Міністерство освіти і науки України
Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

Ю.І. Волков
Н.М. Войналович

ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

Навчальний посібник

Кіровоград 2008

УДК 519.21
ББК 22.17я73
В67

ISBN 978-966-7406-50-9

Волков Ю.І., Войналович Н.М. Початки стохастики: Навчальний посібник. – Кіровоград, 2008. – 168 с.

Представлені основні поняття теорії ймовірностей і математичної статистики. В основу покладено матеріал річного курсу лекцій і практичних занять, які читались і проводилися авторами посібника протягом ряду років у КДПУ. Теми, які розглядаються, традиційні для курсу теорії ймовірностей і математичної статистики. Кожна з трьох частин курсу супроводжується вправами для практичних занять і самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів педагогічних вузів, вчителів та учнів шкіл з поглибленим вивченням математики.

Рецензенти:

Авраменко О.В. – доктор фізико-математичних наук (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка),

Клочко В.І. – доктор педагогічних наук (Вінницький національний технічний університет).

Затверджено до друку вченою радою Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

ISBN 978-966-7406-50-9

Передмова

Під словом стохастика, яке є ключовим у назві посібника, розуміють теорію ймовірностей і математичну статистику. Стохастика це розділ математики, за допомогою якого можна вивчати випадкові явища.

На сьогодні видано багато монографій і посібників з теорії ймовірностей і математичної статистики, та нерідко вони настільки перевантажені різноманітним матеріалом (часто важливим), що освоїти його студентам за час, який у педагогічних навчальних закладах відводиться на вивчення стохастики, досить проблематично. Ми зробили спробу написати посібник оптимального об’єму і, в той же час, такий, щоб ґрунтовно познайомити студентів з основними ідеями стохастики.

Посібник призначено для студентів та учителів, бо стохастична лінія, нарешті, зайняла чільне місце у змісті шкільної математики.

Матеріал посібника традиційний для навчальних посібників такого типу. Посібник складається з трьох частин: елементарна теорія ймовірностей, теорія ймовірностей, математична статистика.

Об’єктом першої частини є дискретний ймовірнісний простір і дискретні випадкові величини, включаючи арифметичні розподіли й метод генератрис. Закінчується перша частина законом великих чисел у формі теорем Чебишова і Бернуллі.

Друга частина починається з аксіоматики Колмогорова, а далі вивчаються, в основному, абсолютно неперервні випадкові величини і їх сукупності, при цьому особлива увага приділяється функціям від випадкових величин і характеристичним функціям. Доводиться центральна гранична теорема у формі теореми Ліндеберга. Закінчується друга частина знайомством з методом Монте-Карло на прикладі його застосування для знаходження визначених інтегралів.

У третій частині розглянуто основні задачі математичної статистики: точкове оцінювання, інтервальне оцінювання, перевірка гіпотез, кореляційний і дисперсійний аналізи. Кожна частина посібника супроводжується вправами для аудиторної і самостійної роботи студентів. Найбільше вправ подано до першої частини; це невипадково, – вони можуть бути використані при вивченні елементів теорії ймовірностей у школі.

При написанні посібника використовувались різноманітні джерела, у списку літератури вказано лише ті посібники, які використовувались найчастіше, і які ми рекомендуємо студентам для поглибленого вивчення стохастики.

Частина I

Елементарна теорія ймовірностей

§1. Частота і ймовірність

1. Стохастичний експеримент. Під стохастикою розуміють два розділи математики: теорію ймовірностей і математичну статистику – це розділи, за допомогою яких можна вивчати випадкові явища. Стохастика виникла в результаті аналізу азартних ігор, переписів населення, питань страхування майна. У 17 столітті цими питаннями цікавилися видатні французькі математики Паскаль і Ферма. Першим великим дослідженням з теорії ймовірностей був трактат Гюйгенса (1657 рік) "Про розрахунки в азартній грі". Та тільки праця Якоба Бернуллі "Ars conjectandi (Мистецтво передбачень)", яка була опублікована в 1713 році (через 8 років після смерті автора), поклала початок теорії ймовірностей, як строгої математичної дисципліни.

Первісним поняттям стохастики є поняття стохастичного експерименту. Це дослід, експеримент, випробування, в широкому розумінні цих слів, результат якого заздалегідь передбачити не можна – він випадковий. Та не всякі експерименти з випадком називають стохастичними й дати точне означення цього поняття не просто. Одна з основних властивостей стохастичного експерименту полягає в тому, що його можна повторювати багато разів без зміни умов проведення, і, що при багаторазовому повторенні експерименту, наслідки попередніх експериментів не впливають на наслідки наступних експериментів. Наслідки стохастичних експериментів називаються випадковими подіями, або просто подіями. Найпростішим прикладом стохастичного експерименту є підкидання монети, в якому може відбутися одна з двох подій: випадає герб, випадає цифра.

Розглянемо детальніше приклад стохастичного експерименту, який розглядав Бернуллі. Нехай в урні сховано 5 тисяч камінців: 3 тисячі білих і 2 тисячі чорних. Але вважатимемо, що нам невідома кількість білих і чорних камінців. Будемо виймати з урни по черзі камінець за камінцем, відмічати їх колір і повертати назад до урни. Підрахуємо, скільки буде вийнято білих камінців і скільки чорних. Виникає питання, чи можемо ми, повторюючи цей дослід багато разів, дізнатися скільки в урні камінців того чи іншого кольору?

На перший погляд здається що відповісти на це питання неможливо. Та насправді, якщо випробувань із витягуванням камінців провести досить багато, то виявиться, що частка білих камінців буде приблизно дорівнювати 3/5, а чорних 2/5 від усієї кількості камінців. Отже, якщо буде відома загальна кількість камінців, то ці частки дозволять зробити висновок про кількість камінців кожного кольору.

Уважніше проаналізуємо результати нашого експерименту. Цей експеримент складний. Він складається з простіших експериментів – одноразового виймання камінця. Такі прості експерименти, з яких складаються складні, часто називаються стохастичними випробовуваннями. У нашому випадку, в результаті окремого випробовування відбувається одна з двох подій: вийнятий камінець – білий, вийнятий камінець – чорний. Для скорочення подальших записів першу з цих подій позначатимемо літерою A, другу – B.

При проведенні великої кількості випробувань бачимо, що подія A відбувалася частіше, ніж подія B. Отже, часткою білих камінців (від усіх випробувань) можна оцінити ступінь вірогідності, або інакше – ймовірності події A. А часткою чорних камінців – ймовірність події B. Якби ми заздалегідь знали, скільки білих камінців сховано в урні, то природно за ймовірність події A потрібно було б взяти число 3/5, а за ймовірність події В – 2/5. Оцінка ймовірності події на основі експериментальних даних є однією з задач математичної статистики.

Важливо відмітити, що зі збільшенням кількості випробувань, частка білих камінців (від усіх випробувань) все менше і менше відрізнятиметься від числа 3/5, а чорних – від числа 2/5. В цьому проявляється дія давно відомого людям закону – закону великих чисел або, інакше, закону стійкості частот.

Можна навести й інші приклади, в яких би ми виявили дію закону великих чисел. Так, якщо багато разів підкидати новеньку монету, то десь у половині випадків випадає герб, а в інших випадках – цифра. Тому ймовірністю випадання герба вважають число 1/2 .

Ще одним прикладом прояву закону великих чисел може бути частка хлопчиків серед новонароджених дітей. Люди давно помітили, що хлопчиків народжується більше, ніж дівчаток, їх частка серед новонароджених залежить від країни, регіону, року, та вважається, що в середньому ця частка складає біля 51.4%.

2. Статистичне означення ймовірності. Розглянемо яке-небудь стохастичне випробування й подію A, яка може відбутися при цьому випробуванні. Проведемо ці випробування n разів і позначимо через $k_n(A)$ кількість випробувань, в яких подія A відбулася.

Відношення

$$\nu_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

називається частотою події A *в проведеній серії з* n *випробувань.*

Частоту події можна знайти тільки після того, як буде проведена серія випробувань, і, взагалі кажучи, частота зміниться, якщо взяти іншу серію випробувань, або змінити n. При достатньо великих n, для більшості таких серій випробувань, частота майже не буде мінятися. При цьому великі відхилення будуть спостерігатися тим рідше, чим більшим буде n. Це твердження виражає закон стійкості частот або **закон великих чисел**.

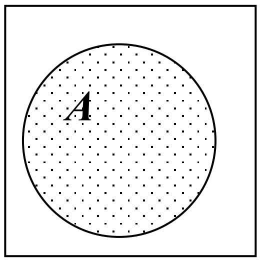
Якщо при великих n *частота* $\nu_n(A)$ *події* A *мало відрізняється від частоти цієї події в інших серіях з* n *випробувань, то подія* A *називається стохастично стійкою, а число* $\nu_n(A)$ *називається ймовірністю події* A.

Ми можемо тепер уточнити поняття стохастичного експерименту: *їхні наслідки повинні бути стохастично стійкими.*

Головним недоліком цього означення є те, що ймовірність події знаходиться неоднозначно й залежить не тільки від події, а й від серії випробувань. Таке означення ймовірностей не є формальним означенням, а тому однією з основних задач теорії ймовірностей є формалізація поняття ймовірності та вивчення математичних об’єктів, пов’язаних із цим поняттям.

3. Геометричні ймовірності. Розглянемо ще декілька важливих прикладів стохастичних експериментів.

У квадрат, сторона якого відома, навмання кидається точка. Візьмемо в цьому квадраті якусь область A. Через A позначимо подію: точка попала в область A. Спробуємо визначити ймовірність події A, користуючись статистичним означенням. Кинемо навмання у квадрат



n точок і нехай k точок попали в область A. Інтуїтивно зрозуміло, що відношення k/n, тобто частота події A, буде близькою до відношення площі області A до площі квадрата, і чим більше точок ми кинемо, тим менше буде відрізнятись частота події від цього відношення. Тоді природно за ймовірність події A взяти відношення площі A до площі квадрата. Якщо ймовірності визначаються подібним чином, то вони називаються *геометричними ймовірностями.*

Звичайно, замість квадрата можна брати довільну область, або довільну поверхню, які мають площу. Позначимо ці об’єкти буквою Ω, а ймовірність події A через $\mathbf{P}(A)$. Тоді *геометричні ймовірності* визначатимуться за формулою

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{площа } A}{\text{площа } \Omega}$$

Аналогічні стохастичні експерименти можна проводити з просторовими тілами, які мають об’єм, або з дугами, які мають довжину. У першому випадку *геометричні ймовірності* визначаються за формулою

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{об'єм } A}{\text{об'єм } \Omega},$$

а в другому – за формулою $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{довжина } A}{\text{довжина } \Omega}$.

П р и к л а д. Знайти ймовірність впасти боком однорідному циліндру при його підкиданні, якщо діаметр основи циліндра дорівнює D, а висота H.

Р о з в ’ я з а н н я. Опишемо навколо циліндра уявну сферу, її діаметр дорівнюватиме $\sqrt{D^2 + H^2}$. Якщо підкидати циліндр, то можна вважати, що як тільки уявна точка сферичного поясу, описаного навколо бічної поверхні циліндра, доторкнеться горизонтальної площини, то він впаде боком. Отже, за ймовірність шуканої події можна взяти відношення площі сферичного пояса до площі всієї сфери. Площа нашої сфери дорівнює $\pi\left(D^2 + H^2\right)$, площа відповідного сферичного пояса дорівнює $\pi H\sqrt{D^2 + H^2}$, а тому ймовірність впасти боком циліндру дорівнює числу $H\big/\sqrt{D^2 + H^2}$. Наприклад, якщо $D/H = \sqrt{3}$, то ймовірність впасти боком дорівнюватиме $1/2$.

4. Простір елементарних подій і дії над подіями. З кожним стохастичним експериментом пов’язана множина всіх можливих наслідків, які називають подіями. Розрізняють складені події (ті, які можна розкласти) й елементарні події (ті, які не можна розкласти). Наприклад, при підкиданні грального кубика, сказати, що кількість вічок, які випали на верхній грані, є парним числом – це все одно що сказати: дослід призвів до одного з наслідків: “випало або 2, або 4, або 6 вічок”. Цей перерахунок розкладає подію: “число вічок парне” на три елементарні події.

Сукупність усіх елементарних подій називається простором елементарних подій, який надалі позначатимемо грецькою літерою Ω.

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 1. Експеримент полягає в тому, що один раз підкидається монета. Монета може впасти догори гербом або цифрою. Простір елементарних подій даного експерименту – це множина $\Omega = \{Г, Ц\}$, де літера Г означає, що випав герб, а літера Ц означає, що випала цифра.

П р и к л а д 2. Гральний кубик підкидається один раз. Тоді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_j означає випадання грані з j вічками.

П р и к л а д 3. З колоди, яка містить 36 карт, витягнено одну карту. Тоді простір елементарних подій складається з 36 подій.

Ці експерименти мають скінченне число наслідків. Проте в багатьох важливих задачах теорії ймовірностей доводиться розглядати експерименти з нескінченним числом наслідків.

П р и к л а д 4. Монету підкидають доти, поки не з’явиться герб. Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ..., \underbrace{Ц\ldots Ц}_{n}Г, ...\}$.

П р и к л а д 5. При підкиданні однорідного циліндра (див. п.2) простором елементарних подій вважалася множина всіх точок сфери, описаної навколо циліндра, а прикладом складеної події була множина всіх точок відповідного сферичного пояса.

П р и к л а д 6. Двічі підкидають монету. Позначимо через A випадкову подію, яка полягає в тому, що хоча б раз з’явиться герб. Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Коли відбудеться подія A? Коли результатом експерименту буде одна з елементарних подій: або ГГ, або ГЦ, або ЦГ. Тобто, подію A можна розглядати, як підмножину $A = \{ГГ, ГЦ, РЦ\}$ множини Ω, що містить ті елементарні події, при появі яких відбудеться A.

П р и к л а д 7. Підкидають гральний кубик. Розглянемо подію A: випаде непарне число вічок. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Отже, ми ототожнюємо випадкову подію A з підмножиною A тих елементарних подій, при появі яких відбувається A.

Вся множина Ω ототожнюється з *вірогідною* подією, яка відбувається завжди після проведення експерименту, а порожня множина $\varnothing$ – з *неможливою* подією, яка ніколи не відбувається.

Сумою (*або об'єднанням*) *подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з цих подій. Сума подій позначається символом* $A+B$ *або* $A \bigcup B$. Наприклад, в електричному колі дві лампочки з'єднано послідовно. Нехай подія A – перегоріла перша лампочка, подія B – перегоріла друга лампочка. Тоді подія $A + B$ – електричне коло розімкнено (світло зникло).

Добутком (*або перетином*) *подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбуваються обидві події. Добуток подій позначається символом AB або* $A \bigcap B$. Наприклад, в електричному колі дві лампочки з'єднано паралельно. Нехай подія A – перегоріла перша лампочка, подія B – перегоріла друга лампочка. Тоді подія AB – електричне коло розімкнене (світло зникло).

Подією протилежною до події A називається подія, яка відбувається тоді й лише тоді, коли не відбувається подія A й позначається символом $\overline{A}$. Наприклад, стрілець стріляє в мішень. Нехай подія A – стрілець влучив. Тоді подія $\overline{A}$ – стрілець не влучив.

Різницею подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B не відбувається. Різниця подій позначається символом $A-B$ *або* $A \setminus B$. Наприклад, два спортсмени стріляють в мішень. Нехай подія A – влучив перший спортсмен, подія B – влучив другий. Тоді подія $A-B$ – перший спортсмен влучив, а другий промахнувся; подія $B-A$ – другий влучив, а перший промахнувся.

Симетричною різницею подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбувається або подія A, або подія B, але не відбувається подія AB. Симетрична різниця позначається символом $A \circ B$. Наприклад, два спортсмени стріляють в мішень. Нехай подія A – влучив перший спортсмен, подія B – влучив другий. Тоді подія $A \circ B$ – перший спортсмен влучив, а другий промахнувся; або – другий влучив, а перший промахнувся.

Дві події називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, або дві події несумісні, якщо їх добуток неможлива подія. При підкиданні кубика подія "випало парне число вічок" несумісна з подією "число вічок, що випали, кратне п'яти".

У попередньому пункті було дано означення частоти події. Звернемо увагу на те, що частота події це функція $\nu_n(A)$, аргументом якої є подія A.

Розглянемо *властивості* цієї функції.

1. Область визначення: множина всіх подій, пов'язаних з даним експериментом.
2. Множина значень: [0, 1].
3. $\nu_n(\Omega) = 1$.
4. $\nu_n(\varnothing) = 0$.
5. Якщо події А та В несумісні, то $\nu_n(A + B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$.

Доведення. Нехай у результаті n випробувань подія A відбулася k разів, а подія B – m разів. Оскільки подія AB неможлива, то в результаті даного експерименту подія $A + B$ відбулася $k + m$ разів. Тоді

$$\nu_n(A + B)=\frac{k+m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{m}{n}= \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Прикладів стохастичних експериментів, які ми розглянули, й подібних прикладів, можна навести безліч. У свою чергу, такі приклади підказують і загальну схему для побудови стохастичних експериментів: візьмемо довільну множину Ω і будемо "навмання" вибирати елементи цієї множини. Цей вибір буде загальною моделлю стохастичного експерименту.

Далі основна увага приділяється випадку, коли простір елементарних подій скінченний. Таку частину теорії ймовірностей (услід за А.М. Колмогоровим) називають елементарною теорією ймовірностей.

§2. Основні поняття теорії ймовірностей

1. Аксіоматичне означення ймовірності. Розглянемо довільну множину, яка складається з n елементів

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}.$$

***Означення* 1**. *Подією називається будь-яка підмножина множини Ω, включаючи порожню множину $\varnothing$, яка називається неможливою подією, і саму множину Ω, яка називається вірогідною подією. Одноелементні підмножини називаються елементарними подіями.*

Події позначатимемо великими літерами латинського алфавіту. Множину всіх подій – літерою $\mathcal{F}$. Якщо А подія, то пишуть $A \in \mathcal{F}$.

***Означення* 2**. *Ймовірністю події A називається числова функція* $\mathrm{P}(A)$*, яка визначена на множині подій $\mathcal{F}$ і має такі властивості.*

1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
2. $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p_1$, $\mathbf{P}(\{\omega_2\}) = p_2, \ldots$, $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n$, *числа* p_1, p_2, ..., p_n – *невід'ємні й* $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. *Числа* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – *ймовірності елементарних подій.*
3. *Ймовірність довільної події A знаходиться як сума ймовірностей елементарних подій, з яких складається подія A.*

Властивості 1–3 називаються *аксіомами ймовірності*.

*Примітка***.** У загальному випадку під подіями розуміють не всі підмножини множини Ω, а тільки ті, які належать виділеній алгебрі підмножин.

Далі фігурні дужки для запису елементарних подій писати не будемо.

2. Класичне означення ймовірності. Розглянемо частковий випадок уведеного означення. Будемо вважати, що всі n елементарних подій мають одну і ту ж ймовірність, тобто ймовірність, що дорівнює числу $\frac{1}{n}$ (бо сума всіх ймовірностей елементарних подій за аксіомою 2 повинна дорівнювати 1). Тоді ймовірність довільної події A легко визначити: досить підрахувати кількість елементарних подій з яких складається подія A (цю кількість позначимо через m) і поділити на кількість усіх елементарних подій. Отже,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Якщо ймовірність події визначається за допомогою цього відношення, *то таке означення ймовірності називається класичним.* Ті елементарні події, з яких складається подія A, називають подіями (випадками), що сприяють появі події A. Тому в літературі часто можна зустріти таке означення ймовірності.

***Означення*.** *Ймовірністю події A називається відношення кількості випадків, що сприяють появі події A, до кількості всіх випадків.*

3. Дії над подіями. Оскільки події – це множини, то над подіями можна виконувати ті ж операції, що й над множинами.

***Означення* 1**. *Сумою* (*або об'єднанням*) $A + B$ *подій A та B називається об'єднання відповідних множин* (*тобто подія, яка* *складається з елементарних подій, що входять до складу події A або події B, або до обох разом).*

***Означення 2**. Добутком (або перетином) AB подій A та B називається перетин відповідних множин (тобто подія, яка складається з усіх елементарних подій, які спільні для обох події A і B).*

***Означення 3**. Подією протилежною до події A називається подія $\overline{A}$, яка складається з усіх елементарних подій, які не входять в A.*

***Означення 4**. Різницею $A - B$ подій A та B називається різниця відповідних множин (тобто подія, яка складається з елементарних подій, що входять до події A і не входять до події B).*

***Означення 5**. Події A та B називаються несумісними, якщо $AB = \varnothing$.*

Теорема 1. *Якщо події A та B несумісні, то* $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Доведення. Нехай $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$, $B = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$. Тоді $A + B=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$, бо $AB = \varnothing$,

$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_1) + \mathbf{P}(\omega_2) +...+ \mathbf{P}(\omega_k)$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\omega_{k+1}) + \mathbf{P}(\omega_{k+2}) +\ldots+ \mathbf{P}(\omega_n)$.
Отже, $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(\omega_1)+\mathbf{P}(\omega_2)+...+\mathbf{P}(\omega_k)+\mathbf{P}(\omega_{k+1})+\mathbf{P}(\omega_{k+2})+...+\mathbf{P}(\omega_n)$ $=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$.

Теорема 2. (теорема додавання) $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

Доведення. Нехай A і B довільні події:

$A = \{\omega_1, \omega_2, ...,\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k\}$, $B = \{\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k,\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$. Тоді $A+B = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$, $AB = \{\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k\}$.

Розглянемо $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) =[\mathbf{P}(\omega_1) + \mathbf{P}(\omega_2) +...+ \mathbf{P}(\omega_m) +$

$\mathbf{P}(\omega_{m+1}) +...+ \mathbf{P}(\omega_k)] ++ [\mathbf{P}(\omega_m) + \mathbf{P}(\omega_{m+1}) +...+ \mathbf{P}(\omega_k) + \mathbf{P}(\omega_{k+1})$
$+ \mathbf{P}(\omega_{k+2}) +...+ \mathbf{P}(\omega_n)] == [\mathbf{P}(\omega_1)+\mathbf{P}(\omega_2)+...+\mathbf{P}(\omega_m)+\mathbf{P}(\omega_{m+1})+...+ \mathbf{P}(\omega_k) +$
$\mathbf{P}(\omega_{k+1}) + \mathbf{P}(\omega_{k+2})+...+\mathbf{P}(\omega_n)]++ [\mathbf{P}(\omega_m) + \mathbf{P}(\omega_{m+1}) +...+ \mathbf{P}(\omega_k)] = \mathbf{P}(A+B) +$
$\mathbf{P}(AB)$.

Звідси маємо $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

Теорема 3. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Доведення. Оскільки $A + \overline{A} = \Omega$, а події A та $\overline{A}$ несумісні, то за третьою властивістю ймовірності та теоремою додавання маємо:

$$\mathbf{P}(A + \overline{A}) = \mathbf{P}(\Omega);\ \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1;\ \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}).$$

§3. Умовні ймовірності

1. Означення умовної ймовірності. Розв'язання задач теорії ймовірностей починається з вибору математичної моделі. При визначенні ймовірностей подій часто виникають певні труднощі. Для їх подолання вводяться нові поняття. Одним з них є поняття умовної ймовірності. Спочатку розглянемо приклад.

Навмання на шахову дошку розміру 8×8 ставиться ферзь (рис. 1). Нехай подія A – ферзь попадає у верхній лівий квадрат (надалі цей квадрат позначатимемо буквою A), B – попадає у нижній правий квадрат (а цей квадрат позначатимемо буквою B). Тоді $\mathbf{P}(A) = 25/64$, $\mathbf{P}(A) = 36/64$, $\mathbf{P}(AB) = 9/64$.

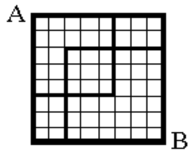


рис. 1

Припустимо, що подія B відбулася – ферзь у квадраті B. Тоді ймовірність того, що він попав і в квадрат А, дорівнює 9/36. Позначимо цю ймовірність символом $\mathbf{P}(A|B) = 9/36$. (При відшуканні цієї ймовірності ми по суті мали справу з іншим стохастичним експериментом: ферзь навмання ставили у квадрат B, і відшукували ймовірність того, що він попадає в ту частину квадрату A, яка є спільною з квадратом B).

Неважко помітити, що для цих ймовірностей має місце співвідношення: $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} = \dfrac{9\cdot 64}{64\cdot 36} = \dfrac{9}{36}$.

Це співвідношення не випадкове. Якщо замість A та B розглянути інші подібні події, то матиме місце та сама залежність.

***Означення* 1**. *Нехай A і B довільні події і* $\mathbf{P}(B) \neq 0$. *Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається число* $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{AB})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}$.

Наслідок. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$.

Часто цей наслідок називають теоремою множення.

2. Незалежні події.

***Означення* 1**. *Дві події A та B називаються незалежними, якщо*

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \text{ або } \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \quad (1)$$

Теорема 1. (*Необхідна й достатня ознака незалежності двох подій*). *Для того, щоб події A та B були незалежними необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \tag{2}$$

Доведення.

Необхідність. Якщо події А і В незалежні, то

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \tag{3}$$

За означенням умовної ймовірності

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} \tag{4}$$

Оскільки ліві частини рівностей (3) і (4) однакові, прирівняємо їх праві частини. Маємо $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$. Звідки $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Достатність. Нехай має місце рівність (2). Покажемо, що події A та B незалежні. Поділимо праву і ліву частину рівності (2) на $P(B)$. Маємо $\dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$. Оскільки за означенням умовної ймовірності $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)$. Отже, події A та B незалежні. □

Означення 2. *Події $A_1, \ldots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо*

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right)\mathbf{P}\left(A_{i_2}\right)\ldots\mathbf{P}\left(A_{i_r}\right)$$

для всяких комбінацій r подій з n, $r = 2, 3, \ldots, n$.

Примітка. З попарної незалежності подій не випливає незалежність подій у їх сукупності. Це можна проілюструвати на такому прикладі С.Н. Бернштейна. Грані правильної трикутної піраміди зафарбовані так: одна грань зелена, друга – синя, третя – жовта, а четверта грань зафарбована трьома кольорами: зеленим, синім, жовтим. При підкиданні піраміди вона стає на одну з граней з ймовірністю $1/4$. Нехай A подія: піраміда стала на грань з зеленим кольором, B – на грань з синім кольором, C – на грань з жовтим кольором. Тоді $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 1/2$; $\mathbf{P}(AB) = 1/4 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(AC) = 1/4 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(BC) = 1/4 = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Але $\mathbf{P}(ABC) = 1/4 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)(C)$.

Приклад 1. З колоди, яка містить 36 карт, навмання виймають одну карту. Позначимо через A подію – вийнята карта дама, через B – вийнята карта піка. Чи є ці події незалежними?

Розв'язання. Зробимо перевірку, скориставшись означенням:

$\mathbf{P}(A) = 1/9$; $\mathbf{P}(B) = 1/4$; оскільки подія AB означає, що витягнута карта пікова дама, то $\mathbf{P}(AB) = 1/36$. Отже, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ і за теоремою 1 події A та B є незалежними.

Приклад 2. Розглянемо приклад подібний до попереднього, але витягуватимемо карту з колоди, яка складається з 37 карт (36 звичайних і одна карта без масті – джокер). Чи будуть в цьому випадку події A та B незалежними?

Розв'язання. В цьому випадку маємо:

$$\mathbf{P}(A) = 4/37,\ \mathbf{P}(B) = 9/37,\ \mathbf{P}(AB) = 1/37.\ \mathbf{P}(AB) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Отже, події A та B не є незалежними.

3. Формула повної ймовірності. Нехай B_1, B_2, ..., B_n такі попарно несумісні події, що $B_1 + B_2 + ... + B_n = \Omega$. Яка б не була подія A має місце співвідношення:

$$A = AB_1 + AB_2 + ... + AB_n$$

(цей факт допоможе зрозуміти рис. 2).

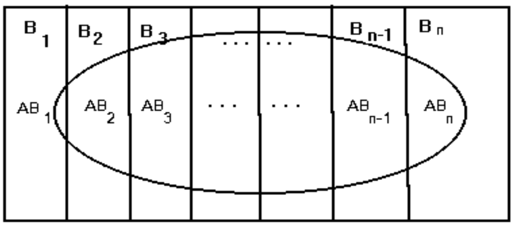


рис. 2

Тоді $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB_1) + \mathbf{P}(AB_2) + ... + \mathbf{P}(AB_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(AB_i)$

і на основі теореми множення маємо: $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(AB_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A|B_i)$.

Одержана формула називається формулою повної ймовірності. З формули повної ймовірності легко одержати формули

$$\mathbf{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(A|B_k)}, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

які називаються формулами Байєса.

§4. Випадкові величини

1. Поняття випадкової величини. Під випадковою величиною розуміють числову величину, яка з'являється в результаті стохастичного експерименту. Зрозуміло, що випадкова величина повинна бути пов'язана з елементарною подією: відбулася подія –

випадкова величина набула певного значення.

Приклад 1. Гра в орлянку має такі правила: підкидається монета, при випаданні герба гравець отримує одне очко, при випаданні цифри – нуль очок. Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, де ω_1 – випадання герба, ω_2 – випадання цифри. Кожній елементарній події поставимо у відповідність число очок (виграш) $\omega_1 \to 1$, $\omega_2 \to 0$.

Цей виграш є прикладом випадкової величини. Позначимо її через ξ. Множина значень ξ: $\{0, 1\}$.

Приклад 2. Випробування полягає в підкиданні грального кубика. Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$, де ω_j випадання грані з j вічками. Кожній елементарній події поставимо у відповідність число вічок на грані:

$$\omega_1 \to 1,\ \omega_2 \to 2,\ \omega_3 \to 3,\ \omega_4 \to 4,\ \omega_5 \to 5,\ \omega_6 \to 6.$$

Отже, маємо випадкову величину ξ – число вічок на грані. Множина значень ξ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приклад 3. Випробування полягає в тому, що двічі підкидається шайба циліндричної форми, на поверхні якої знаходяться вічка: на одній основі 0 вічок, на другій 1 вічко, на бічній поверхні 2 вічка.

Шайба має такі розміри, що ймовірність появи 0 вічок дорівнює 1/4, ймовірність появи 1 вічка – 1/4, ймовірність появи 2-х вічок – 1/2.

Елементарною подією буде впорядкована пара чисел, які є кількістю вічок, що з’явилися відповідно в результаті першого та другого підкидань шайби. На кожну елементарну подію можна дивитися, як на добуток двох подій, що послідовно відбулися в результаті підкидань шайби.

Кожній елементарній події поставимо у відповідність суму вічок. Маємо випадкову величину ξ: сума вічок. Множина значень ξ: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$\omega_1 = (0, 0) \to 0$, $\mathbf{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, $\omega_2 = (0, 1) \to 1$, $\mathbf{P}(\omega_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,

$\omega_3 = (1, 0) \to 1$, $\mathbf{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, $\omega_4 = (1, 1) \to 2$, $\mathbf{P}(\omega_4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,

$\omega_5 = (0, 2) \to 2$ $\mathbf{P}(\omega_5) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\omega_6 = (2, 0) \to 2$, $\mathbf{P}(\omega_6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,

$\omega_7 = (1, 2) \to 3$, $\mathbf{P}(\omega_7) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\omega_8 = (2, 1) \to 3$, $\mathbf{P}(\omega_8) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,

$\omega_9 = (2, 2) \to 4$, $\mathbf{P}(\omega_9) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\}.$$

З прикладу 3 видно, що кількість різних значень випадкової величини не обов'язково збігається з кількістю елементів простору елементарних подій, бо різним елементарним подіям можуть відповідати однакові значення випадкової величини.

***Означення* 1**. *Випадковою величиною називається всяка числова функція $\xi = \xi(\omega)$, яка визначена на множині елементарних подій.*

Серед можливих значень $\xi(\omega)$, що відповідають різним $\omega \in \Omega$, не обов'язково всі різні. Позначимо різні можливі значення випадкової величини ξ через $x_1, x_2, ..., x_k$ (де $k \le n$).

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що $\xi = x_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Подія відбудеться, коли відбудеться одна з елементарних подій ω_j, така що $\xi(\omega_j) = x_i$. Отже, ця подія $\{\xi = x_i\} = \{\omega\colon \omega\in\Omega, \ \xi(\omega) = x_i\}$. Позначимо через p_i ймовірність події $\{\xi = x_i\}$. Тоді

$$p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\} = \mathbf{P}\{\omega\colon \omega\in\Omega, \xi(\omega) = x_i\} = \sum_{\omega\,:\,\xi(\omega)=x_i} \mathbf{P}(\omega).$$

Тепер ми можемо кожному значенню x_i випадкової величини ξ поставити у відповідність p_i.

***Означення* 2**. *Таблиця*

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

де у верхньому рядку стоять всі можливі значення випадкової величини ξ, у нижньому – відповідні ймовірності p_i цих значень, задає функцію, яка називається функцією ймовірності випадкової величини ξ. (В літературі частіше цю таблицю називають *розподілом випадкової величини ξ*). Зрозуміло, що $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

2. Математичне сподівання.

***Означення* 1.** *Математичним сподіванням випадкової величини ξ називається число $\mathbf{M}\xi$, яке визначається формулою*

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega).$$

Часто замість терміну математичне сподівання використовується термін: *середнє значення* випадкової величини. Для того, щоб зрозуміти зміст цього поняття, розглянемо приклад.

П р и к л а д 1. Будемо підкидати гральний кубик. Цьому стохастичному експерименту відповідає простір елементарних подій

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_j – випадання грані з j вічками. Нехай дослідник у результаті кожного підкидання отримує стільки умовних одиниць виграшу, скільки випало вічок.

Розглянемо випадкову величину $\xi(\omega_i) = i$, яка кожному підкиданню кубика ставить у відповідність виграш, що дорівнює числу вічок. Знайдемо її математичне сподівання:

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \xi(\omega_1)\mathbf{P}(\omega_1) + \xi(\omega_2)\mathbf{P}(\omega_2) + \xi(\omega_3)\mathbf{P}(\omega_3) +$$

$$+ \xi(\omega_4)\mathbf{P}(\omega_4) + \xi(\omega_5)\mathbf{P}(\omega_5) + \xi(\omega_6)\mathbf{P}(\omega_6).$$

Нехай у результаті n підкидань елементарні події відбулися наступне число разів:

Подія	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Число появ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6

$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = n)$.

При великому n можна вважати, що $\mathbf{P}(\omega_i) \approx \frac{k_i}{n}$. Тоді

$$\mathbf{M}\xi \approx \frac{1}{n}\cdot(\xi(\omega_1)\cdot k_1 + \xi(\omega_2)\cdot k_2 + \xi(\omega_3)\cdot k_3 + \xi(\omega_4)\cdot k_4 + \xi(\omega_5)\cdot k_5 + \xi(\omega_6)\cdot k_6).$$

Вираз в дужках – це загальний виграш, що відповідає n підкиданням кубика. Тоді $\mathrm{M}\xi$ це середнє арифметичне виграшу, що відповідає одному підкиданню кубика.

Приклад 2. Пригадаємо приклад 3 попереднього пункту про підкидання двох шайб.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини ξ – сума вічок. $\mathbf{M}\xi = \xi(\omega_1)\mathbf{P}(\omega_1) + \xi(\omega_2)\mathbf{P}(\omega_2) + \ldots + \xi(\omega_9)\mathbf{P}(\omega_9) =$

$$= 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{4} = 2.5.$$

Побудуємо розподіл випадкової величини ξ, тобто складемо таблицю, де в першому рядку запишемо всі можливі значення випадкової величини ξ, а в другому – ймовірності, з якими випадкова величина ξ набуде цих значень.

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що $\xi = 0$. Ця подія відбудеться, коли відбудеться елементарна подія ω_1. Тоді

$\mathbf{P}(\{\xi = 0\}) = \mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{16}$.

Аналогічно:

$\mathbf{P}(\{\xi = 1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = \mathbf{P}(\omega_2) + \mathbf{P}(\omega_3) = \dfrac{2}{16}$,

$\mathbf{P}(\{\xi = 2\}) = \mathbf{P}(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = \mathbf{P}(\omega_4) + \mathbf{P}(\omega_5) + \mathbf{P}(\omega_6) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{16}$,

$\mathbf{P}(\{\xi = 3\}) = \mathbf{P}(\{\omega_7, \omega_8\}) = \mathbf{P}(\omega_7) + \mathbf{P}(\omega_8) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{16}$,

$\mathbf{P}(\{\xi = 4\}) = \mathbf{P}(\{\omega_9\}) = \dfrac{4}{16}$.

ξ	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

Звідси

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 =$$
$$0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{2}{16} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{4}{16} = \frac{40}{16} = 2.5.$$

Результат обчислення збігається з математичним сподіванням випадкової величини ξ. Це не випадково, бо

$\mathbf{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \xi(\omega_1)\mathbf{P}(\omega_1) + \xi(\omega_2)\mathbf{P}(\omega_2) + \ldots + \xi(\omega_9)\mathbf{P}(\omega_9) = x_1\mathbf{P}(\omega_1)$
$+ x_2[\mathbf{P}(\omega_2) + \mathbf{P}(\omega_3)] + x_3[\mathbf{P}(\omega_4) + \mathbf{P}(\omega_5) + \mathbf{P}(\omega_6)] + x_4[\mathbf{P}(\omega_7) + \mathbf{P}(\omega_8)] + x_5\mathbf{P}(\omega_9) = x_1\mathbf{P}\{\xi = x_1\} + x_2\mathbf{P}\{\xi = x_2\} + x_3\mathbf{P}\{\xi = x_3\} + x_4\mathbf{P}\{\xi = x_4\} +$
$+ x_5\mathbf{P}\{\xi = x_5\} = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i$.

Теорема. *Нехай випадкова величина ξ має розподіл:*

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Тоді для довільної функції f, яка визначена на множині значень випадкової величини,

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)p_i .$$

Доведення. За означенням математичного сподівання

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\xi(\omega))\mathbf{P}(\omega).$$

Згрупуємо доданки вигляду $f(\xi(\omega))\mathbf{P}(\omega)$ у такі групи, що $\xi(\omega) = x_i$. Тоді

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_{x_i}\left(\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i} f(\xi(\omega))\mathbf{P}(\omega)\right).$$

Але в межах однієї групи маємо: $f(\xi(\omega)) = f(x_i)$, отже,

$$\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i} f(\xi(\omega))\mathbf{P}(\omega) = f(x_i)\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}\mathbf{P}(\omega) = f(x_i)p_i.$$

Тому

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)p_i. \qquad \square$$

Наслідок.

$$\mathbf{M}\xi = \sum_i x_i p_i.$$

Справді, покладемо в умові теореми $f(x) = x$.

Отже, знаючи розподіл випадкової величини, можна знайти математичне сподівання цієї величини. Для цього *потрібно значення випадкової величини помножити на їхні ймовірності й скласти отримані добутки*.

Механічний зміст математичного сподівання: якщо в точки прямої лінії з абсцисами x_1, x_2, ..., x_k покласти маси p_1, p_2, ..., p_k, то абсциса центру мас цієї системи матеріальних точок дорівнює $\sum x_i p_i = \mathbf{M}\xi$, бо $\sum p_i = 1$.

Властивості математичного сподівання.

Властивість 1. *Якщо C – стала, то* $\mathbf{M}(C) = C$.

Сталу C можна розглядати, як випадкову величину, яка набуває лише одного значення C з ймовірністю одиниця. Тому $\mathbf{M}(C) = C\cdot 1 = C$.

Властивість 2. *Якщо C– стала, то* $\mathbf{M}(C\xi) = C\mathbf{M}\xi$.

Дійсно,

$$\mathbf{M}(C\xi) = \sum_{\omega\in\Omega} C\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) = C\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) = C\mathbf{M}\xi.$$

Властивість 3. *Математичне сподівання суми випадкових величин ξ і η дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:*

$$\mathbf{M}(\xi + \eta) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta.$$

Дійсно,

$$\mathbf{M}(\xi + \eta) = \sum_{\omega\in\Omega}\bigl(\xi(\omega) + \eta(\omega)\bigr)\mathbf{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}\bigl(\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) + \eta(\omega)\mathbf{P}(\omega)\bigr) =$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)\mathbf{P}(\omega)=\mathbf{M}\xi+\mathbf{M}\eta.$$

Означення **2**. *Випадкові величини* ξ *і* η, *які набувають відповідно значень* $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$, *називаються незалежними, якщо*

$$\mathbf{P}\{\xi=x_i,\ \eta=y_j\}=\mathbf{P}\{\xi=x_i\}\cdot\mathbf{P}\{\eta=y_i\},\ i=1,...,k,\ j=1,...,m.$$

Властивість 4. *Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин* ξ *і* η *дорівнює добутку математичних сподівань цих величин:*

$$\mathbf{M}(\xi\eta)=\mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\eta.$$

Доведення. Нехай розподіли випадкових величин ξ і η задаються відповідно таблицями:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

η	y_1	y_2	y_3	...	y_m
P	P_1	P_2	P_3	...	P_m

Згідно з означенням математичного сподівання

$$\mathbf{M}(\xi\eta)=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\eta(\omega)\mathbf{P}(\omega).$$

Згрупуємо доданки вигляду $\xi(\omega)\eta(\omega)\mathbf{P}(\omega)$ у такі групи, що $\xi(\omega)=x_i$, $\eta(\omega)=y_j$. Тоді

$$\mathbf{M}(\xi\eta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}\xi(\omega)\eta(\omega)\mathbf{P}(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}x_i y_j\mathbf{P}(\omega)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}\mathbf{P}(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j\mathbf{P}\{\xi(\omega)=x_i\}\mathbf{P}\{\eta(\omega)=y_j\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}x_i\mathbf{P}\{\xi(\omega)=x_i\}\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{P}\{\eta(\omega)=y_j\}=\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta.$$ □

Приклад 3. Вам запропонували взяти участь у азартній грі, умови якої такі: внесок за право на хід у грі становить a грн. Учасник підкидає гральний кубик і отримує виграш, який дорівнює в гривнях числу вічок, що випали. За яких умов є сенс грати?

Розв'язання. Знайдемо $\mathbf{M}\xi$, це середній виграш, що відповідає одному підкиданню кубика. Якщо $a>\mathbf{M}\xi$, то в даній грі брати участь не варто. Якщо $a<\mathbf{M}\xi$ – можна спробувати.

3. Дисперсія.

***Означення* 1**. *Дисперсією випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $(\xi - \boldsymbol{M}\xi)^2$*

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\{(\xi - \boldsymbol{M}\xi)^2\}.$$

Користуючись цим означенням, знайдемо дисперсію випадкової величини ξ, яка має розподіл

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Для цього:

1. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини ξ:

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i .$$

2. Знайдемо **D**ξ, використавши теорему з попереднього пункту. Матимемо: $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}((\xi - \mathbf{M}\xi)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mathbf{M}\xi)^2 p_i$.

Властивості дисперсії.

Властивість 1. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$.

Справді, користуючись властивостями математичного сподівання, отримаємо

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(\xi^2 - 2\xi\mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2) = \mathbf{M}\xi^2 - \mathbf{M}(2\xi\mathbf{M}\xi) + \mathbf{M}(\mathbf{M}\xi)^2 =$$

$$= \mathbf{M}\xi^2 - 2\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2.$$

Властивість 2. *Якщо C – стала, то* $\mathbf{D}(C) = 0$.

Доведення. $\mathbf{D}(C) = \mathbf{M}(C^2) - \mathbf{M}^2(C) = C^2 - C^2 = 0$.

Властивість 3. *Якщо C – стала, то* $\mathbf{D}(C\xi) = C^2 \cdot \mathbf{D}\xi$.

Доведення.

$$\mathbf{D}(C\xi) = \mathbf{M}(C^2\xi^2) - \mathbf{M}^2(C\xi) = C^2\mathbf{M}(\xi^2) - C^2\mathbf{M}^2(\xi) = C^2(\mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)) = C^2\mathbf{D}\xi.$$

Властивість 4. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин ξ і η дорівнює сумі їх дисперсій*

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Доведення. $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{M}(\xi + \eta)^2 - \mathbf{M}^2(\xi + \eta) =$

$$= \mathbf{M}(\xi^2) + 2\mathbf{M}(\xi)\mathbf{M}(\eta) + \mathbf{M}(\eta^2) - \mathbf{M}^2(\xi) - 2\mathbf{M}(\xi)\mathbf{M}(\eta) - \mathbf{M}^2(\eta) =$$

$$= (\mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)) + (\mathbf{M}(\eta^2) - \mathbf{M}^2(\eta)) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Нарівні з дисперсією використовують квадратний корінь з неї

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathrm{D}\,\xi}\,.$$

Величину σ_ξ *називають середнім квадратичним відхиленням.* Вона має ту ж розмірність, що й випадкова величина ξ.

§5. Біноміальний розподіл

Розглянемо випробування, в якому може спостерігатися подія A; настання події A будемо далі називати успіхом, а ненастання – невдачею; при цьому ймовірність успіху дорівнює p, тоді ймовірність невдачі дорівнюватиме $1–p$. Проведемо експеримент, який складається з n послідовних незалежних випробувань. Ці випробування називають випробуваннями Бернуллі.

Розглянемо випадкову величину ξ: число успіхів у n випробуваннях Бернуллі. Знайдемо розподіл ξ, тобто знайдемо ймовірність того, що при проведенні n випробувань Бернуллі подія А відбудеться m разів ($m = 0, 1, 2, ..., n$).

Проведемо міркування у випадку, коли $n = 4$, $m = 2$. Позначимо через $У$ та Н два можливі наслідки i-го випробування (тобто успіх або невдача). Розглянемо подію $\{\xi=2\}$:

$$\{\xi = 2\} = \{\text{УУНН, УНУН, УННУ, НУУН, НУНУ, ННУУ}\}$$

Ця подія відбудеться, коли відбудеться одна з перелічених елементарних подій, їх стільки, скільки існує комбінацій з 4 елементів по 2, тобто C_4^2. Враховуючи, що випробування незалежні, маємо $\mathbf{P}\{\xi = 2\} = \mathbf{P}\{\text{УУНН}\} + \mathbf{P}\{\text{УНУН}\} + \mathbf{P}\{\text{УННУ}\} + \mathbf{P}\{\text{НУУН}\} + \mathbf{P}\{\text{НУНУ}\}+$

$$+\mathbf{P}\{\text{ННУУ}\} = \mathbf{P}\{\text{У}\}\cdot\mathbf{P}\{\text{У}\}\cdot\mathbf{P}\{\text{Н}\}\cdot\{\text{Н}\} + \ldots + \mathbf{P}\{\text{Н}\}\cdot\mathbf{P}\{\text{Н}\}\cdot\mathbf{P}\{\text{У}\}\cdot\mathbf{P}\{\text{У}\} =$$

$$= pp(1-p)(1-p) + \ldots + p(1-p)p(1-p) = 6p^2(1-p)^2 = \mathrm{C}_4^2 p^2(1-p)^2.$$

У загальному випадку, коли n і m довільні числа ($m \le n$), можна провести аналогічні міркування. Тоді (якщо позначити через p_{nm} ймовірності $\mathrm{P}\{\xi = m\}$) $p_{nm} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m = 0,1,2,\ldots,n$.

Цю формулу називають формулою Бернуллі, а відповідний розподіл – біноміальним (біномним) з параметрами (n, p).

Приклад 1. Знайти математичне сподівання й дисперсію випадкової величини, яка має біноміальний розподіл.

Розв'язання. Позначимо через ξ_k число появ події A у k-му випробуванні, ξ_k може набувати двох значень: 1 з ймовірністю p (A відбулася) і 0 з ймовірністю q (A не відбулася). Тоді

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Оскільки

$$\mathbf{M}\xi_k = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p,$$

то

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n = np.$$

Знайдемо $\mathbf{D}\xi$. Оскільки

$$\xi_k^2 = \xi_k,\ \mathbf{D}\xi_k = \mathbf{M}\,\xi_k^2 - (\mathbf{M}\xi_k)^2 = p - p^2 = pq,$$

де $q = 1 - p,$ і випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні, то

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n = npq.$$

Отже,

$$\mathbf{M}\xi = np,\ \mathbf{D}\xi = npq.$$

Приклад 2. Знайти найімовірніше значення випадкової величини, яка має біноміальний розподіл з параметрами (n, p).

Розв'язати цю задачу означає: знайти номер найбільшого члена послідовності $p_{n0}, p_{n1}, p_{n2}, \ldots p_{nn}$. Для цього розв'яжемо відносно k нерівність: $\dfrac{p_{n(k+1)}}{p_{nk}} \geq 1$.

Ця нерівність рівносильна таким:

$$\frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(n-k)p}{(k+1)q} \geq 1 \Leftrightarrow k \leq p(n+1) - 1.$$

Звідси бачимо, що коли $p(n + 1)$ ціле, то матимемо два найімовірніших значення: $p(n + 1)$ і $p(n + 1) - 1$, інакше – одне значення: $[p(n + 1)]$.

Для розв'язування задач, пов'язаних з біноміальним розподілом, використовуються таблиці біноміальних ймовірностей. Корисною може стати програма **Bin_dstrb,** яка служить для знаходження ймовірності попадання випадкової величини, що має біноміальний розподіл з параметрами (n, p), в проміжок $[a, b]$. Якщо покласти $a = b = k \in N,$ то отримаємо біноміальні ймовірності $p_{nk} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

```
program Bin_dstrb;
const
   nn = 10;
type
   sequ = array[0..nn] of real;
var
   i, n: integer;
   p, x, a, b, pab: real;
   f: sequ;
function brd_1(f: sequ; n: integer; x: real):
         real;
   var
       i: integer;
 begin
   for i:=0 to n-1 do f[i]:=f[i]*(1-x)+f[i+1]*x;
   if n=1 then brd_1:=f[0] else brd_1:=brd_1(f,n-
         1,x)
 end; (* brd_1 *)
begin
    writeln('Введіть n, p, a, b'); read(n, p, a,
b);for i:=0 to n do if (i<trunc(a)) or
(i>trunc(b)) then f[i]:=0 else f[i]:=1;
    pab:=brd_1(f, n, p);
    writeln(pab);
end.
```

§6. Закон великих чисел

1. Нерівності Чебишова.

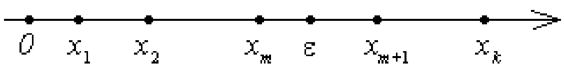
Теорема. *Нехай* ξ *невід'ємна випадкова величина. Тоді для довільного* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\{\xi\ge\varepsilon\}\le\frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Доведення. Нехай випадкова величина ξ має розподіл, що заданий таблицею, в якій можливі значення ξ розташовані в порядку зростання $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Нанесемо всі значення ξ на координатну пряму



Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Нанесемо і його на координатну пряму. Тоді існує таке m, що

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \varepsilon \le x_{m+1} < \ldots < x_k.$$

Розглянемо подію $\{\xi \ge \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$:

$$\{\xi \ge \varepsilon\} = \{\xi = x_{m+1}\} + \{\xi = x_{m+2}\} + \ldots + \{\xi = x_k\}.$$

Знайдемо ймовірність цієї події

$$\mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\} = \mathrm{P}(\{\xi = x_{m+1}\} + \{\xi = x_{m+2}\} + \ldots + \{\xi = x_k\}) =$$

$$= \mathbf{P}(\{\xi = x_{m+1}\}) + \mathbf{P}(\{\xi = x_{m+2}\}) + \ldots + \mathbf{P}(\{\xi = x_k\}) = p_{m+1} + p_{m+2} + \ldots + p_k.$$

Оцінимо математичне сподівання знизу, користуючись отриманою ймовірністю.

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_mp_m + x_{m+1}p_{m+1} + \ldots + x_kp_k =$$

$$= (x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_mp_m) + (x_{m+1}p_{m+1} + x_{m+2}p_{m+2} + \ldots + x_kp_k) \ge$$

$$\ge x_{m+1}p_{m+1} + x_{m+2}p_{m+2} + \ldots + x_kp_k = \varepsilon p_{m+1} + \varepsilon p_{m+2} + \ldots + \varepsilon p_k =$$

$$= \varepsilon(p_{m+1} + p_{m+2} + \ldots + p_k) = \varepsilon \cdot \mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\}.$$

Отже, $\mathbf{M}\xi \ge \varepsilon \mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\}$, звідки $\mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\} \le \dfrac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon}$. □

Наслідок 1. *Для довільного $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:*

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $|\xi - \mathbf{M}\xi|$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Оцінимо ймовірність події $\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\}$. Оскільки $|\xi - \mathbf{M}\xi| > 0$, то можна скористатися нерівністю (1). Враховуючи, що нерівності

$$|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon \text{ і } (\xi - \mathbf{M}\xi)^2 \ge \varepsilon^2$$

еквівалентні, маємо

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} = \mathbf{P}\{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 \ge \varepsilon^2\} \le \frac{\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \text{ де } \varepsilon > 0. \quad \square$$

Наслідок 2.

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Досить в нерівності (2) перейти до протилежної події.

Нерівність (1) називають нерівністю Маркова, а нерівності (2) і (3) називаються нерівностями Чебишова.

2. Теорема Чебишова. На початку посібника було розглянуто закон стійкості частот, який встановлено експериментально. В формальній теорії цьому закону відповідає ряд тверджень, які об'єднані під назвою: закон великих чисел. Розглянемо два з цих тверджень.

Теорема Чебишова. *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *– послідовність попарно незалежних випадковихі величин з однаковими математичними сподіваннями* $\mathbf{M}\xi_i = a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *і дисперсіями* $\mathbf{D}\xi_i \leq c$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *c – стала. Розглянемо числову послідовність*

$$p_n = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Доведення. Позначимо через η_n випадкові величини $\dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$. Згідно з властивостями математичного сподівання

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \mathbf{M}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \ldots + \mathbf{M}\xi) = \frac{na}{a} = a.$$

Використовуючи властивості дисперсії та умову теореми, оцінимо зверху дисперсію випадкової величини η_n:

$$\mathbf{D}\eta_n = \mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(\mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

Застосувавши до випадкової величини η_n нерівність Чебишова (3) з попереднього пункту, дістанемо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$p_n = \mathbf{P}\{|\eta_n - \mathbf{M}\eta_n| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\eta_n}{\varepsilon^2}, \qquad (1)$$

а звідси

$$p_n \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 1,\ n \to \infty.$$

Враховуючи, що ймовірність не може бути більшою від 1, матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$. □

3. Теорема Бернуллі. *Нехай $\xi(n)$ число появ події A при n послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює p. Тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi(n)}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Доведення. Позначимо через ξ_k число появ події A при k-му випробуванні. ξ_k може набувати двох значень: 1 з ймовірністю p (A відбулася) і 0 з ймовірністю q (A не відбулася). Тоді $\xi(n) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. До того ж $\mathbf{M}\xi_k = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$,

$$\mathbf{D}\xi_k = \mathbf{M}\xi_k^2 - (\mathbf{M}\xi_k)^2 = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \ (k=1, 2, \ldots, n),$$

залишилось скористатись нерівністю (1). Зауважимо, що $\dfrac{\xi(n)}{n}$ це не що інше як частота ν_n події A. □

Наслідок (*найпростіша форма закону великих чисел*).

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\nu_n - p| < \varepsilon\} = 1$$

Справді, для випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, виконуються умови теореми Чебишова і тому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\nu_n - p| < \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Смисл цього наслідку в тому, що з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при досить великій кількості незалежних випробувань частота події як завгодно мало відрізняється від її ймовірності при окремому випробуванні.

Приклад. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0.9, частота випадання герба відрізнялась від $1/2$ не більше, ніж на 0.01?

Застосуємо нерівність (2), отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\nu_n - \frac{1}{2}\right| < 0.01\right\} \ge 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.01^2} \ge 0.9,$$

а звідси $n > 25000$.

§7. Злічені випадкові величини

1. Випадкова величина ξ називається *зліченою*, якщо множина її значень злічена.

Така випадкова величина може з'явитися, наприклад, тоді, коли простір елементарних подій злічений, а за множину подій беруть, як і в скінченному випадку, множину всіх підмножин; так що все, що було раніше розглянуто для скінченного випадку автоматично поширюється на злічений випадок, крім, хіба що, замість сум з'являться числові ряди й потрібно вимагати їх збіжності.

2. Геометричний розподіл. Розглянемо випробування, у якому фіксована подія A може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Такі випробування будемо проводити багато разів без зміни умов їх проведення. Якщо у якомусь випробуванні подія A відбулася, то таку подію називатимемо *успіхом* і позначатимемо буквою У, якщо ж подія A не відбудеться, то таку подію називатимемо *невдачею* і позначатимемо буквою Н. Розглянемо складніший стохастичний експеримент: випробування проводитемо доти, доки не відбудеться подія A. Простір елементарних подій для цього експерименту такий: ω_1 = У, ω_2 = НУ, ω_3 = ННУ, ω_4 = НННУ, ... тобто, простір виявляється зліченим. Якщо випробування незалежні, то матимемо $\mathbf{P}(\omega_1) = p$, $\mathbf{P}(\omega_2) = qp$, $\mathbf{P}(\omega_3) = q^2p$, ..., $\mathbf{P}(\omega_n) = q^{n-1}p$, … .

Означення 1. Розподіл ймовірностей випадкової величини ξ, яка дорівнює кількості невдач до першого успіху, називається *геометричним розподілом*.

Отже, геометричний розподіл має випадкова величина ξ множина значень якої це множина невід'ємних цілих чисел і ймовірності цих значень

$$p_k = q^k p.$$

Перевіримо, що це справді розподіл. Дійсно,

$$p_0 + p_1 + ... + p_k + \ldots + = p + qp + q^2p + \ldots = p\,(1 + q + q^2 + \ldots) = p\frac{1}{1-q} = 1$$

Знайдемо математичне сподівання й дисперсію геометричного розподілу. Маємо:

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k p = p\,(q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots) = pq\,(1 + 2q + 3q^2 + \ldots) =$$

$$= pq\frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + \ldots) = pq\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}.$$

Дисперсію знайдемо за формулою $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$.

$$(\mathbf{M}\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = p\,(q + 2^2q^2 + 3^2q^3 + \ldots);$$

З попередніх обчислень маємо:

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2},$$

звідси

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots = \frac{q}{(1-q)^2},$$

звідси (диференціюванням по q)

$$1 + 2^2q + 3^2q^2 + \ldots = \frac{1+q}{(1-q)^3},$$

тому

$$pq\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = p\frac{(1+q)q}{(1-q)^3} = \frac{q+q^2}{p^2}.$$

Отже,

$$\mathbf{D}\xi = \frac{q+q^2}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}.$$

3. Розподіл Паскаля і від'ємний біноміальний розподіл. Розглянемо стохастичний експеримент такий, як і в п. 2.

Означення 2. Розподіл ймовірностей випадкової величини ξ, яка дорівнює кількості невдач до r-го успіху, називається *розподілом Паскаля* з параметрами p і r.

Знайдемо цей розподіл. Випадкова величина ξ може приймати значення 0, 1, ..., k, ... Позначимо ймовірність $\mathbf{P}(\xi = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ через $p_k(r)$. Вона дорівнює ймовірності того, що r-ому успіху передує рівно k невдач. Ця подія може здійснитися тоді і лише тоді, коли серед

$r+k-1$ випробувань рівно k привели до невдачі, а наступне $(r+k)$-е випробування привело до успіху. Але ймовірність першої події за формулою Бернуллі дорівнює числу $C_{r+k-1}^{k}p^{r-1}q^{k}$, другої дорівнює p, отже, за теоремою добутку для незалежних подій

$$p_k(r) = C_{r+k-1}^{k}p^{r}q^{k} . \qquad (1)$$

Цю формулу переписують ще й так:

$$p_k(r) = C_{-r}^{k}p^{r}(-q)^{k},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

де

$$C_{-r}^{k} = \frac{(-r)(-r-1)...(-r-k+1)}{k!}.$$

Те, що числа $p_k(r)$ задають розподіл, можна перевірити, знайшовши суму ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{-r}^{k}p^{r}(-q)^{k} = p^{r}\sum_{k=0}^{\infty}C_{-r}^{k}(-q)^{k} = p^{r}(1-q)^{-r} = p^{r}p^{-r} = 1. \qquad (2)$$

Числа $p_k(r)$ з (1) невід'ємні не лише для натурального r, а й для довільних невід'ємних дійсних r; крім того, співвідношення (2) має місце також для довільних дійсних $r > 0$.

Означення 3. Якщо випадкова величина ξ приймає значення 0, 1, ..., k, … з ймовірностями $p_k(r) = C_{-r}^{k}p^{k}(-q)^{n-k}$, де $r > 0$ – дійсне, то розподіл називається *від'ємним біноміальним розподілом* з параметрами p і r.

Розподіл Паскаля це частинний випадок від'ємного біноміального розподілу, якщо параметр r натуральне число.

Числові характеристики цих розподілів знайдемо пізніше.

4. Розподіл Пуассона.

Означення 4. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо множина значень цієї випадкової величини – множина невід'ємних цілих чисел і

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...\ .$$

Перевіримо, що це справді розподіл. Дійсно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} = e^{k}(1+\lambda+\frac{\lambda^{2}}{2!}+\frac{\lambda^{3}}{3!}+..) = 1.$$

На практиці розподіл Пуассона мають довжини різноманітних „черг”: кількість осіб у звичайній черзі, кількість атомів радіоактивного елемента, який розпадається за одиницю часу, кількість телефонних дзвінків за день.

Знайдемо математичне сподівання й дисперсію розподілу Пуассона. Маємо:

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(0 + \lambda + 2\frac{\lambda^2}{2!} + 3\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) = e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) = \lambda .$$

Отже, параметр λ це середнє значення випадкової величини.

Для знаходження дисперсії спочатку знайдемо

$$\mathbf{M}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \lambda e^{-\lambda}\left(1 + 2\lambda + 3\frac{\lambda^2}{2!} + 4\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) + \left(\lambda + 2\frac{\lambda^2}{2!} + 3\frac{\lambda^3}{3!} + 4\frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)\right) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2 .$$

Отже,

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

§8. Генератриси

Якщо випадкова величина ξ приймає невід’ємні цілі значення з ймовірностями p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то вона називається *цілочисельною*, а її розподіл називається *арифметичним*.

Означення 1. Функція $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, де $z(|z| \le 1)$ дійсна або комплексна змінна, називається *генератрисою* (*твірною функцією*) розподілу ξ.

Теорема 1. Нехай $p(z)$ генератриса розподілу ξ. Тоді:

1. $p(z)$ визначена в кожній точці відрізка $[-1; 1]$.
2. $p(1) = 1$.
3. Відповідність між множиною генератрис і множиною розподілів $\{p_k\}$ взаємно однозначна.

Доведення. Перше твердження теореми випливає з того, що степеневий ряд, який визначає $p(z)$, збігається для всіх $|z| \le 1$, бо він мажорується збіжним числовим рядом $p_0 + p_1 + ... + p_k + ... = 1$ (це і є друге твердження). Третє твердження випливає з того, що аналітичну функцію $p(z)$ можна єдиним способом розкласти в степеневий ряд і тоді $p_k = \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$. □

Приклад 1. Нехай $\xi \in B(n,\ p)$, тобто, має біноміальний розподіл з параметрами n і p. Тоді

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = (pz + 1 - p)^n = (q + pz)^n .$$

Приклад 2. Нехай ξ має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами p і r. Тоді

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} C_{-r}^k p^r (-q)^k z^k = \left(\frac{p}{1-qz} \right)^r .$$

Зокрема, генератриса геометричного розподілу дорівнює $p(1-qz)^{-1}$.

Приклад 3. $\xi \in \Pi(\lambda)$, тобто, має розподіл Пуассона з параметром λ. Тоді

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

За допомогою генератриси легко знаходити моменти (якщо вони існують) випадкової величини ξ. Знайдемо, наприклад, математичне сподівання та дисперсію. Матимемо:

$$p'(z)\big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1} \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbf{M}\xi.$$

Отже,

$$\mathbf{M}\xi = p'(1) . \tag{1}$$

Для знаходження дисперсії спочатку знайдемо $\mathbf{M}\xi^2$, а для цього скористаємося рядом $zp'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^k$,

а звідси

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k z^{k-1} \right)_{z=1} = \left(zp'(z) \right)'_{z=1} = p'(1) + p''(1) ,$$

тому

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = p'(1) + p''(1) - \left(p'(1)\right)^2. \qquad (2)$$

За допомогою формул (1) і (2) знайдемо математичне сподівання і дисперсію розподілів з прикладів 1 – 3.

Якщо $\xi \in \mathrm{B}(n, p)$, то

$$p'(1) = np(q+pz)^{n-1}\Big|_{z=1} = np,$$

$$p''(1) = n(n-1)np^2(q+pz)^{n-2}\Big|_{z=1} = n(n-1)np^2,$$

а тому,

$$\mathbf{M}\xi = np;\ \mathbf{D}\xi = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

Якщо $\xi \in \overline{\mathrm{B}}(r, p)$ (від'ємний біноміальний розподіл), то

$$p'(1) = rp^r q(1-qz)^{-r-1}\Big|_{z=1} = rp^r q(1-q)^{-r-1} = \frac{rq}{p}.$$

$$p''(1) = r(r+1)p^r q^2(1-qz)^{-r-2}\Big|_{z=1} = r(r+1)\frac{q^2}{p^2},$$

а тому

$$\mathbf{M}\xi = \frac{rq}{p},\ \mathbf{D}\xi = \frac{rq}{p} + r(r+1)\frac{q^2}{p^2} - \frac{r^2q^2}{p^2} = \frac{rq}{p} + \frac{rq^2}{p^2} = \frac{rq}{p}\left(1 + \frac{q}{p}\right) = \frac{rq}{p^2}.$$

Якщо $\xi \in \Pi(\lambda)$, то

$$p'(1) = \lambda e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda;\ p''(1) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda^2,$$

Тому

$$\mathbf{M}\xi = \lambda,\ \mathbf{D}\xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Теорема 2. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини, а $p_\xi(z)$ і $p_\eta(z)$ їхні генератриси. Тоді генератриса суми $\xi + \eta$ дорівнює добутку $p_\xi(z)\ p_\eta(z)$.

Доведення. З означення генератриси випливає, що

$$p_\xi(z) = \mathbf{M}z^\xi,\ p_\eta(z) = \mathbf{M}z^\eta,$$

тому

$$p_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{M}z^{\xi+\eta} = \mathbf{M}\left(z^\xi \cdot z^\eta\right) = \{\xi \text{ та } \eta \text{ незалежні}\} =$$

$$= \mathbf{M} z^{\xi} \cdot \mathbf{M} z^{\eta} = p_{\xi}(z)\ p_{\eta}(z). \quad \square$$

Наслідок. Якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ незалежні випадкові величини, то

$$p_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(z) = p_{\xi_1}(z) p_{\xi_2}(z) ... p_{\xi_n}(z).$$

Теорема 3 (неперервності). Нехай $\{p_{k,n}\}$, $n = 1, 2, ...$ множина арифметичних розподілів. Для того, щоб для довільного фіксованого k

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n} = p_k \tag{3}$$

і

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \tag{4}$$

необхідно і досить, щоб для всякого $z \in [0; 1]$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = p(z), \tag{5}$$

де $p_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,n} z^k$, $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $p(1) = 1$.

Доведення. Нехай мають місце співвідношення (3) і (4), а

$$p_n(z) - p(z) = \sum_{k=0}^{N} (p_{k,n} - p_k) z^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_{k,n} z^n - \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k z^k,$$

де N – деяке число, і $z \in [0; 1]$ – зафіксоване. Доведемо (5).

Через те, що $0 \le p_{k,n} \le 1$, $0 \le p_k \le 1$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можна вибрати N так, щоб для всякого n

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} p_{k,n} z^k \le \sum_{k=N+1}^{\infty} z^k < \frac{\varepsilon}{3}, \ \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k z^k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді

$$|p_n(z) - p(z)| \le \sum_{k=0}^{N} |p_{k,n} - p_k| z^k + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Суму справа можна зробити меншою, ніж $\frac{\varepsilon}{3}$ при достатньо великих n, бо в цій сумі скінченне число доданків, які прямують до нуля. Рівність $p(1) = 1$ випливає з (4).

Нехай тепер має місце (5). Доведення (3) проведемо методом від супротивного. Припустимо, що (3) не має місця. Тоді знайдуться дві послідовності $\{n_1\}$ і $\{n_2\}$ і розподіли p_{1k} і p_{2k} для яких

$$\lim_{n_1\to\infty} p_{n_1}(z) = p_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k} z^k ,$$

$$\lim_{n_2\to\infty} p_{n_2}(z) = p_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} z^k \text{ і } p_1(z) \neq p_2(z).$$

Але це неможливо, бо границя (5) існує. □

Теорема 4 (Пуассона). Нехай ξ_n – число успіхів при n випробуваннях Бернуллі, а p_n – ймовірність успіху в одному випробуванні й існує $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} .$$

Доведення. Нехай $\lambda_n = np_n$. Скористаємося формулою для генератриси біноміального розподілу. Матимемо:

$$p_n(z) = \left(\frac{\lambda_n}{n} z + 1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}(z-1)\right)^n \text{ і } \lim_{n\to\infty} p_n(z) = e^{\lambda(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} z^m \ -$$

генератриса розподілу Пуассона з параметром λ. Тепер з теореми неперервності випливає твердження теореми Пуассона. □

§9. Дискретні випадкові вектори

1. Поняття розподілу. *Дискретним випадковим вектором* називається сукупність дискретних випадкових величин.

Обмежимося вивченням двомірного випадкового вектора, тобто сукупності двох випадкових величин (ξ, η).

Головною характеристикою випадкового вектора є розподіл. Це така таблиця.

Таблиця 1

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n	$\mathrm{P}_{r\xi}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2n}	p_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{in}	p_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mj}	…	p_{mn}	p_m

$\mathrm{P}_{r\eta}$	P_1	P_2	…	P_j	…	P_n	1

У таблиці 1 в першій колонці стоять можливі значення випадкової величини ξ; в першому рядку – можливі значення випадкової величини η; на перетині i-го рядка і j-ї колонки стоять ймовірності $p_{ij} = \mathbf{P}\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$; в останній колонці знаходяться числа $p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}$, $i = 1, 2, ..., m$, які визначають розподіл компоненти ξ; в останньому рядку знаходяться числа $\mathrm{P}_j = \sum_{k=1}^{m} p_{kj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, які визначають розподіл компоненти η.

За допомогою таблиці 1 можна розв'язувати різноманітні задачі, наприклад, задача про знаходження ймовірності попадання випадкової точки (ξ, η) в задану область D на площині. Маємо

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D) = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij} .$$

2. Умовні розподіли. В теорії випадкових векторів корисним є поняття умовних розподілів. Числа

$$\mathbf{P}\left\{\xi = x_i \middle| \eta = y_j\right\} = \frac{\mathrm{P}\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right)}{\mathrm{P}\left(\eta = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{\mathrm{P}_j},$$

$i = 1, 2, ..., m$, називаються *умовними ймовірностями випадкової величини* ξ за умови, що η приймає значення y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Числа

$$\mathbf{P}\left\{\eta = y_j \middle| \xi = x_i\right\} = \frac{\mathrm{P}\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right)}{\mathrm{P}\left(\xi = x_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_i},$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, називаються *умовними ймовірностями випадкової величини* η за умови, що ξ приймає значення x_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Таблиці ($j = 1, 2, \ldots, n$)

Таблиця 2

$\xi \mid \eta = y_j$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m
$\mathbf{P}\left(\xi \mid \eta = y_j\right)$	$\frac{p_{1j}}{\mathrm{P}_j}$	$\frac{p_{2j}}{\mathrm{P}_j}$	…	$\frac{p_{ij}}{\mathrm{P}_j}$	…	$\frac{p_{mj}}{\mathrm{P}_j}$

задають розподіл ξ за умови η.

Таблиці ($i = 1, 2, ..., m$)

Таблиця 3

$\eta \mid \xi = x_i$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
$\mathbf{P}\left(\eta \mid \xi = x_i\right)$	$\dfrac{p_{i1}}{p_i}$	$\dfrac{p_{i2}}{p_i}$	…	$\dfrac{p_{ij}}{p_i}$	…	$\dfrac{p_{in}}{p_i}$

задають розподіл η за умови ξ.

3. Числові характеристики випадкових векторів.

Означення 1. *Математичним сподіванням випадкового вектора* (ξ, η) називають вектор $(\mathbf{M}\xi, \mathbf{M}\eta)$, де $\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$, $\mathbf{M}\eta = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathrm{P}_j$.

Означення 2. Матриця

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 & \mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right) \\ \mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right) & \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2 \end{pmatrix}$$

називається *коваріаційною матрицею випадкового вектора* (ξ, η).

Елементами цієї матриці є дисперсії випадкових величин ξ та η

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2, \mathbf{D}\eta = \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2,$$

і число $\mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right)$, яке називається *коваріацією вектора* (ξ, η) і позначається символом $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Таким чином,

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}\xi & \mathrm{cov}(\xi, \eta) \\ \mathrm{cov}(\xi, \eta) & \mathbf{D}\eta \end{pmatrix}.$$

Якщо задано розподіл вектора (ξ, η), тобто задана таблиця 1, то

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i, \ \mathbf{M}\eta = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathrm{P}_j,$$

$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - (\mathbf{M}\xi)^2$, $\mathbf{D}\eta = \mathbf{M}\eta^2 - (\mathbf{M}\eta)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \mathrm{P}_j -$ $(\mathbf{M}\eta)^2$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} (x_i - \mathbf{M}\xi)\left(y_j - \mathbf{M}\eta\right) p_{ij}$.

4. Коефіцієнт кореляції та його властивості. На практиці частіше використовують замість коваріації коефіцієнт кореляції

$$\rho(\xi,\ \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}}.$$

Він характеризує зв'язок між ξ та η.

Коефіцієнт кореляції має такі властивості.

1) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $\rho(\xi,\ \eta) = 0$. Справді, чисельник ρ це

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = \mathbf{M}\big((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\big) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)\mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta) = 0 \cdot 0 = 0.$$

2) $|\rho(\xi,\ \eta)| \le 1$.

Для доведення цієї властивості розглянемо випадкову величину $x\xi + \eta$, де x довільне дійсне число і нехай $\mathbf{M}\xi = m_1$, $\mathbf{M}\eta = m_2$. Далі,

$$\mathbf{D}(x\xi + \eta) = \mathbf{M}\big((x\xi + \eta) - (xm_1 + m_2)\big)^2 =$$

$$= \mathbf{M}\big(x^2(\xi - m_1)^2 + (\eta - m_2)^2 - 2x(\xi - m_1)(\eta - m_2)\big) =$$

$$= x^2\mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta - 2x\operatorname{cov}(\xi,\eta) \ge 0 \quad \forall x \in R,$$

а це може бути лише тоді, коли дискримінант квадратного тричлена (відносно x)

$$x^2\mathbf{D}\xi - 2x\operatorname{cov}(\xi,\eta) + \mathbf{D}\eta$$

буде недодатнім, тобто, тоді, коли

$$-\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta + \operatorname{cov}^2(\xi,\eta) \le 0,$$

що еквівалентне нерівності

$$|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta},$$

а вже звідси й з означення коефіцієнта кореляції отримуємо

$$|\rho(\xi,\eta)| \le \frac{|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}} \le 1.$$

3) Якщо $\eta = a\xi + b$, де a і b якісь числа, то

$$|\rho(\xi,\eta)| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a > 0, \\ -1, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Для доведення цієї властивості знайдемо $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$. Нехай $\mathbf{M}\xi = m$, тоді
$\mathbf{M}\eta = am + b$, $\mathbf{D}\eta = a^2\mathbf{D}\xi$, тому

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = \operatorname{cov}(a\xi + b,\ \eta) = \mathbf{M}\big((a\xi + b - am - b)(\xi - m)\big) = a\mathbf{M}(\xi - m)^2$$

$$= a\mathbf{D}\xi .$$

Отже,

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{a\mathbf{D}\xi}{|a|\mathbf{D}\xi} = \frac{a}{|a|} .$$

4) Якщо $|\rho(\xi,\ \eta)| = 1$, то між ξ та η існує лінійна залежність, тобто, існують такі дійсні числа a та b, що $\eta = a\xi + b$.

Доведення. Нехай

$$\mathbf{M}\xi = m_1,\ \mathbf{M}\eta = m_2,\ \mathbf{D}\xi = \sigma_1^2,\ \mathbf{D}\eta = \sigma_2^2,\ \xi_1 = \frac{\xi - m_1}{\sigma_1},\ \eta_1 = \frac{\eta - m_2}{\sigma_2},$$

так що,

$$\mathbf{M}\xi_1 = \mathbf{M}\eta_1 = 0;\ \mathbf{D}\xi_1 = \mathbf{D}\eta_1 = 1;$$

і ще нехай $\rho(\xi,\ \eta) = 1$. Тоді

$$\mathbf{D}(\xi_1 - \eta_1) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\eta_1 - 2\mathbf{M}(\xi_1\eta_1) = 2 - 2\rho = 0 ,$$

а тому $\xi_1 - \eta_1 = C$ – стала (бо $\mathbf{D}C = 0$), отже,

$$\frac{\xi - m_1}{\sigma_1} - \frac{\eta - m_2}{\sigma_2} = C ,$$

а звідси

$$\eta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\xi + m_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1 - C ,$$

що потрібно було довести.

Подібним чином ця властивість доводиться і для $\rho = -1$, бо тоді $\mathbf{D}(\xi_1 + \eta_1) = 0$ і $\xi_1 + \eta_1 = C$. □

5. Умовні числові характеристики. Таблиці 2 і 3 задають розподіл деяких випадкових величин, тому можна говорити про їхні числові характеристики. Наприклад, числа

$$\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p_{ij}}{\mathrm{P}_j},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

називаються *умовними математичними сподіваннями* величини ξ за умови $\eta = y_i$, а числа

$$\mathbf{M}(\eta\,|\,\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{p_{ij}}{p_i},\ i = 1, 2, ..., m,$$

називаються *умовними математичними сподіваннями* величини η за умови $\xi = x_i$.

Якщо вважати, що числа $\mathbf{M}(\xi\,|\,\eta = y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, це значення випадкової величини, які вона приймає, відповідно з ймовірностями P_j, то таку випадкову величину називають математичним сподіванням ξ за умови η і позначають символом $\mathbf{M}(\xi\,|\,\eta)$. А з цього означення випливає, що

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\eta)) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}(\xi|\eta = y_j)\mathrm{P}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i p_{ij}}{\mathrm{P}_j}\mathrm{P}_j = \mathbf{M}\xi\,.$$

Можемо розглядати і випадкову величину $\mathbf{M}(\eta|\xi)$ – умовне математичне сподівання η за умови ξ, як величину, яка приймає значення $\mathbf{M}(\eta\,|\,\xi = x_i)$, $i = 1, 2, ..., m$, відповідно з ймовірностями p_i, а тому

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta|\xi)) = \mathbf{M}\eta\,.$$

Аналогічно дається означення умовних дисперсій, умовних моментів різних порядків.

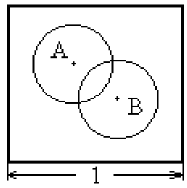
6. Механічне тлумачення розподілу випадкового вектора. Розглянемо механічну систему одиничної маси, де в точках (x_i, y_j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ зосереджені точкові маси p_{ij}. Тоді $\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D)$ це маса області D системи. $\mathbf{M}\xi$ та $\mathbf{M}\eta$ це координати центра мас системи. Далі, розглянемо, наприклад, всі точкові маси, які зосереджені на прямій $y = y_j$. Абсцисою центра мас такої системи буде число $\mathbf{M}(\xi\,|\,\eta = y_j)$. Зосередимо в цій точці точкову масу $\mathbf{P}_j$, тобто, масу всіх точок, які лежать на прямій y_j. Замінимо початкову механічну систему на систему точкових мас P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, які зосереджені в точках з координатами $(\mathbf{M}(\xi|\eta = y_j), y_j)$. Тоді абсциса центра мас цієї системи співпадає з абсцисою центра мас початкової системи, тобто дорівнює $\mathbf{M}\xi$.

Вправи

§ 1.п.1.

1. Знайти ймовірність того, що точка, кинута у будь-яке місце всередині кола, потрапить у вписані в це коло: а) правильний трикутник; б) квадрат.
2. У круг радіуса R кинуто точку. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра круга не перевищує r.
3. Абонент очікує на телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що йому зателефонують протягом перших 15 хвилин?
4. Між 0 і 1 навмання вибрано два числа x і y. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не більша ніж 1, а модуль їх різниці не менше, ніж 0.5.
5. Між числами 1 і -1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більша одиниці.
6. Навмання вибрано два дійсні числа x і y такі, що $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Яка ймовірність того, що їх сума не більша одиниці, а сума їх квадратів більша 0.25?
7. Навмання взяті два дійсні числа x і y такі, що $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$. Знайти ймовірність того, що $y/x\le 2$ і $xy\le 1$.
8. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \le 3$, $|y| \le 5$. Яка ймовірність того, що дріб x/y додатний?
9. На площині накреслено паралельні прямі на відстані $2a$ одна від одної. На площину навмання кидають монету радіуса r ($r < a$). Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодну з прямих.
10. Вздовж туго натягненої нитки підвішені голки на відстані 1 м одна від одної. Під прямим кутом до цієї нитки рухається гумова кулька діаметром 20 см. Яка ймовірність того, що кулька мине голку?
11. Іван і Марія домовилися про зустріч в певному місці між одинадцятою і дванадцятою годинами. Кожен приходить у випадковий момент вказаного проміжку і чекає появи іншого до закінчення обумовленого часу, але не більше a хвилин ($a < 60$), після чого залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

12 *Ведеться стрільба у квадратну мішень зі стороною рівною одиниці. Подія А – стрілець попадає в круг радіуса $r = 0.3$ з центром у точці А з ймовірністю, яка дорівнює площі цього круга. Подія В – стрілець попадає в круг того ж радіуса з центром у точці В, з ймовірністю, яка також дорівнює площі круга. Яка повинна бути віддаль між центрами цих кругів, щоб події А та В були незалежними? (Підказка: $S_A S_B = S_{AB}$)



§ 1.п.2.

Нехай A і B – довільні події. Довести:

1. $\nu(A+B) = \nu(A)+\nu(B)-\nu(AB)$.
2. $\nu(\overline{A})=1-\nu(A)$.
3. Якщо $A\subset B$, то $\nu(A)\leq \nu(B)$.
4. $\nu(A+B+C)= \nu(A)+\nu(B)+\nu(C)-\nu(AB)-\nu(AC)-\nu(BC)+\nu(ABC)$.

§ 1.п.3.

У задачах 5–12 побудувати простір елементарних подій за описом експерименту і знайти підмножини, які відповідають вказаним подіям.

1. Монета підкидається тричі. Результат, який спостерігається: випадає герб (Г) або цифра (Ц). Події:
   A = {цифра випала лише раз},
   B = {жодного разу не випав герб},
   C = {випало більше цифр ніж гербів},
   D = {цифра випала не менше двох разів підряд}.
2. Гральний кубик підкидається двічі. Результат, який спостерігається: пара чисел, що відповідають числу вічок, які ми бачимо на верхній грані кубика. Події:
   A = {обидва рази випало парне число вічок},
   B = {ні разу не випало чотири вічка},
   C = {обидва рази випало число вічок більше за п’ять},
   D = {обидва рази випало однакове число вічок}.
3. Двічі підкидається шайба, на одній з основ якої написано 0, на іншій – 1 і на бічній поверхні – 2. Результат, який спостерігається: пара чисел, які з’являться в результаті підкидань. Події:
   A = {добуток число парне},
   B = {добуток число не парне},
   C = {добуток дорівнює нулю}.

4. З колоди карт навмання виймається карта. Події:
   A = {вийнята карта червоної масті},
   B = {вийнята карта – фігура},
   C = {вийнята карта – піка},
   D = {вийнята карта – дама}.

5. Стріляють у прямокутну мішень, яка пов'язана з системою координат. Розташування мішені визначається нерівностями – $1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Результат, який спостерігається: координати точки попадання. За умовами стрільби непопадання в мішень виключається. Події:
   A = {абсциса точки попадання не більша ординати},
   B = {добуток координат додатній},
   C = {сума абсолютних величин координат перевищує одиницю}.
   Чи є серед цих подій несумісні?

6. На відрізку $[a, b]$ навмання ставиться точка. Нехай x – координата цієї точки. Потім на відрізку $[a, x]$ навмання ставиться ще одна точка з координатою y. Результат, який спостерігається, – пара чисел (x, y). Події:
   A={друга точка ближче до правого кінця відрізка $[a,b]$, ніж до лівого},
   B={відстань між двома точками менша половини довжини відрізка},
   C={перша точка ближче до другої, ніж до правого кінця відрізка $[a,b]$}.
   Знайти пари несумісних подій.

7. Іван і Марія домовилися про зустріч у певному місці між одинадцятою і дванадцятою годинами. Кожний приходить у випадковий момент вказаного проміжку і чекає появи іншого до закінчення обумовленого часу, але не більше 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Результат, який спостерігається: пара чисел (x, y), де x – час приходу Івана, y – час приходу Марії (час вимірюється в хвилинах починаючи з 11 години). Події:
   A = {зустріч відбулася},
   B = {Іван чекав Марію весь обумовлений час і не дочекався},
   C = {Марії не довелося чекати Івана},
   D = {зустріч відбулася після 11 год. 30 хв.},
   E = {Марія запізнилася на зустріч},
   F = {зустріч відбулася, коли до закінчення години залишалося менше п'яти хвилин}.

8. Навмання беруться три відрізки, довжина кожного з них не

перевищує l. Подія A = {з відрізків можна утворити трикутник}.

9. З групи студентів, які прийшли складати іспит із теорії ймовірностей, викладач навмання викликає одного. Нехай подія A – викликаний студент – хлопець. Подія B – студент (студентка) не підготовлений(а) до складання іспиту, а подія C – студент (студентка) живе в гуртожитку.

   1) Описати подію $AB\overline{C}$.

   2) При якій умові буде мати місце тотожність ABC=A?

   3) Коли буде правильним співвідношення $\overline{C} \subseteq B$?

   4) Коли буде правильною рівність $\overline{A} = B$, чи буде вона мати місце, якщо всі хлопці не підготовлені до складання іспиту?

10. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети – бронзову і срібну. Розглядаються наступні події:

    A = {герб випав на бронзовій монеті},
    B = {цифра випала на бронзовій монеті},
    C = {герб випав на срібній монеті},
    D = {цифра випала на срібній монеті},
    M = {випав хоча б один герб},
    F = {випала хоча б одна цифра},
    G = {випав один герб і одна цифра},
    H = {не випало жодного герба},
    K = {випали два герба}.

    Яким подіям з наведеного списку відповідають наступні події:

    а) $A \cup C$; б) $A \cap C$; в) $M \cap F$; г) $G \cup M$; д) $G \cap M$; е) $B \cap D$; ж) $M \cup K$?

11. Проводять три постріли по мішені. Розглядають події A_k = {влучення при k-му пострілі}, k=1, 2, 3. Користуючись діями над подіями A_k та $\overline{A}_k$, записати події:

    A = {всі три влучення},
    B = {всі три промахи},
    C = {хоча б одне влучення},
    D = {хоча б один промах},
    M = {не менше двох влучень},
    F = {не більше одного влучення},
    G = {влучення в мішень не раніше третього пострілу}.

12. Назвіть протилежні події для подій:

    A = {випадання двох гербів при підкиданні двох монет},
    B = {поява білої кульки} (експеримент полягає у вийманні однієї кульки з урни, в якій лежать білі, чорні й червоні кульки),
    C = {три влучення в мішень трьома пострілами },

M = {не більше двох влучень у мішень п’ятьма пострілами},
D = {принаймні одне влучення в мішень п’ятьма пострілами},
F = {перемога одного з гравців у грі в шахи}.

13. Прилад складається з двох блоків. Перший блок складається з двох однотипних деталей і працює тоді, коли принаймні одна з них справна. Другий блок складається з трьох однотипних деталей і працює, коли хоча б дві з них працюють. Прилад працює, коли працюють обидва блоки. Виразіть через події A_k = {k-та деталь першого блоку справна} (k = 1, 2), B_n = {n-на деталь другого блоку справна} (n = 1, 2, 3) і протилежні їм наступні події:
A = {працює перший блок},
B = {перший блок не працює},
C = {працює другий блок},
D = {другий блок не працює},
H = {прилад працює},
F = {прилад не працює},
G = {прилад не працює, але для того, щоб його полагодити, досить замінити одну деталь}.

14. Є події: A = {взята навмання деталь виявилася першого сорту}, B = {взята навмання деталь виявилася другого сорту} і C = {взята навмання деталь виявилась третього сорту}. Що являють собою наступні події:
а) $A \cup B$; б) $\overline{A \cup C}$; в) $A \cap C$; г) $(A \cap B) \cup C$?

15. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i (i=1, 2, ..., n) полягає в тому, що i-та виготовлена ним деталь має дефект. Записати подію, яка полягає в тому, що:
а) жодна з деталей не має дефекту;
б) хоча б одна деталь має дефект;
в) лише одна деталь має дефект;
г) не більше двох деталей мають дефекти;
д) принаймні два вироби не мають дефектів;
е) точно два вироби дефектні.

§ 2.п.1.

1. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірності таких подій:
A = {число вічок парне},
B = {число вічок кратне трьом},
C = {число вічок більше двох},

D = {число вічок більше двох, але менше шести},
E = {число вічок не менше одного},
F = {випало або 2, або 3, або 6 вічок}.

2. З колоди в 36 карт навмання виймається карта. Знайти ймовірності таких події:
A={вийнята карта червоної масті},
B={вийнята карта – фігура, тобто є валетом, дамою, королем або тузом},
C={вийнята карта – піка},
D={вийнята карта – дама}.

3. Гральний кубик підкидається двічі. Результат, який спостерігається: пара чисел, що відповідають числу вічок, які ми бачимо на верхній грані кубика. Вважаючи, що елементарні події мають однакову ймовірність, знайти ймовірності таких подій:
A = {обидва рази випало парне число вічок},
B = {ні разу не випало чотири вічка},
C = {обидва рази випало число вічок більше чотирьох},
D = {обидва рази випало однакове число вічок}.

4. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети – бронзову і срібну. Спостерігають випадання герба та цифри на цих монетах. Вважаючи, що елементарні події мають однакову ймовірність, знайти ймовірності таких подій:
A = {герб випав на бронзовій монеті},
B = {цифра випала на бронзовій монеті},
C = {герб випав на срібній монеті},
D = {цифра випала на срібній монеті},
M = {випав хоча б один герб},
F = {випала хоча б одна цифра},
G = {випав один герб і одна цифра},
H = {не випало жодного герба},
K = {випали два герба}.

5. Робітник обслуговує 5 верстатів. 20% робочого часу він проводить біля першого верстата, 10% – біля другого, 15% – біля третього, 25% – біля четвертого і 30% – біля п’ятого. До цеху зайшов майстер. Яка ймовірність того, що він знайде робітника біля а) першого або третього верстата, б) першого або п’ятого, в) біля першого або четвертого, г) першого, другого або третього?

§ 2.п.2.

1. До магазину надійшло 30 нових годинників, серед яких 5 йдуть не точно. Навмання вибирається один годинник для перевірки. Яка ймовірність того, що він іде точно?

2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірності таких подій:
   A = {число вічок дорівнює 6},
   B = {число вічок кратне трьом},
   C = {число вічок парне},
   D = {число вічок менше п'яти},
   E = {число вічок більше двох}.

3. Підкидають два гральні кубика. Знайти ймовірності таких подій:
   A = {число вічок на обох гральних кубиках збігається},
   B = {число вічок на першому кубику більше ніж на другому},
   C = {сума вічок парна},
   D = {сума вічок більше двох},
   E = {сума вічок не менше п'яти},
   F = {хоча б на одному кубику з'явилася цифра 6},
   G = {добуток числа вічок, що випали дорівнює 6}.

4. З колоди в 52 карти витягують навмання 4 карти. Знайти ймовірності таких подій:
   A = {в отриманій вибірці всі карти бубни},
   B = {є принаймні один туз}.

5. Навмання вибирається п'ятизначне число. Яка ймовірність наступних подій:
   A = {число однаково читається як зліва направо, так і справа наліво (як, наприклад, 13531)},
   B = {число складається з непарних цифр}.

6. 8 чоловік, які обрані до президії, займають місця з одної сторони прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що дві певні особи будуть сидіти поруч, якщо
   а) число місць дорівнює 8,
   б) число місць дорівнює 12.

7. 12 студентів, серед яких Іванов і Петров, займають чергу в їдальні. Яка ймовірність, що між Івановим і Петровим виявиться 5 осіб?

8. Шестеро осіб зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що кожен пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му, ..., 7-му поверхах, знайти ймовірності таких подій:

A = {на другому, третьому і четвертому поверхах не вийде жоден пасажир},

B = {троє пасажирів вийдуть на сьомому поверсі},

C = {на кожному поверсі вийде по одному пасажиру},

D = {усі пасажири вийдуть на одному поверсі}.

9. Із п’яти букв розрізної абетки складено слово *школа*. Маленький хлопчик перемішав букви, а потім навмання їх склав. Яка ймовірність того, що він знову склав слово *школа*?
10. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадають на різні місяці року.
11. До білету іспиту входить 4 питання з 45, що містить програма. Учень вивчив 30 питань. Яка ймовірність того, що він буде знати всі питання білета, який вибирається навмання.
12. Гральний кубик підкидається двічі. Яка ймовірність того, що сума вічок, які при цьому випали, ділиться на 3 ?
13. З колоди, яка складається з 36 карт, навмання виймається 6 карт. Яка ймовірність того, що серед них виявиться 4 карти однієї масті?
14. З колоди, що складається з 36 карт, навмання виймається 6 карт. Яка ймовірність того, що серед них виявиться 2 дами ?
15. При грі в спортлото (5 з 36) знайти ймовірність того, що не буде вгадано жодного виду спорту?
16. Гральний кубик підкидається двічі. Яка ймовірність того, що сума вічок, які при цьому випали, дорівнюватиме 7?
17. З колоди, яка складається з 32 карт, навмання витягуються дві карти. Яка ймовірність того, що ці карти –тузи?
18. Колода з 36 карт добре перетасована. Знайти ймовірності подій:

    A = {чотири тузи розташовані поруч}

    B = {місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з різницею 7}.
19. На полиці у випадковому порядку розставлено 20 книжок, серед яких тритомник віршів Є.Маланюка. Знайти ймовірність того, ці томи стоять в порядку зростання (не обов’язково поруч).
20. Із сукупності послідовностей довжини n, члени якої є цифри 0, 1, 2, випадково вибирається одна. Знайти ймовірності подій:

    A = {послідовність починається з 0},

    B = {послідовність містить рівно m + 2 нулі, при цьому 2 з них містяться на кінцях послідовності},

C = {послідовність містить рівно m одиниць},
D = {в послідовності рівно m_0 нулів, m_1 одиниць, m_2 двійок}.

21. Із 28 кісточок доміно випадково вибираються дві. Яка ймовірність того, що з них можна скласти "ланцюжок" відповідно до правил гри?

§ 2.п.3.

1. Стрілець робить один постріл в мішень. Ймовірність вибити 10 очок дорівнює 0.3, а ймовірність вибити 9 очок дорівнює 0.6. Чому дорівнює ймовірність вибити не менше ніж 9 очок?
2. Іван з ймовірністю 0.1 може піти до театру, з ймовірністю 0.25 – в кіно та з ймовірністю 0.3 може зіграти у футбол. Іван може піти лише до одного з цих місць. Яка ймовірність того, що Дмитро, вирішивши відвідати Івана, застане його вдома.
3. На колгоспному полі врожай збирає декілька комбайнів. Ймовірність того, що за зміну ремонту потребуватиме рівно один комбайн дорівнює 0.1, рівно два комбайни – 0.07, більше двох комбайнів – 0.03. Знайти ймовірність того, що протягом зміни жоден комбайн не потребуватиме ремонту.
4. Під час олімпіади уболівальник із ймовірністю 0.3 може відвідати футбол, з ймовірністю 0.4 – баскетбол і з ймовірністю 0.2 – волейбол. Грошей йому вистачить лише на відвідування одного змагання. Які ймовірності наступних подій: A={болільник попав на змагання}, B={болільник попав на змагання, де воротар відсутній}.
5. З 30 учнів класу за контрольну роботу 7 чоловік отримали оцінку "відмінно", 15 – "добре" і 8 – "задовільно". Яка ймовірність того, що навмання відібрані два учні, отримали однакові оцінки?
6. В майстерні є три верстати. За зміну з ладу може вийти не більше одного верстата. Перший виходить з ладу з ймовірністю 0.15, другий – з ймовірністю 0.05, третій – з ймовірністю 0.1. Знайти ймовірність того, що за зміну жоден верстат не вийде з ладу.
7. Стрілець влучає в десятку з ймовірністю 0.05, в дев'ятку – з ймовірністю 0.2, а в вісімку – з ймовірністю 0.5. Стрілець зробив один постріл і влучив у мішень. Знайти ймовірності наступних подій: A={вибито не менше восьми очок}, B={вибито менше восьми очок}, C={вибито більше восьми очок}.
8. Підкидається гральний кубик. Події: A={випало число вічок не менше трьох}, B={випало парне число вічок}. Знайти ймовірність

події C=A+B.

§ 3.п.1.

1. Із урни, в якій міститься 4 білих і 6 червоних кульок, навмання послідовно і без повернень витягують дві кульки. Події:
   A = {перша кулька червона},
   B = {друга кулька червона},
   C = {хоча б одна з витягнених кульок червона}.
   Обчислити ймовірності P(B|A), P(A|B) і P(A|C).
2. Один раз підкидається гральний кубик. Події:
   A = {випало просте число вічок},
   B = {випало парне число вічок}.
   Обчислити ймовірність P(A|B).
3. Ймовірність влучити в літак дорівнює 0.4, а ймовірність його збити дорівнює 0.1. Знайти ймовірність того, що при влученні в літак його буде збито.
4. Ймовірність того, що прилад не вийде з ладу до моменту часу t_1 дорівнює 0.8, а ймовірність того, що він не вийде з ладу до моменту часу t_2 ($t_1 < t_2$), дорівнює 0.6. Знайти ймовірність того, що прилад, який не зіпсувався до моменту часу t_1, не зіпсується і до моменту часу t_2.
5. Підкидають навмання три гральні кубика. Спостерігаються події:
   A = {на трьох кубиках випали різні грані},
   B = {хоча б на одному кубику випала шістка}.
   Обчислити P(B|A) і P(A|B).
6. Припустимо, що 5% усіх чоловіків і 0.25% усіх жінок дальтоніки. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що кількість чоловіків і жінок однакова.)
7. Двічі підкидається гральний кубик. Яка ймовірність того, що випаде дві “3”, якщо відомо, що сума вічок, які випали, ділиться на 3?
8. З колоди з 32 карт навмання одна за другою виймаються дві карти. Знайти ймовірність того, що:
   а) вийнято два валета;
   б) витягнено дві карти пікової масті;
   в) витягнено валета і даму.

9. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що сума вічок дорівнює 8.

10. З урни, в якій лежать m білих і n чорних кульок, беруть послідовно дві кульки. Знайти ймовірність того, що друга кулька біла, якщо перша кулька: а) біла; б) чорна.

11. 1% учнів школи – невстигаючі. Серед встигаючих учнів 60% вчаться добре і відмінно. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень вчиться добре або відмінно?

§ 3.п.2.

1. Підкидають послідовно дві монети. Події:
   A = {випав герб на першій монеті},
   B = {випав хоча б один герб},
   C = {випала хоча б одна цифра},
   D = {випав герб на другій монеті}.
   Визначити, залежні чи незалежні пари подій: 1) A і C; 2) A і D; 3) B і C; 4) B і D.

2. З колоди, яка містить 36 карт, виймають одну. Події:
   A = {з'явився туз},
   B = {з'явилася карта чорної масті},
   C = {з'явився піковий туз},
   D = {з'явилася десятка}.
   Залежні чи незалежні наступні пари подій: 1) A і B; 2) A і C; 3) B і C;
   4) B і D; 5) C і D?

3. З урни, яка містить 3 білих і 7 червоних кульок, навмання послідовно і без повернень витягують дві кульки. Події:
   A = {перша кулька біла},
   B = {друга кулька біла},
   C = {хоча б одна з витягнених кульок біла}.
   Визначити, залежні чи незалежні такі події: 1) A і B; 2) A і C; 3) B і C?

4. З колоди в 52 карти навмання виймають одну карту. Події:
   A = {витягнена карта – туз},
   B = {витягнена карта червоної масті},
   C = {витягнена карта – фігура, тобто є валетом, дамою, королем

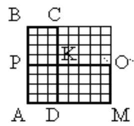
або тузом}.

Визначити, залежні чи незалежні такі три пари подій: 1) A і B; 2) A і C; 3) C і B?

5. Підкидають навмання три гральні кубики. Події: A={з'явиться не менше двох одиниць}, B = {з'явиться не більше двох шестірок}. Визначити, залежні чи незалежні ці події. Обчислити умовну ймовірність P(B|A).

6. Підкидають дві монети. Події: A = {випав герб на першій монеті}, B = {випав герб на другій монеті}. Знайти ймовірність події C= A + B.

7. На шахову дошку розміром 8×8 навмання кидається точка. Розглядаються події: A = {точка попала в прямокутник ABCD}, B = {точка попала в прямокутник APOM}. Визначити, залежні чи незалежні ці події.



8. Яка ймовірність витягнути з колоди з 36 карт або туза, або короля або карту пікової масті?

9. Прилад складається з двох незалежних у роботі блоків. Ймовірність того, що протягом деякого часу вийде з ладу перший блок, дорівнює 0.05, другий – 0.08. Для того, щоб прилад зламався, досить зламатися хоча б одному блокові. Знайти ймовірність того, що прилад вийде з ладу?

10. У першому ящику 4 білих кульки, 11 червоних і 5 чорних, у другому – 8 білих, 6 червоних і 6 чорних. Навмання беруть по одній кульці з кожного ящика. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

11. Студент може поїхати до університету або автобусом, який ходить через кожні 20 хв, або тролейбусом, який ходить через кожні 10 хв. Яка ймовірність того, що студент, який підійшов до зупинки, поїде протягом наступних п'яти хвилин?

12. Ймовірність влучення в мішень одним пострілом для першого стрільця дорівнює p_1, для другого – p_2. Стрільці зробили по пострілу в мішень. Вважаючи, що влучення в мішень кожним із стрільців незалежні події, знайти ймовірності таких подій: A={жодного влучення в мішень}, B={лише одне влучення в мішень}.

13. Підкидають два гральні кубики. Знайти ймовірності подій: A = {сума вічок, що випали, парна}, B = {хоча б на одному кубику

випало непарне число вічок}, C = {на одному кубику випало парне число вічок, а на другому – непарне}, D = {на жодному з кубиків не випало шість вічок}.

§ 3.п.3.

1. У рибалки є три місця, де він полюбляє рибалити. Ці місця він відвідує з однаковою ймовірністю. Ймовірність того, що риба клюватиме в першому місці, приблизно становить 1/3, в другому – 1/2, в третьому – 1/4. Відомо, що рибалка закинув вудочку 3 рази, а витягнув лише одну рибу. Яка ймовірність того, що він рибалив у першому з улюблених місць?
2. У Петра троє друзів: Іван, Данило та Микола. Своїх друзів Петро відвідує з однаковою ймовірністю. Ймовірність застати Івана вдома приблизно становить 1/3, Данила – 1/2, Миколу – 1/4. Відомо, що Петро тричі ходив у гості до одного і того ж товариша і лише раз застав його вдома. Яка ймовірність того, що цим товаришем був Данило?
3. В інституті оголошено набір до трьох туристичних груп, кожна з яких відвідає або Київ, або Одесу, або Канів. Дізнавшись про це Петро вирішив записатися в одну з груп. Ймовірність того, що він обере подорож до Києва десь біля 1/2, до Канева – 1/3, до Одеси – 1/6. Ймовірність того, що вже немає вільних місць у групі, яка подорожуватиме до Києва становить 1/5, до Канева – 1/6, до Одеси – 1/8. Петро вибрав одну з груп і записався до неї. Визначити ймовірність того, що він записався у групу, яка відвідає Київ.
4. Турист може придбати квиток в одній із трьох автобусних кас. Ймовірність того, що він підійде до першої каси дорівнює 1/2, до другої – 1/3, до третьої – 1/6. Ймовірності того, що квитків вже немає в касах, такі: в першій касі – 1/5, в другій – 1/6, в третій – 1/8. Турист звернувся в одну з кас і отримав квиток. Визначте ймовірність того, що він підійшов до другої каси.
5. На трьох станках при однакових і незалежних умовах виготовляють деталі одного найменування. На першому станку виготовляють a_1%, на другому – a_2%, на третьому – a_3% усіх деталей. Ймовірність кожної деталі бути бездефектною дорівнює p_1, якщо вона виготовлена на першому станку, p_2 – якщо на другому і p_3 – якщо на третьому станку. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде бездефектною.

   а) a_1=10, a_2=30, a_3=60, p_1=0.7, p_2=0.8, p_3= 0.9;

б) a_1=30, a_2=20, a_3=50, p_1=0.6, p_2=0.7, p_3= 0.8;

в) a_1=15, a_2=30, a_3=55, p_1=0.8, p_2=0.5, p_3= 0.7.

6. З п’яти гвинтівок, серед яких 3 снайперські і 2 звичайні, навмання вибирається одна, і з неї робиться постріл. Знайти ймовірність влучення, якщо ймовірність влучення зі снайперської гвинтівки дорівнює 0.95, а зі звичайної 0.7.

7. В одному з ящиків 10 білих і 6 чорних кульок, у другому – 7 білих і 9 чорних. Навмання вибирають ящик і з нього навмання виймають кульку. Вона біла. Чому дорівнює ймовірність того, що і друга кулька, яка навмання вийнята з цього ящика, буде білою?

8. З п’яти задач, серед яких три з алгебри і дві з геометрії, Петро навмання вибирає одну і пробує її розв’язати. Знайти ймовірність успіху Петра, якщо ймовірність того, що він розв’яже задачу з алгебри приблизно дорівнює 0.95, а з геометрії – 0.7.

9. В першій команді 6 майстрів спорту і 4 кандидати, а в другій – 4 і 6, відповідно. Збірна команда складається з 10 чоловік: 6 чоловік беруть із першої команди і 4 – із другої. Яка ймовірність того, що навмання вибраний гравець збірної – майстер спорту?

10. На заводі, де виготовляють запчастини до сівалок, перший цех виготовляє 25%, другий – 35%, третій – 40% усієї продукції. Брак у виробах становить відповідно 5%, 4%, 2%.
    а) Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь буде бракованою?
    б) Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь виготовлена у першому, другому і третьому цехах, якщо вона виявилась з дефектом?

11. Під час вибуху снаряда утворюються осколки трьох вагових категорій: великі, середні і малі, причому число великих, середніх і малих осколків становить відповідно 0.1, 0.3, 0.6 загального числа осколків. При влученні в броню великий осколок пробиває її з ймовірністю біля 0.9, середній – з ймовірністю біля 0.2, і малий – з ймовірністю біля 0.05. В броню влучив один осколок і пробив її. Знайти ймовірність того, що ця пробоїна зроблена: великим, середнім, малим осколком.

12. Два спортсмени-початківці стріляють у одну мішень. Ймовірність влучити першим спортсменом біля 0.2, а другим – 0.6. Першим пострілом у мішень попав лише один спортсмен. Яка ймовірність того, що перший спортсмен промахнувся ?

13. Грибник, який заблукав у лісі, вийшов на галявину, з якої в різні сторони ведуть 5 стежок. Якщо грибник піде по першій стежці, то ймовірність того, що він вийде з лісу протягом години, становить приблизно 0.6, якщо по другій – 0.3, якщо по третій – 0.2, якщо по четвертій – 0.1, якщо по п’ятій – 0.1. Яка ймовірність того, що грибник пішов першою стежкою, якщо через годину він вийшов з лісу?

14. Із 10 студентів, які прийшли на екзамен з теорії ймовірностей, троє підготувались відмінно, четверо – добре, двоє – задовільно, а один зовсім не підготувався. В білетах 20 питань. Студенти, які підготувалися відмінно, можуть відповісти на всі 20 питань, добре – на 16 питань, задовільно – на 10, і ті, які зовсім не підготувалися, на 5 питань. Кожен студент отримує навмання 3 питання з 20. Студент, якого було запрошено відповідати першим, відповів на всі 3 питання. Яка ймовірність того, що він відмінник?

15. Годинники, які надходять до магазину, виробляють на трьох заводах. Перший постачає 40% всіх годинників, що надходять до магазину, другий – 45%, третій – 15%. Серед годинників, які виробляють на першому заводі, 80% йдуть точно, серед годинників другого заводу таких 70%, а третього – 90%. Яка ймовірність того, що куплений навмання годинник, буде йти точно?

§ 4.п.1.

1. Підкидається двічі триграння лінійка, грані якої пронумеровані числами 1, 2, 3. Випадкова величина ξ: сума чисел, що випали на нижніх гранях при двох підкиданнях. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

2. Вибирається навмання одне з натуральних чисел від 1 до 10 і підраховується число його дільників. Випадкова величина ξ: число дільників. Знайти: розподіл ξ, $P\{\xi = 2\}$, $P\{\xi = 1\}$, $P\{\xi = 4\}$, $P\{\xi > 4\}$.

3. Підкидаються два звичайні гральні кубики. Випадкова величина ξ: сума вічок на цих гральних кубиках. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

4. Одночасно підкидаються білий і чорний гральні кубики. Випадкова величина ξ: різниця числа вічок, що випали, на чорному і білому кубиках. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

5. Підкидаються чотири монети. Випадкова величина ξ: число гербів, що випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

§ 4.п.2.

В задачах 1 – 5 використайте випадкову величину ξ, яка має розподіл:

ξ	–2	–1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

1. Обчислити $\mathbf{M}\xi$.
2. Знайти розподіл випадкової величини $3\xi - 1$ і знайти $\mathbf{M}(3\xi - 1)$. Порівняйте ваш результат з $3\mathbf{M}\xi - 1$.
3. Знайти розподіл випадкової величини $2\xi + 3$. Обчисліть $\mathbf{M}(2\xi + 3)$ і порівняйте ваш результат з $2\mathbf{M}\xi + 3$.
4. Знайти розподіл випадкової величини ξ^2 і обчислити $\mathbf{M}(\xi^2)$.
5. Знайти розподіл випадкової величини $\xi^2 + 1$ і обчислити $\mathbf{M}(\xi^2 + 1)$.
6. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	1	2	3	4
P	1/16	1/4	1/2	3/16

Знайти $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{P}\{\xi > 2\}$.

7. Розподіл випадкової величини x такий:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

а величини y такий:

y	1	2	3	4	5	6	7	8
P	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/8	1/4

Знайти математичне сподівання випадкових величин $\xi=x+y$, $\eta = x - y$, $\lambda = xy$, де x і y – незалежні випадкові величини.

8. Знайти математичне сподівання випадкових величин, визначених у задачах 1–5 до пункту 11.
9. Один раз підкидаються три однакові гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 1, якщо хоча б на одному гральному кубику випаде цифра 6; набуває значення 0, якщо шестірка не випаде ні на одній грані, але хоча б на одній грані появиться цифра 5; і набуває значення –1 в інших випадках. Описати розподіл ξ і знайти $\mathbf{M}\xi$.

10. Робітник обслуговує 4 станки. Ймовірність того, що протягом години перший станок не потребуватиме регулювання, біля 0.9, другий – 0.8, третій – 0.75, четвертий – 0.7. Знайти математичне сподівання числа станків, які протягом години не потребуватимуть регулювання.

§ 4.п.3.

1. Знайти дисперсії випадкових величин, описаних у задачах 1–5 до пункту 11.
2. Зважування деякої деталі приладом А дало такі результати (в мг):
   7.88, 7.89, 8.01, 8.02, 8.04, 8.01, 8.03, 7.95, 7.96, 8.21,
   а зважування тієї ж деталі приладом В:
   7.91, 7.89, 8.01, 8.01, 8.02, 8.01, 8.03, 7.97, 7.97, 8.18.
   Який з приладів точніший? (Вважати, що всі вимірювання рівноможливі.)
3. Нехай ξ – число білих кульок серед трьох навмання вийнятих з ящика, в якому 5 білих і 7 чорних кульок. Знайти Dξ.
4. Два стрільці незалежно один від одного роблять по пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця p_1, для другого p_2. Випадкова величина ξ: сумарне число влучень у мішень у даному експерименті. Знайти розподіл ξ, Mξ, Dξ.
5. З урни, яка містить 4 білих і 6 червоних кульок, навмання і без повернень виймають 3 кульки. Випадкова величина ξ: число білих кульок у вибірці. Знайти розподіл ξ, Mξ та Dξ.
6. Знайти розподіл випадкової величини X, яка набуває двох значень x_1 і x_2, $x_1 < x_2$, і відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання $\mathbf{M}(X)$ та дисперсія $\mathbf{D}(X)$:
   а) $p_1 = 0.1$, $\mathbf{M}(X) = 3.9$, $\mathbf{D}(X) = 0.09$;
   б) $p_1 = 0.3$, $\mathbf{M}(X) = 3.7$, $\mathbf{D}(X) = 0.21$;
   в) $p_1 = 0.5$, $\mathbf{M}(X) = 3.5$, $\mathbf{D}(X) = 0.25$;
   г) $p_1 = 0.9$, $\mathbf{M}(X) = 3.1$, $\mathbf{D}(X) = 0.09$;
   д) $p_1 = 0.6$, $\mathbf{M}(X) = 3.4$, $\mathbf{D}(X) = 0.24$;
   е) $p_1 = 0.4$, $\mathbf{M}(X) = 3.6$, $\mathbf{D}(X) = 0.24$;
   ж) $p_1 = 0.7$, $\mathbf{M}(X) = 3.3$, $\mathbf{D}(X) = 0.21$;
   з) $p_1 = 0.6$, $\mathbf{M}(X) = 3.4$, $\mathbf{D}(X) = 0.24$.
7. Випадкова величина X набуває трьох значень: $x_1 = 1$, x_2 і x_3, $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірності того, що X набуває значення x_1 і x_2, відповідно дорівнюють 0.3 і 0.2. Знайти розподіл X, якщо $\mathbf{M}(X)$ =

2.2 і $\mathbf{D}(X) = 0.76$.

8. Тричі підкидається правильна монета. Випадкова величина ξ: число гербів, що випали. Знайти розподіл даної випадкової величини ξ, обчислити $\mathbf{M}\xi$ та $\mathbf{D}\xi$.
9. Зі 100 карток, на яких зображені числа 00, 01, 02, ..., 98, 99, навмання виймають одну. Нехай η_1 і η_2 – відповідно сума і добуток цифр на вийнятій картці. Знайти $\mathbf{M}\eta_1$, $\mathbf{M}\eta_2$, $\mathbf{D}\eta_1$, $\mathbf{D}\eta_2$.

§ 5

1. Ймовірність події в кожному з однакових і незалежних дослідів дорівнює p. Знайти ймовірність того, що в n дослідах подія настане k разів.
   а) $p = 0.2$, $n = 7$, $k = 5$;
   б) $p = 0.3$, $n = 10$, $k = 7$;
   в) $p = 0.4$, $n = 12$, $k = 8$;
   г) $p = 0.7$, $n = 11$, $k = 8$;
   д) $p = 0.6$, $n = 7$, $k = 4$.
2. За навчальний рік студент складає 7 екзаменів. У студента є 2 шанси з трьох скласти кожний екзамен. Яка ймовірність того, що він отримає не більше: ніж дві незадовільні оцінки?
3. У суді 7 присяжних. Кожен з них в одному з трьох випадків виносить несправедливий вирок. Яка ймовірність того, що в суді буде винесено справедливий вирок?
4. Серед кавунів, які продаються на базарі, 80% спілих. Яка ймовірність того, що серед 5 куплених кавунів виявиться не більше, ніж один спілий кавун?
5. Монета підкидається 5 разів. Яка ймовірність того, що гербів випаде більше, ніж цифр?
6. На фабриці, що виготовляє олівці, брак складає 3%. Яка ймовірність того, що при купівлі 5 олівців принаймні 2 будуть якісними?
7. При користуванні телефоном 2 дзвінка з 10 помилкові. Яка ймовірність того, що з 5 дзвінків менше половини будуть помилковими?
8. Відомо, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0.52. Яка ймовірність того, в сім'ї з трьох дітей не менше двох дівчаток?
9. Для стрільця, який стріляє в мішень, ймовірність попасти в

"яблучко" при одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює p=1/4. Стрілець зробив 5 пострілів. Знайти ймовірності подій:
А = {рівно одне влучення};
В = {рівно два влучення};
С = {не менше трьох влучень}.

10. На контроль надійшла партія деталей з цеху. Відомо, що 25% всіх деталей не задовольняють стандарту. Скільки потрібно випробувати деталей, що б з ймовірністю не меншою 0.7 виявити хоча б одну нестандартну деталь?
11. Ймовірність того, що електрична лампочка залишиться справною після 1000 годин роботи, дорівнює 0.2. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох ламп залишиться справною після 1000 годин роботи.
12. Ймовірність влучення в "десятку" при одному пострілі дорівнює p=0.4. Скільки треба зробити незалежних пострілів, щоб з ймовірністю, не меншою 0.9, влучити в "десятку" принаймні один раз?
13. Монету підкидають 7 разів. Скільки разів у середньому може з'явитися герб?
14. Гральний кубик підкидають 12 разів. Скільки разів у середньому може з'явитися двійка?
15. *Стрільба в мішень ведеться до першого влучення. Знайти математичне сподівання числа пострілів, якщо ймовірність влучення одним пострілом біля 0.2.
16. Тричі стріляють в мішень. Ймовірність влучення приблизно дорівнює 0.4. Нехай ξ – число влучень. Знайти $\mathbf{D}\xi$.
17. З усієї продукції, що випускає завод, 95% складають стандартні вироби. Навмання відібрано 6 деталей. Нехай ξ – число стандартних деталей з шести відібраних. Знайти $\mathbf{D}\xi$.

§ 6

1. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Розглядається випадкова величина ξ: швидкість вітру. Оцінити ймовірність події $A = \{\xi \geq 80$ км/год$\}$, якщо шляхом багаторічних вимірювань встановлено, що $\mathbf{M}\xi = 16$ км/год.
2. Розв'язати попередню задачу, якщо в результаті проведених

додаткових вимірювань встановлено, що $\sigma = 4$км/год.

3. Число ξ сонячних днів протягом року для даної місцевості є випадковою величиною з середнім значенням 100 днів і середнім квадратичним відхиленням 20 днів. Оцінити зверху ймовірності подій: $A = \{\xi \geq 150\}$, $B = \{\xi \geq 200\}$.
4. Середнє споживання електроенергії у травні (за багато років) у даному мікрорайоні дорівнює 360 кВт·год.
   а) оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 10^6 кВт·год;
   б) оцінити ту ж ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40000 кВт·год.
5. Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде протягом року не менше 175 см опадів.
6. Середнє річне число сонячних днів у даній місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.
7. Середня швидкість вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год. Оцінити швидкість вітру, яку можна очікувати на цій висоті з ймовірністю, не меншою ніж 0.9, якщо $\sigma = 4.5$ км/год.
8. Для деякого автопарку середнє число автобусів, які відправляють у ремонт після місяця експлуатації на місцевих лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність події А = {по закінченню місяця в даному автопарку буде відправлено в ремонт менше 15 автобусів}, якщо інформація про дисперсію відсутня.
9. Оцінити ймовірність події А з попередньої задачі, якщо дисперсія дорівнює 4.

§ 7.п.3.

1. На факультеті навчається 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно для k студентів даного факультету? Обчислити вказану ймовірність для значень $k = 0, 1, 2, 3$.

2.[1] Апаратура складається з 1000 елементів, кожен з яких незалежно від інших виходить з ладу за час T з ймовірністю $p = 5\cdot10^{-4}$. Знайти

[1] Вважаємо, що в задачах 2 – 6 відповідна випадкова величина має розподіл Пуассона.

ймовірність наступних подій: A = {за час T вийде з ладу рівно три елемента}, B = {за час T вийде з ладу принаймні один елемент}, C = {за час T вийде з ладу не більше 3 елементів}.

3. Середня кількість викликів, які надходять до АТС протягом хвилини, дорівнює 120. Знайти ймовірності наступних подій: A = {за дві секунди до АТС не надійде жодного виклику}, B = {за дві секунди до АТС надійде менше двох викликів}.

4. (продовження). В умовах попередньої задачі знайти ймовірності подій: C = {за одну секунду до АТС надійде рівно три виклики}, D = {за три секунди до АТС надійде не менше трьох викликів}.

5. Випадкова величина ξ – кількість електронів, що вилітають з нагрітого катода електронної лампи протягом часу t, λ – середня кількість електронів, що випромінюються за одиницю часу. Визначити ймовірності таких подій: A = {протягом часу t_1 кількість електронів, що вилетять, буде меншою m, $m\in N$}, B = {протягом часу t_2 вилетить парна кількість електронів}.

6. Коректура в 500 сторінок містить 1300 описок. Знайти найбільш ймовірну кількість описок на одній сторінці та ймовірність цієї кількості.

Відповіді

§1.

п.1. **1**. $3\sqrt{3}/(4\pi)$, $2/\pi$; **2**. r^2/R^2; **3**. 1/4; **4**. 0.125; **5**. $\pi/4$; **6**. $1/2-\pi/16$; **7**. $(1+3\ln 2)/8$; **8**. 1/2; **9**. $1-r/a$; **10**. 4/5; **11**. $1-(1-a/60)^2$.

§ 2.

п.1. **1**. 1/2, 1/3, 2/3, 1/2, 1, 1/2; **2**. 1/2, 4/9, 1/4, 1/9; **3**. 1/4, 25/36, 1/9, 1/6; **4**. 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1/2, 1/4, 1/4; **5**. 0.35, 0.5, 0.45, 0.45.

п.2. **1**. 5/6; **2**. 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 2/3; **3**. 1/6, 5/12, 1/2, 35/36, 5/6, 11/36, 1/9; **4**. $\approx 0.264\cdot 10^{-2}$, ≈ 0.2813; **5**. 0.001, 5/144; **6**. 1/4, 1/6; **7**. 1/11; **8**. 1/216, 5/48, 5/324, $1/6^5$; **9**. 1/5!; **10**. $12!/12^{12}$; **11**. 87/473; **12**. 1/3; **13**. ≈ 0.091; **14**. 0.11; **15**. 0.45; **16**. 1/6; **17**. 0.0121; **18**. 0.00056, 0.000255; **19**. 1/6; **20**. 1/3, $C_{n-2}^{m}\cdot 2^{n-m-2}3^{-n}$, $C_n^m\cdot 2^{n-m}3^{-n}$, $(m_0!m_1!m_2!3^n)^{-1}n!$; **21**. 7/18.

п.3. **1**. 0.9; **2**. 0.35; **3**. 0.8; **4**. 0.9, 0.6; **5**. ≈ 0.354; **6**. 0.7; **7**. 0.75, 0.25, 0.25; **8**. 5/6.

§ 3.

п.1. **1**. 5/9, 5/9, 9/14; **2**. 1/3; **3**. 1/4; **4**. 3/4; **5**. 0.5, 60/91; **6**. 0.952; **7**. 1/12; **8**. 3/248, 7/124, 1/62; **9**. 2/5; **10**. $(m-1)/(m+n-1)$, $m/(m+n-1)$; **11**. 0.594.

п.2. **5**. залежні, 1/4; **6**. 3/4; **7**. не залежні; **8**. 15/36; **9**. 0.126; **10**. 0.32; **11**. 5/8; **12**. $\mathbf{P}(A)=(1-p_1)(1-p_2)$, $\mathbf{P}(B)=p_1+p_2-2p_1p_2$; **13**. 1/2, 3/4, 1/2, 25/36.

п.3. **1**. 256/715; **2**. 216/715; **3**. 288/593; **4**. 200/593; **5**. 0.85, 0.72, 0.655; **6**. 0.85; **7**. 11/40; **8**. 0.85; **9**. 13/25; **10**. 0.0345, 125/345, 140/345, 80/345; **11**. 0.5, 0.333, 0.167; **12**. 6/7; **13**. 6/13; **14**. 0.58; **15**. 0.77.

§ 4.

п.2. **1**. 0; **2**. $\mathbf{M}(3\xi-1)=3\mathbf{M}\xi-1=-1$; **3**. $\mathbf{M}(2\xi+3)=2\mathbf{M}\xi+3=3$; **4**. $\mathbf{M}(\xi^2)=1.4$; **5**. 2.4; **6**. 45/16, 11/16; **7**. 8, –1, 15.75; **8**. 4, 2.7, 7, 0, 52/21; **9**. 1/8; **10**. 3.15.

п.3. **1**. 4/3, 1.31, 5+5/6, 5+5/6, 2.34; **2**. прилад B; **3**. 105/176; **4**. $\mathbf{M}\xi=p_1+p_2$, $\mathbf{D}\xi=p_1q_1+p_2q_2$; **5**. 6/5, 14/25; **6**. $x_1=3$, $x_2=4$; **7**. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $p_1=0.3$, $p_2=0.2$, $p_3=0.5$; **8**. 3/2, 3/4; **9**. 9, 20.25, 16.5, 402.1875.)

§ 5.

2. ≈0.57; **3**. ≈0.8267; **4**. 0.00672; **5**. 0.5; **6**. 0.9985; **7**. 0.942; **8**. 0.2078; **9**. ≈0.3955, ≈0.2637, ≈0.1035; **10**. $n\geq 5$; **11**. 0.488; **12**. $n\geq 5$; **13**. 3–4 рази; **14**. 2 рази; **15**. 5; **16**. 0.72; **17**. 0.285.

§ 6.

1. $\mathbf{P}(A)\leq 0.2$; **2**. $\mathbf{P}(A)\leq 0.004$; **3**. $\mathbf{P}(A)\leq 0.16$, $\mathbf{P}(B)\leq 0.04$; **4**. а)$\mathbf{P}\{\xi>1000000\}\leq 0.36$, б)$\mathbf{P}\{\xi>1000000\}\leq 0.0016$; **5**. $\mathbf{P}\{\xi>175\}\leq 0.31$; **6**. $\mathbf{P}\{\xi\leq 200\}\geq 0.625$; **7**. $10.8\leq\xi\leq 29.2$; **8**. 0.666; **9**. $\mathbf{P}\{\xi<15\}\geq 0.96$.

§ 7.

п.3. **1.** $p_0=0.2537$, $p_1=0.3485$, $p_2=0.2389$, $p_3=0.1089$; **2.** $\mathbf{P}(A)\approx 0.394$, $\mathbf{P}(B)\approx 0.013$, $\mathbf{P}(C)\approx 0.938$; **3.** $\mathbf{P}(A)\approx 0.018$, $\mathbf{P}(B)\approx 0.092$; **4.** $\mathbf{P}(C)\approx 0.18$, $\mathbf{P}(D)\approx 0.938$; **5.** $\mathbf{P}(A)=F_\xi(m)=e^{-\lambda t_1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!}$, $\mathbf{P}(B)=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right)$; **6.** Дві описки з ймовірністю ≈0.251.

Частина II

Теорія ймовірностей

§1. Випадкові події та ймовірність

В частині I курсу розглядався випадок, коли простір елементарних подій був скінченний або злічений. У загальному випадку простором елементарних подій називається довільна множина Ω. Підмножини множини Ω і в цьому випадку називаються подіями, але, взагалі кажучи, не всі, а тільки підмножини з деякої апріорі виділеної сукупності підмножин множини Ω. Дамо строге означення.

1. Поняття випадкової події.

Означення 1. Множина $\mathcal{F}$ підмножин Ω називається *алгеброю*, якщо вона задовольняє умовам.

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. Якщо $A \in \mathcal{F}$ і $B \in \mathcal{F}$, то $A \bigcup B \in \mathcal{F}$.

3. Якщо $A \in \mathcal{F}$, то $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

Якщо з того, що елементи нескінченної послідовності підмножин A_1, A_2, ..., A_n, … належать $\mathcal{F}$, випливає, що їх об'єднання $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ належить $\mathcal{F}$, то така алгебра називається σ-*алгеброю*.

Випадковими подіями називаються елементи σ-алгебри.

Як і в елементарному випадку множина Ω називається *вірогідною подією*; порожня множина $\varnothing$ називається *неможливою подією*; під діями над подіями розуміють відповідні дії над відповідними множинами, але позначають об'єднання множин A та B символом $A + B$ і називають цю подію *сумою подій*; перетин множин A та B позначають символом AB і називають *добутком подій*; різницю множин $A \setminus B$ називають *різницею подій*; різницю $\Omega \setminus A$ називають *подією протилежною до A* і позначають символом $\overline{A}$.

Дві події A та B називають *несумісними*, якщо $AB = \varnothing$.

Якщо $A \subset B$, то кажуть: подія B наслідок події A, або A спричинює B, тягне B.

З означення 1 випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Якщо A_1, A_2, ..., A_m скінченна множина подій, то $A_1 + A_2 + ...+ A_m$ подія.

Наслідок 2. Якщо A і B події, то перетин $AB = A \bigcap B$ подія.

Справді, в силу властивості 3 множини $\overline{A}$ та $\overline{B}$ також події, а в силу властивості 2 множина $\overline{A} + \overline{B}$ буде подією; знову в силу властивості 3 множина $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ подія, що й потрібно було довести.

Наслідок 3. Якщо A_1, A_2, ..., A_n, ... скінченна чи злічена множина подій, то $A_1 A_2 ... A_n ...$ також подія.

Це твердження доводиться так, як і попереднє твердження, але використовується ще те, що події це елементи σ-алгебри.

Отже, можна зробити такий висновок: випадкові події це підмножини множини Ω, які беруться з виділеного набору підмножин, замкненого відносно теоретико-множинних операцій над множинами в скінченному чи зліченому числі таких операцій.

2. Приклади.

Приклад 1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ – алгебра.

Приклад 2. Нехай A яка-небудь власна підмножина множини Ω. Тоді

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\} \text{ – алгебра.}$$

Приклад 3. Множина всіх підмножин множини Ω – σ-алгебра.

Приклад 4. Нехай $\Omega = \mathrm{R}$ – множина дійсних чисел. $\mathcal{B}$ найменша σ-алгебра підмножин множини R, до якої належать всі відкриті інтервали числової осі. Елементи такої σ-алгебри називаються борелівськими множинами (в честь французького математика Еміля Бореля (1871 – 1956)).

Приклад 5. Нехай $\Omega = \mathrm{R}^2$ – множина всіх точок координатної площини, і нехай $\mathcal{F}$ множина всіх прямокутників зі сторонами паралельними осям координат. Тоді $\mathcal{F}$ не є алгеброю, бо хоча перетин двох прямокутників є прямокутником, то об'єднання двох прямокутників, взагалі кажучи, не буде прямокутником.

Приклад 6. Можна дати означення борелівської множини і в просторі R^m.

На практиці більшість множин в R^m, з якими мають справу, це борелівські множини. Так в R борелівськими множинами будуть числові проміжки різних типів, сукупності проміжків, різноманітні множини з окремих точок; в R^2 прикладами борелівських множин можуть служити всілякі многокутники, круги, еліпси, їх сукупності; в R^3 прикладами борелівських множин можуть служити паралелепіпеди, піраміди, і, взагалі, різноманітні многогранники і їх сукупності, кулі, еліпсоїди і т.п.

3. Поняття ймовірності випадкової події.

Означення 2. Нехай Ω простір елементарних подій, а $\mathcal{F}$ виділена σ-алгебра подій у цьому просторі. Числова функція **P**, яка визначена на множині $\mathcal{F}$, називається *ймовірністю*, якщо

1. Для всякої події $A \in \mathcal{F}$ маємо $\mathbf{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3. Якщо $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ і $AB = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
4. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ послідовність попарно несумісних подій, то

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + ...+ A_n \dots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ...+ \mathbf{P}(A_n) + \dots$$

Властивості 1–4 називають *аксіомами теорії ймовірностей*. Таку аксіоматику вперше запропонував видатний російський математик А.М. Колмогоров (1903–1987) в 1933 році.

Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ називається *ймовірнісним простором*. На практиці ймовірнісний простір – математична модель випадкових явищ, а теорія ймовірностей це розділ математики, в якому вивчається ймовірнісний простір.

4. Властивості ймовірності. З аксіом ймовірності випливають такі властивості.

1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Справді, нехай $A = \varnothing$ і $B = \varnothing$, то $A + B = \varnothing$, $AB = \varnothing$, тому $\mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}(\varnothing)$, а ця рівність можлива тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\varnothing)=0$, бо $\mathbf{P}(\varnothing)\geq 0$ згідно аксіоми 1.

2) $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Справді, з того, що $A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$ і аксіом 3 та 1 випливає, що

$$\mathbf{P}\left(A+\overline{A}\right) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

а звідси $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

3) Якщо подія A є наслідком події B, тобто, якщо $B \subset A$, то

$$\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B).$$

Справді, $A = (A \setminus B) + B$; далі, події $A \setminus B$ і B несумісні, тому згідно аксіоми 3, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(B)$, що доводить властивість 3.

З цієї властивості випливає такий **наслідок** (властивість монотонності ймовірності): якщо $B \subset A$, то $\mathbf{P}(B) \le \mathbf{P}(A)$. Справді, $A \setminus B$ подія, тому $\mathbf{P}(A \setminus B) \ge 0$, а тому $\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) \ge 0$.

4) $0 \le \mathbf{P}(A) \le 1$.

Справді, $\varnothing \subset A \subset \Omega$, а тому згідно монотонності $\mathbf{P}$ матимемо

$$0 = \mathbf{P}(\varnothing) \le \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

5) Якщо A та B довільні події, то

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$$

(теорема додавання).

Доведення. Маємо $A + B = (A \setminus AB) + B$, але події $(A \setminus AB)$ і B несумісні, тому згідно аксіоми 3 $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A \setminus AB) + \mathbf{P}(B)$. Далі, подія AB спричинює A, тому, в силу властивості 3, $\mathbf{P}(A \setminus AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$, і, отже, остаточно $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(B)$, що доводить теорему додавання. □

З властивості 5 маємо такий **наслідок**: $\mathbf{P}(A + B) \le \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, бо $\mathbf{P}(AB) \ge 0$, і, взагалі, $\mathbf{P}(A_1 + A_2 + ...+ A_m) \le \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ...+ \mathbf{P}(A_m)$ для довільних подій.

6) Якщо $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ „монотонно зростаюча" послідовність подій, то

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 +...+ A_n + \ldots) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

(теорема неперервності).

Доведення. Розглянемо такі допоміжні несумісні події:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus B_1,\ B_3 = A_3 \setminus (B_1 + B_2),\ ...,\ B_n = A_n \setminus (B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1}),$$
$$\ldots$$

ці допоміжні події такі, що $A_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$.
Отже, згідно аксіоми 4 (σ-адитивної властивості ймовірності)

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 +...+ A_n + ...) = \mathbf{P}(B_1 + B_2 + \ldots) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \ldots =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \ldots + \mathbf{P}(B_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n). \quad \square$$

Подібним чином (пропонуємо довести самостійно), якщо послідовність подій $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ „монотонно спадна”, то $\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdots A_n \ldots) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

5. Приклади ймовірнісних просторів.

Приклад 1. Нехай Ω скінченна або злічена множина, $\mathcal{F}$ множина всіх підмножин Ω, а $\mathbf{P}$ визначається на $\mathcal{F}$ так, як у частині І. Тоді $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір, бо всі аксіоми ймовірності легко перевіряються.

Приклад 2. Нехай Ω борелівська множина з R^m, для якої її міра Лебега $\mathrm{mes}\,\Omega < \infty$ (міра Лебега це узагальнення поняття довжини відрізка в R, площі фігури в R^2, об’єму в R^3), $\mathcal{F}$ – множина всіх борелівських підмножин множини Ω,

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{mes}\,A}{\mathrm{mes}\,\Omega}. \tag{1}$$

Тоді $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір.

Ймовірності, які визначені за формулою (1) називаються *геометричними ймовірностями*. Приклади задач на застосування формули (1) див. у частині І.

Приклад 3. Нехай Ω і $\mathcal{F}$ такі, як у попередньому прикладі. Візьмемо яку-небудь інтегровну на Ω невід’ємну функцію $g(x)$. Тоді для всякої множини $A \in \mathcal{F}$ покладемо

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{\int_A g(x)dx}{\int_\Omega g(x)dx}. \tag{2}$$

Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ буде ймовірнісним простором. Зокрема, якщо в (2) взяти $g(x) = 1$, то отримуємо формулу (1) для геометричних ймовірностей.

§2. Випадкова величина та її функція розподілу

1. ***Означення 1***. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ймовірнісний простір. Числова функція $\xi = \xi(\omega)$, яка визначена на множині Ω, називається *випадковою величиною*, якщо для всякого дійсного $x \in \mathrm{R}$ множина $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

В елементарному випадку довільна числова функція на Ω є випадковою величиною. Випадкові величини це математичні моделі величин, які з'являються при проведенні стохастичних експериментів. Наприклад, виграші в азартних іграх, тривалості роботи різноманітних пристроїв, розміри природних об'єктів, помилки при вимірюваннях, числові характеристики погоди, екзаменаційні оцінки і т. і.

Дві випадкові величини ξ та η називаються *незалежними*, якщо для всяких $x, y \in \mathrm{R}$ події $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ і $\{\omega : \eta(\omega) < y\}$ незалежні.

На практиці важливими задачами є задачі на знаходження ймовірностей подій, які пов'язані з випадковими величинами. Наприклад, чи багато є шансів отримати певний виграш, зібрати врожай, передбачити погоду і т. д.

Для відповіді на ці питання потрібно знати розподіл ймовірностей досліджуваної випадкової величини. В дискретному випадку розподіл задається таблицею з двох рядків, у першому з них виписуються можливі значення випадкової величини, а в другому – ймовірності цих значень.

В загальному випадку розподіл задають функцією.

Означення 2. Числова функція

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}),$$

яка визначена для всіх $x \in \mathrm{R}$, називається *функцією розподілу випадкової величини* ξ.

Далі подію $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ будемо коротко позначати так: $\{\xi < x\}$, а функцію розподілу визначаємо як $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$.

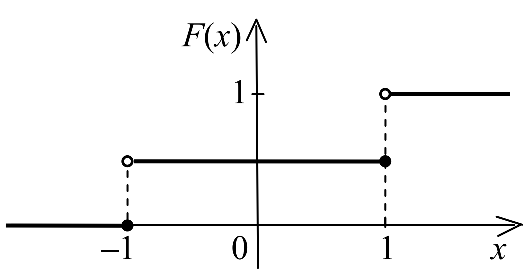
У випадках, коли мова йтиме про якусь одну випадкову величину ξ, індекс ξ у позначеннях функції розподілу часто писати не будемо.

2. Приклади функцій розподілу.

Приклад 1. Підкидається монета. Якщо випадає герб, то гравець отримує 1 гривню, якщо цифра, то програє гривню. Знайти функцію розподілу виграшу в такій грі.

Розв'язання. Маємо випадкову величину, яка може приймати одне з двох значень –1 і 1 з ймовірностями 1/2. Тому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{1}{2}, & -1 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



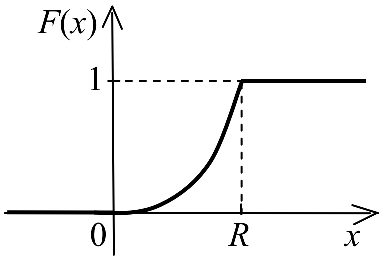
Приклад 2. Навмання ведеться стрільба в круглу мішень радіуса R, попадання завжди є. Знайти функцію розподілу віддалі від точки попадання до центра мішені.

Розв'язання. Позначимо цю віддаль через ξ. Тоді подія $\{\xi < x\}$ буде відбуватися завжди, коли $x \geq R$, не буде відбуватися коли $x \leq 0$, і, якщо $0 < x < R$, то матимемо попадання в круг радіуса x з центром у центрі мішені. Через те, що стрільба йде навмання, то можна вважати, що для таких x-ів

$$\mathbf{P}(\xi < x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{R^2}, \ 0 < x < R; \\ 1, \ \ x \geq R. \end{cases}$$



Приклад 3. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких має розподіл Бернуллі з параметром $p = 1/2$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = 2\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 3^{-k}$.

Розв'язання. Характерною особливістю цієї випадкової величини є те, що у запису значень η в трійковій системі числення будуть відсутні одинички. Множина всіх значень η знаходиться в проміжку [0; 1]. Розіб'ємо цю множину на дві підмножини: в першу з них віднесемо всі ті значення η, для яких $\xi_1 = 1$, в другу – всі ті значення, для яких $\xi_1 = 0$.

У першому випадку $\eta = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\xi_2}{3^2} + \frac{\xi_3}{3^3} + ...\right) \geq \frac{2}{3}$,

а в другому – $\eta = 2\left(\frac{\xi_2}{3^2} + \frac{\xi_3}{3^3} + ...\right) \leq 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...\right) = \frac{1}{3}$.

Через те, що $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$,

то

$$\mathbf{P}\left(\eta \ge \frac{2}{3}\right) = \mathbf{P}\left(\eta \le \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

а тому, якщо брати x з проміжку $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$, отримаємо $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \frac{1}{2}$. Далі розглядаємо випадки, коли $\xi_2 = 1$ або $\xi_2 = 0$. Ситуація виявляється подібною до попередньої, але вже роль проміжку [0; 1] буде грати або проміжок $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, або $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ з точністю до множника $\frac{1}{3}$. Тому для $0 \le x \le \frac{1}{3}$ матимемо

$$F(x) = \frac{1}{2}F(3x),$$

і, отже, якщо $\frac{1}{9} \le x \le \frac{2}{9}$, то $F(x) = \frac{1}{4}$; для $\frac{2}{3} \le x \le 1$ матимемо

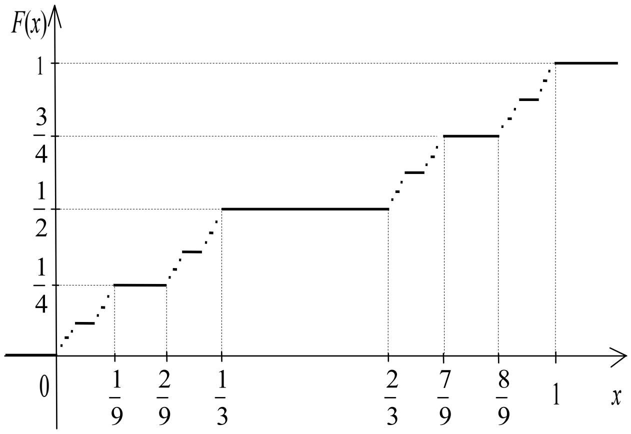
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F\left(3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right),$$

і, отже, якщо $\frac{7}{9} \le x \le \frac{8}{9}$, то $F(x) = \frac{1}{4}$.

Після цього досліджуємо випадок, коли $\xi_3 = 1$ або $\xi_3 = 0$. Знову з міркувань подібності легко отримати значення функції $F(x)$ на проміжках $\left[0; \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}; 1\right]$. Так, наприклад, якщо $0 \le x \le \frac{1}{9}$, то $F(x) = \frac{1}{4}F(9x)$,
а якщо $\frac{2}{9} \le x \le \frac{1}{3}$, то $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}F\left(9\left(x - \frac{2}{9}\right)\right)$.

Продовжуючи подібні міркування далі, отримаємо знамениту функцію Кантора, яка неперервна на [0; 1], не спадає, похідна від неї майже скрізь дорівнює 0, а множина її точок росту (в яких похідна не існує) це досконала множина Кантора. Вона отримується так: спочатку з відрізка [0; 1] вилучається середня третина, тобто, відрізок $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$; далі з проміжків $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ і $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ знову вилучаються їх середні третини і т. д. ..., цей процес вилучення продовжується до нескінченності. Те, що залишається від проміжку [0; 1], і буде досконалою множиною Кантора. Ця множина нескінченна, але не є зліченою, а її міра Лебега дорівнює 0.

Графіком функції $F(x)$ служить знаменита драбина Кантора.



3. Властивості функції розподілу.

1) Для всякого $x \in$ R маємо $0 \le F(x) \le 1$.

Це наслідок того, що для всякої події A маємо $0 \le \mathbf{P}(A) \le 1$.

2) На числовій осі функція розподілу $F(x)$ не спадає.

Доведення. Нехай $x_1 < x_2$ довільні аргументи $F(x)$. Розглянемо події: $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{x_1 \le \xi < x_2\}$, $C = \{\xi < x_2\}$. Тоді $B = C \setminus A$, крім того, подія C є наслідком події A. Отже, з одного боку $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C \setminus A) = \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A) = F(x_2) - F(x_1)$, а з іншого боку $\mathbf{P}(B) \ge 0$, тому $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$, або $F(x_2) \ge F(x_1)$, що і доводить властивість. □

3) В кожній точці $x = a \in$ R функція $F(x)$ неперервна зліва, тобто $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$.

Доведення. Розглянемо яку-небудь зростаючу послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ чисел, які менші за a і яка збігається до a. Тоді для всякого натурального n маємо

$$\{\xi < x_n\} \subset \{\xi < x_{n+1}\} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \{\xi < x_n\} = \{\xi < a\}.$$

В силу теореми неперервності

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\xi < x_n\} = \mathbf{P}\{\xi < a\},$$

а через те, що функція $F(x)$ неспадна матимемо, що

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a),$$

що треба було довести. □

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Доведення. Розглянемо монотонно спадну послідовність подій $A_n = \{\xi < -n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Маємо $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \varnothing$ – неможлива подія, тому в силу теореми неперервності

$$\lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0. \quad \square$$

Подібним чином (пропонуємо довести самостійно) можемо довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5) Для довільних $a, b \in \mathrm{R}$ $\mathbf{P}(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Справді, подія $\{a \le \xi < b\}$ це різниця подій $\{\xi < b\}$ і $\{\xi < a\}$. Крім того, подія $\{\xi < a\}$ тягне подію $\{\xi < b\}$. Тому

$$\mathbf{P}(a \le \xi < b) = \mathbf{P}(\{\xi < b\} \setminus \{\xi < a\}) = \mathbf{P}(\xi < b) - \mathbf{P}(\xi < a) = F(b) - F(a).$$

Пропонуємо самостійно знайти формули для знаходження ймовірностей таких подій: $\{\xi \le a\}$, $\{a < \xi < b\}$, $\{a < \xi \le b\}$, $\{a \le \xi \le b\}$, $\{\xi > b\}$, $\{\xi \ge b\}$.

Вказівка. Спочатку треба встановити таке співвідношення: для всякого a, $a \in \mathrm{R}$, маємо $\mathbf{P}(\xi = a) = F(a + 0) - F(a)$.

Примітка. Якщо функція розподілу $F(x)$ неперервна на всій осі, то

$$\mathbf{P}(a \le \xi < b) = \mathbf{P}(a < \xi < b) = \mathbf{P}(a < \xi \le b) = \mathbf{P}(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a).$$

4. Типи випадкових величин.

Означення 3. Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її значень дискретна; випадкова величина називається *неперервною*, якщо її функція розподілу неперервна.

Випадкова величина ξ називається *абсолютно неперервною*, якщо існує така невід'ємна функція $f_\xi(x)$, що

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt.$$

Випадкова величина називається *сингулярною*, якщо в R існує борелівська множина B з нульовою мірою Лебега така, що $\mathbf{P}(\xi \in B) = 1$, і $\mathbf{P}(\xi = x) = 0$ для всякого $x \in \mathrm{R}$.

Так, випадкова величина з прикладу 1 пункту 2 є дискретна; з прикладу 2 абсолютно неперервна; з прикладу 3 сингулярна.

Можна довести, що довільну випадкову величину можна подати у вигляді суміші випадкових величин вказаних трьох типів. Інших типів випадкових величин не існує.

В частині II курсу ми обмежуємося, в основному, тільки абсолютно неперервними випадковими величинами.

5. Щільність. Якщо випадкова величина є абсолютно неперервною, то функція $f_\xi(x)$, яка фігурує в означенні такої величини, називається *щільністю* розподілу ймовірностей випадкової величини, або просто щільністю.

Нагадаємо, $f_\xi(x)$ така функція, що $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$ і $f_\xi(x) \geq 0$.

З означення щільності й властивостей функції $F_\xi(x)$ випливають властивості щільності.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$, бо $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$.

2. Для довільних дійсних чисел $a \leq b$ маємо

$$\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f_\xi(x)dx\,.$$

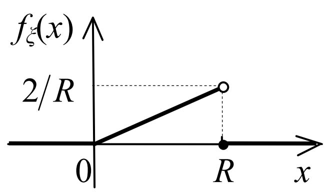
3. Майже скрізь $\dfrac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x)$.

4. Довільна невід'ємна, інтегровна на числовій осі функція $f(x)$, для якої $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, може служити щільністю якоїсь випадкової величини.

Примітка. Дискретні та сингулярні випадкові величини щільності не мають.

Приклад. Розглянемо випадкову величину з прикладу 2 п. 2. Для цієї випадкової величини щільність $f_\xi(x)$ знаходиться за формулою

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \dfrac{2x}{R^2}, & 0 < x < R; \\ 0, & x \geq R. \end{cases}$$



6. Механічне тлумачення функції розподілу й щільності. Розглянемо матеріальну систему у вигляді нескінченно довгої (в обидві сторони) нитки з масою рівною 1. Речовина, з якої вона складається, така, що коли зв'язати з цією ниткою числову вісь, то

$F_\xi(x)$ дорівнюватиме масі частини, яка знаходиться лівіше точки x (маса самої точки x не враховується). Тоді ймовірність попадання випадкової величини ξ в якийсь проміжок – це маса куска нитки на цьому проміжку.

Якщо випадкова величина ξ абсолютно неперервна, то речовина на відповідній нитці розмазана неперервно зі щільністю $f_\xi(x)$ (звідси назва щільність).

§3. Числові характеристики випадкових величин

1. Математичне сподівання.

Означення 1. *Математичним сподіванням* абсолютно неперервної випадкової величини ξ зі щільністю $f(x)$ називається число

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

(за умови існування інтеграла).

Так, математичне сподівання випадкової величини з прикладу 2.2 $\mathbf{M}\xi = \frac{2}{R^2}\int_0^R x^2dx = \frac{2}{3}R$.

Властивості математичного сподівання, які були встановлені для дискретного випадку, мають місце й для абсолютно неперервних випадкових величин. Перелічимо ці властивості без доведення.

1. Якщо C стала, то $\mathbf{M}C = C$.
2. $\mathbf{M}(C\xi) = C\mathbf{M}\xi$.
3. $\mathbf{M}(\xi + \eta) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta$.
4. Якщо ξ та η незалежні випадкові величини, то $\mathbf{M}(\xi\eta) = \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta$.

Механічне тлумачення: математичне сподівання – це абсциса центра мас механічної системи, яка моделює розподіл випадкової величини ξ.

Нехай g числова функція, яка визначена на R. Тоді $g(\xi)$ випадкова величина й можна говорити про її математичне сподівання, яке обчислюють за формулою

$$\mathbf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \qquad (1)$$

(за умови існування інтеграла).

2. Дисперсія.

Означення 2. Нехай для абсолютно неперервної випадкової величини ξ існує математичне сподівання $\mathbf{M}\xi = a$. *Дисперсією* випадкової величини називається число

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - a)^2,$$

якщо таке математичне сподівання існує.

З формули (1) випливає $\mathbf{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)dx$.

Властивості дисперсії, які були встановлені в дискретному випадку, мають місце й для абсолютно неперервних випадкових величин. Перелічимо ці властивості без доведення.

1. Якщо C стала, то $\mathbf{D}C = 0$.
2. $\mathbf{D}\xi \geq 0$.
3. $\mathbf{D}(C\xi) = C^2\mathbf{D}\xi$.
4. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$.
5. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta$.

Число $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ називають *стандартним відхиленням*.

Механічна інтерпретація: дисперсія – це момент інерції механічної системи, яка моделює розподіл випадкової величини ξ, відносно її центра мас.

3. Моменти.

Означення 3. *Початковими моментами* порядку k випадкової величини ξ називаються числа $\alpha_k = \mathbf{M}\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

Зокрема, $\alpha_1 = \mathbf{M}\xi$.

Означення 4. *Центральними моментами* порядку k випадкової величини ξ називаються числа $\mu_k = \mathbf{M}(\xi - \alpha_1)^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^k f(x)dx$, $k =$ 1, 2, ... Зокрема, $\mu_2 = \mathbf{D}\xi$.

Означення 5. *Медіаною* випадкової величини ξ називається корінь рівняння $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

Означення 6. *Модою* випадкової величини ξ зі щільністю $f(x)$ називаються точки максимуму функції $f(x)$.

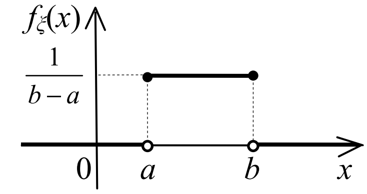
Якщо мода одна, то розподіл називається *унімодальним*.

§4. Стандартні розподіли

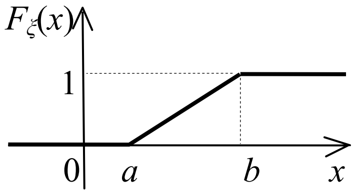
1. Рівномірний розподіл.

Означення **1. В**ипадкова величина ξ має *рівномірний розподіл* на проміжку [a; b] або *рівномірно розподілена* на [a; b], якщо вона абсолютно неперервна і її щільність

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$



Функція розподілу:



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Наприклад, якщо годинник зупинився, то кут між його стрілками випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на проміжку [0, 2π]. Фази радіотехнічних сигналів вважаються рівномірно розподіленими на проміжку [0, 2π].

Знайдемо числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини:

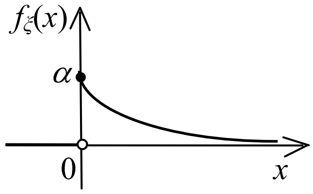
$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbf{D}\xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Показниковий розподіл.

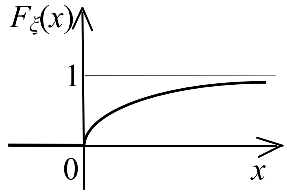
Означення 2. Випадкова величина ξ має *показниковий розподіл* з параметром $\alpha > 0$, якщо вона абсолютно неперервна і її щільність

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \alpha e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x \ge 0. \end{cases}$$



Функція розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$



На практиці показниковий розподіл мають тривалості роботи різноманітних пристроїв.

Знайдемо числові характеристики випадкової величини з показниковим розподілом:

$$\mathbf{M}\xi = \alpha \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha},$$

$$\mathbf{D}\xi = \alpha \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\alpha} \right)^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

3. Нормальний (гауссівський) розподіл.

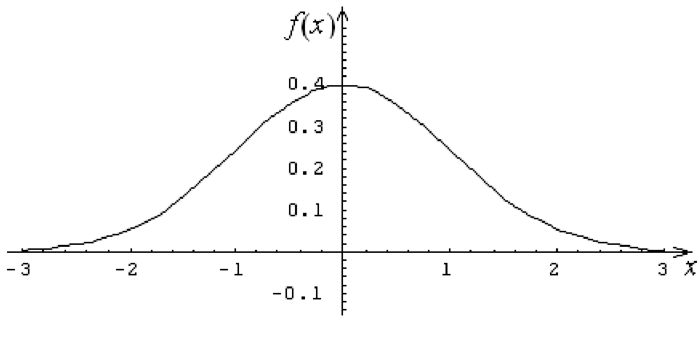
Означення 3. Випадкова величина ξ має *стандартний нормальний розподіл*, якщо вона абсолютно неперервна і її щільність

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathrm{R}.$$

Переконаємося, що f є справді щільністю розподілу. Оскільки, f>0 і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \left\{ \frac{x}{\sqrt{2}} = t; dx = \sqrt{2} dt \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$

то f є функцією розподілу.

Функція $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ парна, графік:



В силу важливості нормального розподілу в теорії ймовірностей існує спеціальне позначення для функції розподілу:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt\,,$$

і її часто називають *функцією Лапласа*. Для знаходження значень функції Лапласа підінтегральну функцію розкладають у степеневий ряд, а потім інтегрують:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-t^2/2}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 2^2\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7}+\ldots\right).$$

Цей ряд швидко збігається, тому легко знайти значення функції Лапласа з довільною точністю.

Функція Лапласа має такі властивості.

1. $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$.

2. Функція $\Phi(x)$ монотонно зростає, бо $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}>0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$. Отже, пряма $y = 1$ – горизонтальна асимптота.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$. Отже, пряма $y = 0$ ще одна горизонтальна асимптота.

4. $\Phi''(x)=f_{\xi}'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, а звідси випливає, що точка $x=0$ це точка перегину графіка $\Phi(x)$.

5. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

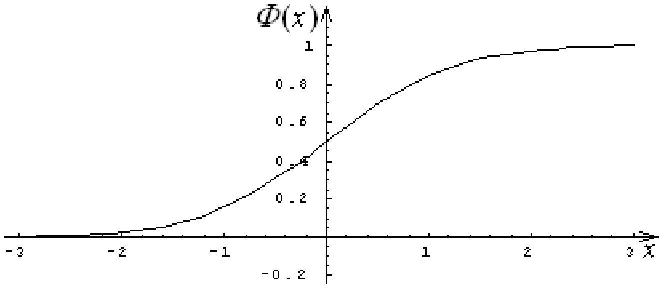
   Справді,

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-t^2/2}dt=\left\{\begin{matrix}t=-\tau, dt=-d\tau\\ \tau_н=+\infty, \tau_в=x\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x}e^{-\tau^2/2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty}e^{-\tau^2/2}d\tau==\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}e^{-\tau^2/2}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\tau^2/2}d\tau-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\tau^2/2}d\tau=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\tau^2/2}d\tau=1-\Phi(x).$$

Ця властивість означає, що графік $\Phi(x)$ симетричний відносно точки з координатами $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.



Знайдемо числові характеристики випадкової величини, яка має стандартний нормальний розподілом:

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = 0,$$

$$\mathbf{D}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Стандартний нормальний розподіл є частинним випадком більш загальної сім'ї розподілів, яку розглянемо далі.

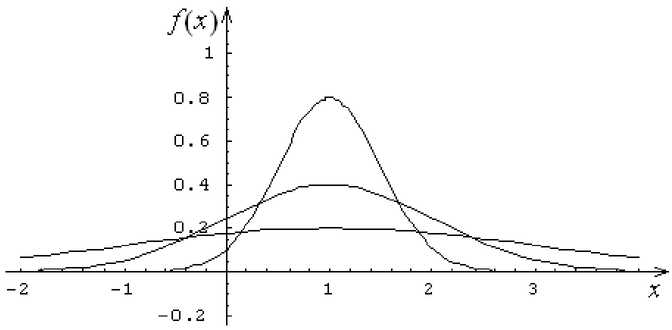
Означення 3. Випадкова величина ξ має *нормальний розподіл* з параметрами (m, σ^2), якщо щільність

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), m \in \mathrm{R}, \sigma > 0.$$

Той факт, що випадкова величина ξ має *нормальний розподіл* з параметрами m і σ записуватимемо так: $\xi \in \mathrm{N}(m, \sigma^2)$.

Коли $m = 0$, $\sigma = 1$, тобто $\xi \in \mathrm{N}(0, 1)$, то це стандартний нормальний розподіл.

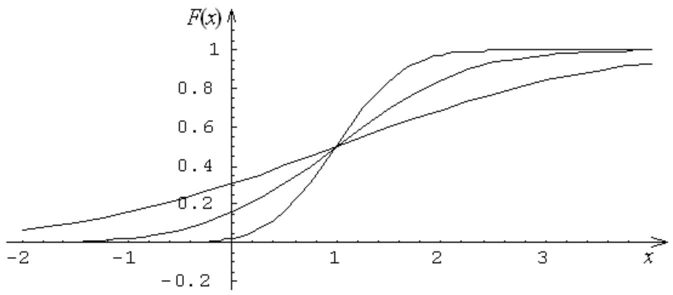
Графік щільності нормального розподілу при m=1 і різних σ (σ = 1/2, 1, 2) наведено на малюнку.



Функція розподілу

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt .$$

При σ = 1/2, 1, 2 її графіки такі:



На практиці нормальний розподіл мають помилки при різноманітних вимірюваннях.

Знайдемо числові характеристики випадкової величини, яка має нормальний розподіл з параметрами (m,σ^2):

$$\mathbf{M}\xi=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx=m,$$

$$\mathbf{D}\xi=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sigma^2 .$$

Нехай ξ € $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$, $[a,b]$ –довільний числовий проміжок. Знайдемо $\mathbf{P}(a\le\xi\le b)$.

Через те, що

$$\mathbf{P}(a\le\xi\le b)=\int_a^b f_{\xi}(x)dx ,$$

то

$$\mathrm{P}(a\le\xi\le b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt=$$

$$=\left\{\frac{t-m}{\sigma}=x,\, dt=dx,\, x_{н}=-\infty,\, x_{в}=\frac{b-m}{\sigma},\, x_{в}=\frac{a-m}{\sigma}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{b-m}{\sigma}}e^{-x^2/2}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{a-m}{\sigma}}e^{-x^2/2}dx ,$$

а звідси

$$\mathbf{P}(a \le \xi \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді

$$\mathrm{P}(|\xi - m| \le \varepsilon) = \mathrm{P}(m - \varepsilon \le \xi \le m + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Отже,

$$\mathrm{P}(|\xi - m| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Наслідки.

1. Нехай $\varepsilon = \sigma \;\Rightarrow\; 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826\ldots$

2. Нехай $\varepsilon = 2\sigma \;\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544\ldots$

3. Нехай $\varepsilon = 3\sigma \;\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973\ldots$

Тоді маємо:

$$\mathrm{P}(|\xi - m| \le \sigma) \approx 0.68;\ \mathrm{P}(|\xi - m| \le 2\sigma) \approx 0.95;\ \mathrm{P}(|\xi - m| \le 3\sigma) \approx 0.997.$$

Те, що ймовірність при $\varepsilon = 3\sigma$ дорівнює 0.997 означає, що така подія практично відбувається, і значення випадкової величини практично попадають у проміжок $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Це твердження називається *правилом трьох сигм.*

§5. Закон великих чисел

В загальному випадку також мають місце теореми, об'єднані під назвою закон великих чисел; вони формулюються так, як і в елементарному випадку й доведення цих теорем ґрунтується на нерівностях Чебишова.

1. $\xi \ge 0,\ a > 0,\ \mathbf{P}(\xi > a) \le \dfrac{\mathrm{M}\xi}{a}$ (нерівність Маркова).

2. $\mathbf{P}(|\xi - m| > \varepsilon) \le \dfrac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}$ (перша нерівність Чебишова).

3. $\mathbf{P}(|\xi - m| \le \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{\mathrm{D}\,\xi}{\varepsilon^2}$ (друга нерівність Чебишова).

Доведемо першу нерівність у випадку, коли випадкова величина ξ – невід'ємна й абсолютно неперервна. Це все одно, що довести:

$$\mathrm{M}\,\xi \ge a\mathbf{P}(\xi \ge a).$$

Справді,

$$\mathrm{M}\,\xi = \int_0^\infty xp(x)dx \ge \int_a^\infty xp(x)dx \ge \int_a^\infty sp(x)dx = a\int_a^\infty p(x)dx = a\mathbf{P}(\xi \ge a).$$

Наведемо ще одне доведення нерівності Маркова. Нехай ξ довільна невід'ємна випадкова величина і a довільне додатне число. Розглянемо такі допоміжні випадкові величини.

$$\xi_a = \begin{cases} \xi, \text{якщо } \ \xi \le a \\ a, \text{якщо } \ \xi > a \end{cases}, \quad \eta_a = \begin{cases} 1, \text{якщо } \ \xi \le a \\ 0, \text{якщо } \ \xi > a \end{cases}, \quad \varsigma_a = \begin{cases} 0, \text{якщо } \ \xi \le a \\ 1, \text{якщо } \ \xi > a \end{cases}.$$

З цих означень матимемо:

$$\xi \ge \xi_a, \ \xi_a = \xi\eta_a + a\zeta_a,$$

$$\mathrm{M}\,\xi \ge \mathrm{M}\,\xi_a = \mathrm{M}(\xi\eta_a) + \mathrm{M}(a\zeta_a) \ge \mathrm{M}(a\zeta_a) = a\mathbf{P}(\xi > a),$$

що потрібно було довести. □

Обмежимося одним твердженням.

Теорема Чебишова. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ послідовність незалежних випадкових величин, для яких існують математичні сподівання, а дисперсії $\mathbf{D}\xi_i \le c$ $(i = 1, 2, \ldots)$, c – стала. Розглянемо числову послідовність

$$p_n = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right\},$$

$n = 1, 2, \ldots$, а ε – довільне додатне число.
Тоді

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Доведення. Згідно другої нерівності Чебишова і умов на дисперсії ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, матимемо

$$p_n \ge 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2},$$

а звідси (через те, що $p_n \le 1$) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$. □

Доведена теорема, зокрема, дає обґрунтування правила середнього арифметичного в практиці вимірювань. Нехай потрібно виміряти деяку фізичну величину a. Здійснивши n незалежних вимірювань, ми дістанемо n значень цієї величини $x_1, x_2, ..., x_n$. Кожне значення x_i є значенням випадкової величини X_i, математичне сподівання якої дорівнює a, ця умова означає, що вимірювання позбавлені систематичних помилок. Крім того, вважатимемо, що виконано умову $\mathbf{D}X_i \le c$; це означає, що всі вимірювання здійснюються з деякою гарантованою точністю. Тоді з теореми Чебишова випливає, що

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1,$$

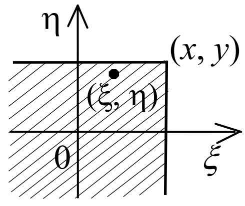
тобто, при достатньо великому числі вимірювань з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювань буде як завгодно мало відрізнятись від вимірюваної величини.

§6. Випадкові вектори

1. Функція розподілу. Випадковим m-мірним вектором називається сукупність m випадкових величин $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$. Як і в дискретному випадку обмежимося вивченням двомірних векторів, координати яких позначатимемо буквами ξ і η.

Означення 1. Функція двох змінних $F(x, y)$ називається функцією розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ, η), якщо вона визначена на R^2 і

$$F(x, y) = \mathbf{P}(\xi < x, \eta < y).$$



Якщо на координатній площині зображати вектор (ξ, η) точкою з координатами (ξ, η), то $F(x, y)$ це ймовірність попадання цієї точки в область, яка зображена на малюнку.

Корисним є механічне тлумачення функції розподілу. Розглянемо матеріальну плівку у вигляді нескінченної площини зі зв'язаною з нею системою координат і такою, що $F(x, y)$ дорівнює масі частини плівки, яка на малюнку заштрихована, тоді ймовірність попадання точки (ξ, η) в яку-небудь область дорівнюватиме масі відповідної області.

Перелічимо властивості функції $F(x, y)$.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0.$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F(x, y) = 1.$

   На мові механіки ця властивість означає, що маса матеріальної плівки, про яку йшла мова вище, дорівнює 1.

4. По кожній змінній функція $F(x, y)$ не спадає.

5. $\lim\limits_{y\to\infty} F(x, y) = F_\xi(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ.

   Справді,

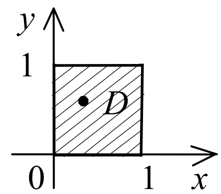
$$\lim_{y\to\infty} F(x, y) = \lim_{y\to\infty} \mathbf{P}(\xi < x,\ \eta < y) = \mathbf{P}(\xi < x) = F_\xi(x);$$

   аналогічно, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x, y) = F_\eta(y)$ – функція розподілу випадкової величини η.

6. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то

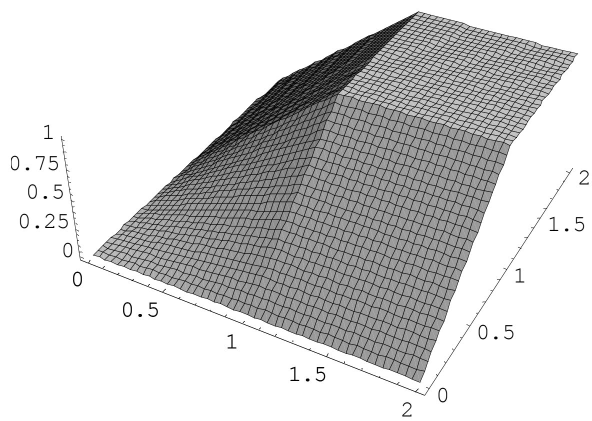
$$F(x, y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y).$$

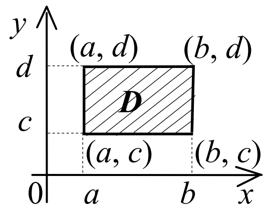
П р и к л а д 1. Нехай в одиничному квадраті D, зображеному на малюнку, навмання вибирається точка з координатами $(\xi,\ \eta)$. Тоді функція розподілу цієї сукупності така:



$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0 \text{ або } y < 0, \\ xy, & \text{якщо } 0 \le x \le 1 \text{ і } 0 \le y \le 1, \\ y, & \text{якщо } x \ge 1,\ 0 \le y \le 1, \\ x, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, y \ge 1, \\ 1, & \text{якщо } x \ge 1 \text{ і } y \ge 1. \end{cases}$$

Її графік:





Функція розподілу використовується, як і в одномірному випадку, для знаходження ймовірностей різних подій, пов'язаних з сукупністю випадкових величин (ξ, η). Так, наприклад, використовуючи механічне тлумачення $F(x, y)$, неважко вивести таку формулу для ймовірності попадання точки (ξ, η) в прямокутник
$D = \{(x, y): a \le x < b, c \le y < d\}$.

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D) = [F(b, d) - F(b, c)] - [F(a, d) - F(a, c)]. \qquad (1)$$

2. Щільність розподілу.

Означення 2. Випадковий вектор (ξ, η) називається абсолютно неперервним, якщо існує невід'ємна, інтегровна на R^2 функція $f(x, y)$ така, що

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv\,. \qquad (2)$$

Функція $f(x, y)$ називається *щільністю розподілу* випадкового вектора (ξ, η).

З властивостей функції розподілу випливають такі властивості щільності.

1) Нехай $F(x, y)$ функція розподілу абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η). Тоді $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Випливає з (2) і властивостей визначеного інтеграла.

Приклад. Щільність розподілу випадкового вектора з попереднього прикладу

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x, y) \notin D, \\ 1, \text{ якщо } (x, y) \in D. \end{cases}$$

2) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то

$$f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y).$$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$

Випливає з властивості 1.3 функції розподілу.

4) Якщо функція $f(x, y)$ щільність випадкового вектора (ξ, η), то щільність випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy,$$

а щільність випадкової величини η

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$$

Справді, з властивості 1.5 функції розподілу і (2) випливає, що

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)dv,$$

а звідси $f_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$.

Аналогічно, з того що

$$F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv = \int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)du$$

випливає, що $\dfrac{dF_\eta(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)du$.

5) Нехай D прямокутник $\{(x, y): a \le x < b,\ c \le y < d\}$. Тоді

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy$$

Доведення. За формулами (1) і (2)

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D) = [F(b, d) - F(b, c)] - [F(a, d) - F(a, c)] =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f(x, y)dxdy - \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{c} f(x, y)dxdy\right] - \left[\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{d} f(x, y)dxdy - \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{c} f(x, y)dxdy\right] =$$

$$= \iint_D f(x, y)dxdy.$$

6) Нехай D довільна квадрована область. Тоді

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Обмежимося ідеєю доведення цієї властивості. Область D розбивається прямими паралельними осям координат на прямокутники. Тоді ймовірність попадання точки (ξ, η) в область D дорівнюватиме сумі ймовірностей попадання точки (ξ, η) в прямокутники розбиття. Замінимо ці ймовірності на відповідні інтеграли від щільності і переходимо до границі, коли розміри всіх прямокутників розбиття прямують до нуля.

3. Умовні щільності. Нехай задано випадковий вектор (ξ, η) зі щільністю $f(x, y)$.

Означення *3*. *Умовною щільністю* випадкової величини ξ за умови, що випадкова величина η приймає значення y, називається функція $f_\xi(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$.

Означення 4. *Умовною щільністю* випадкової величини η за умови, що випадкова величина ξ приймає значення x, називається функція $f_\eta(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$.

4. Числові характеристики абсолютно неперервних випадкових величин. Нехай $f(x, y)$ щільність випадкового вектора (ξ, η), а $g(x, y)$ інтегровна на R^2 функція. Розглянемо випадкову величину $g(\xi, \eta)$. Можна говорити про її математичне сподівання. Це число

$$\mathbf{M}g(\xi, \eta) = \iint\limits_{R^2} g(x,y) f(x,y)\,dxdy$$

(якщо інтеграл існує).

Означення 5. Нехай $g(x, y) = x^k y^l$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$. тоді числа

$$\alpha_{k,\,l} = \mathbf{M}\xi^k\eta^l = \iint\limits_{R^2} x^k y^l f(x,y)\,dxdy$$

називаються *початковими моментами* порядку $k + l$ випадкового вектора (ξ, η).

Зокрема, $\alpha_{10} = \mathbf{M}\xi$, $\alpha_{01} = \mathbf{M}\eta$.

Означення *6*. Числа

$$\mu_{k,\,l} = \mathbf{M}((\xi - \alpha_{10})^k(\eta - \alpha_{01})^l) = \iint\limits_{R^2} (x-\alpha_{10})^k (y-\alpha_{01})^l f(x,y)\,dxdy$$

називаються *центральними моментами* порядку $k + l$ випадкового вектора (ξ, η).

Зокрема, $\mu_{20} = \mathbf{D}\xi$, $\mu_{02} = \mathbf{D}\eta$.

Означення 7. Число

$$\mu_{1,\,1} = \mathbf{M}((\xi - \alpha_{10})(\eta - \alpha_{01})) = \iint\limits_{R^2} (x-\alpha_{10})(y-\alpha_{01}) f(x,y)\,dxdy$$

називається *коваріацією* випадкового вектора (ξ, η).

Коваріація характеризує зв'язок між випадковими величинами ξ та η і позначається символом $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Як і в дискретному випадку на практиці частіше використовується коефіцієнт кореляції

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}}$$

В абсолютно неперервному випадку властивості коефіцієнта кореляції $\rho(\xi, \eta)$ такі ж, як і в дискретному випадку. Перелічимо їх.

1. $-1 \le \rho(\xi, \eta) \le 1$.
2. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $\rho(\xi, \eta) = 0$.
3. Якщо $\eta = a\xi + b$, то $|\rho(\xi, \eta)| = 1$.
4. Якщо $|\rho(\xi, \eta)| = 1$, то між ξ та η лінійна залежність.

5. Умовні математичні сподівання. Нехай $f_\xi(x \mid y)$, $f_\eta(y \mid x)$ умовні щільності. Функції

$$\mathbf{M}(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x \mid y)\,dx \ \text{ (як функція від } y),$$

$$\mathbf{M}(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y \mid x)\,dy \ \text{ (як функція від } x),$$

називаються, відповідно, *умовними математичними сподіваннями* випадкової величини ξ за умови $\eta = y$, випадкової величини η за умови $\xi = x$.

На значення функції $\mathbf{M}(\xi|\eta = y)$ і $\mathbf{M}(\eta|\xi = x)$ корисно дивитись, як на значення випадкових величин, які, відповідно, мають щільності $f_\eta(y)$ і $f_\xi(x)$. Тоді ці випадкові величини позначають так: $\mathbf{M}(\xi|\eta)$ і $\mathbf{M}(\eta|\xi)$ і називають, відповідно, *умовними математичними сподіваннями* ξ за умови η і η за умови ξ.

Теорема. $\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\eta)) = \mathbf{M}\xi$, $\mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta|\xi)) = \mathbf{M}\eta$.

Доведення.

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}(\xi \mid \eta = y) f_\eta(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x \mid y)\,dx \right) f_\eta(y)\,dy =$$

$$= \iint_{R^2} \frac{xf(x,y)}{f_\eta(y)} f_\eta(y)dxdy = \iint_{R^2} xf(x,y)dxdy = \mathbf{M}\xi.$$

Аналогічно доводиться друге співвідношення. □

Подібним чином можна говорити й про умовні дисперсії.

6. Приклади.

Приклад 1. Випадковий вектор рівномірно розподілений у трикутнику

$$\mathrm{T} = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}.$$

Це означає, що щільність цього вектора

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x,y) \notin \mathrm{T}, \\ 2, \text{ якщо } (x,y) \in \mathrm{T}. \end{cases}$$

Знайти розподіл компонент вектора, математичне сподівання, дисперсію, коваріацію.

Розв'язання.

$$1.\, f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 2\int_0^{1-x} dy, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x>1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 2(1-x), & 0<x<1, \\ 0, & x>1, \end{cases}$$

$$2.\, f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \notin [0,1], \\ 2(1-y), & \text{якщо } y \in [0,1]. \end{cases}$$

$$3.\, \mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx = 2\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{3}.$$

Аналогічно, $\mathbf{M}\eta = \dfrac{1}{3}$.

$$4.\, \mathbf{D}\xi = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 (1-x)dx = \frac{1}{18} = \mathbf{D}\eta$$

$$5.\, \mathrm{cov}(\xi, \eta) = \iint_{\mathrm{T}} \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)dy = -\frac{1}{36}.$$

Приклад 2. Нехай D квадрат $\{(x, y): -1 \le x < 1, -1 \le y < 1\}$, а щільність випадкового вектора (ξ, η)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) + 0{,}05\sin\pi x\cdot\sin\pi y, & \text{якщо } x\in D,\\ \dfrac{1}{2\pi}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), & \text{якщо } x\notin D. \end{cases}$$

Знайти розподіли компонент і числові характеристики випадкового вектора.

Розв'язання.

1.
$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy + 0{,}05\sin\pi x\int_{-1}^{1}\sin\pi y dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2};$$

аналогічно $f_\eta(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$,

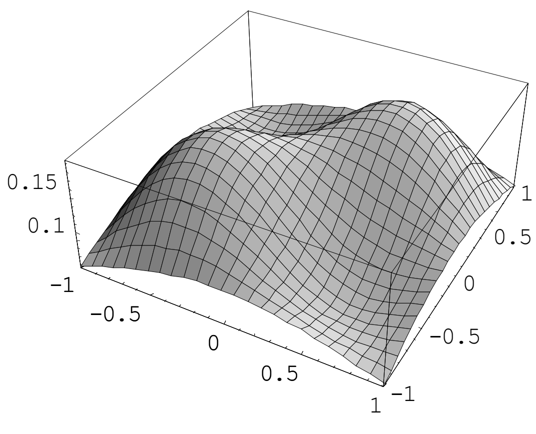
отже, випадкові величини ξ і η мають стандартний нормальний розподіл.

2. $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta = 0$; $\mathbf{D}\xi = \mathbf{D}\eta = 1$.

3. $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = \iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy = \dfrac{1}{2\pi}\iint_{R^2} xye^{-\left(x^2+y^2\right)/2}dxdy +$

$$+0{,}05\iint_D xy\sin\pi x\sin\pi y dxdy = 0{,}05\int_{-1}^{1}x\sin\pi x dx\int_{-1}^{1}y\sin\pi y dy = \frac{1}{5\pi^2}.$$

Графік щільності розглядуваного випадкового вектора:



7. Нормальний розподіл випадкового вектора. Якщо щільність випадкового вектора $(\xi_1,\ \xi_2)$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right),$$

то такий розподіл називається *стандартним нормальним розподілом*. В цьому випадку ξ_1 та ξ_2 незалежні і кожна з них має стандартний нормальний розподіл.

У загальному випадку щільність нормального розподілу залежить від п'яти параметрів (m_1, m_2, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, ρ, $|\rho| < 1$):

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right).$$

Можна довести, що щільність компонент ξ_1 та ξ_2 знаходиться, відповідно, за формулами

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

тобто, компоненти ξ_1 та ξ_2 мають нормальний розподіл, а звідси випливає, що $\mathbf{M}\xi_1 = m_1$, $\mathbf{M}\xi_2 = m_2$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma_1^2$, $\mathbf{D}\xi_2 = \sigma_2^2$. Можна знайти і коваріацію вектора (ξ_1, ξ_2). Матимемо

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \iint_{R^2}(x_1-m_1)(x_2-m_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

а звідси $\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho$.

Користуючись наведеними формулами, можна виписати умовні щільності. Наприклад, умовна щільність випадкової величини ξ_2 за умови $\xi_1 = x_1$, така:

$$f_2(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1)\right)^2}{2\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2}\right),$$

а це нормальна щільність з параметрами $m = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1)$ і $\sigma^2 = \left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2$, а звідси отримуємо умовне математичне сподівання випадкової величини ξ_2 за умови $\xi_1 = x_1$:

$$\mathbf{M}(\xi_2|\xi_1 = x_1) = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1),$$

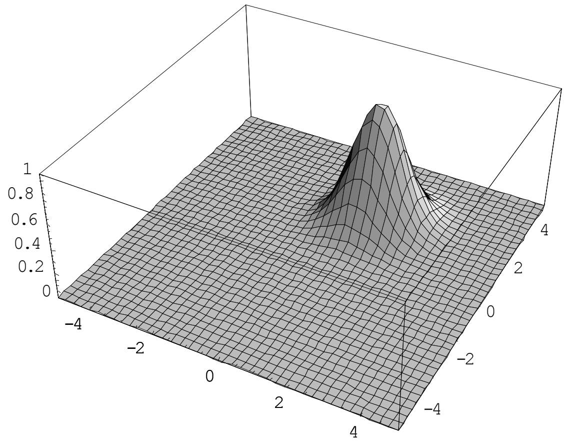
і умовну дисперсію випадкової величини ξ_2 за умови $\xi_1 = x_1$:

$$\mathbf{D}(\xi_2|\xi_1 = x_1) = \left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2 .$$

Графіками нормальних щільностей будуть дзвінкоподібні поверхні, лініями рівня яких будуть еліпси

$$\frac{\left(x_1-m_1\right)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho\left(x_1-m_1\right)\left(x_2-m_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(x_2-m_2\right)^2}{\sigma_2^2}=c ,$$

які називаються еліпсами розсіювання. Це поняття походить з теорії стрільб. Там цікавляться ймовірністю попадання снарядів в задані еліпси розсіювання. Графік щільності:



П р и к л а д. Сукупність випадкових величин (ξ_1, ξ_2) має нормальний розподіл з параметрами $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\rho = 0$. Знайти ймовірність попадання точки (ξ_1, ξ_2) в еліпс розсіювання з півосями $a\sigma_1$ і $a\sigma_2$, $a > 0$, тобто в еліпс $\mathrm{D} = \left\{ \left(x_1, x_2\right) \,\middle|\, \frac{x_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \le a^2 \right\}$.

Р о з в ' я з а н н я. Матимемо

$$\mathbf{P}\left(\left(\xi_1,\xi_2\right)\in D\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\iint\limits_D \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right)dx_1dx_2 =$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{перейдемо до полярних координат}\\ x_1=\sigma_1 r\cos\varphi,\quad x_2=\sigma_2 r\sin\varphi\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a re^{-r^2/2}dr=1-e^{-a^2/2} .$$

§7. Функції від випадкових величин

1. Функції від дискретної випадкової величини. Нехай ξ випадкова величина, яка може набувати значень x_1, x_2, ..., x_k, ..., відповідно, з ймовірностями p_1, p_2, ..., p_k, ... $(p_1 + p_2 +...+ p_k +...= 1)$, і нехай g числова функція, яка визначена на множині значень ξ. Тоді функція g породжує нову випадкову величину $\eta = g(\xi)$. Знайдемо розподіл цієї випадкової величини. Якщо всі числа $g(x_1)$, ..., $g(x_k)$, ... різні, то вони будуть значеннями випадкової величини η, відповідно, з ймовірностями $p_1,..., p_k,$ ... Якщо ж деякі з чисел $g(x_1)$, ..., $g(x_k)$, ... співпадають, наприклад, $g\left(x_{i_1}\right) = g\left(x_{i_2}\right) = ... = g\left(x_{i_r}\right) = y_1$,

то тоді $\mathbf{P}\left(\eta = y_1\right) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_r}$.

Приклад. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею

ξ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \sin\xi$.

Маємо:

$\sin\xi$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

а звідси

η	-1	0	1
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. Функції від абсолютно неперервної випадкової величини. Нехай $f_\xi(x)$ щільність випадкової величини ξ, а числова функція g визначена на множині значень випадкової величини ξ і строго монотонно зростає. Знайдемо розподіл випадкової величини $\eta = g(\xi)$. Позначимо через h функцію обернену до g. Тоді функція розподілу η знаходиться так:

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}\left(\mathrm{g}(\xi) < x\right) = \mathbf{P}\left(\xi < h(x)\right) = F_\xi\left(h(x)\right).$$

Якщо ж функція g є диференційованою, то випадкова величина $g(\xi)$ також буде абсолютно неперервною і її щільність

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\xi\left(h(x)\right) = f_\xi\left(h(x)\right) h'(x).$$

Якщо функція g строго монотонно спадає, то

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(\mathrm{g}(\xi) < x) = \mathbf{P}(\xi > h(x)) = 1 - \mathbf{P}(\xi < h(x)) = 1 - F_\xi(h(x))$$

,

і, якщо функція g буде диференційованою, то

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}F_\eta(x) = -f_\xi(h(x))h'(x).$$

П р и к л а д 1. Нехай $\eta = \xi^3$. Тоді $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, а тому

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\sqrt[3]{x}\right),\ f_\eta(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_\xi\left(\sqrt[3]{x}\right).$$

П р и к л а д 2. Нехай $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$. Тоді $g(x) = ax + b$, $h(x) = \dfrac{x-b}{a}$, а, тому

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right),\ f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Теорема 1. Нехай випадкова величина $\xi \in \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, тобто випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами m та σ^2. Тоді випадкова величина $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$, має нормальний розподіл з параметрами $am + b$ і $a^2\sigma^2$.

Д о в е д е н н я. Використаємо результат прикладу 2. Матимемо

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x-b}{a} - m\right)^2\right)\cdot\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sigma|a|\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}\right),$$

що доводить теорему. □

Наслідок 1. Якщо випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл, то випадкова величина $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$, має нормальний розподіл з параметрами b і a^2.

Наслідок 2. Якщо випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами m і σ^2, то випадкова величина $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma}$ має стандартний нормальний розподіл.

Досі розглядався випадок, коли функція g є монотонною. У немонотонному випадку обмежимося прикладом.

П р и к л а д 3. Нехай $\eta = \xi^2$. Тоді

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right), & x > 0; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ F_\xi\left(\sqrt{x}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Звідси

$$f_\eta(x)=\frac{d}{dx}F_\eta(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi\left(\sqrt{x}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\right), & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Зокрема, якщо ξ € N(0, 1), то $f_{\xi^2}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$

3. Функції від сукупності двох випадкових величин. Нехай розподіл сукупності випадкових величин (ξ,η) абсолютно неперервний і його щільність – функція $f(x, y)$.

Будемо вивчати таку сукупність випадкових величин

$$U=g(\xi,\eta),\ V=h(\xi,\eta),$$

де відображення

$$\begin{cases}u=g(x,y),\\ v=h(x,y),\end{cases} \tag{1}$$

взаємно однозначне на множині значень випадкові величини (ξ,η), тобто, існує єдиний розв'язок системи (1) відносно x і y:

$$\begin{cases}x=\varphi(u,v),\\ y=\psi(u,v).\end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. Якщо відображення (2) неперервно диференційовне і якобіан $J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0$,

то розподіл сукупності (U,V) абсолютно неперервний, а його щільність

$$p(u,v)=f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|. \tag{3}$$

Доведення. Нехай B довільна область на площині з кусково-гладкою границею і D її прообраз при відображенні (1). Тоді

$$\mathbf{P}\left((U,V)\in B\right)=\mathbf{P}\left((\xi,\eta)\in D\right)=\iint_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

Перейдемо в цьому інтегралі до нових змінних u та v за допомогою відображення (2), отримаємо

$$\mathbf{P}((U,V)\in B)=\iint_B f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

а звідси бачимо, що підінтегральна функція це щільність сукупності (U,V). □

Наслідок. Розподіл кожної з компонент сукупності (u,v) абсолютно неперервний, а їхні щільності знаходяться за формулами

$$p_u(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x,y),\psi(x,y))|J(x,y)|dy,$$

$$p_v(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x,y),\psi(x,y))|J(x,y)|dx. \quad (4)$$

П р и к л а д 1.

$$\begin{cases} u=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ v=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x=u\cos\alpha-v\sin\alpha, \\ y=u\sin\alpha+v\cos\alpha, \end{cases} \qquad J(u,v)=\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=1,$$

а тому

$$p(u,v)=f(u\cos\alpha-v\sin\alpha, u\sin\alpha+v\cos\alpha).$$

4. Розподіл суми двох випадкових величин.

Теорема 3. Нехай розподіл сукупності (ξ,η) абсолютно неперервний, а його щільність – функція $f(x, y)$. Тоді випадкова величина $\xi+\eta$ має абсолютно неперервний розподіл зі щільністю

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y,y)dy.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну сукупність випадкових величин $U=\xi+\eta$, $V=\eta$. Тоді відображення

$$\begin{cases} u=x+y, \\ v=y, \end{cases} \text{ взаємно однозначне і } \begin{cases} x=u-v, \\ y=v, \end{cases}$$

якобіан якого $J(u,v)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$.

Отже, згідно теореми 2

$$p(u,v) = f(u-v,v).$$

Залишилося застосувати формулу (4), щоб отримати твердження теореми.

Наслідок. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-y) f_\eta(y) dy. \tag{5}$$

Примітка. Вираз в правій частині співвідношення (5) називають згорткою функцій f_ξ і f_η і позначають символом $f_\xi * f_\eta$.

Приклад 2. Випадкові величини ξ та η незалежні і мають стандартний нормальний розподіл. Знайти розподіл $\xi + \eta$.

Через те, що

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

то згідно формули (5)

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/2} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x/2)^2} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4},$$

а це означає, випадкова величина $\xi + \eta$ має нормальний розподіл з параметрами 0 і 2.

Приклад 3. Випадкові величини ξ та η незалежні і мають стандартний нормальний розподіл. Знайти розподіл $\xi^2 + \eta^2$.

Згідно прикладу 3 з п.2 випадкові величини ξ^2 і η^2 мають розподіли

$$f_{\xi^2}(x) = f_{\eta^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Отже, використовуючи формулу (5), отримаємо для $x > 0$ (якщо $x < 0$, то $f_{\xi^2+\eta^2}(x) = 0$)

$$f_{\xi^2+\eta^2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi^2}(x-y) f_{\eta^2}(y) dy = \int_0^x f_{\xi^2}(x-y) f_{\eta^2}(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{xy-y^2}} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-x/2} \arcsin \frac{y-x/2}{x/2} \bigg|_0^x = \frac{1}{2} e^{-x/2}.$$

Отже, $f_{\xi^2+\eta^2}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-x/2}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$

Тобто, отримали показниковий розподіл з параметром $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

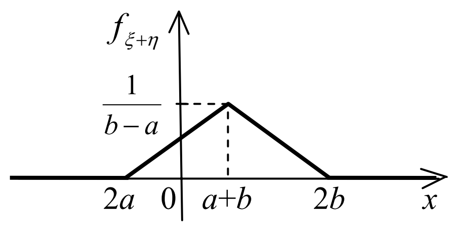
Приклад 4. Випадкові величини ξ та η незалежні і рівномірно розподілені на проміжку $[a, b]$. Знайти розподіл $\xi+\eta$.

Через те, що $f_\xi(x)=f_\eta(x)$, а $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\notin[a,b],\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x\in[a,b],\end{cases}$

То $f_{\xi+\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x-y)f_\eta(y)dy=\dfrac{1}{(b-a)}\int\limits_a^b f_\xi(x-y)dy=\dfrac{1}{(b-a)}\int\limits_{x-b}^{x-a}f_\xi(z)dz$ – це ймовірність попадання рівномірно розподіленої випадкової величини в проміжок $[x-b,\ x-a]$, поділеної на $b-a$, яка в свою чергу, дорівнює довжині спільної частини проміжків $[x-b,\ x-a]$ і $[a, b]$, поділеної на
$(b-a)^2$. Звідси матимемо

$$f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, & x\le 2a;\\ \dfrac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a<x\le a+b;\\ \dfrac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b<x\le 2b;\\ 0, & x>2b.\end{cases}$$

Графік функції $f_{\xi+\eta}(x)$:



Цей розподіл називається *розподілом Симпсона*.

§8. Характеристичні функції

В частині I курсу для дослідження цілочисельних випадкових величин використовувались генератриси. Для довільних випадкових величин вводять характеристичні функції.

Означення. *Характеристичною функцією* випадкової величини ξ називається функція

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{M}e^{i\xi t} = \mathbf{M}\cos\xi t + i\mathbf{M}\sin\xi t, -\infty < t < \infty.$$

Якщо випадкова величина дискретна з розподілом $p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, то

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k; \tag{1}$$

(у випадку, коли множина значень ξ злічена, сума в (1) замінена рядом). Якщо ж випадкова величина абсолютно неперервна зі щільністю $p_\xi(x)$, то

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx. \tag{2}$$

Примітка. Якщо мова йтиме про одну випадкову величину, то часто індекс ξ не будемо писати.

Приклад 1. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, яка має біноміальний розподіл з параметрами *n* і *p*.

Маємо:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n.$$

Приклад 2. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, яка має розподіл Пуассона з параметром λ.

Маємо:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right).$$

Приклад 3. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, яка має показниковий розподіл з параметром α.

Маємо:

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Приклад 4. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, яка рівномірно розподілена на проміжку $[a, b]$.

Маємо:

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)},$$

зокрема, якщо $a = -1$, $b = 1$, то $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Приклад 5. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, яка має стандартний нормальний розподіл.

Маємо:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-x^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}dx + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}dx;$$

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\sin(tx)e^{-x^2/2}dx = \{\text{застосовуємо формулу інтегрування}$$

$$\text{частинами}\} = \sin(tx)e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cos(tx)e^{-x^2/2}dx = t\varphi(t);$$

отже, маємо диференціальне рівняння для знаходження характеристичної функції: $\varphi'(t) + t\varphi(t) = 0$, $\varphi(0) = 1$;
звідси $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Теорема 1. Нехай $\varphi_\xi(t)$ характеристична функція випадкової величини ξ. Тоді:

1. $\varphi_\xi(t)$ визначена для всякого $t \in (-\infty, \infty)$.
2. $\varphi_\xi(0) = 1$, $|\varphi_\xi(t)| \le 1$.
3. Якщо $\eta = a\xi + b$, де a та b, сталі, то $\varphi_\eta(t) = e^{itb}\,\varphi_\xi(at)$.
4. Відповідність між множиною функцій розподілу і множиною характеристичних функцій взаємно однозначна.
5. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t)$.

Доведення. Через те, що $\left|e^{itx}\right| \le 1$ для всякого $x \in (-\infty, \infty)$, то твердження 1 і 2 випливають з означення характеристичної функції. Доведемо твердження 3. Маємо:

$$\varphi_\eta(t) = \mathbf{M}\, e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\,\mathbf{M}\, e^{ita\xi} = e^{itb}\,\varphi_\xi(at).$$

Правильність твердження 4 випливає з того, що для дискретних і абсолютно неперервних випадкових величин по функції розподілу легко знайти ймовірності значень випадкових величин і, відповідно, щільності, а вже потім за формулами (1) і (2) відшукуються характеристичні функції. Обернене твердження випливає з формули обернення (приводимо її без доведення)

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\,\varphi_\xi(t)dt .$$

Якщо ж випадкова величина абсолютно неперервна, то її щільність знаходиться за формулою

$$f_\xi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(x)dt .$$

Правильність твердження 5 випливає з таких викладок:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \mathbf{M}\, e^{i(\xi+\eta)t} = \mathbf{M}\left(e^{i\xi t}\cdot e^{i\eta t}\right) = \mathbf{M}\left(e^{i\xi t}\right)\cdot\mathbf{M}\left(e^{i\eta t}\right) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t). \quad \square$$

Наслідок 1. Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $\left(m, \sigma^2\right)$. Тоді $\varphi_\xi(t) = \exp\left(itm - \sigma^2 t^2/2\right)$.

Справді, випадкова величина $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma}$ має стандартний нормальний розподіл, отже, згідно п.2 теореми 1 і прикладу 5

$$\varphi_\eta(t) = e^{-itm/\sigma}\,\varphi_\xi\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-t^2/2},$$

а звідси

$$\varphi_\xi(t) = e^{imt}e^{-\sigma^2 t^2/2} = \exp\left(itm - \sigma^2 t^2/2\right).$$

Наслідок 2. Нехай випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і нормально розподілені, відповідно, з параметрами $\left(m_1, \sigma_1^2\right)$ і $\left(m_2, \sigma_2^2\right)$. Тоді випадкова величина $\xi_1 + \xi_2$ має нормальний розподіл з параметрами $\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

Справді,

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) + \varphi_{\xi_2}(t) = \exp\left(itm_1 - \sigma_1^2 t^2/2\right)\cdot\exp\left(itm_2 - \sigma_2^2 t^2/2\right) =$$

$$= \exp\left(it(m_1 + m_2) - \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)t^2/2\right).$$

Наслідок 3. Нехай ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n незалежні випадкові величини. Тоді

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\ldots\varphi_{\xi_n}(t).$$

Випливає за індукцією з твердження 5 теореми 1.

Характеристичні функції зручно застосовувати для знаходження моментів випадкових величин.

Теорема 2. Нехай існує $\mathbf{M}|\xi|^k<\infty, k\ge 1.$ Тоді існує k-та похідна характеристичної функції $\varphi_\xi(t)$ і

$$\varphi_\xi^{(k)}(0)=i^k\mathbf{M}\xi^k.$$

Доведення. Обмежимося абсолютно неперервним випадком. Нехай $f_\xi(x)$ щільність випадкової величини ξ. Тоді

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx}f_\xi(x)dx\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_\xi(x)dx=\mathbf{M}|\xi|<\infty,$$

і отже, інтеграл в лівій частині цієї нерівності збігається рівномірно по t, тому, законне диференціювання по t під знаком інтеграла:

$$\varphi_\xi'(t)=i\int_{-\infty}^{\infty}xe^{itx}f_\xi(x)dx,\ \varphi_\xi'(0)=i\mathbf{M}\xi.$$

Подібними міркуваннями доводиться законність k-кратного диференціювання характеристичної функції:

$$\varphi_\xi^{(k)}(t)=i^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k e^{itx}f_\xi(x)dx,$$

а звідси

$$\varphi_\xi^{(k)}(0)=i^k\mathbf{M}\xi^k.$$

Наслідок. $\mathbf{M}\xi^k=(-i)^k\varphi_\xi^{(k)}(0).$

Приклад 6. За допомогою характеристичної функції знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка має показниковий розподіл з параметром α.

Скористаємося результатом прикладу 3. Матимемо:

$$\varphi(t)=\frac{\alpha}{\alpha-it},\ \varphi'(t)=\frac{\alpha i}{(\alpha-it)^2},\ \varphi''(t)=\frac{2i^2\alpha}{(\alpha-it)^3},$$

а звідси,

$$\varphi'(0)=\frac{i}{\alpha}\ \text{і}\ \mathbf{M}\xi=\frac{1}{\alpha};\ \varphi''(0)=-\frac{2}{\alpha^2}\ \text{і}\ \mathbf{M}\xi^2=\frac{2}{\alpha^2},$$

отже,

$$\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}\xi^2-(\mathbf{M}\xi)^2=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Розглянемо ще одну важливу теорему, яку приймемо без доведення.

Теорема 3 (неперервності). Нехай $\varphi_n(t)$, $n=1,\ 2,\ ...,$ послідовність характеристичних функції і $F_n(x)$, $n=1,\ 2,\ ...,$ – послідовність відповідних функцій розподілу. Якщо $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ при $n\to\infty$ для всякого t і $\varphi(t)$ неперервна в точці $t=0$, то

1) $\varphi(t)$ – характеристична функція, яка відповідає деякій функції розподілу $F(x)$;
2) послідовність $F_n(x)\to F(x)$ при $n\to\infty$ для всякого x, де функція $F(x)$ неперервна.

Якщо має місце 2), то $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – характеристична функція, яка відповідає функції розподілу $F(x)$.

§9. Центральна гранична теорема

Під цим терміном в теорії ймовірностей розуміють сукупність тверджень про поведінку сум великої кількості випадкових величин. Однією з простих форм центральної граничної теореми є теорема Ліндеберга.

Теорема Ліндеберга. Нехай ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичними сподіваннями, які дорівнюють числу m і з дисперсіями, які дорівнюють числу σ^2, $\sigma>0$. Тоді для всякого дійсного x

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n-mn}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt.$$

Доведення. Позначимо через η_n випадкову величину

$$\eta_n=\frac{\xi_1+...+\xi_n-mn}{\sigma\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-m}{\sigma\sqrt{n}},$$

через $\varphi(t)$ характеристичну функцію випадкової величини ξ_1-m, а через $\varphi_n(t)$ характеристичну функцію випадкової величини η_n. З властивостей характеристичної функції випливає, що

$$\varphi_n(t)=\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Далі, подамо функцію $\varphi(t)$ за формулою Тейлора. Матимемо

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+\frac{t^2}{2}\varphi''(0)+o(t^2),\ \text{при}\ t\to 0,$$

а через те, що

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=i\mathbf{M}(\xi_1-m)=0,\ \varphi''(0)=i^2\mathbf{M}(\xi_1-m)^2=-D\xi_1=-\sigma^2,$$

то $\varphi(t)=1-\frac{t^2\sigma^2}{2}+o(t^2)$.Звідси $\varphi_n(t)=\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right)^n$

і $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=e^{-t^2/2}$ для любого фіксованого t. Але функція $e^{-t^2/2}$ це характеристична функція випадкової величини, яка має стандартний нормальний розподіл. Залишилося застосувати теорему неперервності, щоб завершити доведення теореми. □

Смисл центральної граничної теореми заключається в тому, що випадкова величина η_n при великих n має приблизно стандартний нормальний розподіл, а це, в свою чергу, рівносильне тому, що при великих n сума $\xi_1+...+\xi_n$ має приблизно нормальний розподіл з параметрами $(nm, n\sigma^2)$.

Наслідок (Теорема Муавра-Лапласа). Якщо випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами (n, p) з p близьким до 0.5 і $a<b$ довільні дійсні числа, то

$$\mathbf{P}(a\le\xi\le b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Справді, випадкову величину ξ можна подати, як суму незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, кожна з яких має один і той же розподіл Бернуллі з параметром p, тому згідно теореми Ліндеберга сума $\xi_1+...+\xi_n$ матиме приблизно нормальний розподіл з параметрами $(np, np(1-p))$.

Приклад. Навмання виписуються вісім випадкових цифр і знаходиться їх сума $\sum$. Знайти ймовірність того, що $15\le\sum\le 60$.

Розв'язання.

$$\sum=\xi_1+\xi_2...+\xi_8,$$

де випадкові величини ξ_1, ξ_2, ..., ξ_8 мають однаковий розподіл, який задається таблицею

ξ_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbf{M}\xi_1 = \frac{0+1+...+9}{10} = 4.5;\ \mathbf{M}\xi_1^2 = \frac{0^2+1^2+...+9^2}{10} = 18.5;$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \sigma^2 = 28.5 - 4.5^2 = 28.5 - 20.25 = 8.25.$$

Згідно теореми Ліндеберга випадкова величина $\sum$ матиме приблизно нормальний розподіл з параметрами (36, 68). Отже,

$$\mathbf{P}\left(15 \le \sum \le 60\right) \approx \Phi\left(\frac{60-36}{\sqrt{68}}\right) - \Phi\left(\frac{15-36}{\sqrt{68}}\right) = \Phi(2.91) + \Phi(2.54) - 1 =$$

$$= 0.9819 + 0.9446 - 1 = 0.9265.$$

Цей результат означає, що досліджувана подія практично відбудеться, хоч $\sum$ може приймати і значення менші за 15, і значення більші за 60.

§10. Поняття про метод Монте-Карло

Уявлення про метод Монте-Карло можна отримати, обчислюючи цим методом визначені інтеграли.

Тож нехай потрібно знайти

$$I = \int_a^b g(x)dx.$$

Цей інтеграл можна переписати в такій формі:

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-a)g(x)dx = \mathbf{M}\big((b-a)f(\xi)\big),$$

де випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку $[a, b]$.

Візьмемо послідовність випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., які незалежні і розподілені так, як і випадкова величина ξ. Тоді в силу теореми Чебишова випадкова величина

$$I_n = \frac{(b-a)f(\xi_1) + ... + (b-a)f(\xi_n)}{n} \approx I$$

при достатньо великих n. Похибка при заміні I на I_n залежить від n і, взагалі кажучи, вона буде тим меншою, чим більшим буде n. Але виникає одна проблема. Справа в тому, що похибка $|I_n - I|$ випадкова величина, а, тому добитися того, щоб $|I_n - I| < \varepsilon$ – наперед заданого числа, можна тільки з певною ймовірністю p, яка називається надійністю оцінки інтеграла. Тому крім ε ще потрібно задавати p і відшукувати n з умови

$$\mathbf{P}\left(|I_n - I| < \varepsilon\right) \geq p.$$

Останню нерівність розв'язати відносно n не просто. Для цього потрібно мати оцінку дисперсії σ^2 випадкової величини $(b-a)f(\xi)$. Будемо вважати, що таку оцінку отримали. Тоді, якщо n достатньо велике, то випадкова величина

$$\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n - nI}{\sigma\sqrt{n}},$$

де $\eta_1 = (b-a)f(\xi_1)$, ..., $\eta_n = (b-a)f(\xi_n)$, матиме приблизно стандартний нормальний розподіл. Нерівність

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) \geq p$$

рівносильна нерівності

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n - nI}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq p,$$

яка, в свою чергу, рівносильна нерівності $2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 \geq p$,

а вже звідси

$$\sqrt{n} \geq \frac{\sigma}{\varepsilon}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right), \qquad (1)$$

де $\Phi^{-1}(x)$ функція, обернена до функції Лапласа.

Для того, щоб використовувати метод Монте-Карло, потрібно вміти генерувати значення випадкової величини ξ. Ці значення називають *випадковими числами*. Існують різні методи генерування випадкових чисел: за допомогою таблиці випадкових чисел, за допомогою комп'ютерної програми, за допомогою інженерних калькуляторів, в яких є функція генерування випадкових чисел і т. і.

Ось приклад простого генератора. Послідовність ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, генерують за допомогою рекурентного співвідношення

$$\xi_{n+1} = \{\xi_n \cdot 31415926\},\ \xi_0 = 0.718281828 .$$

Так отримані числа називають псевдовипадковими, вони знаходяться в проміжку [0, 1] і їх можна використовувати замість випадкових чисел.

Якщо ж потрібно отримати випадкові числа η з проміжку $[a, b]$, то використовують формулу

$$\eta = (b-a)\xi + a .$$

Приклад 1. Знайти $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x+1} dx$ і $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$.

n	ξ	$\frac{\sin\xi}{\xi+1}$	$\frac{e^\xi}{\xi+1}$
1	0.787	0.396	1.064
2	0.118	0.105	1.005
3	0.722	0.384	1.061
4	0.628	0.361	1.054
5	0.460	0.304	1.039
6	0.591	0.350	1.050
7	0.606	0.355	1.053
8	0.953	0.512	1.104
9	0.933	0.416	1.070
10	0.472	0.309	1.040
		$\frac{\Sigma}{10} = 0.349$	$\frac{\Sigma}{10} = 1.05$

Отже, $I_1 \approx 0.349$; $I_2 \approx 1.05$. Точніші значення цих інтегралів, відповідно, такі: 0.284 і 1.125.

Приклад 2. Яку кількість випадкових чисел потрібно використати, щоб з надійністю не меншою, ніж 90% обчислити $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx$ з точністю до 0.1?

Для відповіді на це питання скористаємося співвідношенням (1). У нашому випадку $p = 0.9$, $\varepsilon = 0.1$; потрібно ще оцінити σ. Матимемо

$$\sigma^2 = \mathbf{M}\left(\frac{e^{\xi}}{1+\xi}\right)^2 - \left(\mathbf{M}\left(\frac{e^{\xi}}{1+\xi}\right)\right)^2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{(1+x)^2} - \left(\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+x}\right)^2 <$$

$$< \int_0^1 e^{2x}dx - \left(\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx\right)^2 < 2.7\,,$$

а звідси $\sigma < \sqrt{2.7} < 1.64$. Отже,

$$\sqrt{n} > \frac{1.64}{0.1}\Phi^{-1}\left(\frac{1+0.9}{2}\right) = 16.4 \cdot 1.65 \approx 27\text{, а } n \geq 730\,.$$

Оцінка для n не найкраща, бо досить грубо було оцінено σ^2. (Насправді, $\sigma^2 = 0.01152$, і, якби це було відомо, то для обчислення I досить було б взяти чотири випадкових числа).

На практиці метод Монте-Карло використовують для знаходження багатомірних інтегралів.

Вправи

Аксіоматичне означення ймовірності події

Довести справедливість наступних наслідків з означення ймовірності події:

1. $\mathbf{P}(A+B) \le \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$.
2. $\mathbf{P}(AB) \le \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(A+B)$.
3. Довести, що якщо A і B – події, то має місце рівність
$$\mathbf{P}(A\overline{B}) - \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B).$$
4. Нехай події A, B і C такі, що $C \supset AB$. Показати, що
$$\mathbf{P}(AB+BC+CA) \le \mathbf{P}(A+B).$$
5. Показати, що для трьох подій A, B і C, що спостерігаються в деякому експерименті, має місце наступна формула додавання ймовірностей:
$$\mathbf{P}(A+B+C) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC)$$
.

Розподіли і числові характеристики випадкових величин

6. Функція розподілу випадкової величини ξ дискретного типу має такий вигляд:
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 2, \\ 0.3, & \text{якщо } 2 < x \le 3, \\ 0.5, & \text{якщо } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$
Обчислити $\mathbf{P}\{\xi \ge 3.5\}$ і $\mathbf{P}\{|\xi| < 2.5\}$.
7. Один раз кинуто три однакові гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 1, якщо хоча б на одному гральному кубику випаде цифра шість; набуває значення 0, якщо шістка не випаде на жодній грані, але хоча б на одній грані з'явиться цифра 5, і набуває значення –1 в інших випадках. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання і моду.
8. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:
$$f_\xi(x) = \begin{cases} c\cos x, & \text{якщо } -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти константу c, обчислити $\mathbf{P}\{|\xi| < \pi/4\}$, $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$.

9. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ x^2/4, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Обчислити $\mathbf{P}\{\xi \ge 1\}$, $\mathbf{M}\xi$, h_ξ, $\mathbf{D}\xi$.

10. *Випадкова величина ξ неперервного типу невід'ємна, має скінченне математичне сподівання і відома її функція розподілу. Показати, що математичне сподівання такої випадкової величини можна подати у вигляді $\mathbf{M}\xi = \int\limits_0^{+\infty} \left[1 - F_\xi(x)\right] dx$.

11. Автобуси рухаються з інтервалом у 5 хвилин. Будемо вважати, що випадкова величина ξ – час очікування автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному інтервалі. Знайти середній час очікування і дисперсію часу очікування.

12. В умовах попередньої задачі знайти функцію розподілу випадкової величини ξ і обчислити ймовірність того, що час очікування буде більшим за 3 хвилини.

13. Випадкова величина ξ розподілена за законом *рівнобедреного трикутника в інтервалі* $(-a, a)$ (*закон Сімпсона*), якщо вона неперервного типу і її щільність має вигляд, зображений на рис. 1.

Записати вираз для $f_\xi(x)$, обчислити функцію розподілу ймовірностей.

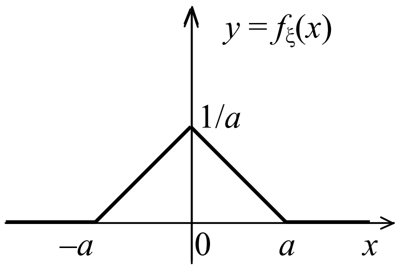


рис. 1

14. Час очікування біля бензоколонки автозаправної станції є випадковою величиною ξ, яка має показниковий розподіл із середнім часом очікування, що дорівнює t_0. Знайти ймовірності таких подій:

$$A = \left\{ \frac{t_0}{2} \le \xi < \frac{3}{2} t_0 \right\}, \quad B = \{\xi \ge 2t_0\}.$$

15. Випадкова величина ξ має *розподіл Коші*, що визначається функцією розподілу ймовірностей

$$F_\xi(x) = b + c\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a} \quad \text{при } -\infty < x < +\infty.$$

Якими можуть бути a, b, c?

16. (продовження). Обчислити щільність розподілу Коші. Чи існує математичне сподівання і моменти більш високого порядку для даного розподілу?

17. (продовження). Знайти моду, медіану і квантиль t_p порядку $p = 0{,}75$ розподілу Коші.

18. Відомо, що при стрільбі у плоску мішень у незмінних умовах випадкова величина R – відстань від точки влучення до центра мішені – має *розподіл Релея* зі щільністю

$$f_R(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$ – параметр, що характеризує розподіл. Побудувати ескіз графіка щільності ймовірностей $f_R(x)$, перевірити умову нормування і обчислити характеристики $\mathbf{M}R$ і $\mathbf{D}R$.

19. Швидкість V молекул ідеального газу, що знаходиться у стані рівноваги при певній температурі, є випадковою величиною, яка має *розподіл Максвела* зі щільністю

$$f_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\beta^{3/2}x^2 e^{-\beta x^2/2}, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

де параметр розподілу $\beta > 0$ визначається температурою і масою молекул. Виразити середнє значення і найбільш ймовірне значення швидкості молекул, а також дисперсію розподілу через фізичний параметр β.

20. Випадкова величина ξ має розподіл *арксинуса* зі щільністю

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| \ge a, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{якщо } |x| < a, \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу і обчислити $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$.

21. (продовження). Для випадкової величини розподіленої за законом арксинуса, обчислити d_ξ, h_ξ і $\chi_{0,75}$.

22. Випадкова величина ξ неперервного типу має розподіл *Лапласа з параметрами* $m \in R$ і $\sigma > 0$, $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$, якщо її щільність задається формулою

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-|x-m|\sqrt{2}/2}, \; -\infty < x < +\infty.$$

Виразити характеристики $\mathbf{M}\xi$ і σ_ξ через параметри розподілу.

23. Випадкова величина ξ розподілена за законом Лапласа з параметрами $m = 0$, $\sigma > 0$. Побудувати функцію розподілу і обчислити ймовірності $p_к = \mathbf{P}\{|\xi| < k\sigma\}$ для $k = 1, 2, 3$.

24. Випадкова величина ξ має *розподіл Парето* з параметрами $a > 0$ і $x_0 > 0$, якщо функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le x_0, \\ 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^a, & \text{якщо } x > x_0. \end{cases}$$

З'ясувати, при яких значеннях параметра a для даного розподілу існують $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$ та обчислити їх.

Нормальний розподіл

25. Випадкова величина ξ нормально розподілена з параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Виразити її функцію розподілу через $\Phi(x)$.

26. Вимірюється випадкова величина ξ, яка підлягає закону розподілу $N(10,\ 5)$. Знайти симетричний відносно $\mathbf{M}\xi$ інтервал, в який з ймовірністю p попадає виміряне значення. Розглянути такі числові значення: а) $p = 0.9974$; б) $p = 0.9544$; в) $p = 0.50$.

27. В нормально розподіленій сукупності 15% значень x менші за 12 і 40% значень x більші за 16.2. Знайти середнє значення і стандартне відхилення даного розподілу.

28. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення ξ розміру, що контролюється, від норми не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується стандартним відхиленням σ. Вважаючи, що для даної технології $\sigma = 5$ і ξ нормально розподілена, з'ясувати, скільки процентів придатних деталей виготовляє автомат.

29. (продовження). В умовах попередньої задачі з'ясувати, якою повинна бути точність виготовлення, щоб процент придатних деталей підвищився до 98?

30. Коробки з шоколадом автоматично пакуються. Їх середня маса дорівнює 1.06 кг. Відомо, що 5% коробок має масу меншу 1 кг. Який процент коробок, маса яких більша за 940 г?

31. Випадкова величина підлягає закону $N(1, \sigma)$. Відомо, що $\mathbf{P}\{\xi < 2\} = 0.99$. Обчислити $\mathbf{M}[\xi^2]$ і $\mathbf{P}\{\xi^2 > 2\}$.

32. Випадкова величина ξ розподілена за законом $N(m, \sigma)$. Обчислити $p_1 = \mathbf{P}\{\xi \geq x_{n2}\}$ і $p_2 = \mathbf{P}\{x_{n1} \leq \xi \leq x_{n2}\}$, де x_{n1} і x_{n2} – точки перегину кривої щільності розподілу ймовірностей.

33. *(продовження). Нехай (a, b) – інтервал, який не містить m_ξ. В умовах попередньої задачі визначити, при якому σ ймовірність $Q(\sigma) = \mathbf{P}\{a \leq \xi \leq b\}$ буде найбільшою?

Розподіли і числові характеристики випадкових векторів

34. Розподіл випадкового вектора (ξ, η) дискретного типу визначається наступною таблицею:

x_i \ y_j	–1	0	1
1	0.15	0.3	0.35
2	0.05	0.05	0.1

а) Знайти безумовні розподіли окремих компонент ξ та η.

б) З'ясувати, чи залежні компоненти ξ та η.

в) Обчислити ймовірності $\mathbf{P}\{\xi = 2, \eta = 0\}$ та $\mathbf{P}\{\xi > \eta\}$.

г) Побудувати функцію розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$, подати результат у вигляді таблиці, знайти $\mathbf{M}\xi$ та $\mathbf{M}\eta$.

д) Обчислити коваріаційну матрицю випадкового вектора.

е) Для випадкового вектора описати умовний розподіл випадкової величини η за умови $\xi = 1$ і знайти умовне математичне сподівання $\mathbf{M}[\eta \mid \xi = 1]$.

35. Один раз підкидається гральний кубик. Випадкові величини: ξ – покажчик парної кількості вічок, що випали ($\xi = 1$, якщо випало парне число вічок, і $\xi = 0$ в іншому випадку), η – покажчик числа вічок, що кратні трьом ($\eta = 1$, якщо випало число вічок кратне трьом, і $\eta = 0$ в іншому випадку). Описати розподіл випадкового вектора (ξ, η) і безумовні розподіли компонент.

36. Іван і Петро навмання дістають по одній кульці з урни, що містить 6 білих і 4 чорних кульки. Іван дістає кульку першим. Випадкові величини: ξ – кількість білих кульок у Івана, η – кількість білих кульок у Петра. Описати розподіл випадкового вектора (ξ, η) і безумовні розподіли компонент, якщо вибір кульок відбувається без повернень.

37. Розв’язати попередню задачу за умови, що вибір кульок відбувається з поверненням. У якому випадку ймовірність події $\{\xi > \eta\}$ більша: в досліді із попередньої задачі чи у даному досліді?

38. Випадкова величина ξ набуває значень 0, 1 або 2 з ймовірностями відповідно 0.2; 0.7 і 0.1, а незалежна від неї випадкова величина η – значень –1, 0, 1 відповідно з ймовірностями 0.3; 0.5; 0.2. Описати розподіл випадкового вектора (ξ, η) і обчислити функцію розподілу в точках (1.5; –0.5) та (0.5; 4).

39. Підкидають два однакові гральні кубики. Випадкові величини: ξ – покажчик парності суми вічок, що випали (тобто, $\xi = 1$, якщо ця сума парна, і $\xi = 0$ в іншому випадку), η – покажчик парності добутку вічок, що випали (тобто, $\eta = 1$, якщо цей добуток парне число, і $\eta = 0$ в іншому випадку).

    а) Описати розподіл випадкового вектора (ξ, η).

    б) Побудувати функцію розподілу випадкового вектора.

    в) Знайти коваріаційну матрицю випадкового вектора.

40. Число ξ вибирається навмання з множини цілих чисел $\{1, 2, 3\}$. Потім із тієї ж множини вибирається навмання число η, більше першого або рівне йому.

    а) Описати розподіл випадкового вектора (ξ, η) і з’ясувати залежні чи незалежні випадкові компоненти ξ та η.

    б) Знайти коефіцієнт кореляції $\rho_{\xi\eta}$.

    в) Описати умовний розподіл компоненти ξ за умови $\eta = 3$ і обчислити $\mathbf{M}[\xi \mid \eta = 3]$.

В задачах 41–47 розглядаються випадкові вектори неперервного типу.

41. Щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ, η) має наступний вид:

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{якщо } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

    а) Визначити константу c і обчислити $\mathbf{P}\{\xi + \eta < 1\}$.

    б) Визначити безумовну щільність розподілу компоненти η і з’ясувати, залежні компоненти ξ та η чи ні.

    в) Для випадкового вектора (ξ, η) обчислити центр розсіювання і функцію розподілу $F_\xi(x)$.

42. Щільність розподілу ймовірностей двовимірного випадкового

вектора (ξ, η) має наступний вид:

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} c(xy+y^2), & \text{якщо } 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

а) Обчислити значення константи c і ймовірність $\mathbf{P}\{\xi+\eta<2\}$.

б) Знайти центр розсіювання випадкового вектора (ξ, η).

43. Функція розподілу випадкового вектора (ξ, η) неперервного типу задана у вигляді

$$F_{\xi,\eta}(x,\mathrm{y})=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x<0 \text{ або } y<0,\\ \frac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), & \text{якщо } 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2,\\ 1, & \text{якщо } x>\pi/2 \text{ та } y>\pi/2.\end{cases}$$

Обчислити ймовірності $p_1=\mathbf{P}\{(\xi, \eta)\in G_1\}$ і $p_2=\mathbf{P}\{(\xi, \eta)\in G_2\}$, де G_1 і G_2 зображені на рис. 2 і 3 відповідно.

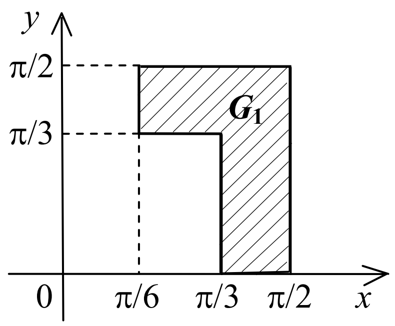


Рис. 2

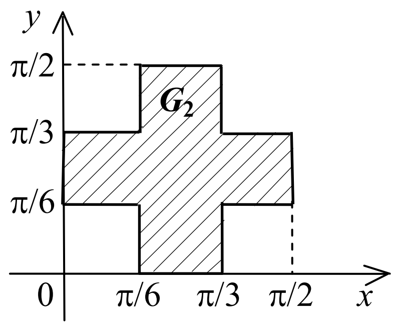


Рис. 3

44. Обчислити щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора з попередньої задачі і знайти центр розсіювання.

45. Випадковий вектор (ξ, η) розподілений рівномірно у трикутнику з вершинами у точках (–1, 0), (1, 2) та (1, 0). Обчислити центр розсіювання даного розподілу.

46. Випадковий вектор (ξ, η) рівномірно розподілений у квадраті зі стороною a і діагоналями, що співпадають з осями координат.

а) З'ясувати, залежні чи незалежні його компоненти.

б) Обчислити коваріаційну матрицю випадкового вектора і з'ясувати, корельовані чи некорельовані його компоненти.

в) Для випадкового вектора (ξ, η) обчислити ймовірності $p_1=\mathbf{P}\{\xi\eta>0\}$ і $p_2=\mathbf{P}\left\{\xi^2+\eta^2<\frac{a^2}{4}\right\}$.

47. Точка M навмання ставиться у круг $G = \{(x,\ y)|\ x^2 + y^2 < a^2\}$. Дослідити питання корельовані чи некорельовані, а також залежні чи незалежні випадкові координати ξ та η точки M.

Функції від випадкових величин

48. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром α. Знайти щільності розподілу випадкових величин:

$$\eta_1 = \sqrt{\xi}, \eta_2 = \xi^2, \eta_3 = \frac{1}{\alpha}\ln\xi.$$

49. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку [0,1]. Знайти щільності розподілу випадкових величин:

$$\eta_1 = 2\xi + 1, \eta_2 = -\ln(1-\xi).$$

50. Випадкова величина ξ має розподіл Коші з щільністю $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти щільності розподілу випадкових величин:

$$\eta_1 = \frac{\xi^2}{1+\xi^2},\quad \eta_2 = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

51. Випадкова величина ξ має розподіл Коші з щільністю $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти щільності розподілу випадкових величин:

$$\eta_1 = \frac{2\xi}{1-\xi^2}, \eta_2 = \frac{1}{\xi}.$$

52. Випадкова величина ξ має неперервну функцію розподілу $F(x)$. Довести, що випадкова величина $\eta = F(\xi)$ рівномірно розподілена на проміжку [0,1].

53. Щільність розподілу сукупності випадкових величин ξ та η визначається рівностями: $f(x,y) = \dfrac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}$, якщо $x_2 + y^2 \geq 1$, і нулю в інших випадках. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

54. Випадкові величини ξ та η незалежні й мають однакову щільність $f(x)$, $x > 0$. Знайти щільність $q(x,y)$ сукупності випадкових величин

$$X = \xi - \eta, \quad Y = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \,.$$

55. Випадкові величини ξ та η незалежні й мають однакову щільність $f(x) = e^{-x}$ $(x > 0)$. Знайти $\mathrm{P}\{| \xi - \eta | \le 1$.

56. Випадкові величини ξ та η незалежні й рівномірно розподілені на проміжку $[0, a]$. Знайти щільності розподілу випадкових величин: $\xi + \eta, \ \xi - \eta, \ \xi\eta, \ \xi / \eta$.

57. Випадкові величини ξ та η незалежні й рівномірно розподілені на проміжку $[0,1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\tau = \dfrac{\xi}{\xi + \eta}$.

Закон великих чисел і центральна гранична теорема

58. Випадкова величина ξ має дисперсію $\mathbf{D}\xi$=0.004. Знайти ймовірність того, що випадкова величина відрізняється від $\mathbf{M}\xi$ більше ніж на 0.2.

59. Для випадкової величини ξ відома дисперсія $\mathbf{D}\xi$=0.009 і нерівність $\mathbf{P}(| \xi - \mathbf{M}\xi | \ge a) < 0.1$. Знайти число a.

60. Для випадкової величини ξ відома дисперсія $\mathbf{D}\xi$=0.01 і нерівність $\mathbf{P}(| \xi - \mathbf{M}\xi | < a) \ge 0.96$. Знайти число a.

61. З якою надійністю середнє арифметичне вимірювань дає величину, яку вимірюють, якщо зроблено 500 вимірювань з точністю 0.1 і дисперсії результатів вимірювань не перевищують 0.3?

62. З якою точністю середнє арифметичне вимірювань дає величину, яку вимірюють, якщо зроблено 500 вимірювань, надійність результату складає 80% і дисперсії результатів вимірювань не перевищують 0.04?

63. Скільки вимірювань потрібно зробити, щоб їх середнє арифметичне дало величину, яку вимірюють з точністю до 0.05 і надійністю 90%, якщо дисперсії результатів вимірювань не перевищують 0.2?

64. Розв’язати вправи 61–63, використовуючи центральну граничну теорему. Порівняти отримані результати з відповідями до цих вправ.

65. В кожному з незалежних випробувань ймовірність події A дорівнює 0.3. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що в 10000 випробувань відхилення частоти події A від її ймовірності не перевищує по абсолютній величині 0.01.

66. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, Що нормальна випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання більше, ніж на три середніх квадратичних відхилень.

67. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з ймовірністю не меншою 0.96, можна було чекати, що абсолютна величина відхилення частоти придатних деталей від ймовірності деталі бути придатною, яка дорівнює 0.98, не перевищує 0.02?

68. Добова потреба електроенергії в населеному пункті випадкова величина з математичним сподіванням 3000 квт/год і дисперсією 2500. Оцінити ймовірність того, що в найближчу добу витрати електрики будуть від 2500 до 3500 квт/год.

69. Ймовірність того, що навмання вибрана деталь бракована при кожній перевірці дорівнює 0.2. Визначити ймовірність того, що серед 50 навмання вибраних деталей бракованих виявиться не менше 6.

70. Відомо, що 60% виробів випускаються першим сортом. Береться 200 виробів. Чому дорівнює ймовірність того, щоб серед них виробів першого сорту виявиться а) від 120 до 150 шт., б) від 90 до 150 шт.?

71. При перевірці якості електролампочок встановлено, що з них 96% служать не менше гарантійного терміну. Навмання вибирається 15000 лампочок. Знайти ймовірність того, що з терміном горіння менше гарантованого буде:
а) від 570 до 630 лампочок, б) від 600 до 660 лампочок, в) менше 615 лампочок.

72. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ, характеристична функція якої дорівнює: а) $\frac{1}{at}\sin at (a \neq 0)$,
б) $\frac{4}{t^2}\cos t \sin^2 \frac{t}{2}$, в) $\frac{4}{t^2}e^{it}\sin^2\frac{t}{2}$, г) $(1-it)^{-p}(1+it)^{-q}\ \ (p,q>0)$.

73. Випадкова величина η_n дорівнює сумі вічок, які випали при n незалежних підкиданнях грального кубика. Використовуючи

центральну граничну теорему, вибрати n так, щоб $\mathbf{P}\{|\eta_n / n - 3/5| \geq 0.1\} \leq 0.1$.

74. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні і однаково розподілені:

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1.25\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 0.8\} = \frac{1}{2},\ i = 1,2,\ldots,\ \text{і}\ \eta_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n .$$

а) Знайти $\mathbf{M}\eta_{1000}$, $\mathbf{D}\eta_{1000}$, $\mathbf{M}\ln\eta_{1000}$, $\mathbf{D}\ln\eta_{1000}$.

б) Користуючись асимптотичною нормальністю $\ln\eta_n$, $n \to \infty$, знайти наближені значення $\mathbf{P}\{\eta_{1000} \leq 0.001\}$, $\mathbf{P}\{\eta_{1000} < 1\}$, $\mathbf{P}\{\eta_{1000} \leq 1\}$, $\mathbf{P}\{\eta_{1000} \leq 10^4\}$.

75. Обчислення інтеграла $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ проводиться методом Монте-Карло на основі 1000 випробувань. Яку максимальну відносну похибку обчислення можна гарантувати з надійністю 97.22%?

76. Обчислення інтеграла $\int_0^1 x^2 dx$ проводиться методом Монте-Карло на основі 10000 випробувань. Знайти ймовірність того, що відносна похибка обчислення не перевищить 1%.

77. Обчислення числа π проводиться методом Бюффона (голка довжиною 1 дм навмання кидається на площину, розграфлену паралельними прямими, віддаль між якими дорівнює 2 дм). Підраховується число перетинів голкою якої-небудь з паралельних ліній. Знайти найменше число випробувань, які потрібно провести, щоб з ймовірністю 0.9996 відносна похибка визначення числа π була не більшою 3%.

Відповіді

6. $\mathbf{P}\{\xi \geq 3{,}5\}=1/2$, $\mathbf{P}\{|\xi| < 2{,}5\}=0.3$; **7.** $\mathbf{M}\xi=1/8$, $d_\xi=1$; **8.** $c=1/2$, $\mathbf{P}\{|\xi|<\pi/4\}=\sqrt{2}/2$, $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=\pi^2/4-2$; **9.** $\mathbf{P}\{\xi \geq 1\}=3/4$, $\mathbf{M}\xi=4/3$, $h_\xi=\sqrt{2}$, $\mathbf{D}\xi=2/9$; **11.** $\mathbf{M}\xi=5/2$, $\mathbf{D}\xi=25/12$; **12.** $\mathbf{P}\{\xi > 3\}=2/5$; **13.** $\mathbf{M}\xi=\dfrac{a+b}{2}$,

$\mathbf{D}\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$; **14.** $\mathbf{P}(A)=\exp(-1/2)-\exp(-3/2)\approx 0.3834$, $\mathbf{P}(B)=\exp(-2)\approx 0.135$; **15.** $a > 0$, $b = 1/2$, $c = 1/\pi$; **16.** $f_\xi(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2-a^2)}$, $\mathbf{M}\xi$ і моменти більш високого порядку не існують; **17.** $d_\xi=h_\xi=0$, $t_{0.75}=a$; **18.** $\mathbf{M}R=\sigma\sqrt{\pi/2}\approx 1.253\sigma$, $\mathbf{D}=\sigma^2(2-\pi/2)\approx 0.429\sigma^2$; **19.** $\mathbf{M}V=2\sqrt{2/(\beta\pi)}$, $d_V=\sqrt{2/\beta}$, $\mathbf{D}V=\dfrac{1}{\beta}\left(3-\dfrac{8}{\pi}\right)$; **20.** $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=\dfrac{a^2}{2}$; **21.** d_ξ не існує, $h_\xi=0$, $\chi_{0,75}=a\sin\dfrac{\pi}{8}\approx 0.3827a$; **22.** $\mathbf{M}\xi=m$, $\sigma_\xi=\sigma$;

23. $F_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\frac{x\sqrt{2}}{\sigma}}, & \text{якщо } x\leq 0,\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{\frac{-x\sqrt{2}}{\sigma}}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$ $\quad p_к=1-e^{-k\sqrt{2}}\approx\begin{cases}0.7569, & k=1,\\ 0.94, & k=2,\\ 0.9656, & k=3.\end{cases}$

24. $\mathbf{M}\xi=\dfrac{a}{a-1}x_0$, якщо $a>1$, $\mathbf{D}\xi=\dfrac{a}{(a-1)^2(a-2)}x_0^2$, якщо $a>2$;

25. $F_\xi(x)=\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$; **26.** а) $(-5;25)$; б) $(0;20)$; в) $(6.65;13.35)$;

27. $m=15.39$, $\sigma=3.26$; **28.** $\approx 95\%$; **29.** ≈ 4.292; **30.** $\approx 99.95\%$;
31. $\mathbf{M}[\xi^2]\approx 1.1842$, $\mathbf{P}\{\xi^2 > 2\}\approx 0{,}8328$; **32.** $p_1=0.1587$; $p_2=0.68$;

33. $\sqrt{\dfrac{(b-a)\left(\dfrac{a+b}{2}-m\right)}{\ln\dfrac{b-m}{a-m}}}$; **34.** б) залежні, в) $\mathbf{P}\{\xi=2,\ \eta=0\}=0.15$, $\mathbf{P}\{\xi>\eta\}=0.65$; г) $\mathbf{M}\xi=1.2$, $\mathbf{M}\eta=0.25$; д) $K=\begin{pmatrix}0.16 & 0\\ 0 & 0.1875\end{pmatrix}$; е) $\mathbf{M}[\eta \mid \xi=1]=0.52$;
37. Ймовірність події $\{\xi > \eta\}$ більша в досліді попередньої задачі;

38. $F_{\xi,\eta}(1.5;-0.5)=0.27$, $F_{\xi,\eta}(0.5;4)=0.2$; **39.** в) $K=\begin{pmatrix} 0.25 & -0.125 \\ -0.125 & 0.1875 \end{pmatrix}$;

40. а) залежні; б) $\rho_{\xi\eta}=\sqrt{6/17}\approx 0.594$; **41.** а) c=1, $\mathbf{P}\{\xi+\eta<1\}=1/3$;
б) компоненти ξ та η залежні; в) ($\mathbf{M}\xi$,$\mathbf{M}\eta$)=(7/12,7/12); **42.** а) c=3/28, $\mathbf{P}\{\xi+\eta<2\}$=3/14; б) (8/7, 10/7); **43.** $p_1=\sqrt{3}/4$, $p_2=\left(3\sqrt{3}-4\right)/2$; **44.** ($\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{M}\eta$)=($\pi/4$, $\pi/4$); **45.** ($1/3$, $2/3$); **46.** а) залежні; б) $\begin{pmatrix} a^2/12 & 0 \\ 0 & a^2/12 \end{pmatrix}$; компоненти не корельовані; в) $p_1=1/2$, $p_2=\pi/4$; **47.** не корельовані, але залежні; **48.** $f_1(x)=2\alpha x\exp(-\alpha x^2)\,(x>0)$, $f_2(x)=\alpha x\exp(-\alpha\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$ $(x>0)$, $f_3(x)=\alpha^2\exp(-\alpha(e^{\alpha x}-x)\,(-\infty<x<\infty)$; **49.** $f_1(x)=1/2\,(x\in[1.3]$, $f_2(x)=e^{-x}\,(x>0)$; **50.** $f_1(x)=f_2(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ $(0<x<1)$;

51. $f_1(x)=f_2(x)=f_\xi(x)$; **53.** $f_\eta(x)=4x^{-5}\,(x\geq 1)$; **54.** $q(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{2y^2-x^2}}$ $p\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{2y^2-x^2}+x\right)p\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{2y^2-x^2}-x\right)$; **55.** $1-e^{-1}\approx 0.6321$;

56. $\dfrac{1}{a}\left(1-\left|\dfrac{x}{a}-1\right|\right)$ $(0\leq x\leq 2a)$; $\dfrac{1}{a}\left(1-\left|\dfrac{x}{a}\right|\right)(|x|\leq a)$; $\dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{1}{a^2}\,(0<x\leq a^2)$; $\dfrac{1}{2}\,(0\leq x\leq 1)$, $\dfrac{1}{2x^2}\,(x\geq 1)$; **57.** $f_\tau(x)=\dfrac{2}{(1+|1-2x|)^2}$ $(0\leq x\leq 1)$; **58.** 0.1;

59. $a\geq 0.3$; **60.** $a\geq 0.5$; **61.** 94%; **62.** 0.24; **63.** 800; **64.** 99.998%; 0.013; 216; **65.** Не менше 0.79; **66.** $\mathrm{P}(|x-m|\geq 3\sigma)\leq\dfrac{1}{9}$; **67.** $n\geq 1225$; **68.** $p\geq 0.99$;

69. $p=0.921$; **70.** а) 0.4999; **71.** а) 0.7887; б) 0.4938; в) 0.734; **72.** а) 0, a^2/3; б) 0, 7/6; в)1, 1/6; $p-q$, $p+q$; **73.** $n\geq 790$; **74.** а) $\mathbf{M}\eta_{1000}=1.025^{1000}$, $\mathbf{D}\eta_{1000}\approx 7.6899\cdot 10^{41}$, $\mathbf{M}\ln\eta_{1000}=0$, $\mathbf{D}\ln\eta_{1000}\approx 24/8965$;
б) $\Phi(-1/384)\approx 0/0832$, $\Phi(0)=0.5$, $\Phi(0)=0.5$, $\Phi(2/769)\approx 0/9972$;
75. 5.3%; **76.** 0.7372; **77.** 27427.

Частина III

Математична статистика

§1. Вступ до математичної статистики

1. Перші відомості про математичну статистику. Математична статистика – це розділ математики, в якому розглядаються математичні методи систематизації, обробки та використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. Статистичними даними називаються відомості про число та характеристики об'єктів із якоїсь більш або менш обширної сукупності, які мають ті чи інші ознаки.

Термін статистика походить від латинського слова "статус" – стан, бо коли в 18-му столітті статистика почала оформлятись у наукову дисципліну, цей термін пов'язувався з системою опису фактів, які характеризували стан держави.

Статистка складається з таких розділів:

1) збір статистичних даних;
2) дослідження отриманих даних для знаходження закономірностей, які можуть бути встановленими на основі відомостей масових спостережень.

Збір статистичних даних, що стосуються населення, проводився давно: відомо, що в 2238 р. до нової ери в Китаї при імператорі Яо був проведений перепис населення; переписи населення проводились і в стародавніх Єгипті, Ірані, Римській імперії; відомі переписи на Київській Русі. Вже в середні віки вимірювання тих чи інших об'єктів навколишнього світу стали розглядати як метод *наукового пізнання*. І сьогодні є актуальним афоризм Г.Галілея (1564 – 1642): „Вимірюй все що вимірюється й зроби невимірне вимірним".

2. Вибірка. Вивчення множини схожих об'єктів можна проводити як за якісними, так і за кількісними ознаками. Наприклад, якщо медики вивчають людей, то якісною ознакою може бути стан здоров'я людини, а кількісною ознакою – її вага. Під словом "ознака" розуміють властивості, характерні особливості, які дозволяють відрізняти один об'єкт від іншого.

Наприклад, дослідника цікавить вміст зерняток у колосках пшениці, яка вирощується на спеціальній ділянці. Масив даної культури буде об'єктом спостереження, а ознакою – кількість зернин в колосках окремих рослин, які є одиницями спостереження.

Множина всіх об'єктів, які підлягають дослідженню, називається *генеральною сукупністю*, а підмножина випадково вибраних об'єктів із генеральної сукупності називається *вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою*.

Поняття генеральної сукупності базується на принципі якісної однорідності її складу. Не можна, наприклад, об'єднувати в одну сукупність людей різного віку й статі, коли мова йде про норми харчування, стандартизації взуття та одягу, тощо.

Число об'єктів генеральної сукупності називається її *об'ємом*, а число об'єктів вибіркової сукупності називається *об'ємом вибірки*.

Наприклад, якщо з 1000 виробів відібрано для контролю їх якості 50 виробів, то об'єм генеральної сукупності $N = 1000$, а об'єм вибірки $n = 50$.

Часто генеральна сукупність містить скінченне число об'єктів, та це число, як правило, велике. Тому в теоретичних викладках (для їх спрощення) об'єм сукупності вважається нескінченним. Це пояснюється тим, що збільшення об'єму генеральної сукупності (починаючи з деякого достатньо великого значення) вже не відбивається на результатах обробки даних.

Сам вибір даних можна проводити двома способами. Перший називається повторним вибором. При такому виборі об'єкти для дослідження беруться почергово з генеральної сукупності й повертаються після обслідування (не виключено, що один і той же об'єкт можна взяти декілька разів). Другий спосіб називається безповторним вибором. При такому виборі досліджувані об'єкти не повертаються. Як правило, здійснюється безповторний вибір.

Отримана для дослідження вибірка повинна достатньо повно віддзеркалювати особливості генеральної сукупності. Це особливо важливо, коли генеральна сукупність має певну неоднорідність (наприклад, у соціологічних дослідженнях потрібно, щоб у вибірці були представлені різні верстви населення). Коротко цю вимогу формулюють так: вибірка повинна бути *представницькою (репрезентативною)*.

3. Варіаційний ряд. Гістограма. Спостереження над об’єктами вибірки проводять за певною програмою. Результати спостережень фіксують у щоденниках, журналах, бланках, анкетах або інших документах обліку (в тому числі й електронних). Зафіксовані в цих документах відомості про об’єкт, який вивчається, це той первісний фактичний матеріал, який потрібно обробляти. Обробка починається з упорядкування або систематизації зібраних даних. Процес систематизації результатів масових спостережень називається *групуванням* даних.

Особливу форму групування представляють *варіаційні ряди*.

Якщо ознаки об’єктів, які вивчаються, є числа (вони називаються *варіантами*), то вибіркою об’ємом n буде сукупність із n чисел. Розташуємо ці числа в неспадному порядку і позначимо їх буквою x із відповідними індексами, так що $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ Ця послідовність чисел називається *варіаційним рядом*. Значення варіант можуть повторюватись. Нехай x_1 спостерігалося n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів і т.д., значення $x_k - n_k$ разів, до того ж $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Числа n_1, n_2, ... n_k називаються частотами варіант, а числа n_1/n, n_2/n, ... n_k/n називаються відносними частотами.

Відповідність між варіантами та їх частотами, подану у вигляді таблиці 1, називають *статистичним рядом*.

Таблиця 1

Варіанти x_i	x_1	x_2	...	x_k
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_k

Якщо на координатній площині побудувати точки (x_i, n_i) і сполучити їх ломаною, то дістанемо *полігон* частот.

П р и к л а д 1. В 1995 році кожного тижня (починаючи з першого тижня січня) в м. Кіровограді було зареєстровано таку кількість новонароджених (дані округлені до десятків і тому умовні): 60, 50, 60, 50, 40, 50, 50, 70, 40, 30, 20, 60, 50, 30, 50, 60, 50, 50, 50, 50, 60, 30, 60, 40, 40, 60, 40, 40, 40, 30, 50, 50, 40, 30, 30, 60, 70, 50, 40, 40, 30, 60, 50, 60, 40, 40, 40, 40, 50, 50, 40, 40.

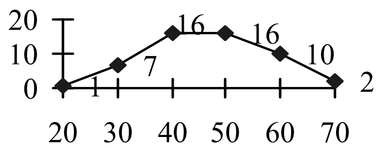
В даному випадку об’єм вибірки дорівнює 52, варіаційний ряд такий:
20, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 50, 50,50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 70, 70.

Статистичний ряд у даному випадку має вигляд:

Таблиця 2

Число зареєстрованих	20	30	40	50	60	70
Частоти	1	7	16	16	10	2

Полігон частот



Якщо різних варіант виявиться дуже багато, то подання статистичного матеріалу у вигляді таблиці 1 стає громіздким. У цьому випадку числовий проміжок, у який попадають варіанти, розбивається на декілька частин (класів) однакової довжини. Ці частини називаються класовими інтервалами.

Кількість класових інтервалів K та довжина окремого інтервалу h залежать як від об'єму вибірки n, так і від різниці $R = x_{max} - x_{min}$, де x_{min} –найменше значення варіанти , а x_{max} – найбільше значення варіанти. R називається *розмахом* вибірки. Проміжок, у який попадають варіанти, числа K та h , взагалі кажучи, можна знаходити різними способами.

На практиці для визначення K користуються емпіричною формулою Стерджеса $K = 1 + 3.32 \lg n$,

або такою таблицею:

Об'єм вибірки n (від – до)	Число класів K
25 – 40	5 – 6
40 – 60	6 – 8
60 – 100	7 – 10
100 – 200	8 – 12
>200	10 – 15

Довжину класового інтервалу h покладають рівною числу

$$(x_{max} - x_{min})/(K-1),$$

а якщо позначити через a та b кінці того інтервалу, в який попадають статистичні дані, то покладають $a = x_{min} - h/2,\ b = a + Kh.$

Неважко перевірити, що x_{min} буде серединою 1-го інтервалу, а x_{max} – серединою K-го інтервалу.

Нехай n_1 кількість варіант, які попали в перший проміжок, n_2 – у другий проміжок, ..., n_k – у K -й проміжок. Якщо якесь значення попадає на межу двох інтервалів, то вважатимемо, що це значення попало в лівий інтервал. Здобуті дані занесемо в таблицю 3.

Таблиця 3

Інтервали d_i	$(a, a+h]$	$(a+h, a+2h]$	...	$(a+(K-1)h, a+Kh]$
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_k

Таблицю 3 називають *інтервальним статистичним рядом*. *Гістограмою* називається фігура, яка складається з k прямокутників основами яких є інтервали d_i, а висотою i-го прямокутника є число n_i . Часто замість частот використовують відносні частоти. Площа фігури, яка є гістограмою, дорівнює h.

Приклад 2. У класі з 40 учнів проводився такий експеримент: кожний учень придумує навмання по 8 цифр і знаходить їх суму. Було отримано такі суми:

28, 35, 33, 34, 44, 33, 35, 33, 35, 41, 41, 35, 35, 36, 26, 25, 26, 37, 39, 45, 33,

42, 45, 39, 32, 38, 38, 40, 36, 38, 47, 34, 27, 39, 42, 48, 41,49, 47, 31.

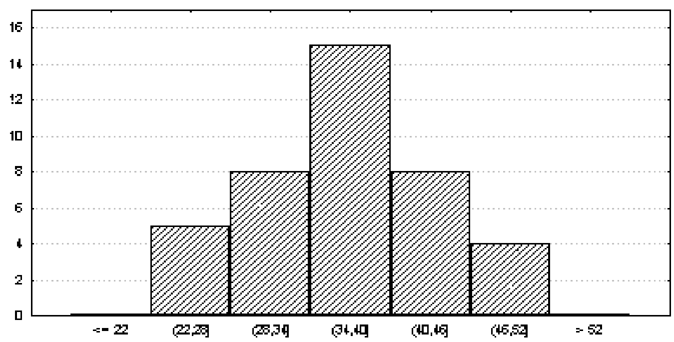
У даному випадку x_{min} =25, x_{max} = 49. Розмах вибірки $R = 49 - 25 = 24$. Візьмемо $K = 5$, тоді $h = 24/4 = 6$. Отже, $a = 25 - 6/2 = 22$, і тому всі варіанти належать проміжку (22; 52). Класові інтервали отримаються такі:

$$d_1 = (22, 28],\ d_2 = (28,34],\ d_3 = (34,40],\ d_4 = (40,46],\ d_5 = (46,52].$$

У проміжок d_1 попаде 5 варіант, у проміжок d_2 попаде 8 варіант, у проміжок d_3 попаде 15 варіант, у проміжок d_4 попаде 8 варіант, у проміжок d_5 попаде 4 варіанти. Тоді інтервальний статистичний ряд матиме вигляд:

Інтервали	(22,28]	(28,34]	(34,40]	(40,46]	(46,52]
Частоти	5	8	15	8	4

Гістограма



4. Статистичні характеристики вибірки. Статистичні ряди та їхні графіки дають наочне уявлення про мінливість (варіювання) ознак об’єктів, які досліджуються, та вони недостатні для повного їх опису. Для цієї цілі використовують особливі логічно і теоретично обґрунтовані числові показники, які називаються статистичними характеристиками. До них, в першу чергу, відносяться середні величини.

На відміну від індивідуальних числових характеристик середні величини мають більшу стійкість, здатні характеризувати цілу групу однорідних об’єктів одним (середнім) числом. І хоча середні величини абстрактні, вони сповна відчутні. Середній ріст, середня продуктивність, середній урожай, середня успішність та інші середні – все це поняття абстрактні про конкретне.

Середнє арифметичне значення вибірки визначається за формулою:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} ,$$

де x_i – варіанти, а n – об’єм вибірки.

Якщо складено статистичний ряд, то для знаходження середнього значення використовують таку формулу:

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m}{n},$$

де x_i – варіанти, а n – об’єм вибірки, n_i –відповідні частоти , m – кількість різних варіант. Так знайдене середнє називається ще *середнім зваженим*, вагами служать частоти.

Наприклад, середнє значення вибірки з прикладу 1 дорівнює числу

$$(20 \cdot 1 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 16 + 50 \cdot 16 + 60 \cdot 10 + 70 \cdot 2)/52 = 46.346.$$

Якщо вибірка задана інтервальним статистичним рядом, то середнє значення вибірки знаходиться за формулою:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 n_1 + \overline{x}_2 n_2 + \ldots + \overline{x}_m n_m}{n},$$

де $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_m$ – середні значення варіант у кожному класовому інтервалі окремо.

Наприклад, середнє значення вибірки з прикладу 2 дорівнює числу

$(5 \cdot (25 + 26 + 26 + 27 + 28)/5 + 8 \cdot (31 + 32 + 33 + 33 + 33 + 33 + 34 +$

34)/8 +

+ 15·(35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 36 + 36 + 37 + 38 + 38 +38 + 39 + 39 + 39 +

+40)/15 + 8·(41 + 41 + 41 + 42 + 42 + 44 + 45 + 45)/8 + 4·(47 + 47 + 48 +

+49)/4)/40 = (5·26.4 + 8·28.75 + 15·37 + 8·42.625 + 4·4 7.75)/40 = 36.225.

А якщо ж ці середні невідомі, то замість них беруть середини класових інтервалів, але в цьому випадку середнє значення вибірки буде знайдено наближено. Можна довести, що абсолютна похибка, яка при цьому може виникнути, буде не більша, ніж число $h/2$.

Наприклад, середнє значення вибірки з прикладу 2 приблизно дорівнює числу (5·25 + 8·31 + 15·37 + 8·43 + 4·49)/40 = 36.7.

На практиці використовують й інші види середніх, наприклад, середні степеневі, зокрема, середнє квадратичне, середнє геометричне, середнє гармонічне, мішані середні, наприклад, арифметико-геометричне і т.п.

Середнє арифметичне вибірки – одна з основних характеристик, та ця характеристика дуже чутлива до збільшення або до зменшення числа спостережень за рахунок варіант, які різко відрізняються по своїй величині від основної маси. Тому на цю величину можуть значно впливати крайні члени статистичного ряду, які найменше характерні для даної сукупності. У зв'язку з цим у багатьох випадках корисніші *структурні середні* до яких, зокрема, відносяться мода і медіана.

Модою вибірки називається те значення вибірки, яке має найбільшу частоту. Таких значень може бути декілька. Якщо задано інтервальний статистичний ряд, то мода обчислюється за такою наближеною формулою: $M_0 = x_0 + h\dfrac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})}$

де x_0 – початок модального інтервалу, тобто інтервалу, який має найбільшу частоту, h –довжина інтервалу, n_i – частота модального інтервалу, n_{i-1} і n_{i+1} – частоти відповідних попереднього і наступного за модальним інтервалом.

Наприклад, для вибірки з прикладу 1 існують дві моди $M_{01} = 40$, $M_{02} = 50$. Для вибірки з прикладу 2 є одна мода M_0=35, бо варіанта 35 найчастіше зустрічається в вибірці (6 разів).

Медіаною вибірки називається значення серединного елемента статистичного ряду. Якщо об'єм вибірки число непарне, то медіана дійсно значення серединного елемента, а якщо парне, то – середнє арифметичне двох серединних елементів. Якщо вибірка задана інтервальним статистичним рядом, то медіана обчислюється за такою наближеною формулою: $M_e = x_0 + h\dfrac{n/2 - T_{i-1}}{n_i}$,

де x_0 – початок медіанного інтервалу, тобто інтервалу, в якому міститься серединний елемент, h –довжина інтервалу, n – об'єм вибірки, $T_{i\text{-}1}$ – сума частот інтервалів, що передують медіанному, n_i – частота медіанного інтервалу.

Наприклад, для вибірки з прикладу 2 M_e=(36 + 37)/2 = 36.5, бо варіант менших за 36.5 і варіант більших за 36.5 однакова кількість, в нашому випадку, по 20 варіант.

Хоч середнє арифметичне вибірки грає значну роль у математичній статистиці, та при однакових середніх вибіркові дані можуть значно відрізнятись за величиною та характером зміни. Для характеристики мінливості значень варіант використовується дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Дисперсією вибірки називається число

$$s_n^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}.$$

Цінність дисперсії у тому, що вона є мірою мінливості числових значень варіант біля їх середнього, а також дисперсія вимірює і внутрішню мінливість значень варіант.

Якщо складено статистичний ряд, то для знаходження дисперсії використовують таку формулу:

$$s_n^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 n_2 + ... + (x_m - \overline{x})^2 n_m}{n},$$

де x_i –варіанти, а n – об'єм вибірки, n_i –відповідні частоти , m – кількість різних варіант.

Якщо вибірка задана інтервальним статистичним рядом, то

$$s_n^2 = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 n_1 + (\overline{x}_2 - \overline{x})^2 n_2 + ... + (\overline{x}_m - \overline{x})^2 n_m}{n},$$

де $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_m$ – середні значення варіант в кожному класовому інтервалі окремо (часто в якості цих середніх беруть просто середини відповідних інтервалів).

Середнім квадратичним відхиленням вибірки називається корінь квадратний із дисперсії, тобто, число s_x. Ця величина в ряді випадків зручніша, ніж дисперсія, бо виражається в тих же одиницях, що і середнє арифметичне.

Наприклад, дисперсія вибірки з прикладу 1 дорівнює числу

$(20 - 46.346)^2 \cdot 1 + (30 - 46.346)^2 \cdot 7 + (40 - 46.346)^2 \cdot 16 + (50 -$

$46.346)^2 \cdot 16 + (60 - 46.346)^2 \cdot 10 + (70 - 46.346)^2 \cdot 2)/52 = 119.2$,

а середнє квадратичне відхилення дорівнює числу 10.9.

Примітка. Якщо об'єм вибірки n невеликий, то в формулах для обчислення дисперсії ділять не на n, а на число $(n-1)$, тобто, замість s_n^2 беруть число $s_n^2 n/(n-1)$, яке називається *виправленою* статистичною дисперсією вибірки.

5. Емпірична функція розподілу. Якщо проаналізувати приклади з попередніх пунктів, то важливо звернути увагу на те, що варіанти це не що інше, як значення певної випадкової величини. У зв'язку з цим уточнимо поняття вибірки і задач математичної статистики.

Отже, нехай ξ – випадкова величина, яка спостерігається при проведенні стохастичного експерименту. Проведемо цей експеримент n разів в однакових умовах, ми отримаємо числа $X_1, X_2, ..., X_n$ – значення цієї випадкової величини в першому, другому, і т. д. експериментах.

В серії проведених експериментів вибірка це набір чисел. Але якщо цю серію експериментів провести ще раз, то отримаємо новий набір чисел, наступна серія експериментів дає ще один набір чисел. Отже, $X_1, X_2, ...$ це змінні величини, які можуть приймати ті ж значення, що і випадкова величини ξ. Тому до досліду X_1 – випадкова величина, яка має такий же розподіл, як і випадкова величина ξ, а після досліду це число, яке спостерігається в першому експерименті; те ж саме можна сказати і про X_2, X_3 і т.д.

Означення 1. *Вибіркою* $X = (X_1, ..., X_n)$ називається n-мірний випадковий вектор, координатами якого є незалежні випадкові величини, що мають такий же розподіл, як і випадкова величина ξ.

Ще кажуть, що X це вибірка з розподілу ξ.

У математичній статистиці вивчають різні функції $S_1 = S_1(X_1, ..., X_n)$, …, $S_m = S_1(X_1, ..., X_m)$ значення яких також випадкові величини. Ці функції називаються статистиками.

Після проведення стохастичного експерименту статистики набувають певних значень, які називають реалізаціями стохастичного експерименту. Реалізації випадкової величини будемо позначати малими латинськими буквами $x_1, x_2, ..., x_n$.

Розглянемо яку-небудь реалізацію, візьмемо довільне дійсне число x і знайдемо відношення $\dfrac{\text{кількість варіант} < x}{n}$,

якщо ж взяти другу реалізацію, то це відношення зміниться, і, отже, воно є випадковою величиною.

Означення 2. Випадкова функція

$$F_n^*(x) = \frac{\text{кількість } X_i < x}{n},\ x \in (-\infty, \infty),$$

називається емпіричною (статистичною) функцією розподілу випадкової величини ξ.

Функцію розподілу випадкової величини ξ позначимо, як і раніше, через $F(x)$.

Теорема Глівенка-Кантеллі (основна теорема математичної статистики). Якщо x довільне дійсне число, то

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\sup_x\left|F_n^*(x) - F(x)\right| = 0\right) = 1.$$

Ми доведемо слабкішу форму цієї теореми:
для всякого $\varepsilon > 0$ і всякого $x \in (-\infty, \infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Справді, зафіксуємо $x \in (-\infty, \infty)$ і розглянемо події $A = \{\xi < x\}$ і $\overline{A}$. Тоді $\mathbf{P}(A) = F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - F(x)$.

Частота цієї події буде число $F_n^*(x)$. Випадкова величина $nF_n^*(x)$ матиме біноміальний розподіл з параметрами n і $F(x)$ і, отже, для всякого k, $0 \le k \le n$,

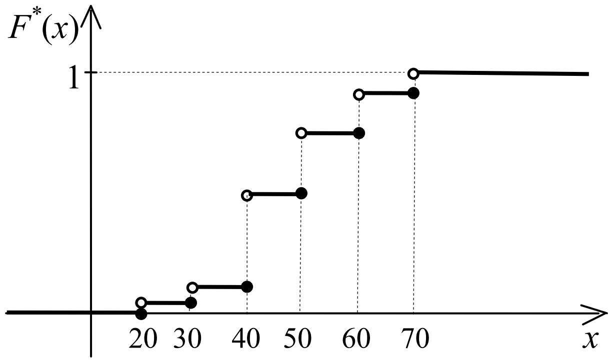
$$\mathbf{P}\left(F_n^*(x) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}.$$

Залишилося застосувати закон великих чисел у формулу Бернуллі (при великих n частота події мало відрізняється від ймовірності події).

Смисл основної теореми математичної статистики заключається в тому, що при великих n емпірична функція розподілу мало відрізняється від функції розподілу випадкової величини ξ.

П р и к л а д. Знайти емпіричну функцію розподілу, користуючись даними прикладу 1 з п. 3. Матимемо

x	$x \le 20$	$20 < x \le 30$	$30 < x \le 40$	$40 < x \le 50$	$50 < x \le 60$	$60 < x \le 70$	$x > 70$
$F^*(x)$	0	$\frac{1}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{24}{52}$	$\frac{40}{52}$	$\frac{50}{52}$	1



§2. Основні розподіли математичної статистики

Об’єктами математичної статистики є вибірки і статистики. З ними пов’язані різноманітні розподіли. Основні з них такі.

1) Нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2). Щільність

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

2) Розподіл χ^2 з n степенями свободи. Щільність

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \; x > 0.$$

Такий розподіл має випадкова величина $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, де випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні і мають стандартний нормальний розподіл.

3) Розподіл Стьюдента. Щільність

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Такий розподіл має випадкова величина

$$\tau = \frac{\xi}{\sqrt{x^2/n}},$$

де ξ випадкова величина, яка має стандартний нормальний розподіл, а

χ^2 – випадкова величина, яка має розподіл χ^2 з n степенями свободи.

4) F-розподіл (розподіл Фішера). Щільність

$$\psi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}n_1^{n_1/2}n_2^{n_2/2}x^{n_1/2-1}\left(n_2+n_1x\right)^{-(n_1+n_2)/2},\ x>0.$$

Такий розподіл має випадкова величина $X=\dfrac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2}$, де χ_1^2 і χ_2^2 випадкові величини, які мають розподіл χ^2 відповідно з n_1 і n_2 степенями свободи.

В цих прикладах фігурує гама-функція Ейлера

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\ x>0.$$

§3. Точкові оцінки параметрів розподілу

Нехай θ параметр, який характеризує розподіл. Однією з задач математичної статистики є задача про знаходження цього параметра, використовуючи вибірку. Точно цю задачу розв'язати не можна. Тому шукають наближені значення θ, ці значення називають оцінками, вони функції від вибірки. Отже, нехай $\theta_n^*=\theta_n^*\left(X_1,...,X_n\right)$ якась оцінка, вона є випадковою величиною і її розподіл залежить від розподілу аргументів. Статистики для оцінок можна вибирати різними способами. До оцінок висувається ряд вимог: незміщенність, консистентність (спроможність) і ефективність. Розглянемо ці вимоги детальніше.

1. Незміщенність. Оцінка θ_n^* параметра θ називається незміщенною, якщо

$$\mathbf{M}\theta_n^*=\theta.$$

Приклад 1. Часто параметром є математичне сподівання α_1. За його оцінку природно брати середнє вибіркове, тобто

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}.$$

Тоді

$$\mathbf{M}\overline{X}=\frac{1}{n}\left(\mathbf{M}X_1+...+\mathbf{M}X_n\right)=\frac{1}{n}\left(\alpha_1+...+\alpha_1\right)=\alpha_1 .$$

Отже, ця оцінка є незміщеною.

Приклад 2. Нехай потрібно оцінити дисперсію σ^2. Візьмемо за її оцінку статистичну дисперсію, тобто статистику

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(X_k-\overline{X}\right)^2}{n}.$$

Тоді

$$\mathbf{M}S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\left(X_k-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\left(X_k-\alpha_1+\alpha_1-\overline{X}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\left(\left(X_k-\alpha_1\right)^2+\left(\alpha_1-\overline{X}\right)^2-2\left(X_k-\alpha_1\right)\left(\overline{X}-\alpha_1\right)\right)=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n},$$

і, отже, оцінка S_n для σ^2 є зміщеною. Якщо ж взяти за оцінку σ^2 статистику $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$,

то вона вже буде незміщеною; тобто, незміщеною оцінкою для σ^2 буде статистика $\frac{n}{n-1}S_n$.

2. Консистентність (спроможність). Оцінка θ_n^* параметра θ називається спроможною, якщо для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\theta_n^*-\theta\right|<\varepsilon\right)=1,$$

що коротко записують так: $\theta_n^*\xrightarrow{\ \mathrm{P}\ }\theta$ при $n\to\infty$. (θ_n^* збігається за ймовірністю до θ).

Приклад. Оцінка $\overline{X}$ для математичного сподівання α_1 є спроможною, бо $\overline{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}\xrightarrow{\ \mathrm{P}\ }\alpha_1$ при $n\to\infty$

в силу теореми Чебишова.

Аналогічно доводиться спроможність оцінок для початкових моментів порядків вищих, ніж 1.

Теорема 1. Якщо оцінка θ_n^* для θ незміщена і $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{D}\theta_n^*=0$, то оцінка θ_n^* для θ спроможна.

Доведення. З нерівності 2 Чебишова випливає, що

$$\mathbf{P}\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\theta_n^*}{\varepsilon^2} \to 1 \text{ при } n \to \infty . \qquad \square$$

Можна довести сильніше твердження.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}\theta_n^* = \theta$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}\theta_n^* = 0$, то оцінка θ_n^* для θ спроможна.

Доведення. Розглянемо подію $A = \left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right\}$, вона наслідок події $B = \left\{\left|\theta_n^* - \mathbf{M}\theta_n^*\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, бо якщо $\left|\theta_n^* - \mathbf{M}\theta_n^*\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то

$$A \supset B \text{ , бо } \left(\left|\theta_n^* - \theta\right| \leq \left|\theta_n^* - \mathbf{M}\theta_n^*\right| + \left|\mathbf{M}\theta_n^* - \theta\right|\right).$$

Отже,

$$\mathbf{P}\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq \mathbf{P}\left(\left|\theta_n^* - \mathbf{M}\theta_n^*\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\theta_n^*}{(\varepsilon/2)^2},$$

а звідси,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad \square$$

3. Ефективність. Оцінка θ_n^* параметра θ називається ефективною, якщо її дисперсія менша, ніж дисперсія інших оцінок.

Для дослідження ефективності користуються важливою характеристикою сім'ї розподілів – інформацією за Фішером.

Означення. Нехай сім'я розподілів залежить від параметра θ. Тоді, якщо розподіл випадкової величини ξ дискретний, то інформацією за Фішером називається функція

$$I(\theta) = \sum_i \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p_i(\theta),$$

де $p_i(\theta)$, $i = 1, 2, ...$, ймовірності значень випадкової величини ξ; якщо розподіл випадкової величини ξ абсолютно неперервний, то інформацією за Фішером називається функція

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p(x,\theta)dx,$$

де $p(x,\theta)$ – щільність розподілу.

Приклад 1. Нехай ξ має біноміальний розподіл з параметрами (n, p). Знайдемо інформацію за Фішером відносно параметра p.

Маємо

$$I(p)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial p}\log\left(C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\right)\right)^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{p}-\frac{n-k}{1-p}\right)^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$\frac{1}{p^2(1-p)^2}\sum_{k=1}^{n}(k-np)^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{np(1-p)}{p^2(1-p)^2}=\frac{n}{p(1-p)}.$$

Приклад 2. Нехай ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Знайдемо інформацію за Фішером цього розподілу.

Маємо

$$I(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1+\frac{k}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}.$$

Приклад 3. Знайти інформацію за Фішером показникового розподілу з параметром α.

Матимемо

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\left(\alpha e^{-\alpha x}\right)\right)^2\alpha e^{-\alpha x}dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)^2\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Приклад 4. Знайти інформацію за Фішером нормального розподілу з параметрами (m,σ^2) відносно параметра m.

Матимемо

$$I(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial m}\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right)\right)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m)^2}{\sigma^4}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\frac{1}{\sigma^2}.$$

Теорема 3. Нехай розподіл випадкової величини ξ залежить від параметра θ і $\mathbf{M}\xi=f(\theta)$ – функція, яка диференційована на множині G. Тоді, якщо $I(\theta)\neq 0$, то $\mathbf{D}\xi\geq\dfrac{(f'(\theta))^2}{I(\theta)}$, $\theta\in G$.

Доведення проведемо для абсолютно неперервного випадку. Нехай $p(x,\theta)$ щільність, тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\theta)dx = 1 \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,\theta)dx = f(\theta).$$

Будемо ще вважати, що є законним диференціювання по θ під знаком інтеграла, і тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(x,\theta)}{\partial\theta}dx = 0 \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial p(x,\theta)}{\partial\theta}dx = f'(\theta),$$

а звідси

$$f'(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - f(\theta)\right)\frac{\partial p(x,\theta)}{\partial\theta}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(x - f(\theta)\right)\sqrt{p(x,\theta)}\,\frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial\theta}\sqrt{p(x,\theta)}dx.$$

Застосовуємо далі нерівність Коші-Буняковського. Матимемо

$$\left(f'(\theta)\right)^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - f(\theta)\right)^2 p(x,\theta)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)dx = \mathbf{D}\xi\cdot I(\theta),$$

що доводить теорему. □

Далі символом $p(x,\theta)$ позначатимемо щільність випадкової величини ξ, якщо вона абсолютно неперервна, а якщо ξ дискретна випадкова величина, то $p(x,\theta) = \mathbf{P}(\xi = x)$.

Теорема 4. Нехай $\theta_n^* = \theta_n^*\left(X_1,...,X_n\right)$ незміщена оцінка параметра θ, де $\left(X_1,...,X_n\right)$ вибірка з розподілу $p(x,\theta)$ і

1) множина $\mathrm{D} = \{x : p(x,\theta) > 0\}$ не залежить від θ;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\theta)dx$ можна диференціювати під знаком інтеграла;

3) $I(\theta) \ne 0$.

Тоді має місце нерівність

$$\mathbf{D}\theta_n^* \ge \frac{1}{nI(\theta)}. \tag{1}$$

Нерівність (1) називається нерівністю Рао-Крамера.

Цю теорему приймемо без доведення (методика доведення теореми 4 така ж, як і методика доведення теореми 3).

Означення. Ефективністю оцінки θ_n^* називається число

$$e\left(\theta_n^*\right) = \left(nI(\theta)\mathbf{D}\theta_n^*\right)^{-1}.$$

З нерівності (1) випливає, що $0 \le e\left(\theta_n^*\right) \le 1$. Оцінку називають ефективною, якщо $e\left(\theta_n^*\right) = 1$, тобто, тоді, коли $\mathbf{D}\theta_n^* = \dfrac{1}{nI(\theta)}$.

Приклад 1. Нехай $(X_1,...,X_n)$ вибірка з розподілу Пуассона з параметром λ. За оцінку цього параметра візьмемо статистику

$$\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$

Тоді $I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ (див. приклад 2), а $\mathbf{D}\overline{X} = \dfrac{1}{n^2}\left(\mathbf{D}X_1 + ... + \mathbf{D}X_n\right) = \dfrac{\lambda}{n}$,

отже, $e\left(\overline{X}\right) = \left(n \cdot \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-1} = 1$.

Оцінка $\overline{X}$ – ефективна.

Приклад 2. Нехай $(X_1,...,X_n)$ вибірка з нормального розподілу з параметрами $\left(m, \sigma^2\right)$. За оцінку параметра m візьмемо також статистику

$$\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$

Тоді $I(m) = \dfrac{1}{\sigma^2}$ (див. приклад 4), а

$$\mathbf{D}\overline{X} = \frac{1}{n^2} n\mathbf{D}X_1 = \frac{1}{n}\sigma^2;$$

отже, $e\left(\overline{X}\right) = 1$. Оцінка $\overline{X}$ – ефективна.

§4. Методи отримання точкових оцінок

1. Метод моментів. Нехай $p(x, \theta_1, ..., \theta_r)$ розподіл випадкової величини ξ, який залежить від параметрів $\theta_1, ..., \theta_r$, і нехай існують центральні моменти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, відповідно, порядків $1, 2, ..., r$. Візьмемо за оцінки цих моментів статистики

$$\alpha_{k,n}^* = \frac{X_1^k + ... + X_n^k}{n}, \; k = 1, 2, ..., r.$$

В силу закону великих чисел

$$\alpha^*_{k,n} \xrightarrow{\text{P}} \alpha_k \text{ при } n \to \infty,\ k = 1, 2, ..., n.$$

З іншого боку

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x, \theta_1, ..., \theta_r) dx = \alpha_k(\theta_1, ..., \theta_r).$$

Розглянемо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_1, ..., \theta_r$:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, ..., \theta_r) = \alpha^*_{1,n}, \\ \alpha_2(\theta_1, ..., \theta_r) = \alpha^*_{2,n}, \\ \qquad \dots \\ \alpha_r(\theta_1, ..., \theta_r) = \alpha^*_{r,n}. \end{cases}$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок, то його беруть за оцінки параметрів $\theta_1, ..., \theta_r$.

Приклад. Нехай $(X_1, ..., X_n)$ вибірка випадкової величини ξ, яка рівномірно розподілена на проміжку [a, b]. Знайти оцінку параметрів a та b.

Матимемо

$$\mathbf{M}\xi = \frac{a+b}{2};\ \mathbf{D}\xi = \frac{(b-a)^3}{12}$$

отже, система рівнянь для знаходження a та b буде такою

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} = \overline{X}, \\ \dfrac{(b-a)^3}{12} = \dfrac{(X_1 - \overline{X})^2 + ... + (X_n - \overline{X})^2}{n}; \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} b + a = \dfrac{2\overline{X}}{n}, \\ b - a = \left(\dfrac{12}{n}\left((X_1 - \overline{X})^2 + ... + (X_n - \overline{X})^2\right)\right)^{1/3}; \end{cases}$$

а, звідси,

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{2\overline{X}}{n} + \left(\frac{12}{n}\left((X_1 - \overline{X})^2 + ... + (X_n - \overline{X})^2\right)\right)^{1/3}\right),\ a = \frac{2\overline{X}}{n} - b.$$

2. Метод максимальної вірогідності. Якщо вибірка береться з абсолютно неперервного розподілу зі щільністю $p(x,\theta)$, то функція $L(X_1,...,X_n,\theta)=\prod_{k=1}^{n}p(X_k,\theta)$ називається *функцією вірогідності*. Якщо ж розподіл дискретний, а вибіркові значення $X_1,...,X_n$, то функція вірогідності буде такою:

$$L(X_1,...,X_n,\theta)=\prod_{k=1}^{n}p_{x_k}(\theta),\ p_{x_k}(\theta)=\mathbf{P}(\xi=X_k).$$

Розподіл може залежати від декількох параметрів, тоді і функція вірогідності залежатиме від цих параметрів.

Метод максимальної вірогідності заключається в тому, що параметри θ вибираються так, щоб функція вірогідності набула найбільшого значення. Для знаходження цих значень потрібно розв'язувати рівняння вірогідності $\frac{\partial \log L}{\partial \theta}=0$, бо функція $\log L$ при фіксованих $X_1,...,X_n$ досягає максимуму при тих же значеннях θ, що і функція L.

Розв'язки рівняння вірогідності називаються *оцінками максимальної вірогідності*.

Якщо функція $\log L$ має декілька похідних по θ і існують моменти від цих похідних, то можна довести, що рівняння вірогідності має розв'язок θ_n^*, яке дає спроможні і асимптотично ефективні оцінки θ, бо ця функція при фіксованих $X_1,...,X_n$ досягає максимуму там, де і функція L, тому для знаходження його розв'язують рівняння вірогідності $\frac{\partial \log L}{\partial \theta}=0$.

П р и к л а д 1. Вибірка береться з нормального розподілу з параметрами (m,σ^2).

$$L(X_1,...,X_n,m,\sigma^2)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(X_k-m)^2}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left(-\frac{(X_1-m)^2+...+(X_n-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L=-\frac{n}{2}\log\sigma^2-n\log\sqrt{2\pi}-\frac{(X_1-m)^2+...+(X_n-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Запишемо рівняння вірогідності:

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = 0\,,\ \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0\,.$$

Матимемо

$$\begin{cases} \dfrac{2(X_1 - m) + \ldots + 2(X_n - m)}{2\sigma^2} = 0, \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{(X_1 - m)^2 + \ldots + (X_n - m)^2}{2\sigma^4} = 0, \end{cases}$$

звідси,

$$m = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},\ \sigma^2 = \frac{(X_1 - m)^2 + \ldots + (X_n - m)^2}{n}.$$

Неважко перевірити, що в цій точці функція L досягає найбільшого значення.

Приклад 2. Потрібно методом максимальної вірогідності знайти оцінку для ймовірності події. Проведемо n разів випробування, в кожному з яких може відбутися подія A з однією і тією ж ймовірністю p. Вибірка матиме вигляд $(X_1, \ldots, X_n)$, де варіанти приймають значення 1, якщо подія відбулася, і 0, якщо не відбулася. Тобто, вибірка береться з розподілу Бернуллі

ξ	0	1
p	$1-p$	p

отже,

$$p_{x_k} = p^{X_k}(1-p)^{1-X_k}\,,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$L(X_1, \ldots, X_n\,, p) = \prod_{k=1}^{n} p^{X_k}(1-p)^{1-X_k}\,,$$

$$\log L = \sum_{k=1}^{n} X_k \log p + (1 - X_k)\log(1-p),$$

звідси,

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k}{p} - \frac{1 - X_k}{(1-p)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - p}{p(1-p)} = 0\,,$$

а звідси,

$$p = \frac{X_1 + \ldots + X_k}{n}\,,$$

тобто, частота події A.

Приклад 3. Вибірка береться з показникового розподілу з невідомим параметром α. В даному випадку

$$p(x,\alpha)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \alpha e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x\ge 0,\end{cases}$$

отже,

$$L(X_1,\dots,X_n,\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha e^{-\alpha X_k}\right)=\alpha^n\exp\left(-\alpha\left(X_1+\dots+X_n\right)\right),$$

$$\log L=n\log\alpha-\alpha\left(X_1+\dots+X_n\right),\ \frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\left(X_1+\dots+X_n\right)=0.$$

Звідси,

$$\alpha=\frac{n}{X_1+\dots+X_n}.$$

§5. Інтервальне оцінювання

Якщо відомий розподіл точкової оцінки θ_n^*, то можна знайти межі, в яких з великою ймовірністю знаходиться невідоме значення параметра. Розглянемо вибірку $\left(X_1,\dots,X_n\right)$ з розподілу $F_\xi(x,\theta)$. Припустимо, що вдалося знайти функції $\underline{\theta}\left(X_1,\dots,X_n\right)$ і $\overline{\theta}\left(X_1,\dots,X_n\right)$ такі, що $\underline{\theta}<\overline{\theta}$ при всіх значеннях $X_1,\dots,X_n$ і довільних значеннях θ. Розглянемо подію

$$\underline{\theta}\left(X_1,\dots,X_n\right)<\theta<\overline{\theta}\left(X_1,\dots,X_n\right)$$

і нехай ймовірність цієї події дорівнює $1-2\alpha$ (тобто ймовірність того, що випадковий інтервал $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ накриє невідомий параметр θ) і не залежить від θ. Інтервал $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ називається *надійним інтервалом* (інтервалом надійності) для невідомого параметра θ, який відповідає *надійній ймовірності* $1-2\alpha$ (число α називається рівнем надійності).

В цілому ряді випадків функції $\underline{\theta}$ і $\overline{\theta}$ можна знайти. Для цього будується статистика $\eta=\eta\left(\theta_n^*,\theta\right)$, розподіл якої не залежить від θ. Позначимо через F_η функцію розподілу випадкової величини η і шукаємо такі числа y_1 і y_2, що $\mathbf{P}\left(\eta<y_1\right)=\alpha$, $\mathbf{P}\left(\eta>y_2\right)=\alpha$, тобто $y_1=F_\eta^{-1}(\alpha)$, $y_2=F_\eta^{-1}(1-\alpha)$, де F_η^{-1} функція обернена до F_η. Тоді

$$\mathbf{P}(y_1 < \eta < y_2) = 1 - 2\alpha .$$

Якщо функція $\eta(\theta_n^*, \theta)$ монотонна відносно θ, то розв'язуємо нерівність $y_1 < \eta < y_2$ відносно θ, тобто відшукуємо такі величини $\underline{\theta}$ і $\overline{\theta}$, що ця нерівність буде рівносильна нерівності $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$. Це і дає інтервал надійності.

Приклад 1. Вибірка $(X_1, ..., X_n)$ береться з нормального розподілу з параметрами (m, σ^2) і параметр σ відомий. Знайти інтервал надійності для m. За оцінку m візьмемо $\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$.

Випадкова величина $\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$

має нормальний розподіл з параметрами $\mathbf{M}\overline{X} = m$, $\mathbf{D}\overline{X} = \sigma^2 / n$. Тоді випадкова величина $\dfrac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$ матиме стандартний нормальний розподіл, який не залежатиме від m. Далі знаходимо таке ε, щоб

$$\mathbf{P}\left(\left| \frac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < \varepsilon \right) = 1 - 2\alpha , \qquad (1)$$

з цього співвідношення, з одного боку, матимемо

$$2\Phi(\varepsilon) - 1 = 1 - 2\alpha ,$$

а звідси

$$\varepsilon = \Phi^{-1}(1 - \alpha);$$

а з іншого боку співвідношення (1) можемо переписати ще й так

$$\mathbf{P}\left(\overline{X} - \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - 2\alpha ,$$

і, отже, якщо покласти $\underline{m} = \overline{X} - \dfrac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{m} = \overline{X} + \dfrac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}$, то отримаємо інтервал надійності $(\underline{m}, \overline{m})$ для параметра m.

Приклад 2. Вибірка $(X_1, ..., X_n)$ береться з нормального розподілу з параметрами (m, σ^2), але в цьому випадку невідомим є і σ^2.

Розглянемо випадкову величину

$$\tau_{n-1} = \frac{\overline{X} - m}{\sqrt{S_n}}\sqrt{n-1}, \text{ де } S_n = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(X_n - \overline{X}\right)^2}{n} = m_2 .$$

Виявляється, що ця випадкова величина має розподіл Стьюдента з n – 1 степенем свободи. Тому, знаючи цей розподіл, можна розв'язати рівняння

$$\mathbf{P}\left(\left|\tau_{n-1}\right| < \varepsilon\right) = 1 - 2\alpha \qquad (2)$$

відносно ε. Крім того, рівняння (2) рівносильне такому

$$\mathbf{P}\left(\overline{X} - \varepsilon\sqrt{\frac{m_2}{n-1}} < m < \overline{X} + \varepsilon\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}\right) = 1 - 2\alpha ,$$

і, отже, інтервал

$$\left(\overline{X} - \varepsilon\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}, \overline{X} + \varepsilon\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}\right)$$

буде надійним інтервалом для m.

Якщо позначити через T_{n-1}^{-1} функцію обернену до функції розподілу Стьюдента з n – 1 степенем свободи, то $\varepsilon = \mathrm{T}_{n-1}^{-1}(1-\alpha)$.

Є таблиці чисел $t_{\alpha,n-1} = \mathrm{T}_{n-1}^{-1}(1-\alpha)$, за допомогою яких знаходимо ε, якщо будуть задані n і 2α. Наведемо фрагмент такої таблиці.

n \ 2α	0.10	0.05	0.02	0.01
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355

Приклад 3. Знайти надійний інтервал для ймовірності події p, якщо за оцінку p береться частота події

$$p_n^* = \overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

де випадкові величини $X_1, \ldots, X_n$ мають розподіл Бернуллі з параметром p, тобто

X_k	0	1
p	$1-p$	p

$k = 1, 2, ..., n$.

Візьмемо допоміжну випадкову величину $\eta = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$. При великих n випадкова величина, в силу центральної граничної теореми, має приблизно стандартний нормальний розподіл. Задавши рівень надійності α, знаходимо

$$y_1 = \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha),\ y_2 = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

і тоді

$$\mathbf{P}\left(y_1 < \frac{(\overline{X} - p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} < y_2 \right) = 1 - 2\alpha .$$

Розв'яжемо нерівність під знаком **P** відносно p. Матимемо, позначивши число $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ через λ,

$$-\lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p - \overline{X} < \lambda\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \sim \quad (p - \overline{X})^2 < \lambda^2 \frac{p(1-p)}{n} \quad \sim$$

$$p^2(n + \lambda^2) - p(2n\overline{X} + \lambda^2) + n\overline{X}^2 < 0 .$$

Звідси

$$p_{1,2} = \frac{n}{n+\lambda^2}\left(\overline{X} + \frac{\lambda^2}{2n} \pm \sqrt{\lambda^2 \frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \frac{\lambda^4}{4n^2}} \right), \tag{3}$$

які дають межі надійного інтервалу.

Якщо $n > 50$, то $\dfrac{n}{n+\lambda^2} \sim 1$, $\dfrac{\lambda^2}{2n} \sim 0$ і тому $p_{1,2} \approx \overline{X} \pm \lambda\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$,

отже,

$$\underline{p} = \overline{X} - \lambda\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}},\ \overline{p} = \overline{X} + \lambda\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} .$$

Візьмемо конкретні значення n, α, $\overline{X}$: $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\overline{X} = 0.6$. Тоді

$$\lambda = \Phi^{-1}(1-0.05) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65 ,$$

і, скориставшись (3), матимемо $\underline{p} \approx 0.35$, $\overline{p} \approx 0.81$.

Отриманий результат означає, що інтервал $(0.35; 0.81)$ з ймовірністю 0.9 накриває параметр p. Це твердження еквівалентне ще й такому: малоймовірно (α =0.05), що p буде меншим, ніж 0.35, або більшим, ніж 0.81.

§6. Перевірка статистичних гіпотез

Статистичною гіпотезою (або просто гіпотезою) називається всяке твердження про генеральну сукупність, яке провіряється по вибірці.

Наприклад, для покращення здоров'я людей використовуються біодобавки. Чи можна за результатами використання добавок зробити висновок про те, що вони справді зміцнюють здоров'я людини? Подібні питання можна ставити про нові методи навчання; або, наприклад, дослідження ефективності добрив у рослинництві; застосування нових технологій для економії енергоресурсів і т. п.

Варто відмітити, що статистичними методами гіпотезу можна тільки спростувати або не спростувати, але не довести.

Статистичні гіпотези діляться на гіпотези про параметри розподілу і гіпотези про тип розподілу.

Правило, за допомогою якого гіпотеза приймається, або відхиляється, називається *статистичним критерієм*.

Розглянемо питання перевірки гіпотези про тип розподілу. Нехай гіпотеза H полягає в тому, що вибірка об'єкту n береться з заданого розподілу $F_\xi(x)$ і вважатимемо, що цей розподіл повністю визначений, тобто в його виразі не міститься невідомих параметрів.

Потрібно виробити метод для перевірки того, чи наші дані узгоджуються з гіпотезою H.

Побудуємо по вибірці інтервальний статистичний ряд

X	$[a_0, a_1)$	$[a_1, a_2)$	$\dots$	$[a_{i-1}, a_i)$	$\dots$	$[a_{k-1}, a_k)$
частоти	n_1	n_2	$\dots$	n_i	$\dots$	n_k

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n\,.$$

Далі за допомогою функції розподілу $F_\xi(x)$ знаходимо ймовірності

$$p_i = \mathbf{P}\{\xi \in [a_{i-1}, a_i)\} = F_\xi(a_i) - F_\xi(a_{i-1}),\ i = 1, 2, \dots, k\,.$$

Приймемо за міру відмінності теоретичного розподілу від емпіричного випадкову величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2$

В 1900 році англійський дослідник К. Пірсон (1857–1938) довів, що при $n \to \infty$ ця величина має розподіл χ^2 з $k - 1$ степенем свободи.

Задамо (виробимо) так званий *рівень значущості* p% і позначимо через χ_p^2 розв'язок рівняння

$$\int\limits_{\chi_p^2}^{\infty} h_{k-1}(x) = \frac{p}{100},$$

де $h_{k-1}(x)$ щільність розподілу χ^2.

Тепер ми можемо сформулювати правило для перевірки гіпотези про розподіл.

Критерій згоди Пірсона χ^2. Фіксуємо такий малий рівень значущості, щоб можна було практично не сумніватись в тому, що при одному випробуванні подія $\{\chi^2 > \chi_p^2\}$ не відбудеться. Якщо реалізація χ^2 виявилася такою, що $\chi^2 > \chi_p^2$, то гіпотезу відхиляємо, в противному разі, гіпотеза може бути прийнятою.

Справді, якщо гіпотеза *H* правильна, то практично неможливо, щоб подія $\{\chi^2 > \chi_p^2\}$ відбулася.

При практичному застосуванні цього критерію потрібно брати таку кількість класових інтервалів, щоб $np_i \geq 10$.

Приклад 1. В послідовності *n* незалежних випробувань подія *A* відбулася *ν* разів. Чи сумісні ці дані з гіпотезою про те, що $\mathbf{P}(A) = p$, число *p* задане.

Отримані дані можна розглядати, як вибірку в *n* значень з нулів і одиниць, в залежності від того, чи подія *A* відбулася, чи ні. Отже,

X	0	1
частота	$n-\nu$	ν

$$\chi^2 = \frac{(n-\nu-n(1-p))^2}{n(1-p)} + \frac{(\nu-np)^2}{np} = \frac{(\nu-np)^2}{np(1-p)}.$$

Ця випадкова величина при великих *n* має розподіл χ^2 з 1 степенем свободи $(k=2)$ і має щільність $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, χ_p^2 знаходимо з таблиць.

Наприклад, Бюффон кинув монету 4040 разів і одержав $\nu = 2048$ гербів. Чи цей результат узгоджується з гіпотезою про те, що $p = 1/2$. Тут $\chi^2 = 0.776$. Якщо взяти $p\% = 5\%$, то $\chi_p^2 = 3.841$, і, отже, гіпотезу приймаємо.

Критерій Пірсона можна застосовувати й тоді, коли висловлюється гіпотеза про розподіл з невідомими параметрами. Якщо таких параметрів r, то величина χ^2 при $n \to \infty$ буде мати розподіл χ^2 з $n - r - 1$ степенями свободи.

П р и к л а д 2. Використовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу про те, що випадкова величина ξ має показниковий розподіл з невідомим параметром α.

За оцінку α береться число

$$\frac{n}{x_1 + \ldots + x_n},$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$ – вибірка з показникового розподілу. Тоді

$$p_i = \left(1 - e^{-\alpha a_{i+1}}\right) - \left(1 - e^{-\alpha a_i}\right) = e^{-\alpha a_i} - e^{-\alpha a_{i+1}},$$

а

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - p_i n)^2}{n p_i}$$

буде мати розподіл χ^2 з $k - 2$ степенями свободи, де k кількість класових інтервалів.

Критерій Колмогорова. Нехай $F(x)$ теоретична функція розподілу неперервної випадкової величини ξ, $F_n^*(x)$ – емпірична функція розподілу.

Суть критерію Колмогорова заключається в тому, що розглядається функція

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_n^*(x) - F(x) \right|,$$

яка називається *статистикою Колмогорова*.

А.М. Колмогоров довів, що при $n \to \infty$ розподіл випадкової величини $\sqrt{n} D_n$ не залежить від виду розподілу ξ і прямує до *розподілу Колмогорова*:

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{n} D_n < x\right\} \to K(x),$$

де

$$K(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 x^2}, & x > 0, \end{cases}$$

функція розподілу Колмогорова.

На практиці цю функцію застосовують, якщо об'єм вибірки $n \geq 20$. Задамо рівень значущості p і розв'яжемо рівняння $K(x) = 1 - p$. Нехай x_p корінь цього рівняння. Тоді

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{n}D_n < x_p\right\} = 1 - p,$$

а звідси

$$\mathbf{P}\left\{D_n > \frac{x_p}{\sqrt{n}}\right\} = p.$$

Критерій. Якщо $D_n > \dfrac{x_p}{\sqrt{n}}$, то гіпотезу про розподіл відхиляють; в противному разі – залишають.

Знаючи функцію $K(x)$ можна побудувати таблицю значень x_p, якщо буде задано рівень значущості *p*. Для розв'язування навчальних задач досить мати таку таблицю:

p	0.5	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
x_p	0.828	1.224	1.358	1.520	1.627	1.950

Приклад. Досліджується тривалість горіння (в місяцях) електричних лампочок певного типу. Було перевірено 100 лампочок. Отримали ряд:

Варіанти	6	10	12
Частоти	70	20	10

При рівні значущості $p = 0.01$ перевірити гіпотезу про те, що тривалість горіння лампочки має показниковий розподіл, де в якості параметра α візьмемо величину обернену до середньої тривалості горіння

$$\bar{x} = (6 \cdot 70 + 10 \cdot 20 + 12 \cdot 10)/100 = 7.4.$$

Отже,

$$\alpha = \frac{1}{7.4} \approx 0.14.$$

Теоретична функція розподілу в даному випадку така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-0.14x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Статистичний ряд дозволяє знайти значення емпіричної функції розподілу

$$F_{100}^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ 0.7, & 6<x\le 10,\\ 0.9, & 10<x\le 12,\\ 1, & x>12.\end{cases}$$

Значення теоретичної функції розподілу в точках $x=0,6,10,12$:

$$F(0)=0;\ F(6)=0.57;\ F(10)=0.75;\ F(12)=0.81.$$

Ці значення дають можливість знайти

$$D_{100}=\sup_{6\le x\le 12}\left|F_{100}^*(x)-F(x)\right|=0.57.$$

Далі, з наведеної вище таблиці, знаходимо $x_{0.01}=1.627$ і порівнюємо числа $\frac{x_{0.01}}{\sqrt{100}}=0.16$ і $D_{100}=0.57$; $0.57>0.16$, тому гіпотезу про розподіл не можна прийняти.

§7. Регресійний аналіз

Нехай досліджуються випадкові величини і потрібно за результатами їх досліджень встановити між цими величинами залежність. Наприклад, з деяких міркувань відомо, що величина y лінійно залежить від величин $x_1,...,x_k$:

$$y=A_1x_1+A_2x_2+...+A_kx_k.$$

Коефіцієнти $A_1,...,A_k$ невідомі. При різних наборах $(x_{i1},...,x_{ik})$, $i=1,2,...,n$, знайдені значення $y_i=A_0+A_1x_{i1}+...+A_kx_{ik}+S_{ik}$, де S_i – помилка вимірювання y. Потрібно, маючи числа $(y_i,x_{i1},...,x_{ik})$ оцінити коефіцієнти $A_0,A_1,...,A_k$. Такі задачі називаються задачами регресійного аналізу.

Розглянемо найпростіший випадок. Нехай потрібно знайти коефіцієнти лінійної функції $y=ax+b$. Припустимо, що по значенням x, ми можемо знайти значення y з деякою помилкою. Вважатимемо, що у вибірці $(y_1,...,y_n)$ величини y_i подані у вигляді

$$y_i=ax_i+b+S_i, \tag{1}$$

де S_i незалежні випадкові величини з нормальним розподілом і параметрами $(0,\sigma^2)$, числа x_i вважатимемо не випадковими, а їхні значення відомі.

Для оцінки невідомих параметрів a, b, σ^2 можна скористатися методом максимальної вірогідності. Функція вірогідності вибірки $(y_1, ..., y_n)$ має вигляд:

$$L(y, a, b, \sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \right).$$

Звідси отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = 0.$$

Вважаючи, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, знаходимо оцінку

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right), \; b^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, \; (\sigma^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a^* x_i - b^*\right)^2.$$

Замінюючи в цих формулах y_i за формулою (1), отримаємо

$$a^* = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \; b^* = b + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

З цих рівностей випливає, що

$$\mathbf{M} a^* = a, \mathbf{M} b^* = b, \mathbf{D} a^* = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \mathbf{D} b^* = \frac{\sigma^2}{n},$$

тобто оцінки a^*, b^*, незміщені й спроможні.

Такий метод отримання оцінок параметрів називають *методом найменших квадратів*.

§8. Поняття про дисперсійний аналіз

Дисперсійним аналізом називається аналіз результатів вимірювань, які залежать від різних факторів. Розглянемо випадок, коли діє один фактор.

Нехай вибірка розбита на k груп, при цьому i-та група вміщує n_i варіант X_{i1}, X_{i2}, …, X_{in_i}. Вважатимемо, що всі ці варіанти нормально розподілені і $\mathbf{M}X_{ij} = a_i$, $\mathbf{D}X_{ij} = \sigma^2$, $j = 1, 2, ..., s$, $i = 1, 2, ..., k$. Потрібно перевірити гіпотезу

$$a_1 = a_2 = ... = a_k = a .$$

На a_i можна дивитися, як на значення величини a, яка вимірюється k різними приладами з однаковою точністю. Потрібно дати відповідь на питання: чи мають ці прилади систематичні помилки? Вивчається вплив одного фактора (приладу) на похибки вимірювання.

Позначимо через

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} , \ \overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} , \ n = n_1 + ... + n_k .$$

Числа $\overline{X}_i$ називаються *груповими середніми*.

Якщо всі a_i однакові, то загальне середнє $\overline{X}$ не повинне суттєво відрізнятися від групових.

Нехай, далі,

$$Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}\right)^2 = Q_1 + Q_2 ,$$

де

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2 , \ Q_2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2 ,$$

бо

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right) = 0 .$$

Величина Q_1 називається *сумою квадратів відхилень між групами*, а Q_2 – *сума квадратів відхилень всередині групи*.

Величина

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2$$

має розподіл χ^2 з $n_i - 1$ степенями свободи, отже, Q_2/σ^2 матиме розподіл χ^2 з $(n_1-1)+...+(n_k-1)=n-k$ степенями свободи, якщо $a_1 = a_2 = ... = a_k = a$, то величина Q_1/σ^2 має розподіл χ^2 з $k-1$ степенем свободи.

Далі розглядається величина

$$F_{k-1,n-k} = \frac{Q_1/(k-1)}{Q_2/(n-k)},$$

розподіл якої це, так званий, розподіл Фішера з $(k-1, n-k)$ степенями свободи, а тому величина $F_{k-1,n-k}$ може бути використана для перевірки гіпотези про те, що

$$a_1 = a_2 = ... = a_k = a.$$

Статистичний критерій формулюється так. Якщо $F_{k-1,n-k} > C$, то гіпотеза відхиляється при заданому рівні значимості; сталу C визначають за допомогою таблиць розподілу Фішера.

Вправи

Використовуючи вибірки, наведені далі, виконати такі завдання:
1) скласти варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний ряд;
3) побудувати полігон частот і гістограму;
4) знайти числові характеристики варіаційного ряду: середнє арифметичне, моду, медіану, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

1. 65 71 67 73 68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72 65 71 70 69 69 76 71 63 77 75 70 74 65 71 68 74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67 67 74 68 74 60 70 66 70 68 64 75 78 71 70 69 73 75 74 72 80 72 69 69 71 76 68 69 75 69 73 .

2. 135 133 124 132 104 152 134 130 129 120 122 124 117 123 129 121 122 125 131 147 124 137 112 131 126 128 11 129 115 147 131 132 137 119 125 120 129 125 123 127 132 118 133 133 135 135 131 125 135 132 125 132 120 126 115 117 118 118 132 134

3. 95 96 103 89 72 105 85 85 91 101 82 91 80 85 85 91 87 101 94 98 85 82 94 86 72 89 83 100 86 85 95 95 83 87 94 93 88 77 92 103 85 90 83 86 104 85 85 80 95 91 93 95 111 95 94 94 87 89 88 87 86 89 95 93 92 88 98 102 105 99 87 89 96 94 93 87 88 86 86 90 93 93 97 98 87 105 109 109.

4. Використайте довільні статистичні дані, які можна знайти в різноманітних довідниках, таблицях; проведіть власні вимірювання, наприклад, ваги, росту, успішності учнів вашого класу.

Використовуючи вибірки, наведені далі, виконати такі завдання:
1) побудувати інтервальний статистичний ряд;
2) побудувати гістограму;
3) знайти середнє арифметичне значення вибірки;
4) знайти середнє квадратичне вибірки;
5) знайти моду і медіану вибірки.

5. 3.78 1.39 8.07 8.35 4.92 7.39 11.11 14.63 4.59 11.90 6.10 10.55 3.10 2.9 6.64 14.63 4.59 11.90 6.10 10.55 3.10 2.97 6.64 14.63 4.59 11.90 6.10 10.55 3.10 2.97 6.64 14.63 4.59 11.90 6.10 10.55 3.10 2.97 6.64

15.95 11.76 8.51 6.44 0.81 8.64 11.30 0.43 15.95 11.76

6. 4.30 4.65 4.39 5.12 5.15 4.78 5.04 5.44 5.01 5.49 4.81 5.02 4.97 5.23 4.99 5.28 5.01 5.49 4.81 5.02 4.97 5.23 4.99 5.28 5.01 5.49 4.81 5.02 4.97 5.23 4.99 5.28 5.01 5.49 4.81 5.02 4.97 5.23 4.99 5.28 4.55 4.38 5.07 4.43 5.17 4.56 5.26 5.22 4.55 4.38

7. 1.60 2.30 1.79 3.23 3.29 2.55 3.08 3.89 3.99 3.25 2.00 4.15 4.52 4.18 2.83 3.14 4.31 2.28 2.51 1.73 3.70 2.86 3.37 3.03 4.31 2.28 2.51 1.73 3.70 2.86 3.37 3.03 4.31 2.28 2.51 1.73 3.70 2.86 3.37 3.03 4.31 2.28 2.51 1.73 3.70 2.86 3.37 3.03 4.31 2.28

8. 3.50 5.26 3.97 7.58 7.73 5.88 7.21 9.22 6.26 7.77 8.64 7.06 10.51 5.29 5.27 4.65 6.26 7.77 8.64 7.06 10.51 5.29 5.27 4.65 8.55 10.89 7.62 6.15 8.26 4.63 5.86 7.57 8.55 10.89 7.62 6.15 8.26 4.63 5.86 7.57 8.55 10.89 7.62 6.15 8.26 4.63 5.86 7.57 8.55 10.89

9. 4.74 7.39 5.45 10.87 11.10 8.31 10.31 13.33 4.80 5.30 0.97 6.56 9.27 9.56 12.99 8.07 4.80 5.30 0.97 6.56 9.27 9.56 12.99 8.07 12.85 10.09 7.96 9.94 10.53 8.55 9.14 12.49 10.09 7.96 9.94 10.53 8.55 9.14 12.49 12.85 10.09 7.96 9.94 10.53 8.55 9.14 12.49 12.85 10.09

10. –0.01 3.51 0.93 8.15 8.46 4.75 7.42 11.44 5.30 –1.31 15.76 4.04 3.56 3.41 –1.01 –1.12 5.30 –1.31 15.76 4.04 3.56 3.41 –1.01 –1.12 –2.33 –1.17 7.76 8.58 5.21 8.42 12.53 4.45 –2.33 –1.17 7.76 8.58 5.21 8.42 12.53 4.45 – 2.33 –1.17 7.76 8.58 5.21 8.42 12.53 4.45 –2.33 –1.17

11. 5.60 6.30 5.79 7.23 7.29 6.55 7.08 7.89 6.40 5.62 6.43 7.31 6.86 6.27 7.44 7.20 6.40 5.62 6.43 7.31 6.86 6.27 7.44 7.20 6.74 5.89 6.95 7.38 7.26 7.48 6.71 7.09 6.74 5.89 6.95 7.38 7.26 7.48 6.71 7.09 6.74 5.89 6.95 7.38 7.26 7.48 6.71 7.09 6.74 5.89

12. 1.25 2.13 1.48 3.29 3.37 2.44 3.10 4.11 3.07 1.47 2.45 2.58 3.56 2.79 2.69 3.79 1.90 3.40 4.66 2.68 4.05 2.71 3.37 3.65 1.90 3.40 4.66 2.68 4.05 2.71 3.37 3.65 1.90 3.40 4.66 2.68 4.05 2.71 3.37 3.65 1.90 3.40 4.66 2.68 4.05 2.71 3.37 3.65 4.60 3.44

13. 0.85 2.43 1.27 4.52 4.66 2.99 4.19 6.00 0.17 5.13 5.41 6.59 4.23 4.30 2.32 2.07 0.17 5.13 5.41 6.59 4.23 4.30 2.32 2.07 0.84 2.92 3.73 6.75 2.28 4.15 3.53 4.67 0.84 2.92 3.73 6.75 2.28 4.15 3.53 4.67 0.84 2.92 3.73 6.75 2.28 4.15 3.53 4.67 0.84 2.92

14. 0.95 1.48 1.09 2.17 2.22 1.66 2.06 2.67 2.93 2.48 2.95 1.42 1.25 1.92 2.22 3.00 2.93 2.48 2.95 1.42 1.25 1.92 2.22 3.00 2.93 2.48 2.95 1.42 1.25 1.92 2.22 3.00 1.73 2.50 1.71 3.03 2.45 1.72 2.40 2.93 1.73 2.50 1.71 3.03 2.45 1.72 2.40 2.93 1.73 2.50

15. 2.13 1.48 3.29 3.37 2.44 3.10 4.11 1.69 2.78 2.53 1.61 1.44 3.33 3.41 4.12 1.69 2.78 2.53 1.61 1.44 3.33 3.41 4.12 2.10 3.14 3.19 3.27 1.92 1.68 2.50 3.98 2.10 3.14 3.19 3.27 1.92 1.68 2.50 3.98 2.10 3.14 3.19 3.27 1.92 1.68 2.50 3.98 2.10 3.14

16. Розглянемо дві вибірки об'ємів n_1 і n_2 розподілу з середнім m і дисперсією σ^2. Нехай $\overline{X}_1, \overline{X}_2, S_1^2, S_2^2$ – незміщені оцінки середніх і дисперсій, які визначені по цим вибіркам. Показати, що оцінки
$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2},\quad S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$
будуть незміщеними і спроможними оцінками m і σ^2.

17. Випадкова величина X має щільність
$$f_X(x) = \begin{cases} kx, \text{ при } x \in [0, \sqrt{2/k}], \\ 0, \quad \text{при } x \notin [0, \sqrt{2/k}]. \end{cases}$$
Знайти методом максимальної вірогідності оцінку математичного сподівання X по вибірці об'ємом n.

18. Прилад відмовив при k-ому випробуванні. Знайти методом максимальної вірогідності оцінку ймовірності відмови p при одному випробуванні і обчислити її математичне сподівання.

19. Випадкова величина має нормальний розподіл з параметром $\sigma = 2$. Зроблена вибірка об'ємом $n = 25$. Знайти з надійністю $\gamma = 0.95$ інтервал надійності для невідомого параметру a цього розподілу.

20. Випадкова величина має нормальний розподіл з невідомими параметрами a і σ. Зроблена вибірка об'ємом n=25, для якої середнє арифметичне дорівнює 12.7, а емпірична дисперсія дорівнює 0.25. Знайти з надійністю $\gamma = 0.95$ інтервал надійності для невідомого параметру a цього розподілу.

21. Знайти 90% і 99% інтервали надійності для математичного сподівання часу безвідмовної роботи приладу, якщо середнє арифметичне дорівнює 500 год, емпірична дисперсія дорівнює 10 год^2, а об'єм вибірки дорівнює 100.

22. Знайти 90% і 99% інтервали надійності для математичного сподівання діаметра вала, якщо середнє арифметичне дорівнює 30 мм, емпірична дисперсія дорівнює 9 мм^2, а об'єм вибірки дорівнює 9.

23. Знайти 90% і 99% інтервали надійності для математичного сподівання вмісту вуглецю в одиниці продукту, якщо середнє арифметичне дорівнює 18 г, емпірична дисперсія дорівнює 16 г^2, а об'єм вибірки дорівнює 25.

24. Подія A в серії з 100 дослідів відбулася 78 разів. Знайти 90% інтервал надійності для ймовірності події A.

25. Подія A в серії з 200 дослідів відбулася 70 разів. Знайти 85% інтервал надійності для ймовірності події A.

26. Гральний кубик підкидається 120 разів. 6 вічок випало 40 разів. Чи узгоджується цей результат з твердженням, що кубик правильний?

27. На екзамені студент відповідає тільки на одне питання з курсу. Аналіз питань, які були задані 60 студентам, показав, що 23 студенти отримали питання з 1-ої частини курсу, 15 – з 2-ї і 22 – з 3-ої.

    Чи можна вважати, що студент, який іде на екзамен, отримає питання з любої з трьох частин курсу?

28. Один з методів генерування випадкових цифр дав 250 цифр, при цьому отримали такі результати:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	27	18	23	31	21	23	28	25	22	32

Чи можна вважати, що цей метод генерування справді дає випадкові числа? Прийняти рівень значущості 0.1.

29. В цеху з 10 станками щоденно реєструється число станків, які вийшли з ладу. Всього проведено 200 спостережень, результати яких наведені нижче:

число станків	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
число випадків	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Чи можна вважати, що число станків, які виходять з ладу має розподіл Пуассона? Прийняти рівень значущості 0.05.

30. При дослідженні росту (в см) 1004 дівчат у віці 16 років були отримані такі результати:

класові інтервали	134–137	137–140	140–143	143–146
частоти	1	4	16	53
класові інтервали	146–149	149–152	152–155	155–158
частоти	121	197	229	186

класові інтервали	158–161	161–164	164–167	167–170	170–173
частоти	121	63	17	5	1

Чи можна вважати, що ріст дівчат має нормальний розподіл? Прийняти рівень значущості 10%.

31. Знайти оцінки параметрів лінійної регресії по вибірці (9; 6), (10; 4), (12; 7), (5; 3). Нанести пряму регресії на діаграму розсіювання.

32. Залежність між змінними x і y має вигляд $y = a + bx + cx^2$. Знайти оцінки параметрів по вибірці:

x	0	2	4	6	8	10
y	5	–1	–0.5	1.5	4.5	8.5

33. Залежність між змінними x і y має вигляд $y = a + bx + cx^2$. Знайти оцінки параметрів по вибірці:

x	–2	–1	0	1	2
y	4.8	0.4	–3.4	0.8	3.2

34. Залежність між змінними x і y має вигляд $y = a + b/x$. Знайти оцінки параметрів по вибірці:

x	2	4	6	12
y	8	5.25	3.50	3.25

35. Потрібно перевірити гіпотезу про рівність середніх. Якщо гіпотеза приймається, то знайти незміщені оцінки середнього і дисперсії. Якщо гіпотеза відхиляється, то провести попарне порівняння середніх. Вважати, що вибірка отримана з нормально розподілених сукупностей з рівними дисперсіями. $\alpha = 0.05$.

вибірка №1	вибірка №2	вибірка №3
6	14	12
5	11	4
12	5	7
9	6	

10		

36. Потрібно перевірити гіпотезу про рівність середніх. Якщо гіпотеза приймається, то знайти незміщені оцінки середнього і дисперсії. Якщо гіпотеза відхиляється, то провести попарне порівняння середніх. Вважати, що вибірка отримана з нормально розподілених сукупностей з рівними дисперсіями. $\alpha = 0.1$.

вибірка №1	вибірка №2	вибірка №3
4	6	8
2	5	9
3	4	10
4	7	7
5	6	8
3	8	6

Відповіді

17. $2/3\max(x_1,\ldots,x_n)$; **18.** $1/k$; **19.** $[\overline{X} - 0.784, \overline{X} + 0.784]$; **20.** [12.5, 12.9]; **21.** [498.35, 501.64]; [497.42, 502.58]; **22.** [28.14, 31.86]; [26.64, 33.36]; **23.** [16.63, 19.37]; [15.76, 20.24]; **24.** [0.705, 0.840]; **25.** [0.302, 0.398]; **26.** Ні; **27.** Так; **28.** Так; **30.** Ні; **31.** $y = 0{,}5 + 0{,}5x$; **32.** $y = 3.995 - 2.163x + 0.268x^2$; **33.** $y = -1.93 - 0.28x + 1.54x^2$; **34.** $y = 2 + 12/x$; **35.** F=0.115, гіпотеза приймається, m=8.42, s^2=13.32; **36.** F=17.94, гіпотеза відхиляється, $m_1 \neq m_2$, $m_1 \neq m_3$, $m_2 = m_3$.

Розподіл Пуассона

Значення функції $p_k(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Таблиця 1

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	1,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Нормальний розподіл

Значення функції $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Таблиця 2

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	398	438	478	517	557	596	031 i	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	289	315	310	365	389
1,0	413	437	461	485	508	53I	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	861	864	868	871	875	878	881	884	887	890
2,3	893	896	898	901	904	906	909	911	913	916
2,4	918	920	922	925	927	929	931	932	934	936
2,5	938	940	941	943	945	946	948	949	951	952
2,6	953	955	956	957	959	960	961	962	963	964
2,7	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974
2,8	974	975	976	977	977	978	979	979	980	981
2,9	981	982	982	983	984	984	985	985	985	986
3,0	987	987	987	988	988	989	989	989	990	990

Розподіл Стьюдента

Значення функції $t_{\alpha,n}$

Функція $t_{\alpha,n}$ визначається рівністю $\mathbf{P}\left(\left|\tau_n\right| < t_{\alpha,n}\right) = 1 - 2\alpha$, де випадкова величина τ_n має розподіл Стьюдента з n степенями свободи. Щільність розподілу τ_n дорівнює

$$f_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Таблиця 3

n \ 2α	0,10	0,05	0,02	0,01
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Розподіл χ^2

Значення функції $\chi^2_{\alpha,m}$

Функція $\chi^2_{\alpha,m}$ визначається рівністю $\mathbf{P}\left(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha,m}\right) = \alpha$, де випадкова величина χ^2_m має розподіл χ^2 з m степенями свободи. Щільність розподілу χ^2_m дорівнює

$$h_{\chi^2_m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2},\ x > 0.$$

Таблиця 4

m \ α	0,99	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005
1	0,00016	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9
2	0,020	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6
3	0,115	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8
4	0,30	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9
5	0,55	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3
6	0,87	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6
7	1,24	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3
8	1,65	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9
9	2,09	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6
10	2,56	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2
11	3,1	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8
12	3,6	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3
13	4,1	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8
14	4,7	21,1	23,7	26,9	29,1	31
15	5,2	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5
16	5,8	23,5	26,3	29,6	32,0	34
17	6,4	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5
18	7,0	26,0	28,9	32,3	34,8	37
19	7,6	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5
20	8,3	28,4	31,4	35,0	37,6	40
21	8,9	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5
22	9,5	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5
23	10,2	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0
24	10,9	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5
25	11,5	34,4	37,7	41,6	44,3	47

F-розподіл

Значення функції $F_{\alpha;\, n_1,\, n_2}$

Функція $F_{\alpha;\, n_1,\, n_2}$ визначається рівністю $\mathbf{P}\left\{F_{n_1,\, n_2} > F_{\alpha;\, n_1,\, n_2}\right\} = \alpha$, де випадкова величина $F_{n_1,\, n_2}$ має F-розподіл з n_1 і n_2 степенями свободи. Щільність розподілу $F_{n_1,\, n_2}$ дорівнює

$$\psi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} x^{n_1/2-1}\left(n_2 + n_1 x\right)^{-(n_1+n_2)/2},\ x > 0.$$

$$\alpha = 0.5$$

Таблиця 5

n_2 \ n_1	10	20	30	40	50	100	∞
10	2,97	2,77	2,70	2,67	2,64	2,59	2,54
15	2,55	2,33	2,25	2,21	2,18	2,12	2,07
20	2,35	2,12	2,04	1,99	1,96	1,90	1,84
30	2,16	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
40	2,07	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
50	2,02	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
100	1,92	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
∞	1,83	1,57	1,46	1,40	1,35	1,24	1,00

Література

1. Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.:Наука.,1986. – 176 с.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 527 с., Т. 2. – 751 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика; под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428с.
8. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

Зміст

Навчальне видання

ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

Навчальний посібник

Автори:
Волков Юрій Іванович,
Войналович Наталія Михайлівна

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ’ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВНИЦТВ,
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія АОО №745736 від 29.06.2006 р.

Підп. до друку 28.11.2008 р. Формат 60×84$^1/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф.

Ум. др. арк. 10. Тираж 120. Зам. №745.