1+\nu_2, \nu_2)$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, з імовірностями

$\mathbb{P}(\xi_1 = \nu_1+\nu_2, \xi_2 = \nu_2) = \exp(-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)^{\nu_1}\lambda_2^{\nu_2}/(\nu_1!\nu_2!)^{-1}, \ \lambda_1>0,$ $\lambda_2>0$. Тоді $\xi \in \mathbb{B}\left[(\lambda_1, \lambda_2); \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right]$, і з (5) дістанемо

$$\sigma_{(k_1,k_2)} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{коли } k_2 = 0; \\ \lambda_2, & \text{коли } k_2 \neq 0 \end{cases} .$$

§ 4. Оцінка "хвостів" розподілів типу $\mathbb{B}$

1. Одновимірний випадок.

Т е о р е м а 1. Нехай $Q(x) \in \mathbb{B}(x; V(x))$, $x \in \mathbb{X}$. Тоді для будь-якого $y \geqslant x$ справедлива нерівність

$$Q(x)(t:\ t \geqslant y) \leqslant \exp\left[-(y-x)^2\int_0^1 \frac{1-t}{V(x+t(y-x))}\,dt\right]. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо оператор $L_1(f;x) = = \int_0^\infty f(t)Q(x)(dt)$. Нехай міра μ домінує розподіли $Q(x)$, $з(x)$ – $з$-характеристика міри μ, $u(z)$ – п.Л. міри μ. Тоді, якщо $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, то $\forall a \geqslant 0$ $\eta(t) \leqslant \exp(at)$, і, отже, $L_1(\eta(t-y);x) \leqslant L_1(\exp(a(t-y);x) =$

$$= \exp(-ay)L_1(\exp(at);x) = \exp(-ay)\frac{u(з(x)-a)}{u(з(x))} = \exp\left[-\left\{ay - \ln\frac{u(з(x)-a)}{u(з(x))}\right\}\right],$$

а оскільки $L_1(\eta(t-y);\ x) = \int_y^\infty Q(x)(dt) = Q(x)(t:\ t \geqslant y)$, то для довільного $a \geqslant 0$

$$Q(x)(t:\ t \geqslant y) \leqslant \exp\left[-\left\{ay - \ln\frac{u(з(x)-a)}{u(з(x))}\right\}\right]. \tag{2}$$

Знайдемо таке $a = a(y)$, щоб величина $\beta(a) = ay - \ln\frac{u(s(x)-a)}{u(s(x))}$ приймала найбільше значення. Оскільки $\frac{d^2\beta}{da^2} = -V(x(s(x)-a)) < 0$, де $x(s)$ – функція, обернена до $s(\cdot)$, то функція $\beta(a)$ опукла (вгору), і, отже, в точці, де $d\beta/da = 0$, має максимум, тобто в точці a, яка визначається з рівняння $y = x(s(x)-a)$. Звідси $s(x)-a = s(y)$ і $a(y) = s(x)-s(y)$. Знайдемо значення $\beta(a)$ в точці $a(y)$ і позначимо його через $A(y)$. Матимемо

$$A(y) = (s(x)-s(y))y - \ln\frac{u(s(y))}{u(s(x))}.$$

Функція $A(y)$ така, що $A(x)=0$, $A'(y)=s(x)-s(y)-ys'(y)+x(s(y))s'(y)= = s(x)-s(y) = a(y)$, а звідси $A'(x) = 0$ і $A''(y) = -s'(y) = 1/V(y)$.

За формулою Тейлора

$$A(y) = A(x) + A'(x)(y-x) + (y-x)^2\int_0^1 (1-t)A''(x+t(y-x))dt,$$

отже,

$$A(y) = (y-x)^2\int_0^1 \frac{1-t}{V(x+t(y-x))}\,dt,$$

і з (2) випливає потрібна нерівність (1).

П р и к л а д 1. Для біноміального розподілу B_p^n $x = np$, $V(x) = x(1-x/n)$, тому для $\nu \geqslant np$ з співвідношення (1) дістанемо $\mathbb{P}(\nu\leqslant\xi\leqslant n) \leqslant$

$$p^\nu q^{n-\nu}(\nu/n)^\nu(1-\nu/n)^{-n+\nu},\ q = 1-p,\ \xi \dashv B_p^n. \qquad (3)$$

П р и к л а д 2. Оцінимо імовірність того, що в схемі випадкових блукань Бернуллі ($n=1$) час блукання $\xi \geqslant 2\nu+1$, якщо $\nu \geqslant q/(p-q)$. В цьому випадку $x = 1/(2p-1)$, $V(x) = x^3-x$, тому з співвідношення (1) дістанемо

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant 2\nu+1) \leqslant (2\nu+1)^{2\nu+1}\nu^{-\nu}(\nu+1)^{-\nu-1}p^{\nu+1}q^\nu. \qquad (4)$$

2. Багатовимірний випадок.

Т е о р е м а 2. Нехай $Q(x) \in \mathbb{B}(x;\ V(x))$, $x \in \mathbb{X}$, $s(x)$ – s-характеристика міри μ, яка домінує розподіли $Q(x)$. Тоді для всякого y такого, що $s(x) \geqslant s(y)$, справедлива нерівність:

$$Q(x)(t:\ t \geqslant y) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[-(y-x)\left[\int_0^1 (1-t)V^{-1}(x+t(y-x))dt\right](y-x)'\right]. \qquad (5)$$

З а у в а ж е н н я. Якщо $t = (t_1,\dots,t_m)$, $y = (y_1,\dots,y_m)$, то $t \geqslant y \Leftrightarrow t_1 \geqslant y_1,\dots,\ t_m > y_m$; $s(x) \geqslant s(y) \Leftrightarrow$ $s_1(x_1,\dots,x_m)\geqslant s_1(y_1,\dots,y_m),\dots,s_m(x_1,\dots,x_m)\geqslant s_m(y_1,\dots,y_m)$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо оператор $L_1(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)Q(x)(dt)$. Нехай міра μ домінує розподіли $Q(x)$, $s(x)$ – s-характеристика міри μ, $u(z)$ – перетворення Лапласа міри μ. Тоді, якщо $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, то для будь-якого вектора $a=(a_1,\dots,a_m)$ з невід"ємними координатами $\eta(t_1)\dots\eta(t_m) \leqslant \exp(at')$, і, отже, для всякого $y \in \mathbb{R}^m$ $L_1(\eta(t_1-y_1)\dots\eta(t_m-y_m);x)\leqslant$

$$\leqslant L_1(\exp(a(t-y)';x) = \exp\left[-\left[ay' - \ln\frac{u(s(x)-a)}{u(s(x))}\right]\right].$$

Остання нерівність рівносильна нерівності

$$Q(x)(t:\ t \geqslant y) \leqslant \exp\left[-\left[ay' - \ln\frac{u(s(x)-a)}{u(s(x))}\right]\right]. \qquad (6)$$

Покладемо $\beta(a) = ay' - \ln\frac{u(s(x)-a)}{u(s(x))}$ і, використовуючи властивості перетворення Лапласа міри μ, дістанемо $d\beta/da = y - x(s(x)-a)$, $x(s) = -d\ln u(s)/ds$ – відображення, обернене до відображення $s(x)$; $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -V(x(s(x)-\alpha))$. Оскільки матриця V додатно визначена, то функція $\beta(\alpha)$ опукла (вгору), і, отже, в точці $\alpha(y) = (\alpha_1(y),\dots,\alpha_m(y))$, яка визначається з системи рівнянь $y=\tau(s(x)-\alpha)$, має максимум. Звідси $\alpha(y) = s(x)-s(y)$. Покладемо

$$A(y) = \beta(\alpha(y)) = \alpha(y)y' - \ln\frac{u(s(x)-\alpha(y))}{u(s(x))},$$

яке є найбільшим значенням функції $\beta(\alpha)$. Вираз для $A(y)$ можна спростити. Для цього відзначимо, що $A(x) = 0$. Крім того,

$$\frac{dA}{dy} = \left(\frac{d\alpha_1}{dy},\dots,\frac{d\alpha_m}{dy}\right)y' + \alpha(y) - x(s(y))\left(\frac{ds_1}{dy},\dots,\frac{ds_m}{dy}\right) = \alpha(y).$$

Отже, $\left.\frac{dA}{dy}\right|_{y=x} = 0$. Далі, $\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{ds(y)}{dy} = V^{-1}(y)$. Тоді, подаючи функцію $A(y)$ за формулою Тейлора в околі точки x з залишковим членом в інтегральній формі, дістанемо

$$A(y) = (y-x)\left(\int_0^1 (1-t)V^{-1}(x+t(y-x))dt\right)(y-x)'.$$

Оскільки нерівність (6) виконується для будь-якого α з невід"ємними координатами, то вона буде виконуватися і для $\alpha = \alpha(y)$, якщо y брати таким, щоб $s(x) \geqslant s(y)$ (наприклад, якщо всі елементи матриці V^{-1} будуть невід"ємними, то $\alpha(y) \geqslant 0$ при умові $x \leqslant y$). Отже, $Q(x)(t:t\geqslant y) \leqslant \exp(-A(y))$, що і треба було довести.

§ 5. Оцінювання параметрів розподілів типу $\mathbb{B}$

Нехай $Q(x) \in \mathbb{B}(x; V(x))$, $x \in \mathbb{X}$, і міра μ домінує розподіли $Q(x)$ так, що

$$\frac{dQ(x)}{d\mu}(t) = p(t,x) := \exp(-s(x)t' - \ln u(s(x))).$$

Нехай, далі, $(t_k) = ((t_{k1},\dots,t_{km}))$ – послідовність вибіркових векторів з розподілу $Q(x)$, $k = 1, 2, \dots$.

Т в е р д ж е н н я 1. Статистика

$$\bar{t} = (t_1 + \dots + t_m)/n$$

є оцінкою максимальної вірогідності параметричного вектора x.

Д о в е д е н н я. Знайдемо логарифмічну функцію вірогідності. Маємо:

$$l(t;x) = \sum_{i=1}^{n} \ln p(t_i,x) = -\sum_{i=1}^{n} (s(x)t_i' + \ln u(s(x))).$$

Звідси, враховуючи властивості функції $u(z)$ і властивості відображення $s(x)$, дістанемо

$$\frac{dl}{dx} = -\sum_{i=1}^{n}\left(t_i\frac{ds}{dx} - \tau\frac{ds}{dx}\right) = n(\bar{t}-x)\,V^{-1}(x),$$ і, якщо $x = \bar{t}$,

то $\frac{dl}{dx} = 0$; крім того, $\left.\frac{d^2l}{dx^2}\right|_{x=\bar{t}} = -nV^{-1}(x)$ є від"ємно визначеною матрицею, тому функція $l(t,x)$ в точці $\tau = \bar{t}$ досягає максимума, що і потрібно було довести.

Т в е р д ж е н н я 2. Статистика

$$T = t_1 + \dots + t_m$$

є мінімальною вичерпуючою статистикою.

Справедливість цього твердження негайно випливає з того, що сім"я $(Q(x), x \in \mathbb{X})$ – підсім"я експоненціальної сім"ї розподілів з теореми 1 з книги [13, с.147].

На практиці часто потрібно оцінювати не тільки сам параметричний вектор x, але і деяку функцію від нього $f(x)$. Природно за оцінку функції $f(x)$ брати статистику $f(\bar{t}) = f((t_1+\dots+t_m)/n)$. Оскільки $\mathbb{M}f(\bar{t}) = L_n(f;x)$, де (L_n) –

послідовність операторів, які породжені мірою μ, то ця оцінка, як правило, зміщена. Але якщо $f \in \mathbb{E}$, то $L_n(f;x) \to f(x)$, коли $n \to \infty$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Т в е р д ж е н н я 3. Якщо $f \in \mathbb{E}$, то

$$\mathbb{D}f(\overline{t}) \geqslant n\mathbb{M}((t-x)f(\overline{t}))W(x)\mathbb{M}((\overline{t}-x)'f(\overline{t})), \qquad (1)$$

де $W(x)$ - w-характеристика міри μ, яка домінує розподіли $Q(x)$, $W(x) = V^{-1}(x)$.

Негайно випливає з наслідку 3.6.1.

Права частина нерівності (1) - нижняя границя Рао-Крамера для дисперсії оцінки $f(\overline{t})$. Оцінка $f(\overline{t})$ взагалі не є ефективною, але, наприклад, якщо функція f лінійна, то оцінка ефективна, бо в цьому випадку нижняя границя Рао-Крамера досягається. Проте, справедливе

Т в е р д ж е н н я 4. Якщо $f \in \mathbb{E}^2$, то

$$\mathbb{D}f(\overline{t}) = n^{-1} \frac{df(x)}{dx} V(x) \left(\frac{df(x)}{dx} \right)' + o\left(\frac{1}{n} \right), \ n \to \infty. \qquad (2)$$

Це твердження - тривіальний наслідок наслідку 4.3.3.

Оскільки, коли $n \to \infty$ $L_n(f;x) \to f(x)$, то твердження 4 означає, що оцінка $f(\overline{t})$ асимптотично ефективна, якщо $f \in \mathbb{E}^2$. Крім того, ця статистика асимптотично нормальна з параметрами $(x;\ n^{-1}V(x))$, якщо функція f диференційовна в точці x (це наслідок теореми 2 з книги [13, с.78]).

Нарешті, відмітимо, що різниця $L_n(f;x)-f(x)$ - це зміщення оцінки $f(\overline{t})$. Отже, з статистичної точки зору вивчення поведінки цієї різниці, коли $n \to \infty$, це вивчення зміщення оцінки $f(\overline{t})$, коли $n \to \infty$.

Г л а в а 7

КРАТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ДОДАТНИХ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Якщо в главах 1-4 розглядались звичайні послідовності д.л.о., то в цій главі вивчаються к р а т н і послідовності д.л.о. типу $\mathbb{B}$. Тут $n = (n_1,\ldots,n_m) \in \mathbb{N}_+^m$.

Властивості досліджуваних операторів в цьому випадку залежать не тільки від властивостей функції f і міри, що породжує оператори, але і від будови послідовності мультиіндексів (n).

В § 1 визначаються деякі характеристики мультиіндексів і вивчаються властивості цих характеристик. Дається означення C-послідовності мультиіндексів.

§ 2 присвячено визначенню кратних послідовностей д.л.о. типу $\mathbb{B}$.

В §§ 3-5 одержані аналоги деяких результатів з попередніх глав.

§ 1. Послідовності мультиіндексів

Тут и далі в цій главі буквою n завжди буде позначатися мультиіндекс $n = (n_1,\ldots,n_m)$ з додатними координатами, тобто $n \in \mathbb{N}_+^m$.

Говоримо: мультиіндекс досить великий, коли досить великі всі його координати. Запис $n \to \infty$ означає, що $n_1 \to \infty,\ldots,\ n_m \to \infty$.

Нехай $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_m)$ - довільна діагональна матриця і $b \in \mathbb{R}$. Тоді, за означенням,

$$A^b = \mathrm{diag}(a_1^b,\ldots,a_m^b),$$

до того ж, якщо серед чисел $a_1,\ldots,a_m$ є рівні нулю, то й відповідні елементи матриці A^b вважаються рівними нулю.

Кожному мультиіндексу $n = (n_1, \dots, n_m)$ поставимо у відповідність переставлення $(j_1, \dots, j_m)$ таке, що

$$n_{j_1} \leqslant n_{j_2} \leqslant \dots \leqslant n_{j_m}.$$

Розглянемо діагональну матрицю $A_n := \operatorname{diag}(n_1, \dots, n_m)$ і

$A_{nk} := \operatorname{diag}\left(e_{j_{k+1}} + e_{j_{k+2}} + \dots + e_{j_m}\right)$, $k = \overline{1,m}$.

A_{nk} – це діагональна матриця, у якої на головній діагоналі на $j_1, j_2, \dots, j_k$-их місцях стоять нулі.

Будемо вважати, що $n_{j_0} = 0$, $A_{n0} := A_n$.

Відзначимо деякі властивості матриць A_{nk}.

Властивість 1. Нехай b – довільне число. Тоді

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right) A_{nk}^{b} = A_{nk}^{b+1}. \qquad (1)$$

Доведення. Знайдемо елемент матриці з лівої частини співвідношення (1), який стоїть на j_r-му місці по головній діагоналі, $1 \leqslant r \leqslant m$. Оскільки елемент матриці A_{nk}^{b}, який стоїть на j_r-му місці по головній діагоналі, дорівнює нулю, коли $r \geqslant k$, то шуканий елемент дорівнює

$$\sum_{k=0}^{r-1} \left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right) n_{j_r}^{b} = n_{j_r}^{b}\left(n_{j_1} - n_{j_0} + n_{j_2} - n_{j_1} + \dots + n_{j_r} - n_{j_{r-1}}\right) = n_{j_r}^{b}\left(n_{j_r} - n_{j_0}\right) = n_{j_r}^{b+1},$$

що і потрібно довести.

Властивість 2. Нехай $T = (t_{ij})$, $i,j = \overline{1,m}$, – довільна матриця і b – довільне число. Тоді

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right) A_{nk}^{b} T A_{nk}^{b} = T_n^{(b)}, \qquad (2)$$

де $T_n^{(b)} = \left(t_{ij}^{(nb)}\right)$ – матриця з елементами;

$$\left(t_{ij}^{(nb)}\right) := \left(n_i n_j\right)^{b} t_{ij} \min\left(n_i, n_j\right). \qquad (3)$$

Доведення. Нехай t_{pq} – якийсь елемент матриці T. Тоді $p = j_r$, $q = j_s$, і, якщо $r \geqslant s$, то $n_p \geqslant n_q$. Тому

$$t_{pq}^{(nb)} = n_p^{b}\, n_q^{b}\, t_{pq}\left[n_{j_1} + (n_{j_2} - n_{j_1}) + \dots + (n_{j_r} - n_{j_{r-1}})\right] =$$

$= \left(n_p\, n_q\right)^{b} t_{pq} n_p$. Аналогічно, якщо $r < s$, то $t_{pq}^{(nb)} = \left(n_p\, n_q\right)^{b} t_{pq} n_q$, що дає (3).

Наприклад, якщо $T = I$ – одинична матриця, то

$$I_n^{(b)} = \left(\left(n_i n_j\right)^{b} \min\left(n_i, n_j\right)\right), \quad i,j = \overline{1,m},$$

зокрема,

$$I_n^{(-1)} = \left(\max(n_i^{-1}, n_j^{-1})\right), \quad I_n^{(-1/2)} = \left(\min(\sqrt{n_i/n_j}, \sqrt{n_j/n_i})\right),$$

$i,j = \overline{1,m}$.

Означення 1. Послідовність мультиіндексів $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}_+^m$ називається C-послідовністю, якщо існують границі

$$c_{ij} := \lim_{n\to\infty} \min(\sqrt{n_i/n_j}, \sqrt{n_j/n_i}), \quad i,j = \overline{1,m}. \qquad (4)$$

Якщо позначити через C матрицю з елементами c_{ij}, то $C = \lim\limits_{n\to\infty} I_n^{(-1/2)}$.

Наприклад, коли $n_1 = \dots = n_m$, або загальніше $n_1 \sim \dots \sim n_m$, коли $n \to \infty$, то C – матриця, у якої всі елементи дорівнюють 1, а коли, наприклад, $n_1 = n_1$, $n_2 = n_1^2, \ldots, n_m = n_1^m$, то C – це одинична матриця.

§ 2. Означення сім"ї операторів класу $\mathbb{B}$

О з н а ч е н н я 1. Сім"я додатних лінійних операторів вигляду

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t) Q_n(x)(dt), \ n \in \mathbb{N}_+^m \tag{1}$$

належить до класу $\mathbb{B}$, якщо існує така міра $\mu \in \Lambda$, що для кожного фіксованого $x \in \mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ – область визначення θ-характеристики міри μ) перетворенням Лапласа міри $Q_n(x)$ є функція

$$\varphi_n(z,x) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\varphi\left[zA_{nk}^{-1};x\right]\right)^{n_{j_{k+1}} - n_{j_k}}, \tag{2}$$

де $\varphi(z,x)$ – φ-характеристика міри μ,

$$z \in Z_n(x) := \bigcap_{k=0}^{m-1} (z : \theta(x) + \mathrm{Re}(zA_{nk}^{-1}) \in S), \tag{3}$$

$\theta(x)$ – θ-характеристика міри μ, S – область значень θ-характеристики міри μ, f – дійсна функція, визначена на $\mathbb{R}^m$, для якої має смисл права частина рівності (1).

З а у в а ж е н н я. Означення сім"ї д.л.о. классу $\mathbb{B}$ є узагальнення поняття послідовності д.л.о. класу $\mathbb{B}$ і останнє дістанемо з першого, якщо взяти $n_1 = \ldots = n_m$ (враховуючи теорему 1.3.1).

Якщо покласти $P_n(x) = Q_n(x)h$, де відображення $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ визначається рівністю $h(t) = x + tA_n^{-1/2}$, то $L_n(f;x)$ можна записати у вигляді

$$L_n(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + tA_n^{-1/2}) P_n(x)(dt). \tag{4}$$

За властивістю 1.1.1 перетворенням Лапласа міри $P_n(x)$ є функция

$$\psi_n(z,x) = \varphi_n\left[zA_n^{1/2}, x\right] \exp\left[zA_n^{1/2} x'\right]. \tag{5}$$

Оскільки $\varphi_n(0,x) = \psi_n(0,1) = 1$, то $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ – імовірнісні міри, які залежать від параметра x.

П р и к л а д 1. Нехай $m=2$, $n = (n_1, n_2)$, $n_1 \leqslant n_2$,

$$\mu = \delta((0,0)) + \delta((1,0)) + \delta((0,1)).$$

Така міра породжує сім"ю многочленів

$$B^{L}_{(n_1,n_2)}(f;x,y) := \sum f\left(\frac{k_1}{n_1}, \frac{k_2 + l_2}{n_2}\right) (k_1! k_2! k_3! l_1! l_2! l_3!)^{-1} \times$$

$$\times n_1! (n_2 - n_1)! x^{k_1 + l_1} y^{k_2 + l_2} (1-x-y)^{k_3 + l_3}, \tag{6}$$

де підсумовування ведеться за всіма натуральними розв"язками системи:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n_1, \\ l_1 + l_2 + l_3 = n_2 - n_1, \end{cases}$$

$\mathbb{X} = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < x+y < 1\}$

У випадку $n_1 = n_2$ ці многочлени співпадають з двовимірними многочленами Бернштейна (див. приклад 1.2.3).

Інші приклади наведено в главі 6.

§ 3. Властивості операторів з сім"ї класу $\mathbb{B}$

Л е м а 1. Якщо $(L_n) \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}_+^m$, то $\forall x \in \mathbb{X}$

$$L_n(1;x) = 1; \ L_n(t;x) = x; \tag{1}$$

$$L_n((t_i-x_i)(t_j-x_j);x) = \max\,(1/n_i,1/n_j)v_{ij}(x),\ i,j=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

де $v_{ij}(x)$ – елементи матриці $V(x)$ – v-характеристики міри μ, що породжує оператори L_n.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\varphi_n(z,x) + Q_n(x)$, то $L_n(1;x) = \varphi_n(0,x) = 1$. Далі, згідно з властивостями перетворення Лапласа мір, співвідношень (1.1.8), (1.1.9) і (1.1),

$$L_n(t;x) = \frac{d}{dz}\,\varphi_n(z,x)\Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{m-1}\left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right)xA_{nk}^{-1} = x.$$

Крім того, якщо через $V_n(x)$ позначити матрицю

$$V_n(x) := \left(\max(1/n_i,1/n_j)v_{ij}(x)\right),\ i,j=\overline{1,m}, \qquad (3)$$

то згідно з (1.2)

$$L_n((t_i-x_i)(t_j-x_j);x) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\exp(zx')\varphi_n(z,x)\right)\Big|_{z=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right)A_{nk}^{-1}V(x)A_{nk}^{-1} = V_n(x).$$

Лема доведена.

Т е о р е м а 1. Нехай $(L_n) \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}_+^m$, $f \in \mathbb{E}$. Тоді при досить великому n функції $L_n(f;x)$ визначені на множині X і коли $n \to \infty$ m-кратна послідовність $(L_n(f;x))$ збігається до $f(x)$ в кожній точці $x \in X$.

Д о в е д е н н я. Оскільки множина значень s-характеристики міри μ – область, то з (2.3) випливає, що для будь-якого комплексного вектора z знайдеться такий мультиіндекс $\nu=\nu(x)$, що для всіх $n \geqslant \nu$. $z \in Z_n(x)$. Отже, існують функції $L_n(\exp(-zx');x) = \varphi_n(z,x)$, тому перша частина теореми випливає з того, що $\forall t \in \mathbb{R}^m$

$$|f(t)| \leqslant M\exp(a|t|) < b(t), \qquad (4)$$

де $b(t) = M\sum_{\gamma}\exp(-\gamma t')$; $\sum_{\gamma}$ означає підсумовування за всіма векторами $\gamma \in \mathbb{R}^m$, координати яких приймають значення a або $-a$.

Для доведення другої частини теореми візьмемо довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо таке $\delta>0$, що $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$, коли $|t-x| < \delta$. Тоді внаслідок (1)

$$\Delta_n := |f(x) - L_n(f;x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^m}(f(t) - f(x))Q_n(x)(dt)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t-x|<\delta}|f(t) - f(x)|Q_n(x)(dt) + \int_{|t-x|\geqslant\delta}|f(t) - f(x)|Q_n(x)(dt) <$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \delta^{-1}\int_{|t-x|\geqslant\delta}|t-x||f(t) - f(x)|Q_n(x)(dt),$$

а оскільки $f \in \mathbb{E}$, то існує $\lambda^2(n) := \int_{\mathbb{R}^m} f^2(t)Q_n(x)(dt)$, тому за нерівністю Коші-Буняковського і співвідношенням (2)

$$\Delta_n < \varepsilon/2 + \delta^{-1}(|f(x)| + \lambda(n))\left(n_1^{-1}v_{11}(x) + \ldots + n_m^{-1}v_{mm}(x)\right)^{1/2}. \qquad (5)$$

Оцінимо $\lambda(n)$. Внаслідок (4),

$$\lambda^2(n) \leqslant M^2\sum_{\gamma}\int_{\mathbb{R}^m}\exp(-2\gamma t')Q_n(x)(dt) = M^2\sum_{\gamma}\varphi_n(2\gamma,x).$$

Внаслідок (2.2),

$$\varphi_n(2\gamma,x) = \exp\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right)\ln(\varphi(2\gamma A_{nk}^{-1},x))\right).$$

Звідси, використовуючи співвідношення (1.1.11) і (1.1), дістанемо $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(2\gamma,x) = \exp(-2\gamma x')$, а звідси випливає, що $\lambda(n) = O(1), n \to \infty$.

Нарешті, з (5) дістанемо, що $\Delta_n < \varepsilon$ для досить великого n і для кожного фіксованого $x \in \mathbb{X}$. Теорема доведена.

Т е о р е м а 2. Нехай $f \in \mathbb{H}^{\omega}$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant 2\omega\left(\left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}\right), \qquad (6)$$

де $v_{ij}(x)$ – елементи матриці $V(x)$.

Д о в е д е н н я . Маємо:

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(t) - f(x)| Q_n(x)(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega(\|t-x\|) Q_n(x)(dt) = \int_{\|t-x\|<\delta} \omega(\|t-x\|) Q_n(x)(dt) +$$

$$+ \int_{\|t-x\|\geqslant\delta} \omega(\|t-x\|) Q_n(x)(dt),$$ де $\delta > 0$ – довільне число.

Звідси, використовуючи властивості модуля неперервності, властивості оператра L_n та нерівність Коші-Буняковського, матимемо $|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant \omega(\delta)\left(1 + \delta^{-1} \int_{\|t-x\|\geqslant\delta} \|t-x\| Q_n(x)(dt)\right) \leqslant$

$$\leqslant \omega(\delta)\left(1 + \delta^{-1}\left[L_n(\|t-x\|^2;x)\right]^{1/2}\right) = \omega(\delta)\left(1 + \delta^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}\right).$$

Покладаючи $\delta = \left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}$, дістанемо (6). Теорема доведена.

Т е о р е м а 3. Нехай $f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega}$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant 2\omega\left(\left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}\right) \sum_{j=1}^{m} \left[n_j^{-1} v_{jj}(x)\right]^{1/2} \qquad (7)$$

Д о в е д е н н я. За формулою Тейлора $f(t) =$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(t_i - x_i) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f(x+\theta_i(t-x))}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)(t_i - x_i),$$

$0 < |\theta_i| < 1, i = \overline{1,m}.$ Подіємо оператором L_n на цю рівність. Враховуючи співвідношення (1), дістанемо:

$$|f(x) - L_n(f;x)| = \left|\sum_{i=1}^{m} L_n\left(\left(\frac{\partial f(x+\theta_i(t-x))}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)(t_i - x_i);x\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} L_n(\omega(\|t-x\|)|t_i - x_i|;x) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta)\left(\int_{\|t-x\|<\delta} |t_i - x_i| Q_n(x)(dt) + \int_{\|t-x\|\geqslant\delta} |t_i - x_i|(1 + \delta^{-1}\|t-x\|) \times\right.$$

$$\left.\times\, Q_n(x)(dt)\right) \leqslant \omega(\delta)\sum_{i=1}^{m}\left[L_n(|t_i - x_i|;x) + \delta^{-1} L_n(\|t-x\| |t_i - x_i|;x)\right],$$

де $\delta > 0$ – довільне число. Звідси, використовуючи (2) і нерівність Коші-Буняковського, дістанемо:

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant \omega(\delta)\left(\sum_{i=1}^{m} \left[n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2} + \delta^{-1}\left[n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}\right),$$ покладаючи тут $\delta = \left[\sum_{i=1}^{m} n_i^{-1} v_{ii}(x)\right]^{1/2}$,

дістанемо (7). Теорема доведена.

Н а с л і д о к 1. Нехай $m=1$, $x \in \mathbb{X}$. Тоді справедливі імплікації:

$$f \in \mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow |f(x) - L_n(f;x)| \leqslant 2\omega\left(\sqrt{V(x)/n}\right), \qquad (8)$$

$$f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow |f(x) - L_n(f;x)| \leqslant 2\sqrt{V(x)/n}\,\omega\left(\sqrt{V(x)/n}\right). \qquad (9)$$

§ 4. Асимптотичні розклади

Л е м а 1. Нехай: функції $\psi_n(z,x)$ визначаються співвідношенням (2.4); (n) – C-послідовність; числа c_{ij}, $i,j=\overline{1,m}$, визначаються співвідношеннями (1.4); $x \in \mathbb{X}$. Тоді $\forall z \in \mathbb{C}^m$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(z,x) = \exp(zV_c(x)z'/2), \qquad (1)$$

де

$$V_c(x) := (c_{ij}v_{ij}(x)), \quad i,j=\overline{1,m}. \qquad (2)$$

Д о в е д е н н я. З співвідношення (2.4), використовуючи співвідношення (2.2) і (1.1), дістанемо

$$\psi_n(z,x) = \exp\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (n_{j_{k+1}} - n_{j_k}) \ln\left(\varphi\left[zA_{nk}^{-1/2},x\right]\exp\left[zA_{nk}^{-1/2}x'\right]\right)\right\}, \qquad (3)$$

а внаслідок (1.1.12),

$$\ln\left(\varphi\left[zA_{nk}^{-1/2},x\right]\exp\left[zA_{nk}^{-1/2}x'\right]\right) = \frac{1}{2}z\left[A_{nk}^{-1/2}V(x)A_{nk}^{-1/2}\right]z' +$$

$$+ o\left(n_1^{-1} + \ldots + n_m^{-1}\right), \; n \to \infty, \; k = \overline{0,m-1}.$$

Тоді з (3), враховуючи (1.2), дістанемо:

$$\psi(z,x) = \exp(zV_n(x)z'/2 + o(1)), \; n \to \infty,$$

де матриця $V_n(x)$ визначається за допомогою співвідношення (3.3). Якщо перейти в останньому співвідношенні до границі, коли $n \to \infty$, і врахувати при цьому (1.4), дістанемо (1), що і потрібно довести.

Н а с л і д о к 1. Послідовність мір $(P_n(x))$ для кожного фіксованого $x \in \mathbb{X}$ слабко збігається до міри $P_c(x)$, де

$$P_c(x)(dt) = (2\pi)^{-m/2}\left[\det V_c(x)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\, tV_c^{-1}(x)t'\right]dt. \qquad (4)$$

Цей наслідок випливає з теореми неперервності (див.§ 4.1).

Л е м а 2. Нехай сім"я функцій $(g_n(t), t \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{N}_+^m)$ має властивості:

(i) на будь-якому компакті $T \subset \mathbb{R}^m$ сім"я (g_n) одностайно неперервна і рівномірно обмежена;

(ii) члени сім"ї (g_n) належать до класу $\mathbb{E}$, до того ж рівномірно для n, $\|g_n\|_{\mathbb{E}} \leqslant M$, де $M > 0$ – деяке число;

(iii) множина мультиіндексів (n) – C-послідовність.

Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(t)P_c(x)(dt) + o(1), \; n \to \infty. \qquad (5)$$

Доведення цієї леми таке саме, як і доведення леми 4.2.1.

Л е м а 3. Нехай $k = (k_1,\ldots,k_m)$, $n = (n_1,\ldots,n_m)$, $S_{k,n}(x) = L_n((t-x)^k;x)$, $x \in \mathbb{X}$, $r \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо $|k| = 2r$ і (n) – C- послідовність, то

$$S_{k,n}(x) = \frac{n^{-k/2}}{2^r r!}\frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_m^{k_m}}\left[zV_c(x)z'\right]^r + o(n^{-k/2}), \; n \to \infty. \qquad (6)$$

З а у в а ж е н н я . Нагадаємо: $n^{-k/2} = n_1^{-k_1/2}\ldots n_m^{-k_m/2}$, $(t-x)^k = (t_1-x_1)^{k_1}\ldots(t_m-x_m)^{k_m}$.

Д о в е д е н н я . Внаслідок (2.4),

$$S_{k,n}(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\left[tA_{nk}^{-1/2}\right]^k P_n(x)(dt) = n^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^m} t^k P_n(x)(dt),$$

а оскільки $t^k \in \mathbb{E}$, то згідно з лемою 2

$$S_{k,n}(x) = n^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^m} t^k P_c(x)(dt) + o(n^{-k/2}), \; n \to \infty,$$

і для завершення доведення потрібно далі провести викладки, які використовувались при доведенні леми 4.3.1.

Т е о р е м а 1. Нехай $f \in \mathbb{E}^{2r}$, $r \geqslant 1$, $x \in \mathbb{X}$, (n) – C-послідовність. Тоді

$$L_n(f;x) = \sum_{0\leqslant|k|<2r-1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) + \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) \times$$

$$\times \frac{1}{2^r r!}\left[n^{-k/2}\frac{\partial^{2r}}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_m^{k_m}}\left(zV_C(x)z'\right)^r + o(n^{-k/2})\right], \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. За формулою Тейлора

$$f(t) = \sum_{0<|k|\leqslant 2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x)(t-x)^k +$$

$$+ \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1}\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)\right)(t-x)^k, \quad 0 < |\theta_k| < 1.$$

Звідси

$$L_n(f;x) = \sum_{0\leqslant|k|\leqslant 2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) +$$

$$+ \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1} L_n\left[\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)\right)(t-x)^k; x\right]. \tag{8}$$

Оцінимо значення оператора L_n під знаком другої суми в співвідношенні (8). Для цього спочатку оцінимо величину

$$\Delta_n := L_n\left[\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)\right)^2; x\right],$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta > 0$, щоб $\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)\right)^2 < \varepsilon/2$, коли $|t-x| < \delta$. Тоді

$$\Delta_n \leqslant \varepsilon/2 + \delta^{-1}\int_{|t-x|\geqslant\delta} |t-x|\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x))-f^{(k)}(x)\right)^2 Q_n(x)(dt).$$

Оскільки $f^{(k)} \in \mathbb{E}$, то

$$L_n\left[\left(f^{(k)}(x+\theta_k(t-x))-f^{(k)}(x)\right)^2; x\right] = O(1), \quad n \to \infty,$$

тому, застосовуючи нерівність Коші–Буняковського і, враховуючи лему 3, дістанемо

$$\Delta_n \leqslant \varepsilon/2 + \delta^{-1} O\left[n_1^{-1/2}+\ldots+n_m^{-1/2}\right], \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає, що $\Delta_n = o(1)$, $n \to \infty$.

Знову застосуємо нерівність Коші–Буняковського і врахуємо лему 3. Матимемо

$$\left| L_n \left[(t-x)^k (f^{(k)}(x+\theta_k(t-x)) - f^{(k)}(x)); x \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[L_n ((t-x)^{2k}; x) \right]^{1/2} \Delta_n^{1/2} = o(n^{-k/2}),\ n \to \infty. \tag{9}$$

Тоді з (7), враховуючи (9), дістанемо

$$L_n(f;x) = \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant 2r-1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) S_{k,n}(x) + \sum_{|k|=2r} (k!)^{-1} f^{(k)}(x) \times$$

$\times S_{k,n}(x) + o(n^{-k/2})$, $n \to \infty$. Звідси, застосовуючи лему 3, дістанемо потрібне співвідношення (6).

Н а с л і д о к 2. Нехай $f \in \mathbb{E}^2$, $x \in \mathbb{X}$, (n) – C-послідовність. Тоді

$$L_n(f;x) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant m} \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \left[c_{ij} v_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + o(1) \right],$$

$$n \to \infty. \tag{10}$$

Випливає з співвідношення (7), якщо врахувати, що $S_{1,n}(x)=0$.

З а у в а ж е н н я. Теорема 1 є узагальненням теореми 4.3.3, бо коли в співвідношенні (7) вважати, що $n_1 = \ldots = n_m$, то дістанемо співвідношення, еквівалентне (4.3.18).

Т е о р е м а 2. Нехай $f \in \mathbb{H}^{\omega}$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = 0$ рівномірно для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{X}$, (n) – C-послідовність. Тоді

$$\sup_{f \in \mathbb{H}^{\omega}} |f(x) - L_n(f;x)| = (2\pi)^{-m/2} (\det V_c(x))^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^m} \omega(\| t A_n^{-1/2} \|) \exp(-t V_c^{-1}(x) t'/2) dt + o(\omega(1/\sqrt{n_1} + \ldots + 1/\sqrt{n_m})),$$

$$n \to \infty. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо допоміжну сім"ю функцій:

$$(g_n(t)) = ((\omega(\mathrm{tr} A_n^{-1/2}))^{-1} (f(x+tA_n^{-1/2}) - f(x))).$$

Оскільки $f \in \mathbb{H}^{\omega}$, то $\forall n \in \mathbb{N}_+^m$ і $\forall t \in \mathbb{R}^m$

$$|g_n(t)| \leqslant (\omega(\mathrm{tr} A_n^{-1/2}))^{-1} \omega(\| t A_n^{-1/2} \|) \leqslant 1 + \|t\|.$$

Отже, ця сім"я є рівномірно обмеженою на кожному компакті $T \subset \mathbb{R}^m$. Крім того, $\forall n \in \mathbb{N}_+^m$

$|g_n(t_1) - g_n(t_2)| \leqslant (\omega(\mathrm{tr} A_n^{-1/2}))^{-1} \omega(\| (t_1 - t_2) A_n^{-1/2} \|) \to 0$ рівномірно для n, коли $t_1 \to t_2$, згідно з умовою теореми. Тому сім"я $(g_n(t))$ є також і одностайно неперервною на $\mathbb{R}^m$. Тоді внаслідок леми 2,

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(t) P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(t) P_c(x)(dt) + o(1),\ n \to \infty.$$

Звідси для будь-якої функції $f \in \mathbb{H}^{\omega}$ дістанемо

$$\int_{\mathbb{R}^m} (f(x+tA_n^{-1/2}) - f(x)) P_n(x)(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} (f(x+tA_n^{-1/2}) - f(x)) P_c(x)(dt) + o(\omega(\mathrm{tr} A_n^{-1/2})),\ n \to \infty.$$

Далі, враховуючи (2.4), дістанемо

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leqslant$$

$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega(\| t A_n^{-1/2} \|) P_c(x)(dt) + o(\omega(\mathrm{tr} A_n^{-1/2}))$, $n \to \infty$, а оскільки для функції $f(t) = \omega(\|t-x\|)$ остання нерівність перетворюється в рівність, то це і доводить теорему.

З а у в а ж е н н я . Теорема 2 є узагальненням теореми 4.4.1 у випадку $r = 0$.

§ 5. Асимптотика локальної міри наближення

Нехай $f \in W$, тобто нехай функція f визначена і рівномірно неперервна на $\mathbb{R}^m$ і нехай $n = (n_1,\dots,n_m)$, $\delta_n = \max(1/\sqrt{n_1},\dots,1/\sqrt{n_m})$. Величина

$$a_{mn}(x) := \sup_{f \in \mathbb{W}} \frac{|L_n(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f;\delta_n)}, \qquad (1)$$

$f \neq \mathrm{const}$, $x \in X$, називається локальною мірою наближення класу $\mathbb{W}$ операторами L_n. Мета цього параграфу-вивчити поведінку величини $a_{mn}(x)$, коли $n \to \infty$.

Т е о р е м а 1. Нехай (n) - C-послідовність. Тоді справедлива асимптотична рівність:

$$a_{mn}(x) = a_m(x) + o(1), \; n \to \infty, \qquad (2)$$

де

$$a_m(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t_c\|] P_c(x)(dt), \; t_c = \left(t_1 c_{j_1 1},\dots,t_m c_{j_1 m}\right). \qquad (3)$$

Д о в е д е н н я. Маємо:

$$|L_n(f;x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x+tA_n^{-1/2}) - f(x)) P_n(x)(dt) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega_1(f;\|tA_n^{-1/2}\|) P_n(x)(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_1\left[f; n_{j_1}^{-1/2}\left(\frac{n_{j_1}}{n_1} t_1^2 + \dots + \frac{n_{j_1}}{n_m} t_m^2\right)^{1/2}\right] P_n(x)(dt),$$

де $n_{j_1} = \min(n_1,\dots,n_m)$. Оскільки (n) - C-послідовність, то існує вектор $\rho = \rho(n) = (\rho_1(n),\dots,\rho_m(n))$ такий, що $n_{j_1}/n_1 = c_{j_1 1}^2 + \rho_1(n),\dots,n_{j_1}/n_m = c_{j_1 m}^2 + \rho_m(n)$, до того ж $\rho_1(n) \to 0,\dots,\rho_m(n) \to 0$, коли $n \to \infty$. Покладаючи

$t_{c+\rho} = \left(t_1\sqrt{n_{j_1}/n_1},\dots,t_m\sqrt{n_{j_1}/n_m}\right)$ і враховуючи, що $\delta_n^{-1} = 1/\sqrt{n_{j_1}}$, дістанемо

$$\frac{|L_n(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f;1/\sqrt{n_{j_1}})} \leqslant 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t_{c+\rho}\|] P_n(x)(dt). \qquad (4)$$

Зафіксуємо x і візьмемо функцію

$$g(t) := \begin{cases} 1 + [\|t-x\|\delta_n^{-1}], & \text{коли } t \neq x; \\ 0, & \text{коли } t = x. \end{cases}$$

Для цієї функції $\omega_1(g;\delta_n) = 1$ і

$$L_n(g;x) - g(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t_{c+\rho}\|] P_n(x)(dt),$$

а оскільки функцію g можна як завгодно точно наблизити неперервними функціями, то з (4) випливає, що

$$a_{mn}(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t_{c+\rho}\|] P_n(x)(dt).$$

Далі матимемо

$$a_{mn}(x) = 1 + \int_{\mathbb{R}^m} [\|t_c\|] P_n(x)(dt) + \int_{\mathbb{R}^m} ([\|t_{c+\rho}\|] - [\|t_c\|]) P_n(x)(dt). \qquad (5)$$

Звідси, по-перше,

$$\int_{\mathbb{R}^m} [\|t_c\|] P_n(x)(dt) = \int_{\mathbb{R}^m} [\|t\|] P_c(x)(dt) + o(1), \; n \to \infty. \qquad (6)$$

Це обгрунтовується так само, як і відповідне співвідношення при доведенні теореми 4.5.1. По-друге, покажимо, що останній доданок в правій частині (5) можна зробити як завгодно малим, коли $n \to \infty$. Для цього розглянемо множини:

$$M_k = (t: k \leqslant \|t_c\| < k+1), \; M_{k+\rho} = (t: k \leqslant \|t_{c+\rho}\| < k+1).$$

Оскільки на множині $M_k \cap M_{k+\rho}$ $[\|t_{c+\rho}\|] - [\|t_c\|] = 0$, а для досить малого $\rho(n)$ на множині $M_k \setminus M_{k+\rho}$ $|[|t_{c+\rho}|] - [|t_c|]| \leqslant 1$, то

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} ([|t_{c+\rho}|] - [|t_c|]) P_n(dt) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{M_k \setminus M_{k+\rho}} P_n(x)(dt) = P_n(M),$$

де $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} (M_k \setminus M_{k+\rho})$.

Далі, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді, оскільки міра $P_c(x)$ імовірнісна і абсолютно неперервна відносно міри Лебега, то знайдеться таке число $r > 0$, що $P_c(x)(t:|t| > r) < \varepsilon/2$. Крім того, оскільки для досить малого $\rho(n)$ множини $M_k \setminus M_{k+\rho}$ не перетинаються і коли $\rho(n) \to 0$ їх міра Лебега стає як завгодно малою, то знайдеться таке натуральне число N, що

$$M = \bigcup_{k=N}^{\infty} (M_k \setminus M_{k+\rho}) \subset \{t:|t| > r\} \text{ и } P_c(x)(M_k \setminus M_{k+\rho}) < \varepsilon/(2N)$$

для $k=0, 1, 2, \ldots, N-1$. Отже,

$$P_c(x)(M) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} P_c(x)(M_k \setminus M_{k+\rho}) + P_c(x)(t:|t| > r) < \varepsilon,$$

а оскільки послідовність мір $(P_n(x))$ слабко збігається до міри $P_c(x)$, то внаслідок теореми 2.1 [12, с.21],

$$P_n(M) = P_c(x)(M) + o(1), \quad n \to \infty,$$

і, отже, міру $P_n(x)$ множини M теж можна зробити як завгодно малою для досить великого n. Враховуючи тепер (6), з (5) дістанемо потрібне твердження.

П р и к л а д 1. Знайдемо границю локальної міри наближення класу M многочленами $B^L_{(n_1,n_2)}(f;x,y)$ з прикладу 4.1.

Нехай $\lim\limits_{(n_1,n_2)\to\infty} (n_1/n_2)^{1/2} = C$ $(0 \leqslant C < 1)$. Тоді з (3) випливає, що $a_2(x,y) = \lim\limits_{(n_1,n_2)\to\infty} a_{2,n}(x,y) = 1 + 2/\pi \times$

$$\times \int_0^{\infty} r\exp(-r^2/2) \left(\int_0^{\pi/2} \left[r(\lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 C\cos^2\varphi)^{1/2} \right] d\varphi \right) dr,$$

де

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[x(1-x) + y(1-y) \pm \left[(x(1-x) - y(1-y))^2 + 4C^2x^2y^2 \right]^{1/2} \right].$$

Якщо $C = 1$ (а це буде, наприклад, тоді, коли $n_1 \sim n_2$), то

$$\max_{(x,y)\in T} a_2(x,y) = a_2(0.5,0.5) = 1.173\ldots;$$

якщо $c = 0$ (це буде, наприклад, тоді, коли $n_2 = n_1^2$), то

$$\max_{(x,y)\in T} a_2(x,y) = a_2(0.5,0.5) = 1.049\ldots .$$

З а у в а ж е н н я . Приклад 1 показує, що для довільної послідовності (n) мультиіндексів границя локальної міри наближення $a_{mn}(x)$, коли $n \to \infty$, взагалі кажучи, не існує.

§6. Приклади

1. Побудуємо кратні послідовності операторів, які породжує міра, сконцентрована в вершинах m-мірного кубу $a_0 = (0,\ldots,0)$, $a_1 = (1, 0,\ldots,0)$, ..., $a_{2^m} = (1,1,\ldots,1)$. Нескладні, хоч і громіздкі обчислення дають многочлени $B^{\square}_n(f;x) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (I-x)^{n-k}$.

У випадку $m = 2$ такого типу многочлени вперше вивчались А.Ф.Іпатовим [49-51].

Для многочленів $B^{\square}_n(f;x)$ (ці многочлени називатимемо кубічними многочленами Бернштейна) справедливі всі результати, які одержані в главі 5, потрібно тільки врахувати, що

$$V(x) = \operatorname{diag}(x_1(1-x_1), \dots, x_m(1-x_m)),$$

$$\mathbb{X} = \{(x_1, \dots, x_m): 0 < x_1 < 1, \dots, 0 < x_m < 1\}.$$

Випишемо деякі з результатів стосовно многочленів $B_n^{\square}(f;x)$.

Т в е р д ж е н н я 1. Нехай $x \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}^m$. Тоді мають місце імплікації:

$$f \in \mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow |f(x) - B_n^{\square}(f;x)| \leq$$
$$\leq 2\omega\left[\left(x_1(1-x_1)/n_1 + \dots + x_m(1-x_m)/n_m\right)^{1/2}\right],$$

$$f \in \mathbb{W}^1\mathbb{H}^{\omega} \Rightarrow |f(x) - B_n^{\square}(f;x)| \leq$$

$$\leq 2\omega\left[\left(\sum_{t=1}^{m} x_t(1-x_t)/n_t\right)^{1/2}\right] \sum_{t=1}^{m} \left(x_t(1-x_t)/n_t\right)^{1/2}.$$

Випливає з теорем 3.2 і 3.3.

Т в е р д ж е н н я 2. Нехай $f \in \mathbb{C}^{2r}$, $r \geq 1$, (n) – C-послідовність; $S_{k,n}(x) = B_n^{\square}((t-x)^k;x)$, $k \in \mathbb{N}^m$. Тоді

$$B_n^{\square}(f;x) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2r-1} (k!)^{-1} f^{(k)}(x)\, S_{k,n}(x) +$$

$$+ (2^r r!)^{-1} \sum_{|t|=r} \left[r!\, x^t (I-x)^t f^{(2t)}(x) n^{-1}/t! + o(n^{-1})\right], n \to \infty;$$

$t = (t_1, \dots t_m)$, $I = (1, \dots, 1)$.

Випливає з теореми 4.1.

Т в е р д ж е н н я 3. Нехай $f \in \mathbb{H}^{\omega}$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\omega(\lambda t)}{\omega(\lambda)} = 0$ рівномірно по $\lambda > 0$, (n) – C послідовність. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\sup_{f \in \mathbb{H}^{\omega}} \left|f(x) - B_n^{\square}(f;x)\right| = (2\pi)^{-m/2} \int_0^{\infty} r^{m-1} e^{-r^2/2} \times$$

$$\times \left[\int_{\Omega_{m-1}} \omega\left[r\left(x_1(1-x_1)t_1^2/n_1 + \dots + x_m(1-x_m)t_m^2/n_m\right)^{1/2}\right] ds\right] dr +$$

$$+ o(\omega(1/\sqrt{n_1} + \dots + 1/\sqrt{n_m})), \; n \to \infty.$$

Випливає з теореми 4.2.

Т в е р д ж е н н я 4. Нехай $f \in \mathbb{W}$, (n) – C-послідовність, $n_{j_1} = \min(n_1, \dots, n_m)$. Тоді $\forall x \in \mathbb{X}$ $\sup\limits_{f \in \mathbb{W}} \dfrac{|B_n^{\Delta}(f;x) - f(x)|}{\omega_1(f; 1/\sqrt{n_{j_1}})} =$

$$= 1 + (2\pi)^{-m/2} \int_0^{\infty} r^{m-1} e^{-r^2/2} \left[\int_{\Omega_{m-1}} \left[r\left(x_1(1-x_1)c_{j_1 1}^2 t_1^2 + \dots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + x_m(1-x_m)c_{j_1 m}^2 t_m^2\right)^{1/2}\right] ds\right] dr + o(1), \; n \to \infty, \; f \neq \text{const}.$$

Випливає з теореми 5.1.

П р и к л а д 1. Застосуємо твердження 4 до многочленів $B_{(n_1,n_2)}^{\square}(f;x_1,x_2)$. Нехай $n_1 \leq n_2$ і $\lim\limits_{(n_1,n_2) \to \infty} \sqrt{n_1/n_2} = C$, $0 \leq C < 1$. Тоді справедливе співвідношення:

$$\sup_{f \in \mathbb{W}} (\omega_1(f; 1/\sqrt{n_1}))^{-1} \left|f(x_1,x_2) - B_{(n_1,n_2)}^{\square}(f;x_1,x_2)\right| =$$

$= a_2(x_1,x_2) + o(1)$, $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, $f \neq \text{const}$, де $a_2(x_1,x_2) =$

$$= 1 + 2/\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} \left[\int_0^{\pi/2} \left[r\left(x_1(1-x_1)\sin^2\varphi + Cx_m(1-x_m)\cos^2\varphi\right)^{1/2}\right] d\varphi\right] dr.$$

Зокрема, якщо $C = 1$ (це буде, наприклад, тоді, коли $n_1 \sim n_2$, $n \to \infty$), то

$$\max_{x\in\bar{X}} a(x_1,x_2) = 1 + \int_0^\infty [r/2]\exp(-r^2/2)dr = 1,13567\ldots ;$$

якщо $C = 0$ (це буде, наприклад, тоді, коли $n \sim n^2$, $n \to \infty$), то

$$\max_{x\in\bar{X}} a(x_1,x_2) = 1 + 2/\pi \int_0^\infty r\exp(-r^2/2)\left(\int_0^{\pi/2} [r\sin\varphi]d\varphi\right)dr = 1,049\ldots .$$

2. Прямокутні оператори. Розглянемо міру

$\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} a_{k_1}\ldots a_{k_m}\delta(k)$. Перетворенням Лапласа цієї міри є функція

$$u(s_1,\ldots,s_m) = \prod_{j=1}^m \omega\left(e^{-s_j} \right).$$

Знайшовши функціональні характеристики міри μ і використавши теорему 1.3.1 (теорему про структуру), побудуємо оператори, які породжує міра μ. Так, одержані оператори будемо називати прямокутними операторами, що породжені степеневими рядами, і позначатимемо їх символом $L_n^{\llcorner}(f;x)$. Матимемо

$$L_n^{\llcorner}(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} f(k_1/n_1,\ldots,k_m/n_m)\prod_{j=1}^m c_{k_j,n_j}(y(x_j))^{k_j}(\omega(y(x_j)))^{-n_j},$$

для цих операторів $V(x) = V(x_1,\ldots,x_m) =$

$= \mathrm{diag}(y(x_1)/y'(x_1),\ldots,y(x_m)/y'(x_m))$, $x \in X^m = X \times\ldots\times X$, X – область визначення значень одновимірних операторов $L_n(f;x)$.

Для операторів $L_n^{\llcorner}(f;x)$ будуть справедливі всі результати, які одержані вище.

Наведемо декілька конкретних прикладів операторів $L_n^{\llcorner}(f;x)$.

П р и к л а д 1. Якщо $\omega(y) = 1 + y$, то оператори $L_n^{\llcorner}(f;x)$ співпадають з кубічними многочленами Бернштейна $B_n^{\square}(f;x)$.

П р и к л а д 2. Прямокутні оператори, що породжені рядом функції $\omega(y) = \exp y$, мають вигляд:

$$M_n^{\llcorner}(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} f(k_1/n_1,\ldots,k_m/n_m)\prod_{j=1}^m (n_jx_j)^{k_j}e^{-x_jn_j}(k_j!)^{-1},$$

для цих операторів $V(x) = V(x_1,\ldots,x_m) =$

$= \mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_m)$, $x \in X^m = \{(x_1,\ldots,x_m): x_1 > 0,\ldots, x_m > 0\}$.

Оператори $M_n^{\llcorner}(f;x)$ називатимемо прямокутними операторами Міракьяна-Саса.

П р и к л а д 3. Прямокутні оператори, що породжені рядом функції $\omega(y) = (1-y)^{-1}$, мають вигляд:

$$Б_n^{\llcorner}(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} f(k_1/n_1,\ldots,k_m/n_m)\prod_{j=1}^m x_j^{k_j}(1+x_j)^{-n_j-k_j}\binom{n_j+k_j-1}{k_j},$$

для цих операторів $V(x) = V(x_1,\ldots,x_m) =$

$= \mathrm{diag}(x_1(1+x_1),\ldots, x_m(1+x_m))$, $x \in X^m = \{(x_1,\ldots,x_m)$: $x_1 > 0,\ldots, x_m > 0\}$. Оператори $Б_n^{\llcorner}(f;x)$ називатимемо прямокутними операторами Баскакова.

П р и к л а д 4. Прямокутні оператори, що породжені рядом функції $\omega(y) = \ln(1-y)^{-1}$, мають вигляд: $\Lambda_n^{\llcorner}(f;x) =$

$$= \sum_{k\geqslant n} f(k_1/n_1,\ldots,k_m/n_m)\prod_{j=1}^m (\ln\lambda(x_j))^{-n_j}(1-1/\lambda(x_j))^{k_j}\sigma_{k_j,n_j},$$

для цих операторов $V(x) = V(x_1,..x_m) =$

$= \mathrm{diag}(x_1(\lambda(x_1)-x_1),\ldots,x_m(\lambda(x_m)-x_m))$, $x \in X^m = \{(x_1,..x_m)$: $x_1 > 1,\ldots, x_m > 1\}$. Оператори $\Lambda_n^{\llcorner}(f;x)$ називатимемо прямокутними логарифмічними операторами.

За аналогією можна побудувати прямокутні оператори, які є багатовимірними узагальненнями решти операторів з глави 1.

3. Конічні оператори. Позначимо через K_m множину всіх мультиіндексів, у яких координати задовольняють

умовам: $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_m \geqslant 0$. Розглянемо міру

$$\mu = \sum_{k \in K_m} \left[\prod_{j=1}^{m} a_{k_j - k_{j+1}} \right] \delta(k), \quad a_{k_{m+1}} := 0,$$

і побудуємо кратну послідовність д.л.о., що породжує ця міра, використовуючи ряд функції $\omega(y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l y^l$.

Перетворенням Лапласа міри μ є функція

$$u(s_1, \ldots, s_m) = \sum_{k \in K_m} \left[\prod_{j=1}^{m} a_{k_j - k_{j+1}} \right] \exp(-k_1 s_1 - \ldots - k_m s_m) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \omega(\exp(-s_1 - \ldots - s_j)). \tag{1}$$

Звідси

$$x_j(s_1, \ldots, s_m) = -\partial \ln u / \partial s_j = \sum_{r=j}^{m} e^{-s_1 - \ldots - s_r} \omega' \left(e^{-s_1 - \ldots - s_r} \right) \times$$

$$\times \left[\omega\left(e^{-s_1 - \ldots - s_r} \right) \right]^{-1}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Нехай, як і вище, $y(x)$ – функція, обернена до функції $x = y\omega'(y)/\omega(y)$. Тоді з (5) дістанемо

$$e^{-s_1 - \ldots - s_l} = y(x_l - x_{l+1}), \quad x_{m+1} := 0,$$

а звідси

$$s_1 = -\ln y(x_1 - x_2), \quad s_2 = -\ln(y(x_1 - x_2) y(x_2 - x_3)), \ldots,$$

$$s_m = -\ln(y(x_1 - x_2) \ldots y(x_{m-1} - x_m) y(x_m)). \tag{3}$$

З (3) дістанемо w-характеристику міри μ, тобто матрицю $W(x) = (-\partial s_l / \partial x_j)$, $l, j = \overline{1,m}$. Нехай $w_l(x) := y'(x_l - x_{l+1}) / y(x_l - x_{l+1})$.

Тоді

$$W(x) = \begin{pmatrix} w_1 & -w_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -w_1 & w_2 + w_1 & -w_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -w_2 & w_3 + w_2 & -w_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & -w_{m-1} & w_m + w_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Звідси $\det W(x) = w_1 w_2 \ldots w_m$.

Обертаючи матрицю $W(x)$, дістанемо

$$V(x) = \begin{pmatrix} w_1^{-1} + \ldots + w_m^{-1} & w_2^{-1} + \ldots + w_m^{-1} & \ldots & w_m^{-1} \\ w_2^{-1} + \ldots + w_m^{-1} & w_2^{-1} + \ldots + w_m^{-1} & \ldots & w_m^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_m^{-1} & w_m^{-1} & \ldots & w_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо функцию $\varphi_n(z,x) = \prod_{r=0}^{m-1} \left[\varphi(zA_{nr}^{-1}, x) \right]^{n_{j_{k+1}} - n_{j_k}}$, де $\varphi(z,x) = u(s(x)+z)/u(s(x))$. З (1) і (2) дістанемо:

$$u(s(x)) = \prod_{j=1}^{m} \omega(y(x_j - x_{j+1})),$$

$$u(s(x) + zA_{nr}^{-1}) = \prod_{j=1}^{m} \omega(y(x_j - x_{j+1})) \exp(zA_{nr}^{-1}(e_1 + \ldots + e_l)')).$$

Нехай $a_l^{(m)}$ означає l-ий коефіцієнт ряду Тейлора функції $(\omega(y))^m$, причому $a_l^{(0)} := 0$, якщо $l \neq 0$ і $a_0^{(0)} := 1$. Тоді

$$\left[u(s(x) + zA_{nr}^{-1}) \right]^{n_{j_{k+1}} - n_{j_k}} = \sum_{k_r} \prod_{j=1}^{m} \left[y(x_j - x_{j+1}) \right]^{k_{lr}} a_{k_{lr}}^{(n_{j_{k+1}} - n_{j_k})} \times$$

$$\times \exp\left[zA_{nr}^{-1} \sum_{l=1}^{m} k_{lr}(e_1 + \ldots + e_l)' \right], \quad r = 0, 1, \ldots, m-1,$$ де підсумовування ведеться за всіма мультиіндексами $k_r = (k_{1r}, \ldots, k_{mr}) \in \mathbb{N}^m$. Звідси матимемо $\varphi_n(z,x) =$

$$=\left[\prod_{j=1}^{m} \omega(y(x_j-x_{j+1}))\right]^{-n_{j_m}} \sum_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})} \exp\left[-z \sum_{r=0}^{m-1} A_{nr}^{-1} \sum_{t=1}^{m} k_{tr} \times\right.$$

$$\left.\times (e_1+\dots e_t)'\right]\prod_{r=0}^{m-1}\left[\prod_{j=1}^{m}\left[y(x_j-x_{j+1})\right]^{k_{tr}} a_{k_{tr}}^{(n_{j_{k+1}}-n_{j_k})}\right],$$

де підсумовування ведеться за всіма наборами мультиіндексів $(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})$. Функція $\varphi_n(z,x)$ є перетворенням Лапласа міри, яка сконцентрована в точках $x_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})}:=$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}\left[\sum_{t=1}^{m} k_{tr}(e_1+\dots e_t)\right]A_{nr}^{-1}$$ і має в них маси

$$\left[\prod_{t=1}^{m}\omega(y(x_t-x_{t+1}))\right]^{-n_{j_m}} \prod_{r=0}^{m-1}\left[\prod_{t=1}^{m}\left[y(x_t-x_{t+1})\right]^{k_{tr}} a_{k_{tr}}^{(n_{j_{k+1}}-n_{j_k})}\right].$$

Отже, міра μ породжує оператори

$$L_n^{\ell}(f;x) =$$

$$= \sum_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})} f\left(x_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})}\right)\left[\prod_{t=1}^{m} \omega(y(x_t-x_{t+1}))\right]^{-n_{j_m}} \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{m-1}\left[\prod_{t=1}^{m}\left[y(x_t-x_{t+1})\right]^{k_{tr}} a_{k_{tr}}^{(n_{j_{k+1}}-n_{j_k})}\right],\quad x_{m+1}:=0,\ n_{j_0}:=0.$$

Ці оператори називатимемо конічними операторами, які породжені степеневими рядами. Функції $L_n^{\ell}(f;x)$ визначені на множині значень відображення (1).

Зокрема, при $m = 2$, $n = (n_1, n_2)$, $n_1 < n_2$, оператори $L_n^{\ell}(f;x)$ мають вигляд:

$$L^{\ell}_{(n_1,n_2)}(f;x_1,x_2) =$$

$$=\sum_{l\in\mathbb{N}^4} f((l_1+l_2)/n_1,\ (l_2+l_4)/n_2)\, a_{l_1}^{(n_1)} a_{l_2}^{(n_2)} a_{l_3}^{(n_2-n_1)} a_{l_4}^{(n_2-n_1)} \times$$

$$\times (y(x_1-x_2))^{l_1+l_3}(y(x_2))^{l_2+l_4}(\omega(y(x_1-x_2)))^{-n_1}(\omega(y(x_2)))^{-n_2}.$$

Другий окремий випадок дістанемо, якщо візьмемо $n_1 = n_2 = \dots$ $\dots = n_m = n \in \mathbb{N}_+$. Маємо: $L_n^{\ell}(f;x_1,\dots,x_m) =$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N}^m} f((k_1+\dots+k_m)/n,\ (k_2+\dots+k_m)/n,\dots,k_m/n) \times$$

$$\times \left[\prod_{t=1}^{m}\omega(y(x_t-x_{t+1}))\right]^{-n}\prod_{t=1}^{m} a_{k_t}^{(n)}(y(x_t-x_{t+1}))^{k_t}.$$

Наведемо конкретні приклади конічних операторів.

П р и к л а д 7. Конічні оператори, що породжені рядом функції $\omega(y) = \exp y$, мають вигляд:

$$M_n^{\ell}(f;x) = \sum_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})} f\left[x_{(k_0,k_1,\dots,k_{m-1})}\right]\exp(-n_{j_m}x_1) \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{m-1}\left[\prod_{t=1}^{m}(x_t-x_{t+1})^{k_{tr}}(k_{tr}!)^{-1}(n_{j_{r+1}}-n_{j_r})^{k_{tr}}\right],\quad x_{m+1}:=0.$$

Ці оператори називатимемо конічними операторами Міракьяна-Саса, для них

$$V(x_1,\dots,x_m) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_2 & x_2 & \dots & x_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m & x_m & \dots & x_m \end{pmatrix},\quad \det V(x) = \prod_{j=1}^{m}(x_j-x_{j+1}).$$

24-2-2291

П р и к л а д 8. Конічні оператори, які породжені рядом функції $\omega(y) = (1-y)^{-1}$, мають вигляд:

$$Б_n^{L}(f;x) = \sum_{(k_0,k_1,\ldots,k_{m-1})} f\left(x_{(k_0,k_1,\ldots,k_{m-1})}\right) \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{m-1}\left[\prod_{l=1}^{m}\binom{n_{j_{r+1}}-n_{j_r}+k_{lr}-1}{k_{lr}}(x_l-x_{l+1})^{k_{lr}}\left(1+x_l-x_{l+1}\right)^{-n_{j_m}-k_{lr}}\right].$$

Ці оператори називатимемо конічними операторами Баскакова, для них

$$V(x) = \left[\, v_{lj}(x) = \begin{cases} v_j(x), & \text{коли } l \leqslant j; \\ v_l(x), & \text{коли } l > j \end{cases} \right],\ l,j = \overline{1,m},$$

де $v_k(x) = \sum_{j=k}^{m}(x_j-x_{j+1})(1+x_j-x_{j+1}),\ k = \overline{1,m},$

$$\det V(x) = \prod_{k=1}^{m}(x_k-x_{k+1})(1+x_k-x_{k+1}).$$

За аналогією до попереднього, можна побудувати конічні оператори, які є узагальненнями інших операторів з глави 1.

4. Прямокутні інтегральні оператори. Нехай міра μ визначена на борелівських підмножинах числової осі і є абсолютно неперервною відносно міри Лебега. Позначимо, як і в попередньому пункті, через $p(t)$ її щільність. Функція $p(t)$ породжує послідовність щільностей $q_n(x,t)$, які визначають послідовність д.л.о. типу $\mathbb{B}$ в одновимірному випадку. Якщо на борелівських підмножинах простору $\mathbb{R}^m$ визначити міру $\mu(dt_1,\ldots,dt_m) = p(t_1)\ldots p(t_m)dt_1\ldots dt_m$, то легко показати (це робиться практично так само, як і в § 2), що ця міра породжує послідовність операторов

$$L_n^{L}(f;x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t_1,\ldots,t_m)q_{n_1}(x_1,t_1)\ldots q_{n_m}(x_m,t_m)dt_1\ldots dt_m.$$

Для цих операторів

$$W(x_1,\ldots,x_m) = \operatorname{diag}(W(x_1),\ldots,W(x_m)),$$

де $W(x)$ - w-характеристика міри μ.

Наприклад, багатовимірними узагальненнями операторів $F_n(f;x)$ (див. приклад 1) будуть оператори

$$F_n^{L}(f;x) = \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty f(t_1,\ldots,t_m)\prod_{l=1}^{m}(n_l/x_l)^{n_l}(\Gamma(n_l))^{-1} \times$$

$$\times \exp(-n_l t_l/x_l)t_l^{n_l-1}dt_1\ldots dt_m.$$

Для них

$$W(x_1,\ldots,x_m) = \operatorname{diag}(x_1^{-2},\ldots,x_m^{-2}),\ x_1 > 0,\ldots,\ x_m > 0.$$

За аналогією до попереднього можна було б виписати багатовимірні узагальнення інших операторів з глави 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов.- М.: Физматгиз, 1961.- 312 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.- М.: Наука, 1965.- 403 с.
3. Баскаков В. А. Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // ДАН СССР.- 1957.- 113, №2.- С.249-251.
4. Баскаков В. А. Исследование операторов типа полиномов С.Н.Бернштейна для функций нескольких переменных с помощью теории вероятностей // Изв.вузов "Математика".-1965.-49,№6.- С.16-22.
5. Баскаков В. А. О некоторых линейных положительных операторах // Изв.вузов "Математика".-1969.- №10.-С.11-21.
6. Баскаков В. А. Обобщение некоторых теорем П.П.Коровкина о положительных операторах // Матем.заметки.- 1973.-13, №6.- С.785-794.
7. Баскаков В. А. Линейные операторы в теории приближения функций: Дис....докт. физ.-матем.наук: Тбилиси: ТГУ.-1987.-297 с.
8. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.Функции Бесселя, функции параболического цилиндра,ортогональные многочлены.М.: Наука, 1966.-296 с.
9. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1.-М.: Наука,1969.- 344 с.
10. Бернштейн С. Н. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilites // Сообщения Харьк. матем. об-ва. Серия 2.-1912.- 13.-С 1-2.
11. Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской " Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н.Бернштейна" // Собр.соч.- М.:Изд.-во АН СССР, 1954.-Т. 2.-С. 155-158.
12. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.- М.: Наука, 1977.- 352 с.
13. Боровков А. А. Математическая статистика.- М.-.:Наука, 1984.- 472 с.
14. Бурбаки Н. Функции действительного переменного.- М.: Наука, 1965.- 424 с.
15. Бхаттачария Р. Н. и Ранга Рао. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения .- М.- : Наука, 1982.- 286 с.
16. Барра Ж.- Р. Основные понятия математической статистики. - М.: Мир, 1974.- 276 с.
17. Виденский В.С. Линейные положительные операторы конечного ранга. - Ленинградский пединститут им.Герцена, 1985. - 68 с.
18. Волков Ю. И. Некоторые соотношения,связанные с полугруппами операторов // Изв.вузов "Математика".- 1973.- №10.-С.23-28.
19. Волков Ю. И. Асимптотические свойства одного класса линейных операторов // Сиб. матем. ж.-1974.-25, №5.-С.1174.
20. Волков Ю.И.,Поляков Р. В. Об одном применении полиномов типа Бернштейна к решению интегральных уравнений // Тезисы докладов международной конференции по конструктивной теории функций, Благоевград 30.05- 4.06.-1977.- С.9.
21. Волков Ю.И. О некоторых линейных положительных операторах // Матем. заметки.- 1978.- 23, №5.- С. 659-669.
22. Волков Ю. И. Распределения типа В и их применения // Теория вероятностей и математичекая статистика.- 1980.- Вып. 22.- С. 15-24.
23. Волков Ю. И. Об аппроксимационных операторах, порожденных

неотрицательными мерами // ДАН СССР.-1982.-263, - № 2.С.280-282.
24. Волков Ю. И. Новые примеры аппроксимационных линейных положительных операторов // Методы теории приближения и их приложения.- Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982.-С.10-19.
25. Волков Ю. И. Об одном классе семейств распределений // Теория вероятностей и ее применения.-1982.-27, №2.-С.412.
26. Волков Ю. И. К теории многомерных линейных положительных операторов // Теория приближения функций. Тр.Международной конференции по приближению функций, Киев, 31 мая - 5 июня 1983.-М.: Наука, 1987.-С.95-97.
27. Волков Ю. И. Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса // Изв. АН СССР.Сер.мат.-1983. -47, №3.-С. 435-454.
28. Волков Ю. И. Кратные последовательности линейных положительных операторов //Укр. матем. ж.-1984.-36, №3.-С.286-291.
29. Волков Ю. И. О монотонности последовательностей линейных положительных операторов,порожденных мерами // Матем. заметки. -1985.-38, №5.-С.658-664.
30. Волков Ю. И. О приближении в среднем многомерными линейными положительными операторами // Тр. МИАН СССР.-1987.-180.-С. 85-86.
31. Волков Ю. И. Некоторые свойства распределений типа В // Теория вероятностей и ее применения.-1986.-31, №3.-С.606.
32. Волков Ю.И. Аппроксимационные свойства многомерных положительных линейных операторов типа В // Приближение функций многих переменных операторами типа В.-Киев, 1987.(Препринт 87.28, Киев, Ин-т математики АН УССР.) -С.3-35.
33. Волков Ю.И. Приближение функций усеченными положительными линейными операторами типа В // Всесоюзная школа "Теория

приближения функций". Тезисы докладов, г. Луцк, 31.08 - 8.08 1989 г. - К.: Ин-т матем. АН УССР, 1989.- С.42.
34. Волков Ю. И. Структура положительных линейных операторов типа В с полиномиальной и степенной ковариациями//Препринт 89.60, - К.: Ин-т матем. АН УССР, 1989.-30 с.
35. Волков Ю.И. Строение положительных линейных операторов типа В с кубической ковариацией // Теория функций и приближений. Тр. 4-й Саратовской зимней школы 25.01 - 5.02. 1988 года, Ч.2. - Изд-во Саратовского ун-та, 1990. - С.61-63.
36. Волков Ю. И. Положительные линейные операторы типа В / Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами/ А.А.Лигун,В.Е.Капустян, Ю.И.Волков.- К.: Выща шк., 1990.- 208 с. (Новое в науке и технике - студентам и учащимся. Вып. 21).- С.155-208.
37. Волков Ю. И. Деформации положительных линейных операторов типа В // Укр. матем. ж.-1990.- 42, №7.-С.888 - 900.
38. Вороновская Е.В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // ДАН СССР, А.-1932, №4.-С.79-85.
39. Гихман И. И. Об одном уточнении закона больших чисел // Науковi записки КДУ. Вып. 7, Математичний збiрник , 1952.-№6.-С.59-65.
40. Гихман И.И.,Скороход А.В.,Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика.-К.: Выща шк., 1978.-408 с.
41. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В.А.Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.-М.: Наука, 1987.-344 с.
42. Голубов Б.И. О скорости сходимости интегралов типа Гаусса-Вейерштрасса для функций многих переменных // Изв.АН СССР. Сер.матем.- 1980.- 44, № 6.- С. 1255-1278.

43. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.-М.: ИЛ, 1962.-856 с.

44. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.- М.: Наука, 1977.-512 с.

45. Закс Ш. Теория статистических выводов.-М.: Мир, 1975.-776 с.

46. Зарицкая З. В. О приближении функций двух переменных полиномами С.Н. Бернштейна // Теория функций,функциональный анализ и их приложения.-1966. Вып.2.- С.21-34.

47. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения.- М.: Наука, 1983.-304 с.

48. Ибрагимов И. И., Гаджиев А.Д., Шахвердиев В.М. Об условиях монотонности последовательности производных полиномов А. О. Гельфонда -С. Н. Бернштейна // ДАН СССР.-1971.-199, №4.-С.762-765.

49. Ипатов А. Ф. О сходимости полиномов С.Н.Бернштейна функций двух переменных // Уч.зап.Карело-Финского ун-та.-1947.-№4. - С.53-57.

50. Ипатов А. Ф. О полиномах Бернштейна ограниченных функций двух переменных // Уч. зап. Карело-Финского ун-та. Физ.-матем. науки.-1954.-3, - Вып.4. - С.16-51.

51. Ипатов А.Ф.Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных полиномами Бернштейна // Уч. зап. Петрозаводского ун- та , Физ.-матем. науки.-1957.-4. Вып.4.-С.31-48.

52. Канторович Л. В. О некотором разложении по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // ДАН СССР.-1930.-21.-С.563-566.

53. Канторович Л. В. О некотором разложении по полиномам в форме С.Н.Бернштейна // ДАН СССР.-1930.-22.-С.595-601.

54. Карташов Н. В. Об одном обобщении многочленов Бернштейна // Теория вероятностей и математическая статистика.-1975. Вып. 12.-С.54-61.

55. Кендалл М., Дж.Стьюарт А. Теория распределений.-М.: Наука, 1966.-588 с.

56. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.- М.: Наука, 1976.-320 с.

57. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений.-М.: Физматгиз, 1959.- 212 с.

58. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В.,Турбин А.Ф.Справочник по теории вероятностей и математической статистике.- К.: Наук. думка, 1978.-584 с.

59. Крочук В.В. Наближення функцій з допомогою похідних поліномів Бернштейна // Друга наукова конференція молодих математиків України.- К.: Наук. думка, 1966.-С.341-346.

60. Миракьян Г. М. Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx}\sum_{k=0}^{m} C_{k,n}x^{k}$ //ДАН СССР.-1941.-31.-№3.-С. 201-205.

61. Найко Д. А. О приближении производных некоторыми комбинациями операторов класса B // Укр. матем.ж.-1987.-39,№5.-С.583-587.

62. Найко Д. А. Улучшение сходимости многомерных операторов типа B //Приближение функций многих переменных операторами типа B.-К.: 1987 (Препринт 87.28, Киев, Ин-т математики АН УССР).-С.36-56.

63. Натансон И. П. Конструктивная теория функций .-М.-Л.:ГИТТЛ, 1949.-688 с.

64. Никольский С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций,удовлетворяющих условию Липшица,суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем.-1940.- 4.-С.501-507.

25-2-2291

65. Никольский С.М. Приближение многочленами функций действительного переменного // Математика в СССР за 30 лет.- М.,Л.: Гостехиздат, 1948.- С.288-318.

66. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.- М.: Наука, 1969.- 480 с.

67. Оберхеттингер Ф. Преобразование Фурье распределений и их обращения.- М.: Наука, 1979.- 248 с.

68. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры.- М.: Мир, 1983.-344 с.

69. Полиа Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1.- М.: Гостехиздат, 1956.- 396 с.

70. Поль Б.ван дер,Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.- М.: ИЛ,1952.-506 с.

71. Рудин У. Основы математического анализа.-М.:Мир,1966.-320с.

72. Соколов И.Г. Про наближення функцій ,що задовольняють умові Ліпшиця, поліномами Бернштейна // Уч. зап.Львовского ун-на. Сер. физ.-матем.-1947.-5:1.С.5-9.

73. Соколов И.Г. Приближение функций с данным модулем непрерывности полиномами Бернштейна .- Уч.зап. Львского ун-та. Сер. физ.-матем, 1949.- 12, №3.-С.45-52.

74. Справочник по специальным функциям / Ред.Абрамовиц М., Стиган И.- М.: Наука, 1979.-832 с.

75. Станку Д. О некоторых многочленах двух переменных типа Бернштейна и некоторых их приложениях // ДАН СССР.- 1960.-134, №1.- С.48-51.

76. Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.- К.: Наук. думка, 1976.- 340 с.

77. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.- М.: Наука, 1976.- 248 с.

78. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.- М.: Физматгиз, 1960.- 480 с.

79. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.- 304 с.

80. Уиттекер Э.Е., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа.- М.: Физматгиз, 1963.- Т.1.- 342 с.

75. Станку Д. О некоторых многочленах двух переменных типа Бернштейна.

81. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.- М.: Мир, 1967.- 500 с.

82. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.- М.: Мир, 1967.- 752 с.

83. Хиршман И. И., Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки.-М.: ИЛ, 1958.- 312 с.

84. Хлодовский И. Н. О некоторых свойствах полиномов С.Н. Бернштейна // Труды 1-го Всесоюзного математического съезда, Харьков, 1930.

85. Хуан Цзу-жуй. Асимптотический порядок приближения функций операторами вида $B_n(x) - \frac{1}{2n} x(1-x)B_n''(x)$,где B_n - полиномы Бернштейна.-Циньсян шифань сюэюань сюэбао(кит.), 1964. - 5, №2.- С.1-9.

86. Шахвердиев В. М. Об условиях монотонности последовательности обобщенных многочленов С. Н. Бернштейна-А. О. Гельфонда // Матем. заметки.- 1969.- 5, №6.- С.747-752.

87. Arama O. Proprietati privind monotonia sirului si aplicarea de interpolare ale lui S. N. Bernstein si aplicarea lor la studine approximarii functiolar // Acad.Rep. Pop. Rom., Fil. Cluj, Stud. Cerc. mat.- 1957.- No.8.- P.195-210.

88. Berens H., Lorentz G. G. Inverse Theorem for Bernstein Polynomials // Indiana Univ. Math.J.-1972.-21, No.8.P.693-708.

89. Beska M. Convexity and variation diminshing property of multidimensional Bernstein polynomials // Approxim. Theory and Appl.- 1989.- 5, № 2.- P.59-78.
90. Butzer P. L. Linear Combinations of Bernstein Polynomials // Canad. J. Math.-1953.-5, No.4.- P.559-567.
91. Chang Gen-Zhe. Generalized Bernstein-Bezier Polynomials // J. Comput Math.- 1983.- 5, № 2.- P.59-78.
92. Chang Gen-zhe. A proof of the Bernstein Approximation theorem by the Bezior functions // Шусюэ нэнкань, Chin. Ann. Math. -1984.- A5, № 3.- P. 321-324.
93. Derrennic M-M. On Multivariate Approximation by Bernstein-Type Polynomials // J. Approxim. Theory.- 1985, 40.- P.155-166.
94. Esseen S.G. Uber die asimptotisch beste Approximation steitiger Functionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen // Numerische Math.-1960, No.2.- P.206-213.
95. Gonska,Heinz H.; Meier-Gonska,Jutta.A bibliography on approximation by Bernstein-type operators (1955-1982) // Approximation theory, 4.- New York: Academic Press, 1983.- P.739-785.
96. Gonska,Heinz H.; Meier-Gonska,Jutta.A bibliography on approximation by Bernstein-type operators (supplement 1986) // Approximation theory,5 (College Station, Tex.,1986).- Boston, Mass.: Academic Press, 1986.- P.621-654.
97. Holzle G.E. On the degree of approximation of continuous functions by class of sequences of linear positive operators // Proc. Kon. ned.akad.Wetensh.- 1980.- A 83,No.2.-P.171-181.
98. Ismail E. H. Mourad,May C. Ping. On a Family of Approximation Operators // J. Math. Anal.- 1978, No.63.- P.446-462.
99. Johnson N.L.,Kotz S. Distributions in Statistics:Discrete Distribution.-Boston, Houghton Mifflin Comp.-1969.-328 p.

100. Johnson N.L.,Kotz S. Developmens in Discrete Distributions // Int. Statist. Rev., 1969-1980.-1982.-50, No.1.- P.71-101.
101. Joni S.A. Multivariate Exponential operators // Studies in applied mathematics.-1980.-62, No.2- P.175-182.
102. Kendall D. G. Bernstein polynomials and semi-groups of operators // Math. Scand.-1954, No.2.- P.185-186.
103. Leeuw K. On the degree of approximation by Bernstein polynomifls // J. Analise math.-1959.-7, No.1.- P.89-104.
104. Lehnhoff H.H. Local Nikolskii Constants for Positive Linear Operators // J.Approx.Theory.-1981.-33,No.3.- P.224-247.
105. Lindvall T. Bernstein Polynomials and Law of Large numbere // Math. Scientist.-1982.-7, No.2- P.127-139.
106. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials.-Mathematical Expositions.-No.8, Toronto.Opt.: University of Toronto Press, 1953. -150 p.
107. Lu xu-guang. On the order of Bernstein polynomials approximations of multivariate convex functions // Цзисуань мусюэ = Math.numer.sin.- 1988.- 10, № 4.- P.398-407.
108. Martini R. On the approximation of functions together with theier derivatives by certein linear positive operators // Proc. Kon.ned. akad.wet.-1969.-A 72, No.5.:Indagationes math.-1969.-31, No.5.- P.473-481.
109. Moris Carl N. Natural exponential families with quadratic variance functions // Ann.Statist.-1982.-10,No.2.- P.65-80.
110. Moris Carl N. Natural exponential families with quadratic variance functions:statistical theory // Ann.Statist.-1983. - 11, No.2.- P.515-529
111. Noack A. A class of Random Variables with Discrete Distributions // Ann. math. Statist.-1950.-21, No.1.- P.127-132.

112. Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur // Mathematica.-1934.- No.4.- P.494-504.
113. Rathore R. K. S. Lipschitz-Nikolskii Constants for Gamma-operators of Muller // Math.Z.-1975.-141,No.2.- P.193-198.
114. Rathore R.K.S.,Agrawal P.N. Inverse and saturation theorems for derivatives of exponential type operators // Indian J. Pure and Appl. Math.-1982.-13, No.3- P.476-490.
115. Sato Kunio. Global Approximation Theorems for some Exponential-type Operators // J. Approxim.theory.-1981.-32,No.1.- P.107-116.
116. Sikkema P. S. Der Wert einiger Konstanten in Theory der Approximation mit Bernstein- Polynomen // Numtr.Math.-1961.- No.3.- P.107-116.
117. Schurer F., Steutel F.W. On an inequality of Lorentz in the theory of Bernstein Polynomials // Lect. Notes Math.-1976.- No. 501.- P.332-338.
118. Stancu D. D. Sur l'approximation les derives correspondtes de certeins polynomials du type Bernstein // Mathematica (RSR).-1960.-2, No.2.- P.335-348.
119. Stancu D. D. Generalisations of on inequality of G.G.Lorentz // An. Stiunt. Univ.Jasi.-1963,Sec.11.-9,No.1.- P.49-58.
120. Stancu D. D. Use of probabilistic methods i. theory of uniform approximation of continuous functions // Revue Roumaine de Math.pures et appl.-1969.-14, NO.5.- P.673-691.
121. Stark E. L. Bernstein- Polynome,1912-1955//"Funct.Anal.and Approximat.Proc.Conf.;Oberwolfach,Aug.G-16,1980" Basel e. a., 1981.- P.443-461.
122. Szasz O. Generalization of Bernstein polynomials to the infinite interval // J.of Research of the Nat.Bureau of

Stand.-1950, No.45.- P.239-245.
123. De Vore R.A. The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators.-Berlin-Heidelberg-New-York-Springer, 1972.-289 p.
124. Walk H. Probabilistic method in the approximation by linear positive operators // Proc.Kon.akad.wet.-1980.-A 83, No.4.- P.446-455.
125. Weierstrass K. Uber die analytische Darstelbarkeit sogenanter willkurlicher Functionen einer reelen Veranderlichen // Sitzungberiche der Acad.zu Berlin.-1885.-S.633-639.
126. Wood B.,Uniform Approximation with Positive Linear Operators Generated by Binomial Expansions // J.Approx.Theory.- 1989.-56, No.1.- P.48-58.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК