УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ДВІЙКОВИМИ ЦИФРАМИ

О.П.Макарчук

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых величина $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty}\sup|f_\psi(t)|$ ($f_\psi(t)$ – характеристическая функция ψ) равна 1, для случайной величины ψ представленной двоичной дробью с независимыми цифрами.

In this paper found necessary and sufficient conditions under which the value $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty}\sup|f_\psi(t)|$ ($f_\psi(t)$ – characteristic function of ψ) is equal 1, for the random variable ψ with independent binary digits .

1.Вступ

Нехай ψ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно. Випадкова величина $\psi = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{2^k}$ називається випадковою величиною ψ з незалежними двійковими цифрами.

За теоремою Джессена-Вінтнера [6] випадкова величина ψ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний. За теоремою П.Леві [7] розподіл ψ дискретний тоді і тільки тоді коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0 .$$

Характеристичною функцією випадкової величини ξ називається комплекснозначна функція $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$, де $M(\cdot)$ – математичне сподівання.

Розглянемо величину $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty}\sup|f_\psi(t)|$.

Теорема 1.[1]. *Якщо розподіл випадкової величини* ξ

1) дискретний, то $L_\xi = 1$*;*

2) абсолютно неперервний, то $L_\xi = 0$ *;*

3) сингулярний, то L_ξ *може набувати довільного значення з відрізку* $[0;1]$.

В роботі [5] Жиро навів приклад сингулярного розподілу ξ , для якого $L_\xi = 0$.

Приклад характеристичної функції сингулярного розподілу ξ, для якого $L_\xi = 1$ наведено Єссеєном в [4] .Сингулярні розподіли ξ, для яких L_ξ набуває заданого значення з відрізку $[0;1]$ побудовані Шварцем [8].

В роботі [3] показано, що $L_\psi = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}$.

Потрібно відмітити, що питання знаходження необхідних та достатніх умов рівності $L_\psi = 1$ в [3] не піднімалось.

2.Асимптотичні властивості модуля характеристичної функції випадкової величини ψ.

Теорема 2. *Для виконання рівності* $L_\psi = 1$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\varliminf_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = 0.$$

Доведення.

Необхідність.

Позначимо $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\psi_k}{2^k}$, тоді послідовність випадкових величин S_n з ймовірністю 1 збігається до ψ, тоді S_n збігається за розподілом до ψ.

За теоремою П.Леві про неперервну відповідність характеристичних функцій:

$$f_{S_n}(t) \to f_\psi(t), (n \to \infty) \forall t \in R.$$

Маємо:

$$f_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{\frac{\psi_k}{2^k}}(t)=\prod_{k=1}^{n}(p_{0n}+p_{1n}e^{\frac{it}{2^k}})$$

$$f_{\psi}(t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(p_{0n}+p_{1n}e^{\frac{it}{2^k}})$$

Оскільки $|\, p_{0n}+p_{1n}e^{\frac{it}{2^n}}\,|=\sqrt{1-4p_{0n}p_{1n}\sin^2\frac{t}{2^{n+1}}}$, то

$$|\, f_{\psi}(t)\,|^2=\prod_{k=1}^{\infty}(1-4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2^{k+1}})$$

Нехай $L_{\psi}=1$, тоді існує зростаюча необмежена послідовність додатних чисел t_n, для якої $\lim_{n\to\infty}|\, f_{\psi}(t_n)\,|=1$, бо $|\, f_{\psi}(-t)\,|=|\, f_{\psi}(t)\,|$ для кожного дійсного t.

Нехай $m_n=[\log_2\frac{t_n}{\pi}]$, тоді $2\pi=\frac{t_n}{2^{\log_2\frac{t_n}{\pi}-1}}>\frac{t_n}{2^{m_n}}\geq\frac{t_n}{2^{\log_2\frac{t_n}{\pi}}}=\pi$.

Маємо:

$$|\, f_{\psi}(t_n)\,|^2=\prod_{k=1}^{\infty}(1-4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t_n}{2^{k+1}})\leq\prod_{j=m_n}^{\infty}(1-4p_{0j}p_{1j}\sin^2\frac{t_n}{2^{j+1}})\leq$$
$$\leq\prod_{j=0}^{\infty}(1-4p_{0(m_n+j)}p_{1(m_n+j)}\sin^2\frac{\pi}{2^{j+1}})$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}|\, f_{\psi}(t_n)\,|=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{\infty}(1-4p_{0(m_n+j)}p_{1(m_n+j)}\sin^2\frac{\pi}{2^{j+1}})=1.$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{\infty}\ln(1-4p_{0(m_n+j)}p_{1(m_n+j)}\sin^2\frac{\pi}{2^{j+1}})=0.$$

Оскільки $\ln(z+1)\leq z$, для $z\in(-1;\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{0(m_n+j)}p_{1(m_n+j)}\sin^2\frac{\pi}{2^{j+1}}=0.$$

що і потрібно довести.

Достатність.

Зрозуміло, що існує зростаюча послідовність натуральних чисел $n_1<n_2<...<n_k<...$ така, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} < \frac{1}{k}, \forall k \in N$$

Оскільки $\sin^2 \dfrac{\pi}{2^j} = 4\sin^2 \dfrac{\pi}{2^{j+1}} \cos^2 \dfrac{\pi}{2^{j+1}} \le 4\sin^2 \dfrac{\pi}{2^{j+1}}, \forall j \in Z_+$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j} \le 4\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} < \frac{4}{k}, \forall k \in N$$

Розглянемо послідовність $b_k = \pi 2^{n_k}$, тоді

$$| f_\psi (b_k)|^2 = \prod_{j=1}^{n_k-1} (1-4p_{0j}p_{1j} \sin^2 \frac{\pi 2^{n_k}}{2^{j+1}}) \prod_{j=n_k}^{\infty} (1-4p_{0j}p_{1j} \sin^2 \frac{\pi 2^{n_k}}{2^{j+1}}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} (1-4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}).$$

Відомо, що $\prod\limits_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) \ge 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, при $\alpha_j \in [-1;0], \forall j \in \{1,2,...,n\}$

Для кожного натурального r маємо

$$\prod_{j=1}^{r} (1-4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j}) \ge 1 - \sum_{j=1}^{r} 4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j} > 1 - \frac{16}{k}, \forall k \in N$$

Отже,

$$| f_\psi (b_k)|^2 = \prod_{j=1}^{\infty} (1-4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}) > 1 - \frac{16}{k}, \forall k \in N$$

$$| f_\psi (b_k)| \to 1 (k \to \infty)$$

Звідки $L_\psi = 1$.

Відмітимо, що з виконання умови теореми не випливає рівності

$$\lim_{k\to\infty} \max\{p_{0k}; p_{1k}\} = 1$$

Розглянемо послідовність $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, ÿêù\ î\ \sqrt{n} \in N \\ \dfrac{1}{n^2}, ÿêù\ î\ \sqrt{n} \notin N \end{cases}$

Нехай $p_{0n} = \dfrac{1+\sqrt{1-4a_n}}{2}$, тоді $p_{0n}p_{1n} = a_n$.

Маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(l^2+j)} p_{1(l^2+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{l^2+j} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \le \sum_{j=1}^{2l} \frac{1}{(l^2+j)^2} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} + \frac{1}{4} \sum_{j=2l+1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \to 0(l \to \infty)$$

З іншого боку, послідовність a_n не прямує до 0 при $n \to \infty$, тому умова

$\lim\limits_{k\to\infty} \max\{p_{0k}; p_{1k}\} = 1$ не виконується.

Маємо наступний важливий наслідок.

Теорема 3. *Для випадкової величини ψ з незалежними двійковими цифрами величина L_ψ*

1) дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}.$$

2)належить відрізку $(0;1)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(p_{0k} - \frac{1}{2})^2 > 0; \\ \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} > 0 \end{cases}$$

3) дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = 0.$$

ПОСИЛАННЯ

[1] Лукач Е. *Характеристические функции* . М.: Наука ,,1979. 424с.

[2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. 296с.

[3] Albeverio ,S.,Goncharenko. Y.,Pratsiovyti, M .,Torbin, G., (2007).Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.//*Random Oper.Stochastic Equations,* .15,№1. P.89-97.

[4] Esseen C. Fourier analysis of distribution functions.–. Acta mathematica. 1945. 77 P.1-125.

[5] Girault.M Les fonctions caracteristiques et leurs transformations. Publ.Inst.Statis.Univ, Paris, 1954. 4. P.223-239.

[6] Jessen ,B., Wintner, A. (1935).Distribution function and Riemann Zeta-function, Trans. Amer. Math. Soc.38, 48-88.

[7] Lvy,P.(1931). Sur les sries don't les termes sont des variables independantes, Studia math. 3.,119-155.

[8] Schwartz L. Ser le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilites. C.R.Acad.Sci., Paris, 1941. .212. . P.418-421.